

Μηχανική Ρευστών II

Ενότητα 2): Υδραυλικό πλήγμα

Δ. Μισηρλής

Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών ΤΕ



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



Σ, ΑΝ. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ

ΕΞΑΜΗΝΟ 2010-2011

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Κεντρικής Μακεδονίας» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Τίτλος ενότητας

Υδραυλικό πλήγμα



ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

2.2 ΜΗΧΑΝΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΥΔΡΑΥΛΙΚΟΥ ΠΛΗΓΜΑΤΟΣ

2.3 ΘΕΩΡΙΑ ΤΟΥ ΥΔΡΑΥΛΙΚΟΥ ΠΛΗΓΜΑΤΟΣ

2.4 ΑΣΚΗΣΕΙΣ



Το **υδραυλικό πλήγμα** (*water hammer*), το οποίο ονομάζεται και **πλήγμα κριού** και που για συντομία θα αναφέρεται ως **ΥΠ** από εδώ και στο εξής στις παρούσες σημειώσεις, ανήκει στα μη-μόνιμα ροϊκά φαινόμενα, δηλαδή εξελίσσεται στο χρόνο. Η πρόκληση του υδραυλικού πλήγματος επιτυγχάνεται όταν υπάρχει απότομη μεταβολή της ταχύτητας ή/και της πίεσης σε κλειστούς αγωγούς και μεταφράζεται στη μετάδοση κυμάτων πίεσης με την ταχύτητα του ήχου του ρευστού.

Συνήθως το ΥΠ προκαλείται από το **γρήγορο κλείσιμο** (ολικό ή μερικό) μίας βάνας, ενίοτε και από το άνοιγμά της, οπότε η ροή διακόπτεται/μειώνεται σε πολύ μικρό χρόνο. Επίσης εμφανίζεται σε δίκτυα κατάντη κάποιας αντλίας (στον αγωγό κατάθλιψης), λόγω της **απότομης διακοπής λειτουργίας της αντλίας**, π.χ. λόγω διακοπής της ηλεκτροδότησής της. Επίσης μπορεί να προκληθεί εάν σε ένα δίκτυο ένας στρόβιλος παρουσιάσει απώλεια στήριξης (stall).

Το ΥΠ εμφανίζεται συχνότερα σε εφαρμογές ευθύνης Πολιτικού Μηχανικού, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι σπανίζει στις μηχανολογικές εφαρμογές. Το ΥΠ μπορεί να εμφανιστεί σε οποιοδήποτε είδος ρευστού, τόσο υγρού όσο και αερίου.

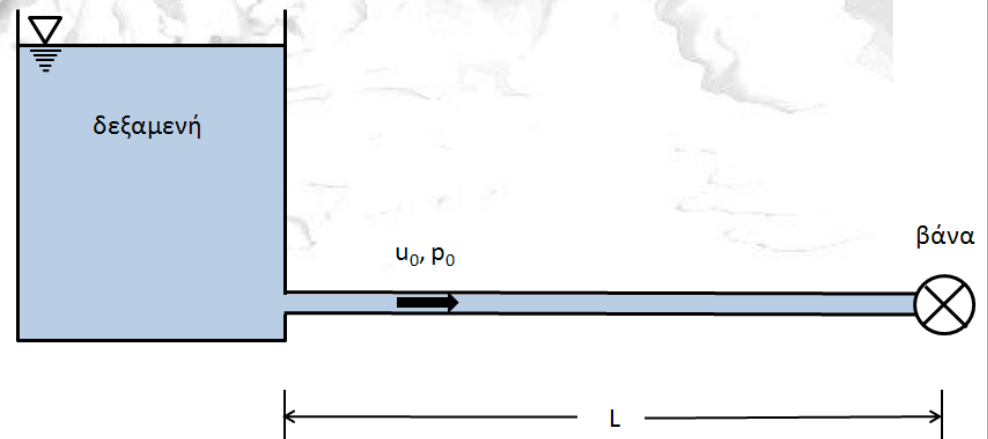
Κατά τη δημιουργία του ΥΠ αναπτύσσονται ισχυρές εναλασσόμενες **υπερπίεσεις και υποπίεσεις** (γύρω από την ονομαστική τιμή πίεσης του αγωγού πριν την εμφάνιση του ΥΠ), οι οποίες κινούνται μέσα στον αγωγό με τη μορφή **κυμάτων** και με την **ταχύτητα του ήχου του ρευστού**. Η τιμή της υπερπίεσης ή υποπίεσης μπορεί να είναι πολλαπλάσια της ονομαστικής πίεσης, ενώ η ένταση του φαινομένου εξαρτάται κυρίως από το όσο μικρή ήταν διάρκεια της μεταβολής (παροχής ή/και πίεσης) που προκάλεσε το ΥΠ.

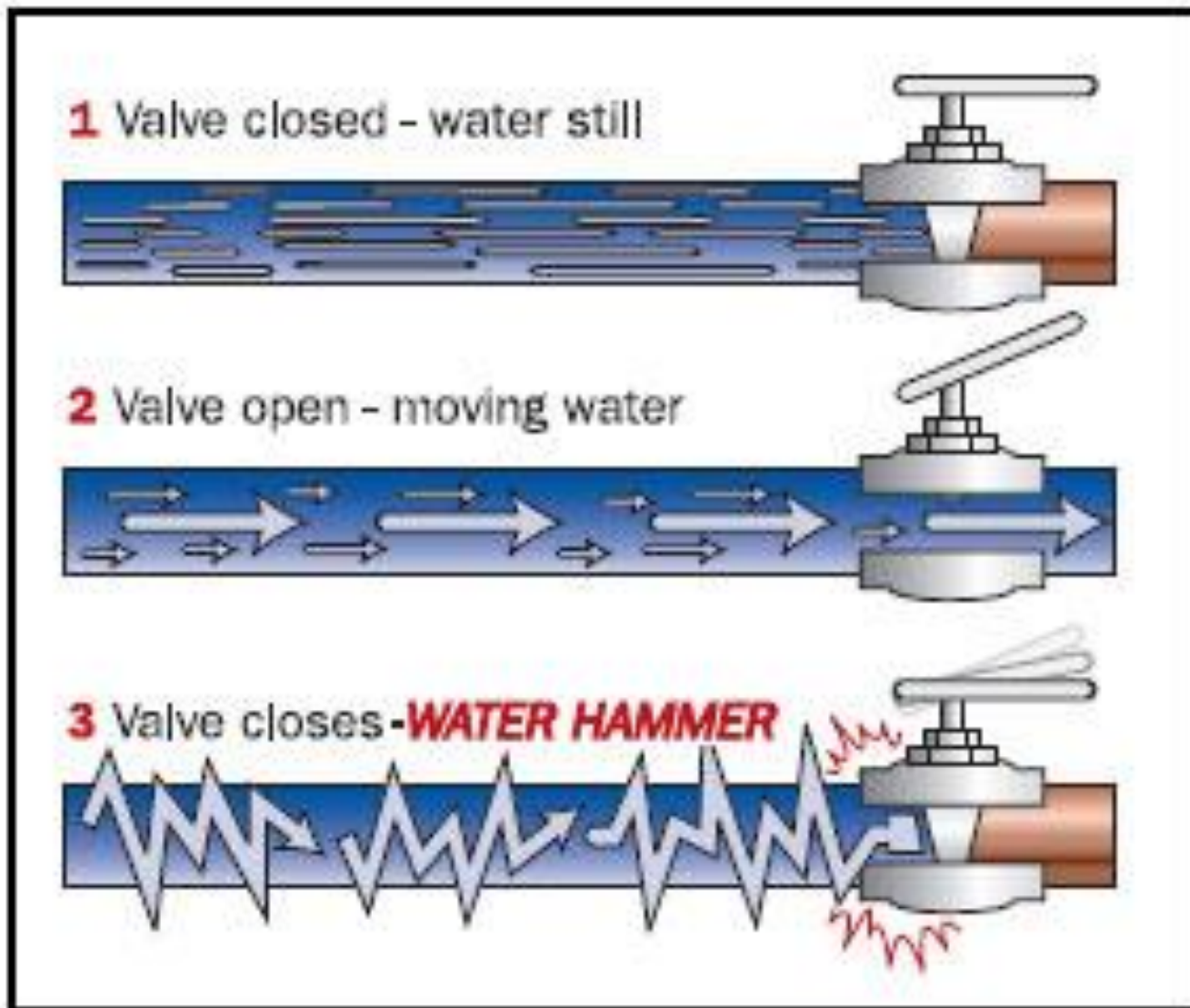
Το ΥΠ είναι ένα ανεπιθύμητο γεγονός διότι κατά τη διάρκειά του ο αγωγός καταπονείται εναλασσόμενα σε εφελκυστικές και θλιπτικές τάσεις από τα κύματα των υπερπίεσεων και υποπίεσεων, αντίστοιχα. Εάν ο αγωγός δεν είναι εφοδιασμένος με αντιπληγματικές διατάξεις, μπορεί να σπάσει αμέσως, διαφορετικά υφίσταται καταπόνηση κόπωσης, η οποία επίσης μπορεί να οδηγήσει μετά την επανάληψη του φαινομένου για έναν αριθμό επαναλήψεων στη δημιουργία ρωγμών και τελικά στη θραύση.

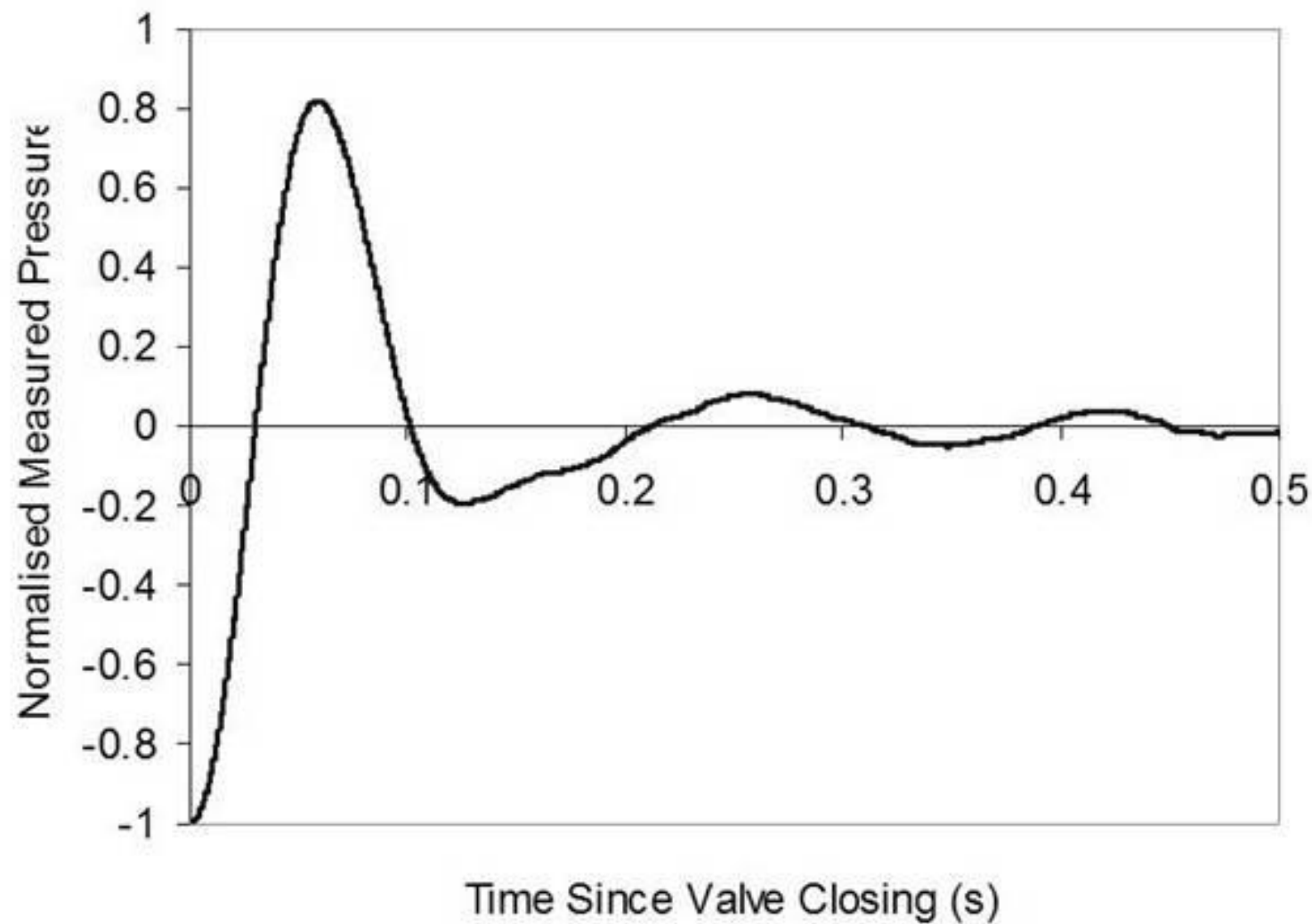
Εάν θεωρήσουμε μία στήλη νερού ως πλήρως στοιβαρή (δηλαδή απαραμόρφωτη, ασυμπιέστη), τότε απαιτείται μία άπειρη δύναμη ώστε το νερό που ρέει να σταματήσει (όπως συμβαίνει κατά το κλείσιμο μίας βάνας). Συνεπώς τα ρευστά, ακόμη και τα υγρά, είναι συμπιεστά αν και έχουν μεγάλο μέτρο συμπιεστότητας, του νερού ισούται με 2.1×10^9 [N/m²]. Μία μικρή διαφορά πίεσης θα μεταδοθεί μέσα στο νερό με μία πεπερασμένη, αλλά μεγάλη ταχύτητα, την ταχύτητα του ήχου του νερού. **Τις περισσότερες φορές, ο χρόνος που διαρκεί ένα φαινόμενο είναι αρκετά μεγάλος και τα κύματα πίεσης που δημιουργούνται είναι αμελητέα. Εάν όμως ο χρόνος αυτός είναι επαρκώς μικρός, τότε δημιουργείται ΥΠ.**

Σημειώνεται, ότι η ανάλυση του ΥΠ στα υγρά είναι ευκολότερη απ' ό τι στα αέρια, διότι η ταχύτητα του ήχου στα πρωτα είναι σχετικά σταθερή, ενώ στα αέρια μεταβάλλεται τόσο με τη θερμοκρασία, όσο και (κυρίως για την περίπτωση του ΥΠ) με την πίεση.

Για τη μαθηματική μελέτη του ΥΠ θα θεωρήσουμε μία απλή περίπτωση, όπως αυτή ενός αγωγού μήκους L , ο οποίος είναι συνδεδεμένος με μία δεξαμενή όπου αρχικά ρέει το ρευστό σταθερά (μόνιμη κατάσταση) με ταχύτητα u_0 και βρίσκεται σε πίεση p_0 , ενώ στο κατάντη άκρο του αγωγού βρίσκεται μία ανοικτή βάνα. Η αρχική ταχύτητα u_0 και η πίεση p_0 μπορούν να υπολογιστούν από την εξίσωση του Bernoulli, αγνοώντας τις τριβές, και ουσιαστικά προκαλούνται από τη στάθμη της δεξαμενής. Κάποια στιγμή η βάνα κλείνει εντελώς και σχεδόν ακαριαία ($\Delta t \rightarrow 0$).



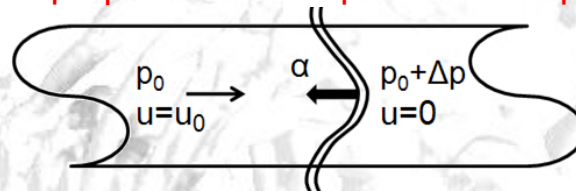




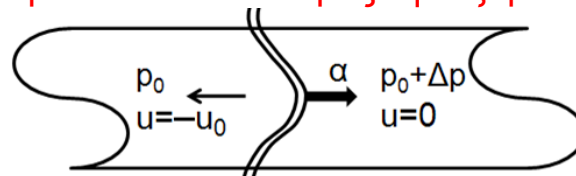


Στάδιο 1^ο: Κύμα Συμπίεσης προς τα Ανάντη (βάνα → δεξαμενή)

Όταν κλείσει απότομα η βάνα, το ρευστό επιβραδύνεται και η κινητική του ενέργεια μετατρέπεται σε αύξηση της πίεσης πάνω στη βάνα. Έτσι δημιουργείται ένα κύμα συμπίεσης που κινείται ανάντη προς τη δεξαμενή με την ταχύτητα του ήχου α , ανώ ταυτόχρονα διαστέλεται ο αγωγός. Καθώς περνάει το κύμα, το ρευστό που αφήνει πίσω του ακινητοποιείται, ενώ αυξάνεται και η πίεσή του κατά Δp . Το ρευστό ανάντη του κύματος (δηλαδή μεταξύ κύματος και δεξαμενής) δεν έχει "αντιληφθεί" ακόμη το κύμα και έτσι συνεχίζει να κινείται προς τη βάνα με ταχύτητα u_0 . Όταν το κύμα φτάσει στη δεξαμενή, όλο το ρευστό στον αγωγό θα έχει ακινητοποιηθεί ($u=0$), όπως η λογική επιτάσσει λόγω του κλεισίματος της βάνας και θα βρίσκεται σε κατάσταση πίεσης $p_0 + \Delta p$.

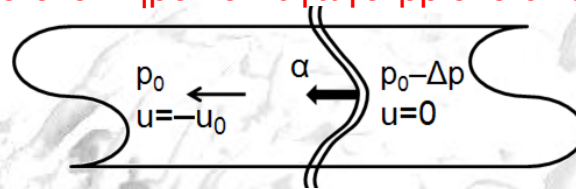
**Στάδιο 2^ο: Κύμα Εκτόνωσης προς τα Κατόντη (δεξαμενή → βάνα)**

Λόγω της αυξημένης πίεσης, $p_0 + \Delta p$, που επικρατεί στον αγωγό, το ρευστό αρχίζει να εκτονώνεται προς τη δεξαμενή, όπου λόγω του μεγάλου μεγέθους της η υπερπίεση αποσβαίνεται και επανέρχεται σε p_0 , δημιουργώντας ένα κύμα εκτόνωσης (μετατροπή της πίεσης σε κινητική ενέργεια) παρόμοιο με εκείνο της συμπίεσης, το οποίο κινείται προς τη βάνα και αφήνει το ρευστό πίσω του (μεταξύ του κύματος και της δεξαμενής) να κινείται με ταχύτητα $-u_0$ και να επανέρχεται στην αρχική πίεση p_0 , ενώ ταυτόχρονα τα τοιχώματα του αγωγού επανέρχονται στην αρχική κατάσταση. Μόλις το κύμα φτάσει στη βάνα, όλος ο αγωγός βρίσκεται σε πίεση p_0 και το ρευστό κινείται προς τη δεξαμενή με ταχύτητα $-u_0$.

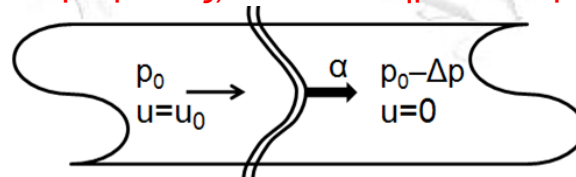


Στάδιο 3^ο: Κύμα Εκτόνωσης προς τα Ανάντη (βάνα → δεξαμενή)

Όταν το προηγούμενο κύμα εκτόνωσης φτάσει στη βάνα, όλο το ρευστό τείνει να κινείται προς τη δεξαμενή, αλλά επειδή η βάνα είναι κλειστή αυτό δεν είναι δυνατόν για το ρευστό σε επαφή μαζί της. Έτσι δημιουργείται η ανάκλαση του κύματος εκτόνωσης προς τη δεξαμενή, κινούμενο με την ταχύτητα του ήχου, και το ρευστό που αφήνει πίσω του (δηλαδή μεταξύ κύματος και βάνας) έχει πίεση $p_0 - \Delta p$ και η ταχύτητα μηδενίζεται, ενώ ταυτόχρονα τα τοιχώματα του αγωγού συστέλλονται. Μόλις το κύμα υποπίεσης φτάσει στη δεξαμενή, το ρευστό σε ολόκληρο τον αγωγό βρίσκεται σε πίεση $p_0 - \Delta p$ και η ταχύτητα έχει μηδενιστεί ($u=0$).

**Στάδιο 4^ο: Κύμα Συμπίεσης προς τα Κατάντη (δεξαμενή → βάνα)**

Λόγω της υποπίεσης, $p_0 - \Delta p$, αρχίζει να ρέει το ρευστό προς τη βάνα, δημιουργώντας ένα νέο κύμα συμπίεσης που κινείται πάλι με την ταχύτητα του ήχου, α . Το κύμα πίεσης αφήνει πίσω του (μεταξύ κύματος και δεξαμενής) το ρευστό σε πίεση p_0 και ταχύτητα u_0 , ενώ ταυτόχρονα τα τοιχώματα του αγωγού επανέρχονται στην αρχική τους κατάσταση. Έτσι, όταν το κύμα φτάσει στη βάνα, επικρατούν ακριβώς οι ίδιες συνθήκες όπως στην αρχή (κλείσιμο βάνας) και ολοκληρώνεται μία περίοδος του φαινομένου.



Εάν οι τριβές είναι μηδενικές, τότε το φαινόμενο θα επαναλαμβάνεται απ' άπειρον. Επειδή όμως τριβές υπάρχουν, το φαινόμενο φθίνει εντελώς σε μερικούς κύκλους, με συνεχώς μειούμενη υπερ/υπό-πίεση Δp .

Έστω ότι έχει συμβεί υδραυλικό πλήγμα στην απλή περίπτωση που αναφέρθηκε προηγουμένως (σύστημα δεξαμενής–αγωγού–βάνας) και μελετούμε το κύμα συμπίεσης του 1^{ου} Σταδίου που ταξιδεύει από τη βάνα προς τη δεξαμενή, όπως φαίνεται στο αριστερό σχήμα.



Εάν θεωρήσουμε σύστημα συντεταγμένων που κινείται με το κύμα, τότε το φαινόμενο μετασχηματίζεται σε αυτό που φαίνεται στο δεξιό σχήμα. Οι πιέσεις παραμένουν ίδιες, αλλά οι ταχύτητα πριν, u_2 , και μετά, u_1 , το κύμα τροποποιούνται, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Εάν θεωρήσουμε ότι η διαστολή του αγωγού είναι μικρή συγκριτικά με το μέγεθός του (βασική παραδοχή της θεωρίας της ελαστικής παραμόρφωσης που ισχύει με μεγάλη ακρίβεια για πολλά υλικά, όπως π.χ. ο χάλυβας), τότε η εξίσωση της συνέχειας γράφεται ως (A =επιφάνεια διατομής του αγωγού, ρ =πυκνότητα):

$$A\rho_1u_1 = A\rho_2u_2 \quad (1)$$

Εάν επιπρόσθετα θεωρήσουμε τις τριβές αμελητέες, τότε η εξίσωση της ορμής στη διεύθυνση του αγωγού γράφεται ως:

$$A\rho_1u_1^2 - A\rho_2u_2^2 = A\Delta p$$

και η οποία λόγω της (1) γίνεται:

$$A\rho_1u_1^2 - A\rho_1u_1u_2 = A\Delta p \Rightarrow$$

$$A\rho_1u_1(u_1 - u_2) = A\Delta p \quad (2)$$

Τελικά, οι δύο εξισώσεις της ροής, μετά την απλοποίηση του κοινού παράγοντα, A , γίνονται:

$$\rho_1u_1 = \rho_2u_2 \quad (3)$$

$$\rho_1u_1(u_1 - u_2) = \Delta p \quad (4)$$

Ο ορισμός του μέτρου συμπίεστότητας, K , ενός ρευστού είναι:

$$K = -\frac{\Delta p}{\frac{\Delta V}{V}} \Rightarrow K = -V \frac{\Delta p}{\Delta V} \quad (5)$$

όπου V =όγκος ρευστού [m^3], ενώ το K του νερού είναι ίσο με 2.1×10^9 [Pa].

Επίσης, από τον ορισμό της πυκνότητας, $\rho = m/V$, εάν παραγωγίσουμε, έχουμε: $\Delta p = \frac{1}{V} \Delta m - \frac{m}{V^2} \Delta V$ και επειδή $\Delta m = 0$ (λόγω Αρχής Διατήρησης Μάζας), τότε είναι:

$$\Delta p = -\frac{m}{V^2} \Delta V = -\left(\frac{m}{V}\right) \frac{1}{V} \Delta V \Rightarrow \Delta p = -\frac{\rho}{V} \Delta V \quad (6)$$

Η εξίσωση (5) γράφεται και ως:

$$\frac{-V}{\Delta V} = \frac{K}{\Delta p} \quad (7)$$

ενώ η εξίσωση (6),

χρησιμοποιώντας την (7) γίνεται:

$$\Delta p = -\rho \frac{\Delta p}{K} \quad (8)$$

Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $\Delta \rho = \rho_2 - \rho_1$, και υποθέτοντας ότι $\rho_2 \approx \rho_1 \approx \rho$, η εξίσωση (8) γίνεται:

$$\rho_2 - \rho_1 = \rho_1 \frac{\Delta p}{K} \Rightarrow \rho_2 = \rho_1 + \rho_1 \frac{\Delta p}{K} \Rightarrow \rho_2 = \rho_1 \left(1 + \frac{\Delta p}{K}\right) \quad (9)$$

Συνεπώς, η εξίσωση της συνέχειας (3), λόγω της (9) γίνεται:

$$\rho_1 u_1 = \rho_1 \left(1 + \frac{\Delta p}{K}\right) u_2 \Rightarrow u_1 - u_2 = u_2 \frac{\Delta p}{K} \quad (10)$$

Ενώ η εξίσωση της ορμής (4), λόγω τώρα της (10) μετασχηματίζεται ως:

$$\rho_1 u_1 u_2 \frac{\Delta p}{K} = \Delta p \Rightarrow u_1 u_2 = \frac{K}{\rho_1} \quad (11)$$

Επειδή όμως $u_1 = u_0 + \alpha$ και $u_2 = \alpha$, έχουμε ότι: $u_1 u_2 = (u_0 + \alpha)\alpha$ και εάν τη συγκρίνουμε με την εξίσωση (11), έχουμε ότι:

$$u_1 u_2 = (u_0 + \alpha)\alpha = \frac{K}{\rho_1} \quad (12)$$

και θεωρώντας πάλι ότι $\rho_2 \approx \rho_1 \approx \rho$ και ότι $\alpha \gg u_0$, τότε η (12) γίνεται:

$$(u_0 + \alpha)\alpha = \frac{K}{\rho_1} \Rightarrow \alpha^2 = \frac{K}{\rho} \Rightarrow \alpha = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \quad (13)$$

η οποία μας δίνει ότι $\alpha \approx 1450$ [m/s] για το νερό.

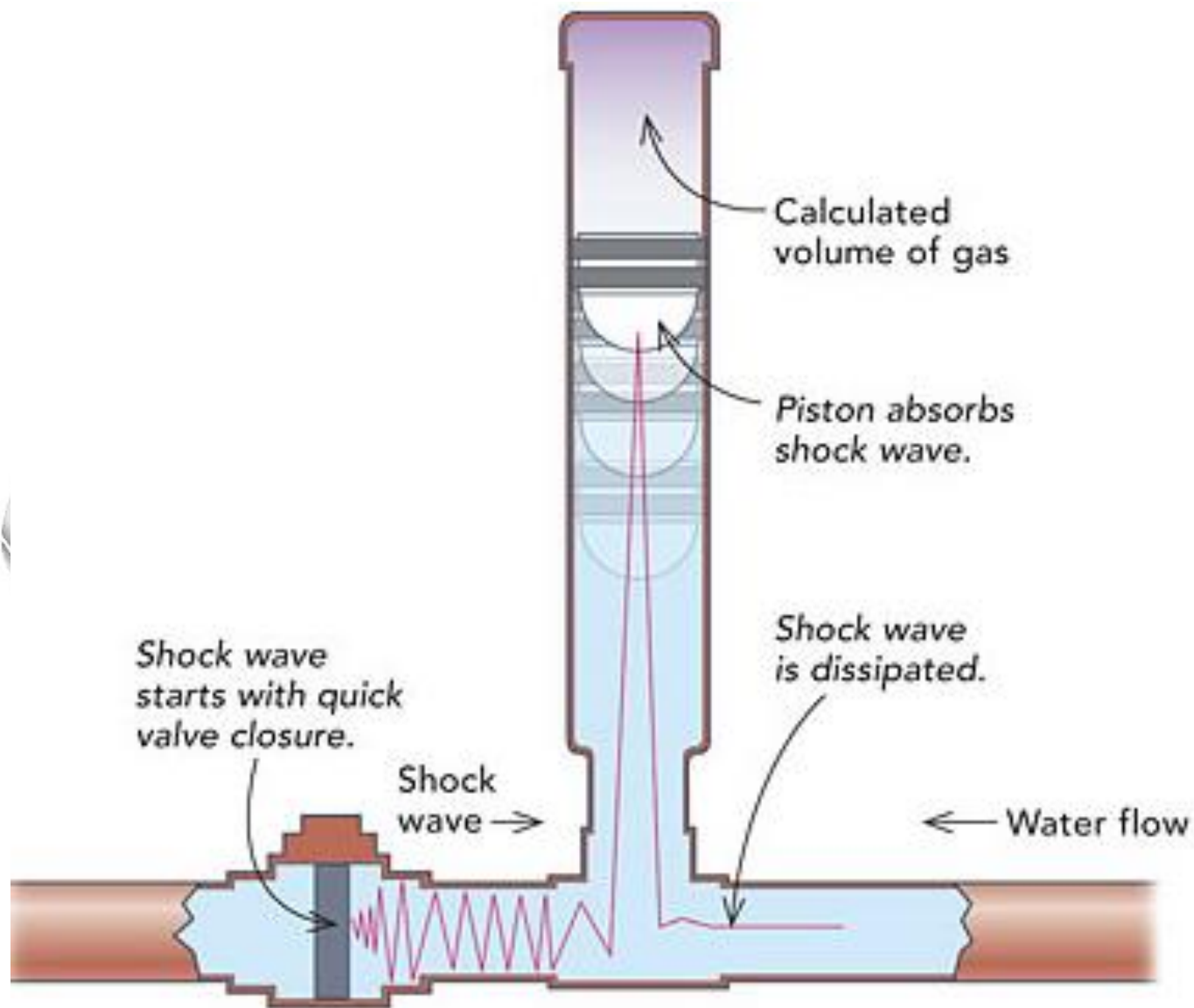
Τέλος, επειδή $u_1 - u_2 = (u_0 + \alpha) - \alpha = u_0$ και $u_1 = u_0 + \alpha \approx \alpha$ (επειδή $\alpha \gg u_0$), υπολογίζεται η υπερπίεση του κύματος συμπίεσης (ή υποπίεση για κύματα εκτόνωσης), Δp , από την εξίσωση ορμής (4) ως:

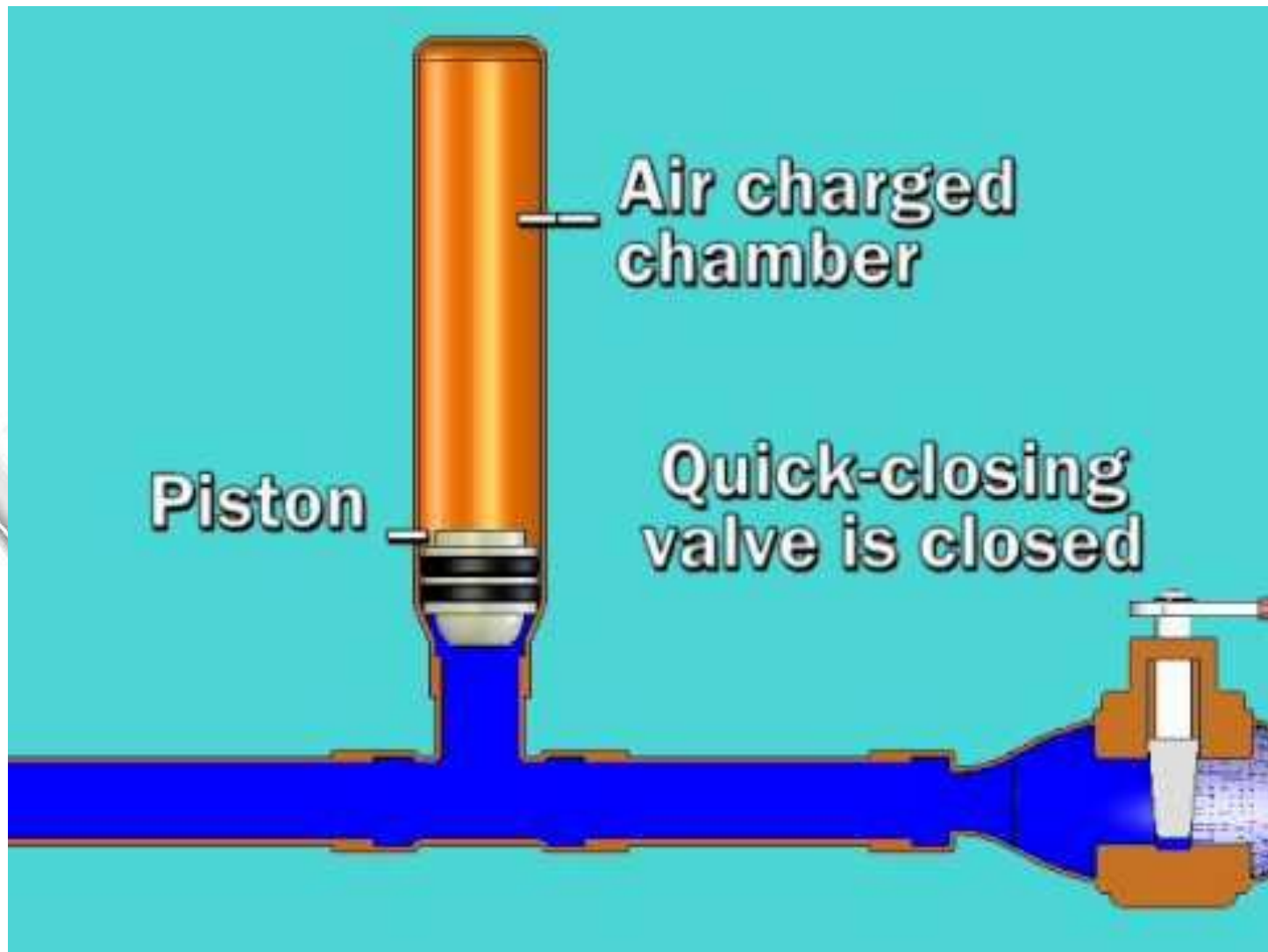
$$\Delta p = \rho_1 u_1 (u_1 - u_2) \Rightarrow \Delta p = \rho \alpha u_0 \quad (14)$$

Σημειώνεται ότι για να υπάρξει υδραυλικό πλήγμα, πρέπει το γεγονός που θα το προκαλέσει (π.χ. κλείσιμο βάνας) να διαρκέσει λιγότερο από $t = 2L/\alpha$, όπου L =μήκος αγωγού όπου θα μεταδοθεί το κύμα πίεσης και α =ταχύτητα του ήχου του ρευστού όπου θα εκδηλωθεί το υδραυλικό πλήγμα.









1 ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΡΟΗ ΝΕΡΟΥ



2 Ο ΔΙΑΚΟΠΤΗΣ ΚΛΕΙΝΕΙ



3 ΤΟ ΠΛΗΓΜΑ ΑΠΟΡΡΟΦΑΤΑΙ



4 ΟΜΑΛΗ ΡΟΗ ΝΕΡΟΥ



Mitigating measures [\[edit\]](#)

Water hammer has caused accidents and fatalities, but usually damage is limited to breakage of pipes or appendages. An engineer should always assess the risk of a pipeline burst. Pipelines transporting hazardous liquids or gases warrant special care in design, construction, and operation. Hydroelectric power plants especially must be carefully designed and maintained because the water hammer can cause water pipes to fail catastrophically.

The following characteristics may reduce or eliminate water hammer:

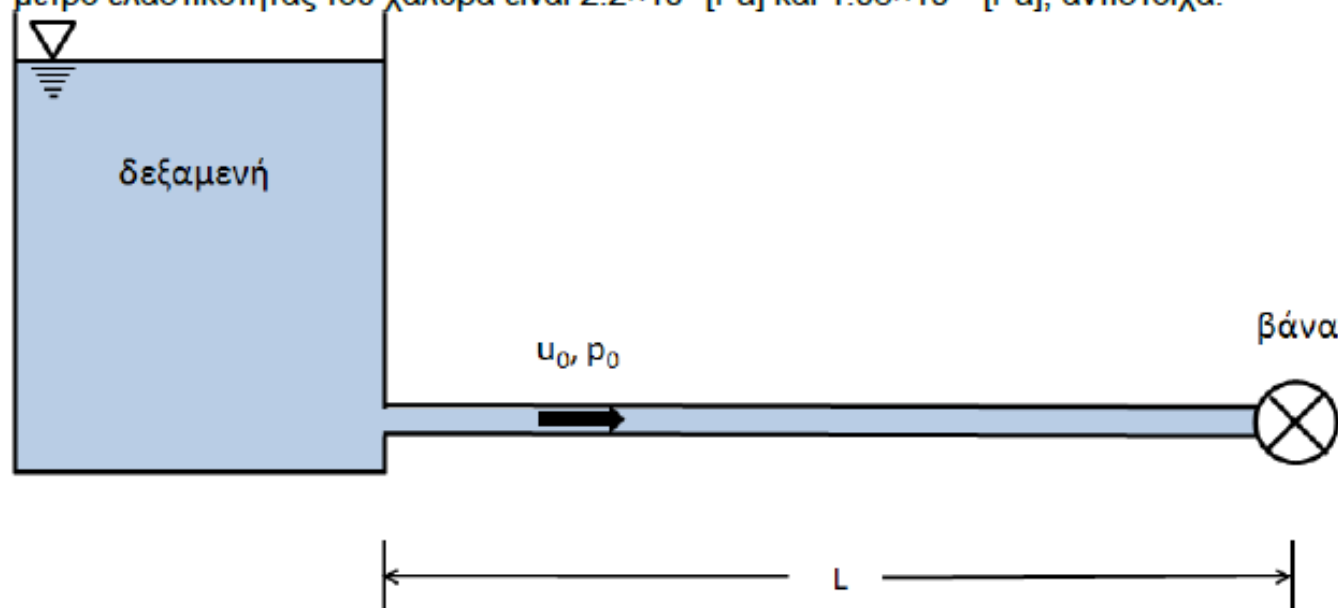
- Reduce the pressure of the water supply to the building by fitting a regulator.
- Lower fluid velocities. To keep water hammer low, pipe-sizing charts for some applications recommend flow velocity at or below 1.5 m/s (4.9 ft/s)
- Fit slowly closing valves. Toilet fill valves are available in a quiet fill type that closes quietly.
- High pipeline pressure rating (expensive).
- Good pipeline control (start-up and shut-down procedures).
- [Water towers](#) (used in many [drinking water](#) systems) help maintain steady flow rates and trap large pressure fluctuations.
- Air vessels work in much the same way as water towers, but are pressurized. They typically have an air cushion above the fluid level in the vessel, which may be regulated or separated by a bladder. Sizes of air vessels may be up to hundreds of cubic meters on large pipelines. They come in many shapes, sizes and configurations. Such vessels often are called accumulators or expansion tanks.
- A [hydropneumatic device](#) similar in principle to a [shock absorber](#) called a 'Water Hammer Arrestor' can be installed between the water pipe and the machine, to absorb the shock and stop the banging.
- Air valves often remediate low pressures at high points in the pipeline. Though effective, sometimes large numbers of air valves need be installed. These valves also allow air into the system, which is often unwanted.
- Shorter branch pipe lengths.
- Shorter lengths of straight pipe, i.e. add elbows, expansion loops. Water hammer is related to the speed of sound in the fluid, and elbows reduce the influences of pressure waves.
- Arranging the larger piping in loops that supply shorter smaller run-out pipe branches. With looped piping, lower velocity flows from both sides of a loop can serve a branch.
- [Flywheel](#) on pump.
- Pumping station bypass.

1^ο ΘΕΜΑ (2.0 μονάδες):

Νερό ρέει με παροχή 10 [lt/s] από δεξαμενή μέσα σε χάλκινο σωλήνα μήκους L και διαμέτρου 2", ο οποίος στο τέλος του έχει μία ανοικτή βάνα. Ο σωλήνας βρίσκεται σε πίεση 80 [bar]. Εάν η βάνα κλείσει εντελώς μέσα σε χρονικό διάστημα 0.035 [s], να υπολογίσετε:

- Το ελάχιστο μήκος L του σωλήνα για το οποίο δημιουργείται υδραυλικό πλήγμα στην εγκατάσταση. **(0.5 μονάδες)**
- Για το παραπάνω μήκος σωλήνα, να βρείτε τη διαφορά πυκνότητας και τη διαφορά πίεσης, πριν και μετά το υδραυλικό πλήγμα. **(1.0 μονάδα)**
- Τη μέγιστη και ελάχιστη πίεση, καθώς και τη μέγιστη και ελάχιστη πυκνότητα μέσα στον αγωγό μετά το κλείσιμο της βάνας. **(0.5 μονάδες)**

Η πυκνότητα του νερού είναι 998.2 [kg/m³], ενώ το μέτρο συμπίεστότητάς του νερού και το μέτρο ελαστικότητας του χάλυβα είναι 2.2×10^9 [Pa] και 1.08×10^{11} [Pa], αντίστοιχα.



1^ο ΘΕΜΑ:

$$\alpha) t \leq \frac{2L}{\alpha} \Rightarrow L \geq \frac{t \cdot \alpha}{2}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{k}{\rho}} = \sqrt{\frac{2.2 \times 10^9}{998.2}} = 1484.58 \text{ m/s}$$

$$\beta) u_0 = \frac{Q}{A} = \frac{\frac{10}{1000}}{\frac{\pi}{4} \times (2 \times 0.0254)^2} = 4.93 \text{ [cm/s]}$$

$$\Rightarrow L \geq \frac{0.035 \times 1484.58}{2} = 25.98 \text{ [cm]}$$

$$\Delta p = \rho \cdot \alpha \cdot u_0 = 998.2 \times 1484.58 \times 4.93 = 7305805.2 \text{ [Pa]} = 73.06 \text{ [bar]}$$

$$\Delta \rho = \rho_1 \frac{\Delta p}{k} \approx \rho \frac{\Delta p}{k} = 998.2 \times \frac{7305805.2}{2.2 \times 10^9} = 3.315 \text{ [kg/m}^3\text{]}$$

$$\gamma) \rho_{\max} = \rho_0 + \Delta \rho = 80 + 73.06 = 153.06 \text{ [bar]}$$

$$\rho_{\min} = \rho_0 - \Delta \rho = 80 - 73.06 = 6.94 \text{ [bar]}$$

$$\rho_{\max} = \rho_0 + \Delta \rho = 998.2 + 3.315 = 1001.515 \text{ [kg/m}^3\text{]}$$

$$\rho_{\min} = \rho_0 - \Delta \rho = 998.2 - 3.315 = 994.885 \text{ [kg/m}^3\text{]}$$