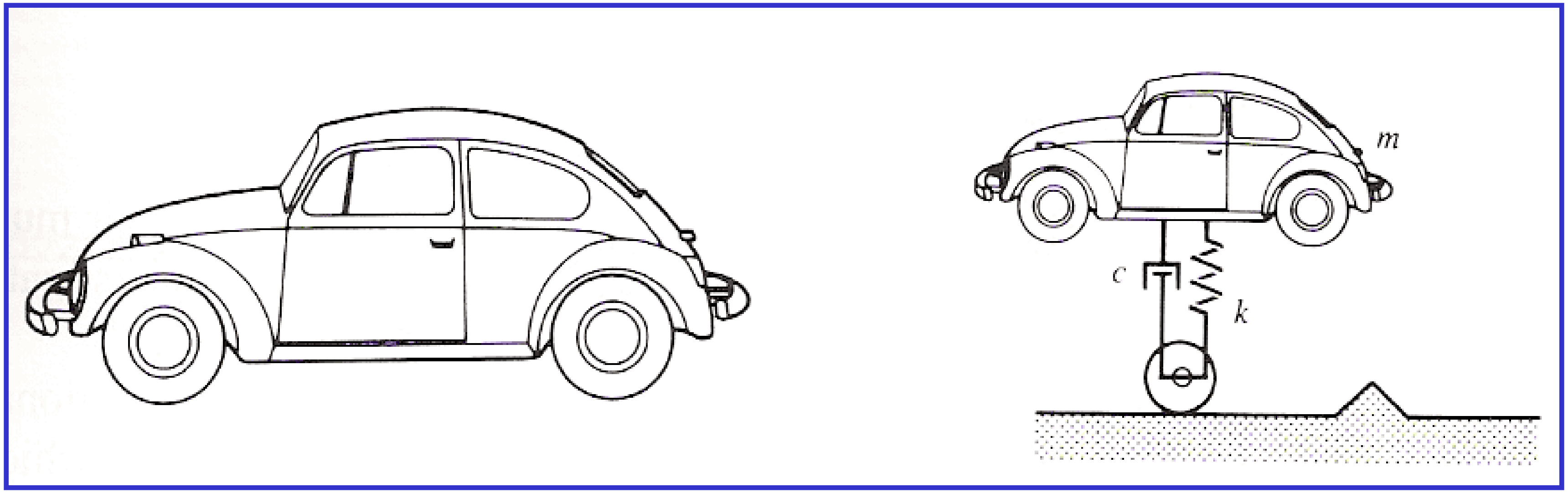
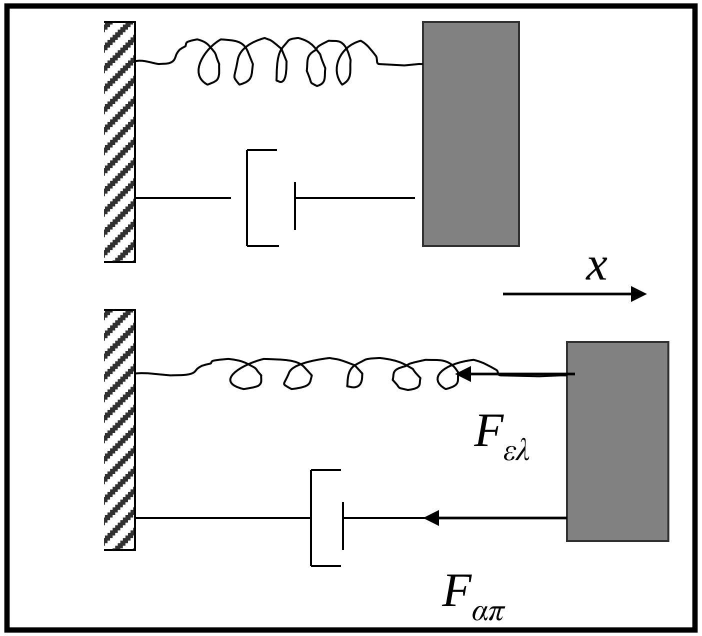
1.5 Ελεύθερη ταλάντωση με απόσβεση

1.5.1 Μεταφορική ταλάντωση





Διαφορική Εξίσωση Κίνησης

$$ma = F_{o\lambda} \Rightarrow m\ddot{x} = -F_{\varepsilon\lambda} - F_{\alpha\pi} \Rightarrow m\ddot{x} = -kx - cv \Rightarrow$$

$$\boxed{m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0}$$

Αν θέσουμε

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \qquad 2\zeta\omega_0 = \frac{c}{m}$$

τότε

$$\boxed{\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

Το μέγεθος ζ λέγεται μέτρο απόσβεσης ή λόγος απόσβεσης. Ισχύει

$$\boxed{\zeta = \frac{c}{2m\omega_0} = \frac{c}{2\sqrt{mk}}}$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1.5.1.1 Υποκρίσιμη απόσβεση ($0 \leq \zeta < 1$)

Η λύση στην περίπτωση αυτή η απόκριση του συστήματος είναι

$$\boxed{x(t) = Ae^{-\delta t}\cos(\omega_d t - \theta)}$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0 + \delta \cdot x_0}{\omega_d}\right)^2} \qquad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_0 + \delta \cdot x_0}{x_0 \omega_d}\right)$$

Η συχνότητα της ταλάντωσης

(συχνότητα απόσβεσης) είναι

$$\omega_d = \omega_0\sqrt{1 - \zeta^2}$$

Η περίοδος της ταλάντωσης είναι

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d}$$

Το πλάτος της ταλάντωσης είναι

$$D(t) = Ae^{-\delta t}$$

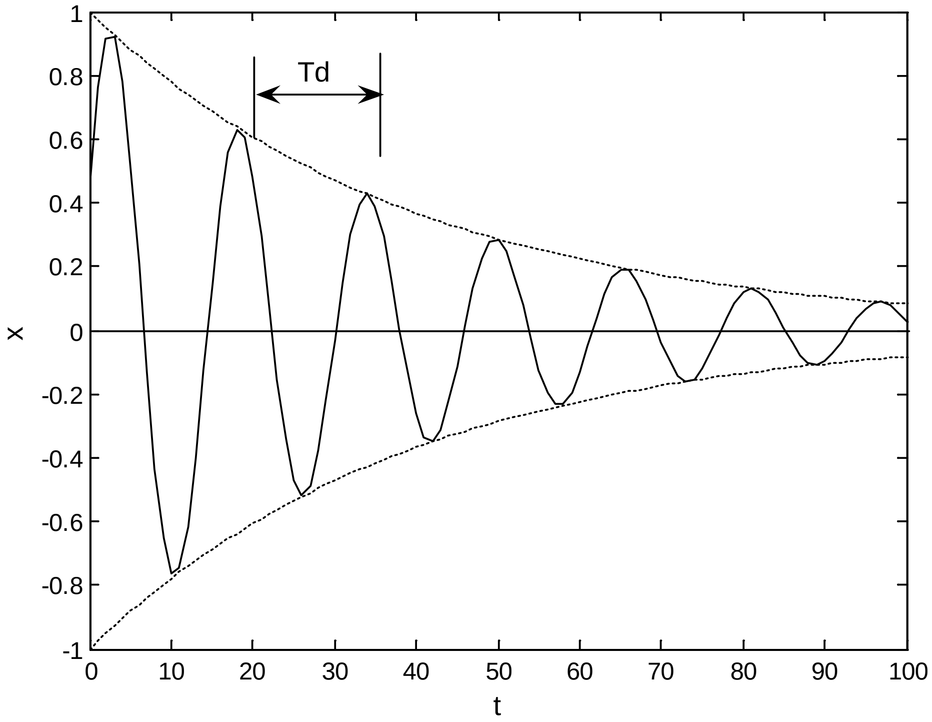
Η ποσότητα

$$\delta = \zeta\omega_0 = \frac{c}{2m}$$

λέγεται εκθέτης απόσβεσης

Γραφική παράσταση της μετατόπισης $x(t)$ σε σχέση με το χρόνο

Παρατηρείται μείωση του πλάτους της ταλάντωσης, ενώ η περίοδος (ο χρόνος μεταξύ δύο μεγίστων ή ελαχίστων) παραμένει σταθερή.



Η λογαριθμική μείωση της ταλάντωσης ορίζεται από τις σχέσεις

$$\boxed{\Lambda = \ln \frac{x(t)}{x(t+T_d)}}$$

ή

$$\boxed{\Lambda = \frac{1}{n} \ln \frac{x(t)}{x(t+nT_d)}} \qquad n = 1,2 ,..$$

Αποδεικνύεται ότι $\Lambda = \delta T_d$