1.7.3 Απόκριση σε αρμονική διέγερση

Εξίσωση κίνησης

Έστω ότι η εξωτερική δύναμη είναι αρμονική, δηλαδή

$$f(t) = \hat{f}\cos\Omega t$$

Στην περίπτωση αυτή η διαφορική εξίσωση κίνησης του ταλαντωτή είναι

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) \Rightarrow \qquad \boxed{m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \hat{f}\cos\Omega t}$$

Αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση

$$\boxed{x_p(t) = \hat{x}\cos\left(\Omega t - \varphi\right)}$$

όπου

$$\boxed{\hat{x} = \frac{\hat{f}}{\sqrt{\left(k - m\Omega^2\right)^2 + \left(c\Omega\right)^2}}} \qquad \boxed{\tan\varphi = \frac{c\Omega}{k - m\Omega^2}}$$

είναι μερική λύση της εξίσωσης κίνησης

1.7.3.3 Διερεύνηση του πλάτους ως προς την ανοιγμένη συχνότητα στη σταθερή κατάσταση

Η ανοιγμένη συχνότητα και το ανοιγμένο εύρος μετατόπισης ορίζονται από τις σχέσεις

$$n = \frac{\Omega}{\omega_o} \qquad \mathrm{X} = \frac{k}{\hat{f}}\hat{x}$$

Δείξαμε ότι στη σταθερή κατάσταση η απόκριση είναι

$$\boxed{x(t) = \hat{x}\cos\left(\Omega t - \varphi\right)} \qquad \text{όπου} \quad \hat{x} = \frac{\hat{f}}{\sqrt{\left(k - m\Omega^2\right)^2 + \left(c\Omega\right)^2}}, \qquad \tan\varphi = \frac{c\Omega}{k - m\Omega^2}$$

Αποδεικνύεται ότι το πλάτος και η διαφορά φάσης δίνονται <u>σε σχέση με την ανοιγμένη συχνότητα και το μέτρο απόσβεσης</u> από τις σχέσεις

$$\boxed{\hat{x} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - n^2\right)^2 + \left(2\zeta n\right)^2}}\frac{\hat{f}}{k}} \qquad \boxed{\tan\varphi = \frac{2\zeta n}{1 - n^2}}$$

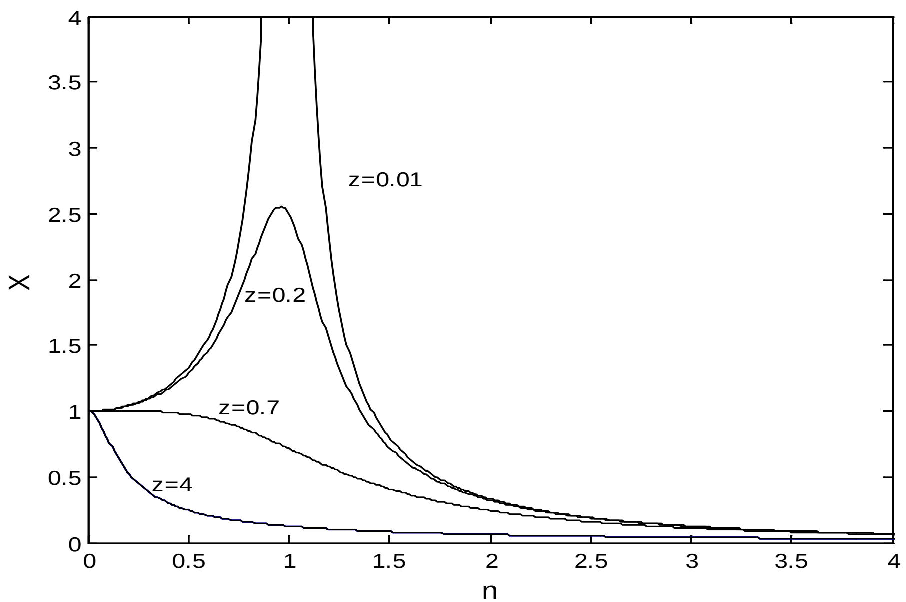
$$\hat{x} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-n^2\right)^2 + \left(2\zeta n\right)^2}} \frac{\hat{f}}{k}$$

Έστω $\hat{f}$ ανεξάρτητο του n

1) Για $n \to 0$ $(\Omega << \omega_0)$ είναι $\hat{x} \to \dfrac{\hat{f}}{k} = x_{st}$

2) Για $n \to \infty$ $(\Omega >> \omega_0)$ είναι $\hat{x} \to 0$

3) Για $n = 1$ $(\Omega = \omega_0)$ είναι $\hat{x} = \dfrac{1}{2\zeta} \dfrac{\hat{f}}{k}$ δηλ. εξαρτάται από το ζ



1.7.3.4 Το φαινόμενο του συντονισμού

Ένα μηχανικό σύστημα που ταλαντώνεται υπό την επίδραση αρμονικής διέγερσης βρίσκεται σε κατάσταση συντονισμού όταν **το πλάτος της ταλάντωσης στη μόνιμη κατάσταση είναι μέγιστο.**

Η ακριβής τιμή του *n* για την οποία το $\hat{x}$ γίνεται μέγιστο είναι

$$n = \sqrt{1-2\zeta^2} \Rightarrow \Omega = \omega_0\sqrt{1-2\zeta^2} \quad \text{όταν} \quad \zeta \le 0.707$$

και

$$n = 0 \Rightarrow \Omega = 0 \quad \text{όταν} \quad \zeta > 0.707$$

Επειδή

$\zeta^2 << 1$

Στην πράξη έχομε συντονισμό για

n ≈ 1 $(\Omega \approx \omega_0)$

<u>Η μέγιστη τιμή του $\hat{x}$ είναι</u>

$$\hat{x}_{\max} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}\frac{f}{k} \quad \text{όταν} \quad \zeta \le 0.707$$

και

$$\hat{x}_{\max} = \frac{f}{k} \quad \text{όταν} \quad \zeta > 0.707$$

<u>Σχόλιο</u>

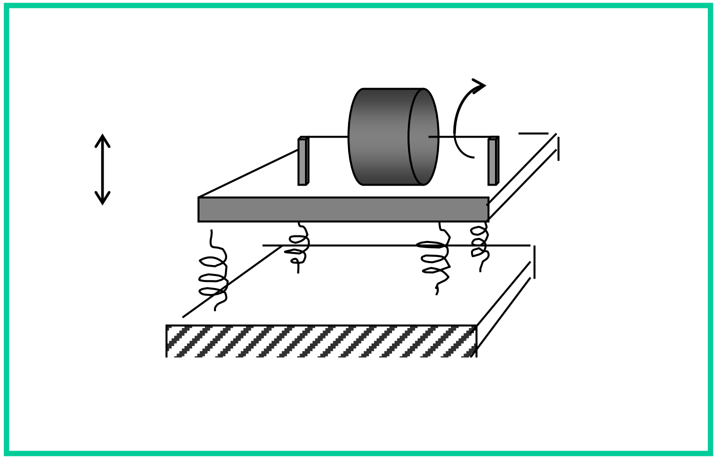
Για $\zeta = 0$ έχουμε συντονισμό όταν

n = 1 δηλ. $\Omega = \omega_0$

και

$$\hat{x}_{\max} \to \infty$$

10). Μια μηχανή με μάζα 45 kg στηρίζεται σε 4 παράλληλα ελατήρια με στιβαρότητα $2x10^5$ N/m το καθένα. Η μηχανή λειτουργεί σε συχνότητα 201 rad/sec και ταλαντώνεται με πλάτος 1.5 mm λόγω αρμονικής διέγερσης που προέρχεται από αζυγοσταθμία της μηχανής. Να βρεθεί το πλάτος της διέγερσης στη μόνιμη κατάσταση. Οι αποσβέσεις είναι αμελητέες.



Η κατακόρυφη συνιστώσα της δύναμης που δέχεται η μηχανή λόγω αζυγοσταθμίας είναι

$$f(t) = \hat{f} \cos \Omega t \qquad (1)$$

Τα τέσσερα ελατήρια είναι παράλληλα οπότε η ισοδύναμη στιβαρότητα θα είναι

$$k_{eq} = 4k = 8x10^5 \text{ N/m} \qquad (2)$$

Η εξίσωση της ταλάντωσης της μηχανής είναι

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+k_{eq}x=\hat{f}\cos\Omega t \tag{3}$$

Το πλάτος της ταλάντωσης στη μόνιμη κατάσταση είναι

$$\hat{x}=\frac{1}{\sqrt{\left(1-n^2\right)^2+\left(2\zeta n\right)^2}}\frac{\hat{f}}{k_{eq}} \tag{4}$$

Δίνεται ότι οι αποσβέσεις είναι αμελητέες και άρα το ζ τείνει στο μηδέν, οπότε

$$\hat{x}=\frac{1}{\sqrt{\left(1-n^2\right)^2}}\frac{\hat{f}}{k_{eq}} \Rightarrow \hat{x}=\frac{1}{\left|1-n^2\right|}\frac{\hat{f}}{k_{eq}} \Rightarrow \hat{f}=\hat{x}\left|1-n^2\right|k_{eq} \tag{5}$$

Είναι

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k_{eq}}{m}}=\sqrt{\frac{8x10^5}{45}}=133.3 \text{ rad/sec} \tag{6}$$

οπότε

$$n=\frac{\Omega}{\omega_0}=\frac{201}{133.1}=1.51 \tag{7}$$

Με αντικατάσταση των (2) , (7) στη (5) έχουμε

$$\hat{f}=\hat{x}\left|1-n^2\right|k_{eq} \Rightarrow \hat{f}=1.55x10^{-3}\left|1-\left(1.51\right)^2\right|8x10^5 \Rightarrow \boxed{\hat{f}=1.58x10^3 \text{ N}} \tag{8}$$