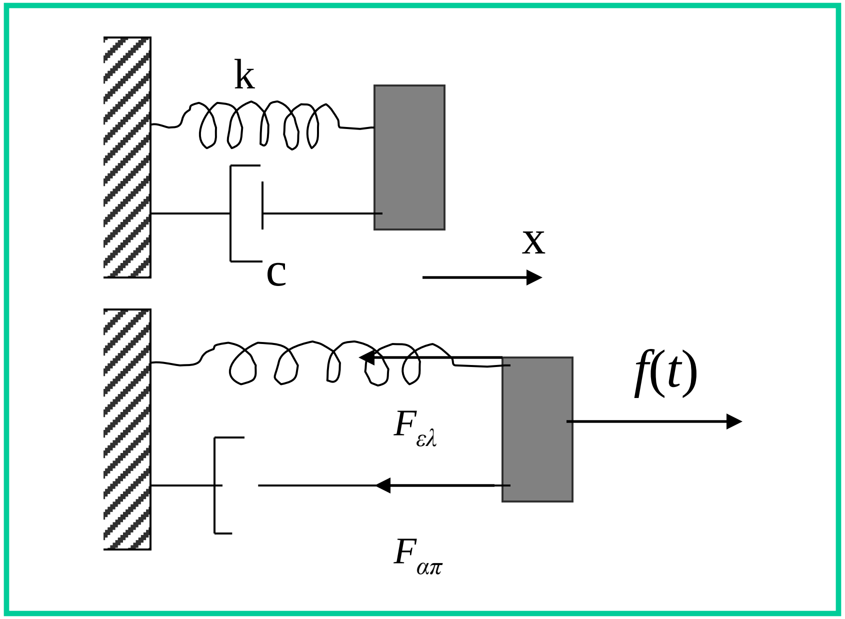
1.7 Εξαναγκασμένη Ταλάντωση

1.7.1 Εξίσωση κίνησης



$$ma = F_{ολ} \Rightarrow$$

$$m\ddot{x} = -F_{ελ} - F_{απ} + f(t) \Rightarrow$$

$$m\ddot{x} = -kx - cv + f(t) \Rightarrow$$

$$\boxed{m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)}$$

Η γενική λύση είναι

$$\boxed{x(t) = x_h(t) + x_p(t)}$$

όπου $x_h(t)$ είναι η ομογενής

και $x_p(t)$ η μερική λύση

Ισχύει

$$\boxed{x_p(t) = \frac{1}{m\omega_d}\int_0^t f(\tau)e^{-\delta(t-\tau)}\sin\omega_d(t-\tau)d\tau}$$

$$\boxed{\delta = \zeta\omega_0 \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \zeta = \frac{c}{2\sqrt{mk}} \qquad \omega_d = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2}}$$

1.7.3 Απόκριση σε αρμονική διέγερση

Εξίσωση κίνησης

Έστω ότι η εξωτερική δύναμη είναι αρμονική, δηλαδή

$$f(t) = \hat{f}\cos\Omega t$$

Στην περίπτωση αυτή η διαφορική εξίσωση κίνησης του ταλαντωτή είναι

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) \Rightarrow \qquad \boxed{m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \hat{f}\cos\Omega t}$$

Αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση $\boxed{x_p(t) = \hat{x}\cos\left(\Omega t - \varphi\right)}$

όπου

$$\boxed{\hat{x} = \frac{\hat{f}}{\sqrt{\left(k - m\Omega^2\right)^2 + \left(c\Omega\right)^2}}} \qquad \boxed{\tan\varphi = \frac{c\Omega}{k - m\Omega^2}}$$

είναι μερική λύση της εξίσωσης κίνησης

Απόκριση σε αρμονική διέγερση για υποκρίσιμη απόσβεση ($0\leq\zeta<1$)

Αν η απόσβεση είναι υποκρίσιμη, τότε ως γνωστόν

$$x_h(t) = Ae^{-\delta t}\cos(\omega_d t - \theta)$$

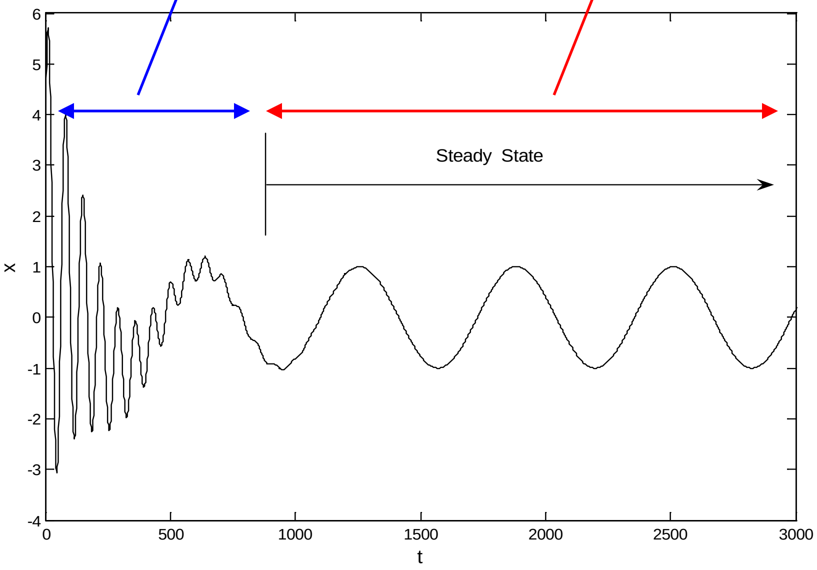
Άρα η απόκριση είναι

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \Rightarrow \boxed{x(t) = Ae^{-\delta t}\cos(\omega_d t - \theta) + \hat{x}\cos(\Omega t - \varphi)}$$

Μεταβατική κατάσταση

Σταθερή κατάσταση

Για $\boxed{t \to \infty}$ ισχύει $Ae^{-\delta t}\cos(\omega_d t - \theta) \to 0$



οπότε

$$\boxed{x(t) = \hat{x}\cos(\Omega t - \varphi)}$$

Απόκριση σε αρμονική διέγερση για κρίσιμη (ζ =1) απόσβεση

Αν η απόσβεση είναι κρίσιμη, τότε ως γνωστόν

$$x_h(t) = e^{-\omega_0 t}\left[x_0 + \left(v_0 + \omega_0 x_0\right)t\right]$$

Άρα η απόκριση είναι

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \Rightarrow$$

$$\boxed{x(t) = e^{-\omega_0 t}\left[x_0 + \left(v_0 + \omega_0 x_0\right)t\right] + \hat{x}\cos\left(\Omega t - \varphi\right)}$$

Για $\boxed{t \to \infty}$, $e^{-\omega_0 t}\left[x_0 + \left(v_0 + \omega_0 x_0\right)t\right] \to 0$

οπότε

$$\boxed{x(t) \to \hat{x}\cos\left(\Omega t - \varphi\right)}$$

Απόκριση σε αρμονική διέγερση για υπερκρίσιμη (ζ>1) απόσβεση

Αν η απόσβεση είναι υπερκρίσιμη, τότε ως γνωστόν

$$x_h(t) = a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 e^{\lambda_2 t}$$

Άρα η απόκριση είναι

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \Rightarrow$$

$$\boxed{x(t) = a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 e^{\lambda_2 t} + \hat{x}\cos\left(\Omega t - \varphi\right)}$$

Για $\boxed{t \to \infty}$, $a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 e^{\lambda_2 t} \to 0$

οπότε $\boxed{x(t) \to \hat{x}\cos\left(\Omega t - \varphi\right)}$

1.7.3.3 Διερεύνηση του πλάτους ως προς την ανοιγμένη συχνότητα στη σταθερή κατάσταση

Η ανοιγμένη συχνότητα και το ανοιγμένο εύρος μετατόπισης ορίζονται από τις σχέσεις

$$n = \frac{\Omega}{\omega_o} \qquad \mathrm{X} = \frac{k}{\hat{f}}\hat{x}$$

Δείξαμε ότι στη σταθερή κατάσταση η απόκριση είναι

$$\boxed{x(t) = \hat{x}\cos\left(\Omega t - \varphi\right)} \qquad \text{όπου} \quad \hat{x} = \frac{\hat{f}}{\sqrt{\left(k - m\Omega^2\right)^2 + \left(c\Omega\right)^2}}, \qquad \tan\varphi = \frac{c\Omega}{k - m\Omega^2}$$

Αποδεικνύεται ότι το πλάτος και η διαφορά φάσης δίνονται σε σχέση με την ανοιγμένη συχνότητα και το μέτρο απόσβεσης από τις σχέσεις

$$\boxed{\hat{x} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - n^2\right)^2 + \left(2\zeta n\right)^2}}\frac{\hat{f}}{k}} \qquad \boxed{\tan\varphi = \frac{2\zeta n}{1 - n^2}}$$

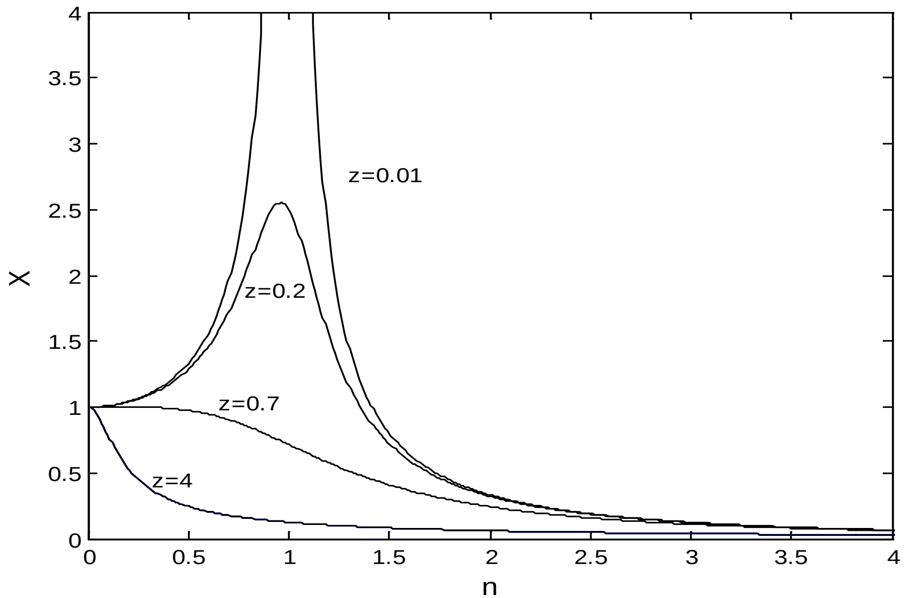
$$\boxed{\hat{x} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-n^2\right)^2 + \left(2\zeta n\right)^2}} \frac{\hat{f}}{k}}$$

Έστω $\hat{f}$ ανεξάρτητο του n

1) Για $n \to 0$ $(\Omega << \omega_0)$ είναι $\hat{x} \to \dfrac{\hat{f}}{k} = x_{st}$

2) Για $n \to \infty$ $(\Omega >> \omega_0)$ είναι $\hat{x} \to 0$

3) Για $n = 1$ $(\Omega = \omega_0)$ είναι $\hat{x} = \dfrac{1}{2\zeta} \dfrac{\hat{f}}{k}$ δηλ. εξαρτάται από το ζ



11). Η διαφορική εξίσωση που περιγράφει την κίνηση μιας εξαναγκασμένης ταλάντωσης είναι

$$\left(m+\frac{I_0}{r^2}\right)\ddot{x}+c\dot{x}+5kx=\frac{M_0}{r}\cos\Omega t \qquad (1)$$

όπου m = 10 kg, I_0= 0.1 kgm^2, r = 0.1m, k = 1.6x10^5 N/m, c = 640 Nsec/m, M_0 = 100 Nm, Ω = 180 rad/sec. Να βρεθεί το πλάτος της ταλάντωσης στη μόνιμη κατάσταση.

Η εξίσωση (1) είναι όμοια με την εξίσωση

$$m_{eq}\ddot{x}+c_{eq}\dot{x}+k_{eq}x=\hat{f}\cos\Omega t \qquad (2)$$

όπου

$$m_{eq}=m+\frac{I_0}{r^2}=10+\frac{0.1}{(0.1)^2}=10+10=20\text{ kg} \qquad (3)$$

$$c_{eq}=c=640\text{ Nsec/m} \qquad (4)$$

$$k_{eq}=5k=5x1.6x10^5=8x10^5\text{ N/m} \qquad (5)$$

$$\hat{f}=\frac{M_0}{r}=\frac{100}{0,1}=1000\text{ N} \qquad (6)$$

Το πλάτος της λύσης x(t) της (2) στη μόνιμη κατάσταση είναι

$$\hat{x} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-n^2\right)^2 + \left(2\zeta n\right)^2}} \frac{\hat{f}}{k_{eq}} \tag{7}$$

Είναι

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}} = \sqrt{\frac{8\cdot 10^5}{20}} = 200 \text{ rad/sec} \tag{8}$$

Οπότε

$$n = \frac{\Omega}{\omega_0} = \frac{180}{200} = 0.9 \tag{9}$$

Επίσης

$$\zeta = \frac{c_{eq}}{2\sqrt{m_{eq}k_{eq}}} = \frac{640}{2\sqrt{20\cdot 8\cdot 10^5}} = 0.08 \tag{10}$$

Με αντικατάσταση των (5) , (6) (9) , (10) στην (7) έχουμε

$$\hat{x} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-n^2\right)^2 + \left(2\zeta n\right)^2}} \frac{\hat{f}}{k_{eq}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-0.9^2\right)^2 + \left(2\cdot 0.08\cdot 0.9\right)^2}} \frac{1000}{8\cdot 10^5} = \frac{125\cdot 10^{-5}}{\sqrt{0.056}} = 5.28\cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\boxed{\hat{x} = 5.28\cdot 10^{-3} \text{ m} = 5.28 \text{ mm}} \tag{11}$$