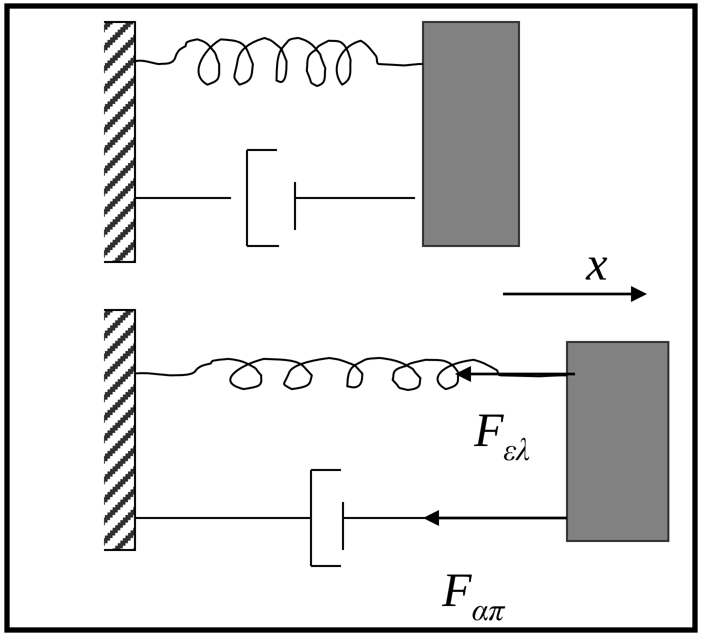


Διαφορική Εξίσωση Κίνησης

$$ma = F_{o\lambda} \Rightarrow m\ddot{x} = -F_{\varepsilon\lambda} - F_{\alpha\pi} \Rightarrow m\ddot{x} = -kx - cv \Rightarrow$$

$$\boxed{m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0}$$

Αν θέσουμε

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \qquad 2\zeta\omega_0 = \frac{c}{m}$$

τότε

$$\boxed{\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

Το μέγεθος ζ λέγεται μέτρο απόσβεσης ή λόγος απόσβεσης. Ισχύει

$$\boxed{\zeta = \frac{c}{2m\omega_0} = \frac{c}{2\sqrt{mk}}}$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1.5.1.1 Υποκρίσιμη απόσβεση $(0 \le \zeta < 1)$

Η λύση στην περίπτωση αυτή η απόκριση του συστήματος είναι

$$\boxed{x(t) = Ae^{-\delta t}\cos(\omega_d t - \theta)}$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0 + \delta \cdot x_0}{\omega_d}\right)^2} \qquad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_0 + \delta \cdot x_0}{x_0 \omega_d}\right)$$

Η συχνότητα της ταλάντωσης

(συχνότητα απόσβεσης) είναι

$$\omega_d = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$$

Η περίοδος της ταλάντωσης είναι

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d}$$

Το πλάτος της ταλάντωσης είναι

$$D(t) = Ae^{-\delta t}$$

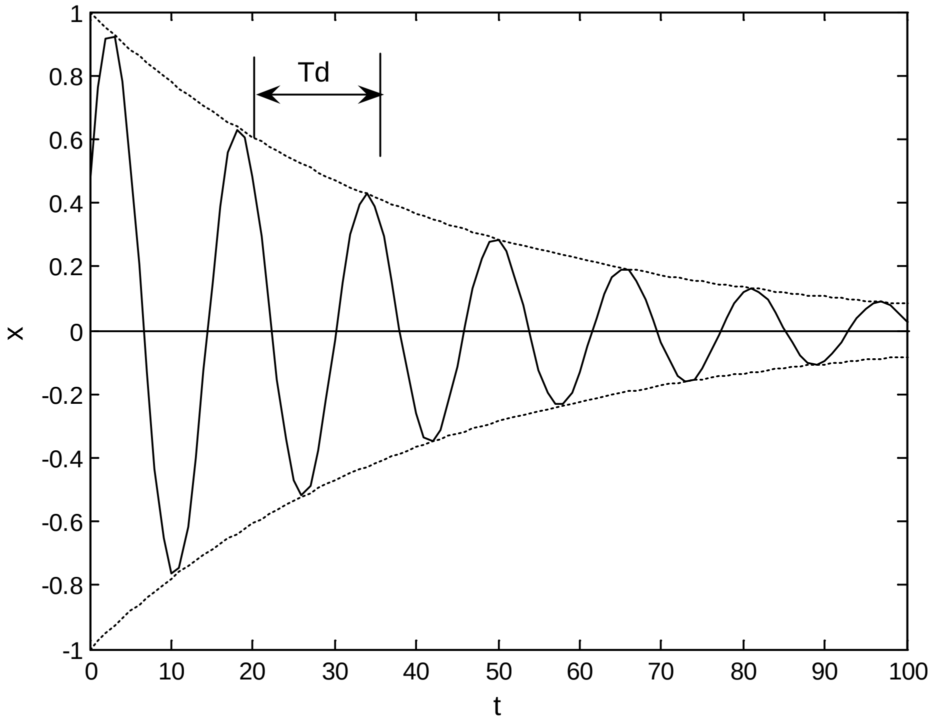
Η ποσότητα

$$\delta = \zeta\omega_0 = \frac{c}{2m}$$

λέγεται εκθέτης απόσβεσης

Γραφική παράσταση της μετατόπισης $x(t)$ σε σχέση με το χρόνο

Παρατηρείται μείωση του πλάτους της ταλάντωσης, ενώ η περίοδος (ο χρόνος μεταξύ δύο μεγίστων ή ελαχίστων) παραμένει σταθερή.



Η λογαριθμική μείωση της ταλάντωσης ορίζεται από τις σχέσεις

$$\boxed{\Lambda = \ln \frac{x(t)}{x(t+T_d)}}$$

ή

$$\boxed{\Lambda = \frac{1}{n} \ln \frac{x(t)}{x(t+nT_d)}} \qquad n = 1,2\ ,..$$

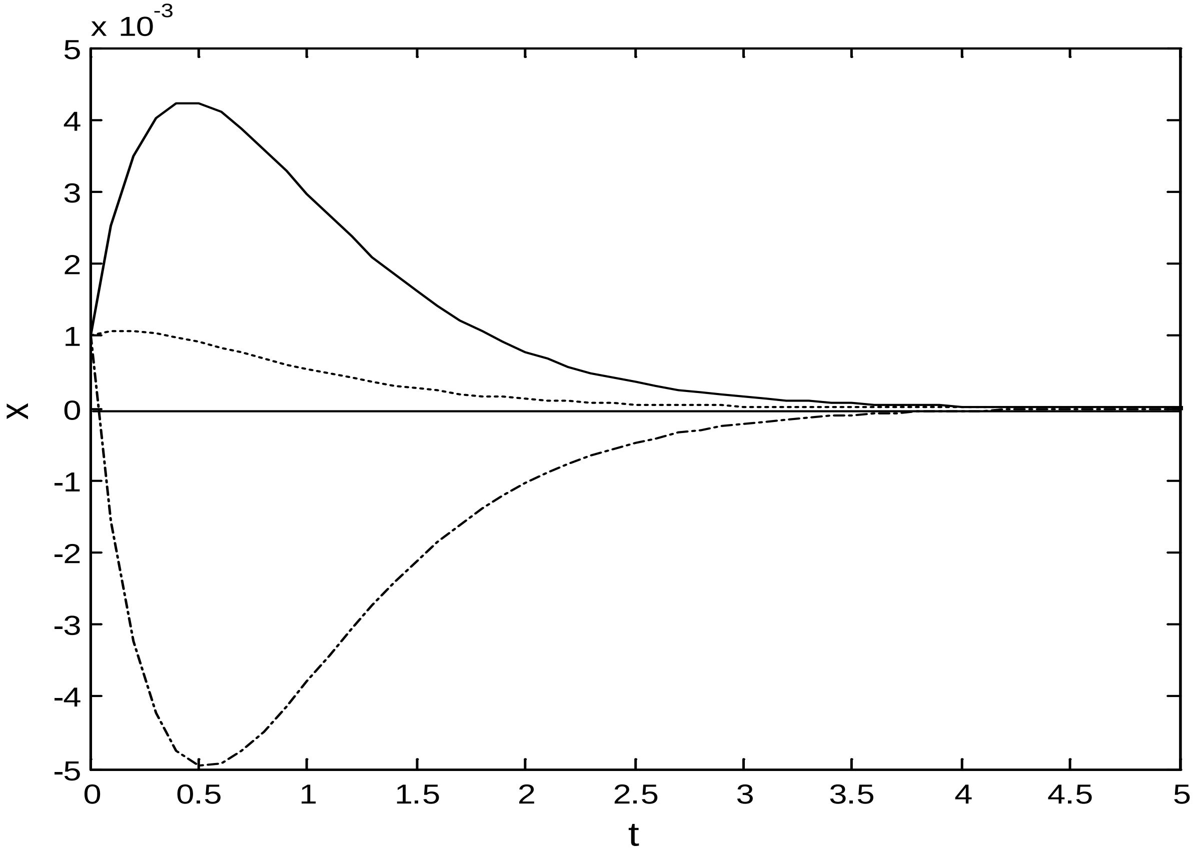
Αποδεικνύεται ότι $\Lambda = \delta T_d$

1.5.1.2 Κρίσιμη απόσβεση (ζ=1)

Η λύση στην περίπτωση αυτή η απόκριση είναι

$$\boxed{x(t) = e^{-\omega_0 t}\left[x_0 + \left(v_0 + \omega_0 x_0\right)t\right]}$$

Η γραφική παράσταση της για αρχική μετατόπιση x_0 και διάφορες τιμές της αρχικής ταχύτητας δείχνεται στο σχήμα. Παρατηρούμε ότι η μετατόπιση (απόκριση) του συστήματος φθίνει εκθετικά χωρίς ταλαντώσεις.



1.5.1.3 Υπερκρίσιμη απόσβεση (ζ>1)

Η λύση δίνεται από τη σχέση

$$\boxed{x(t) = a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 e^{\lambda_2 t}}$$

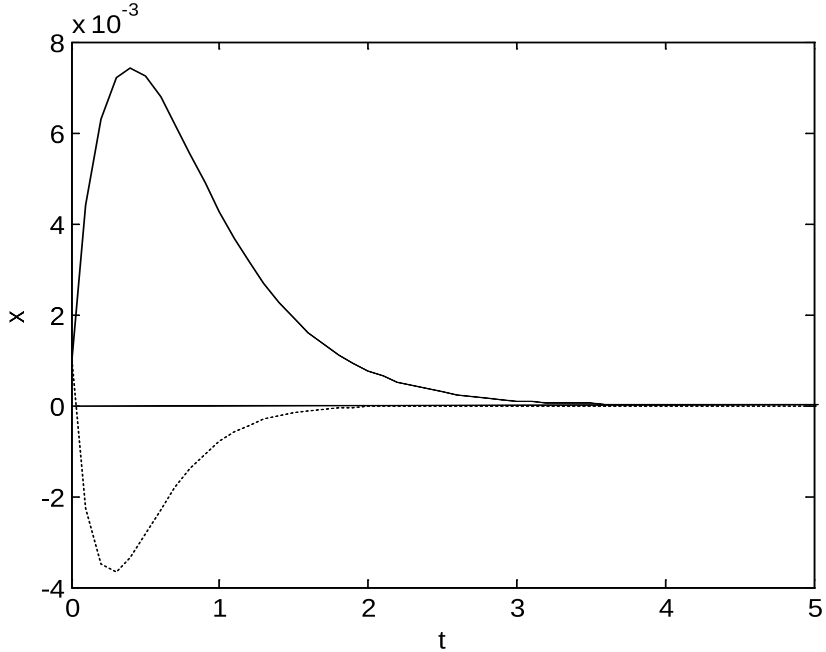
όπου

$$\lambda_2 = -\zeta\omega_0 - \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1} \qquad \lambda_1 = -\zeta\omega_0 + \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

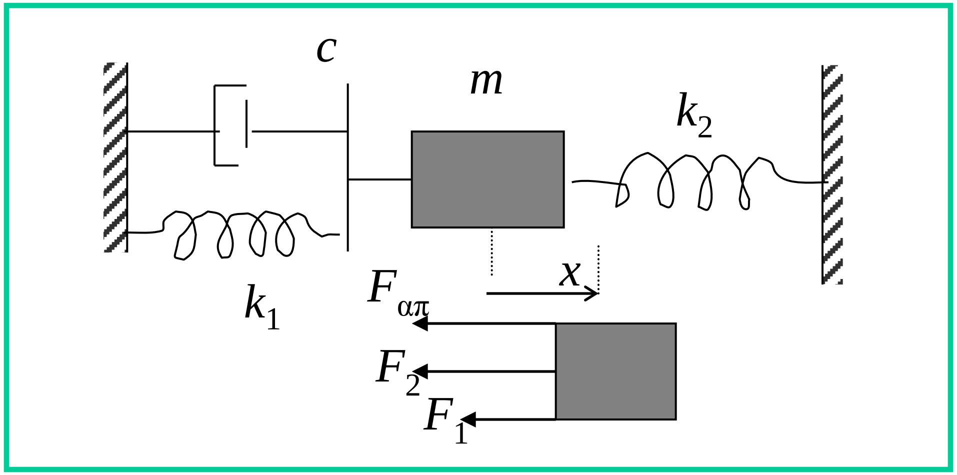
Οι σταθερές α_1, α_2 υπολογίζονται από με τη βοήθεια των αρχικών συνθηκών και είναι

$$a_2 = \frac{v_0 - \lambda_1 x_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \qquad a_1 = \frac{v_0 - \lambda_2 x_0}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

Η γραφική παράσταση της μετατόπισης $x(t)$ όπως δείχνεται στο σχήμα για αρχική μετατόπιση x_0 και διάφορες τιμές της αρχικής ταχύτητας, φθίνει εκθετικά χωρίς ταλαντώσεις.



2). Να βρεθεί ο συντελεστής απόσβεσης c ώστε η απόσβεση του συστήματος να είναι κρίσιμη. Δίνονται m = 20 kg, k_1= 10^5 N/m, k_2= $2x10^5$ N/m.



Έστω το σώμα είναι μετατοπισμένο κατά x από την αρχική του θέση. Ισχύει

$$m\ddot{x} = F_{o\lambda} \Rightarrow m\ddot{x} = -F_1 - F_2 - F_{\alpha\pi} \Rightarrow$$

$$m\ddot{x} = -k_1 x - k_2 x - cv \Rightarrow$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + (k_1 + k_2)x = 0 \qquad (1)$$

Η ισοδύναμη στιβαρότητα του συστήματος είναι

$$k_{eq} = k_1 + k_2 = 10000 + 20000 = 30000 \text{ N/m} \qquad (2)$$

Από ορισμό έχουμε

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{mk_{eq}}} \qquad (3)$$