ΑΝΟΙΧΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Μηχανική Ρευστών ΙΙ

Ενότητα 4): Επανάληψη ενοτήτων 1 και 2

Δ. Μισηρλής
Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών ΤΕ

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

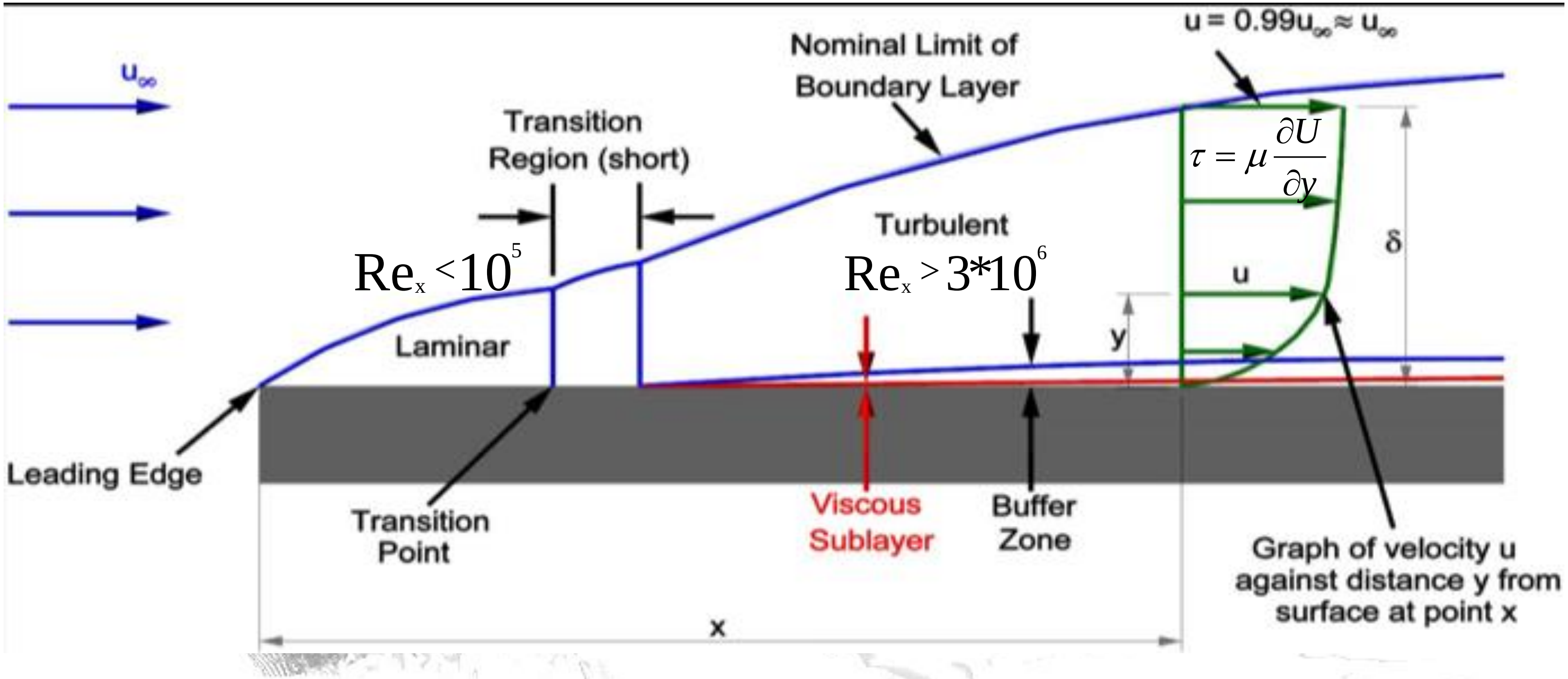
Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Κεντρικής Μακεδονίας» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Τίτλος ενότητας

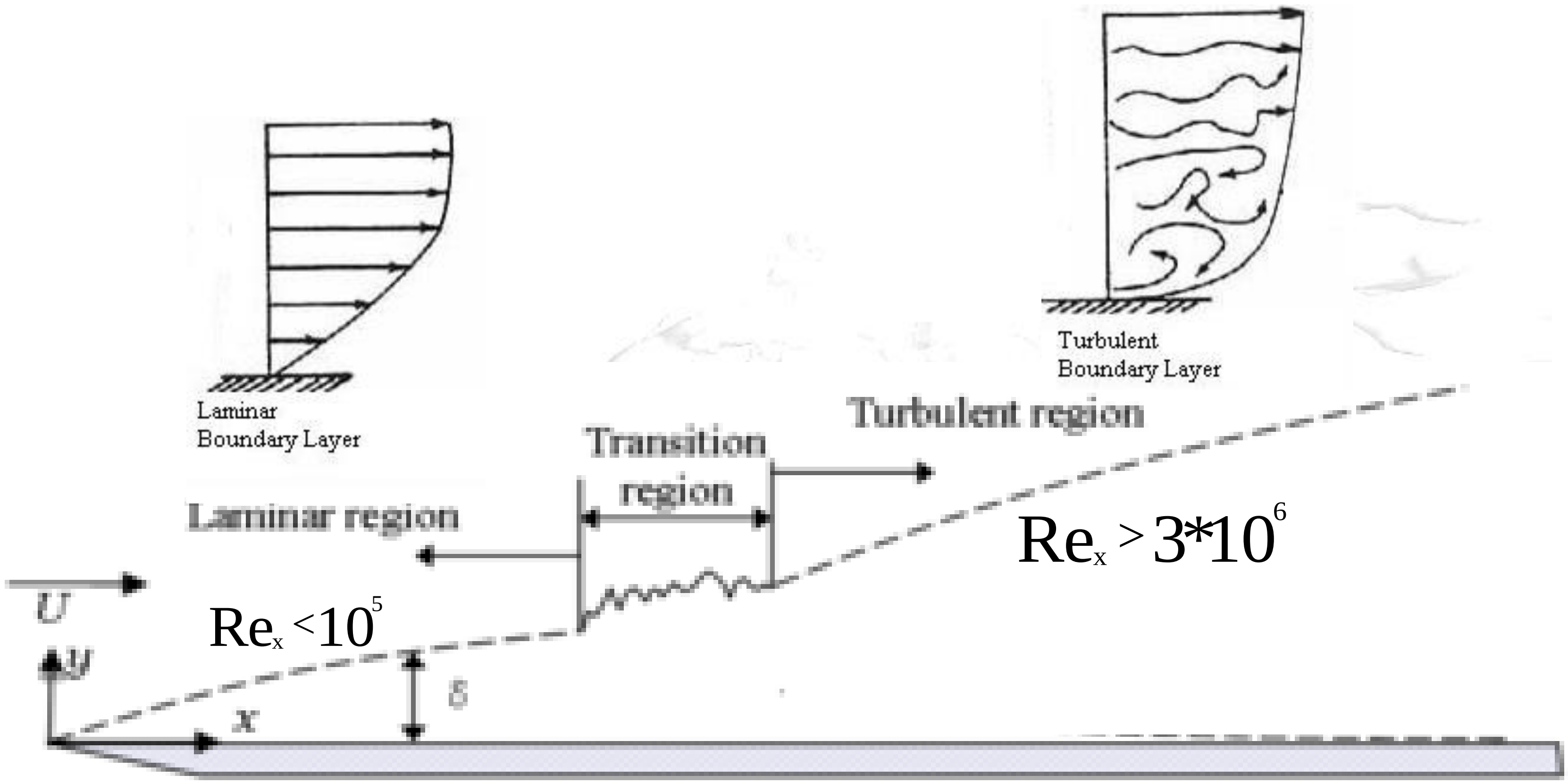
Επανάληψη ενότήτων 1 και 2

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ



$$\boxed{Re_x = \frac{U_\infty x}{\nu}}$$

$$\boxed{\frac{\delta}{x} = \begin{cases} \dfrac{5.0}{Re_x^{0.5}} & Re_x < 10^5 \\[2ex] \dfrac{0.16}{Re_x^{1/7}} & Re_x > 3*10^6 \end{cases}}$$



$$\boxed{\mathrm{Re}_x = \frac{U_\infty x}{\nu}}$$

$$\frac{\delta}{x} = \begin{cases} \dfrac{5.0}{\mathrm{Re}_x^{0.5}} & \mathrm{Re}_x < 10^5 \\[2ex] \dfrac{0.16}{\mathrm{Re}_x^{1/7}} & \mathrm{Re}_x > 3*10^6 \end{cases}$$

1.4.2 ΠΑΧΟΣ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗΣ

Μία ενδιαφέρουσα ιδιότητα του ΟΣ είναι ότι αν και είναι λεπτό, προκαλεί μία μετατόπιση της άτριβης ροής μακριά από την πλάκα. Όπως φαίνεται στο σχήμα, οι ροϊκές γραμμές πρέπει να απομακρυνθούν από την πλάκα κατά **δ*(x)**, ώστε να ικανοποιηθεί η συνθήκη διατήρησης της μάζας μεταξύ εισόδου και εξόδου:

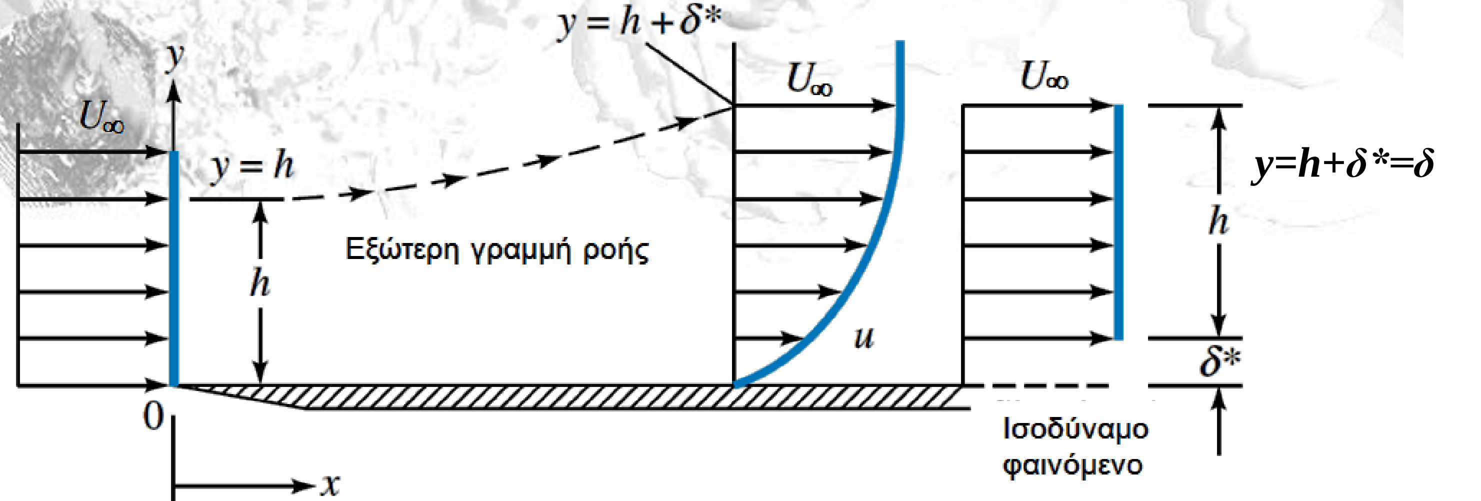
$$\int_0^h \rho U_\infty b\, dy = \int_0^\delta \rho u b\, dy \qquad \delta = h + \delta^*$$

όπου εισάγουμε το μέγεθος **δ*** και το ονομάζουμε **πάχος μετατόπισης** του ΟΣ. Εάν διαγράψουμε το κοινό γινόμενο *ρb* από τα δύο μέλη και προσθαφαιρέσουμε την ταχύτητα U_∞ στο δεξί ολοκλήρωμα, έχουμε:

$$U_\infty h = \int_0^\delta (U_\infty + u - U_\infty)\, dy = U_\infty(h + \delta^*) + \int_0^\delta (u - U_\infty)\, dy$$

και τελικά:

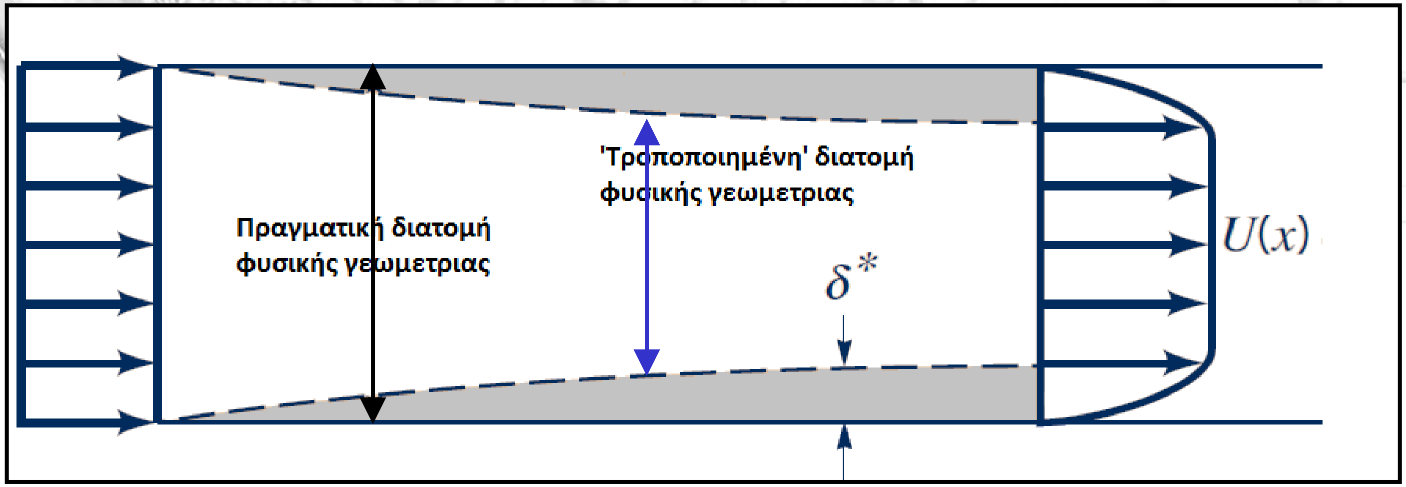
$$\boxed{\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dy}$$



Το πάχος μετατόπισης αντιπροσωπεύει το πάχος εκείνο κατά το οποίο πρέπει να αυξηθεί το πάχος του σώματος ώστε μια ‘φανταστική’ ομοιόμορφη ατριβής ροή να έχει τα ίδια ρευστομηχανικά χαρακτηριστικά με την πραγματική ροή.

Η προσέγγιση αυτή μας επιτρέπει να προσομοιώσουμε την παρουσία την οποία έχει το οριακό στρώμα στη ροή εκτός της περιοχής του οριακού στρώματος προσθέτοντας το πάχος μετατόπισης στην πραγματική γεωμετρία του τοιχώματος και αντιμετωπίζοντας τη ροή γύρω από το ‘τροποποιημένο’ σώμα ως ατριβή.

$$\boxed{\delta^* = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dy}$$



ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΤΑ VON KÁRMÁN

Η τοπική τιμή της **δύναμης αντίστασης**, **D(x)**, σε μία θέση x (x=0 στην αρχή της πλάκας) που ασκεί το ρευστό στην πλακα, ανεξάρτητα από το εάν η ροή είναι στρωτή ή τυρβώδης, δίνεται από τη σχέση:

$$D(x) = \rho b \int_0^{\delta(x)} u(U_\infty - u)\, dy$$

όπου ρ=πυκνότητα ρευστού [kg/m^3], b=πλάτος πλάκας [m] και u=u(x) τοπική κατανομή της ταχύτητας [m/s]. Η εξίσωση προτάθηκε από τον von Kármán (1921), ο οποίος την εξέφρασε σε πιο "βολική" μορφή, συναρτήσει του **πάχους ορμής**, **θ** (*momentum thickness*), το οποίο αποτελεί μέτρο της ολικής αντίστασης της πλάκας.

$$\boxed{D(x) = \rho b U_\infty^2 \theta} \qquad \boxed{\theta = \int_0^\delta \frac{u}{U_\infty}\left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dy}$$

Η παραγώγιση της αντίστασης και επειδή U_∞=σταθερό δίνει:

$$\frac{dD}{dx} = \rho b U_\infty^2 \frac{d\theta}{dx}$$

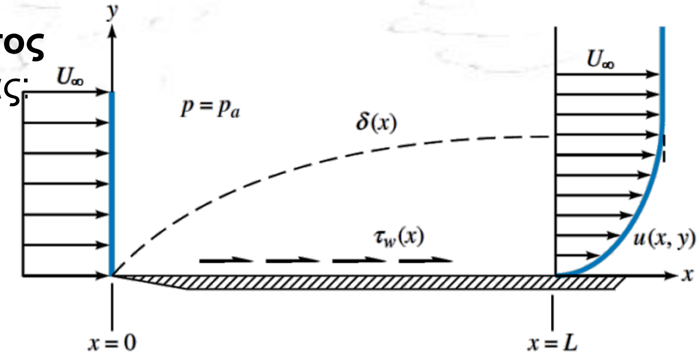
Ο Kármán επίσης υπολόγισε την αντίσταση D(x) από την εξίσωσή της με την ολοκλήρωση της δύναμης που προέρχεται από τη διατμητική τάση σε έναν όγκο ελέγχου γύρω από την πλάκα:

$$D(x) = b\int_0^x \tau_w(x)\, dx \quad \text{και παραγωγίζοντας:} \quad \frac{dD}{dx} = b\tau_w$$

Ο Kármán κατέληξε στην ονομαζόμενη ως **σχέση ολοκληρώματος της ορμής** (*momentum-integral relation*) του ΟΣ επίπεδης πλάκας:

$$\tau_w = \rho U_\infty^2 \frac{d\theta}{dx}$$

Η σχέση αυτή ισχύει για στρωτή και τυρβώδη ροή.



Ο Kármán υπέθεσε μία προσεγγιστική κατανομή ταχύτητας για στρωτή ροή παραβολικής μορφής (2ου βαθμού):

$$u(x, y) \approx U_\infty\left(\frac{2y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2}\right) \qquad 0 \le y \le \delta(x)$$

Η προσεγγιστική αυτή σχέση επιτρέπει την εκτίμηση τόσο του πάχους ορμής, **θ** όσο και της διάτμησης στο τοίχωμα, **τ_w αλλά και της** τοπικής τιμής της **δύναμης αντίστασης D(x)**

$$\theta = \int_0^\delta \left(\frac{2y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2}\right)\left(1 - \frac{2y}{\delta} + \frac{y^2}{\delta^2}\right) dy \approx \frac{2}{15}\delta \qquad \tau_w = \mu \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} \approx \frac{2\mu U_\infty}{\delta}$$

$$D(x) = \rho b U_\infty^2 \theta$$

Συντελεστής επιφανειακής τριβής της πλάκας:

$$\tau_w = \mu \left.\frac{du}{dy}\right|_{y=0} \;\Rightarrow\; C_{f,x} \equiv \frac{\tau_w}{\rho u_\infty^2/2} \;\Rightarrow\; C_f = \frac{1}{L}\int_0^L C_{f,x}\,dx \;\Rightarrow\; F_D = C_f A \frac{\rho u_\infty^2}{2}$$

στρωτή

$$C_{f,x} = 0.664/\sqrt{\mathrm{Re}_x}$$
$$C_f = 1.328/\sqrt{\mathrm{Re}_L}$$

τυρβώδης

$$C_{f,x} = 0.0592\,\mathrm{Re}_x^{-1/5}$$
$$C_f = 0.074\,\mathrm{Re}_L^{-1/5}$$

μικτή

$$C_f = 0.074\,\mathrm{Re}_L^{-1/5} - 1742\,\mathrm{Re}_L^{-1} \qquad C_f = \frac{1}{L}\left(\int_0^{x_{cr}} C_{f,x\ \text{laminar}}\,dx + \int_{x_{cr}}^{L} C_{f,x,\ \text{turbulent}}\,dx\right)$$

- Το ΟΣ μπορεί να θεωρηθεί λεπτό εάν είναι, ας πούμε, **δ/x<0.1**. Αυτό συμβαίνει όταν δ/x=0.1=**5.0Re$_x^{1/2}$** δηλαδή όταν **Re$_x$=2500**. Για μικρότερους αριθμούς Re$_x$ θεωρούμε ότι η θεωρια του ΟΣ δεν ισχύει, καθώς το πάχος του ΟΣ επηρεάζει σημαντικά την εξωτερική άτριβη ροή.
- Το ανώτερο όριο για στρωτή ροή είναι **Re$_x$=3×10^6**. Όσο προχωράμε κατάντη, ο Re$_x$ αυξάνει και κάπου συμβαίνει μετάβαση σε τυρβώδη ροή.

2ο ΘΕΜΑ (3.5 μονάδες): ΗΜ/ΝΙΑ: 20 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2012

Επιβατηγό αεροπλάνο είναι έτοιμο να προσγειωθεί και προσεγγίζει το έδαφος με με ταχύτητα 420 [km/h]. Εάν η ροή πάνω από τα πτερύγιά του μπορεί να προσεγγιστεί ως ροη πάνω από επίπεδη πλάκα να υπολογίσετε:

(α) Τη μέγιστη απόσταση από την ακμή προσβολής του πτερυγίου όπου η ροή είναι οπωσδήποτε στρωτή και την ελάχιστη απόσταση όπου η ροή είναι οπωσδήποτε τυρβώδης. (***1.5 μονάδες***).

(β) Το πάχος του οριακού στρώματος σε απόσταση 65 [cm] από την ακμή προσβολής. (***1.0 μονάδα***).

(γ) Εάν η κατανομή της ταχύτητας δίνεται από τη σχέση **$u/U_\infty=(5/2)(y/\delta)-(2/B)(y^3/\delta^3)$** να υπολογίσετε το συντ/στή Β. (***1.0 μονάδα***).

2ο ΘΕΜΑ

α) $Re_{x\,max,lam} = 10^5$

$Re_{x\,min,turb} = 3\times10^6$

$Re_x = \dfrac{\rho \cdot x \cdot U_\infty}{\mu} = 7777777{,}78\, x$

$\rho = 1.2\ [kg/m^3]$

$\mu = 1.8\times10^{-5}\ [kg/ms]$

$U_\infty = \dfrac{420\times10^3}{3600} = 116{,}67\ [m/s]$

$\boxed{\begin{array}{l} X_{max,lam} = 0{,}01286\,m = 1{,}29\ [cm] \\ X_{min,turb} = 0{,}3857\ m = 38{,}57\ [cm] \end{array}}$

β) $Re_{x=0.65} = 7777777{,}78 \times 0.65 = 5.056\times10^6$ τυρβώδης

$\delta = x\dfrac{0.16}{Re_x^{1/7}} = 0.65\times\dfrac{0.16}{(5{,}056\times10^6)^{1/7}} = 0.01146\ [m] = \boxed{1{,}15\ [cm]}$

γ) Πρέπει όταν i) $y=0 \rightarrow U=0$ (ισχύει με κάθε Β) και

ii) $y=\delta \rightarrow U=U_\infty \Rightarrow \dfrac{5}{2}\times\dfrac{\delta}{\delta} - \dfrac{2}{B}\dfrac{\delta^3}{\delta^3} = 1 \Rightarrow \dfrac{5}{2}-1 = \dfrac{2}{B} \Rightarrow \dfrac{3}{2} = \dfrac{2}{B} \Rightarrow \boxed{B=\dfrac{4}{3}}$

2ο ΘΕΜΑ (2.0 μονάδες): ΗΜ/ΝΙΑ: 22 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2011

Αεροσκάφος κινείται στα 25000 πόδια με ταχύτητα 850 [km/h] σε σχέση με το έδαφος. Η θερμοκρασια του αέρα στο ύψος αυτό είναι –40 [^{o}C], ενώ η ταχύτητά του είναι 80 [km/h] στην ίδια κατεύθυνση με το αεροσκάφος. Αν θεωρήσουμε ότι οριακό στρώμα που δημιουργείται πάνω στην πτέρυγα (φτερό) του αεροσκάφους είναι από την αρχή (ακμή προσβολής) τυρβώδες, να υπολογίσετε το πάχος του στο τέλος της πτέρυγας (ακμή διαφυγής), με την υπόθεση ότι η πτέρυγα μπορεί να θεωρηθεί ως επίπεδη πλάκα. Το πλάτος της πτέρυγας είναι 6.8 [m].

2ο ΘΕΜΑ: Η σχετική ταχύτητα της πτέρυγας και του αέρα είναι $850-80=770$ km/h. Δηλαδή είναι ισοδύναμο με αέρα ταχύτητας 770 km/h που χτυπά ακίνητη πλάκα.

$$U_\infty = 770 \text{ km/h} = 770 \times \frac{1000}{3600} = 213.89 \text{ [m/s]}$$

$\nu = 1.04 \times 10^{-5}$ [m²/s] στους -40 [°C]

Εφόσον η ροή είναι παντού τυρβώδης, ισχύει ότι $\frac{\delta}{x} = \frac{0.16}{Re_x^{1/7}}$

$$x = 6.8 \text{ [m]} \rightarrow Re_x = \frac{U_\infty \cdot x}{\nu} = \frac{213.89 \times 6.8}{1.04 \times 10^{-5}} = 139.85 \times 10^6$$

$$\delta = \frac{0.16 x}{Re_x^{1/7}} = \frac{0.16 \times 6.8}{(139.85 \times 10^6)^{1/7}} = 0.0746 \text{ [m]} = \boxed{74.6 \text{ [mm]}}$$

Τ.Ε.Ι. ΣΕΡΡΩΝ, ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΙΑΣ, ΕΝΕΡΓΕΙΑΚΟΣ ΤΟΜΕΑΣ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΡΕΥΣΤΩΝ ΙΙ – ΘΕΩΡΙΑ
ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑΣ: ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΣΟΦΙΑΛΙΔΗΣ
ΗΜ/ΝΙΑ: 28 ΙΟΥΝΙΟΥ 2012
Η διάρκεια της εξέτασης είναι δύο (**2**) ώρες. Επιτρέπεται **μόνο μία χειρόγραφη κόλλα Α4 (γραμμένη από τον εξεταζόμενο), η οποία πρέπει να παραδοθεί οπωσδήποτε μαζί με την εκφώνηση και το γραπτό.**

1ο ΘΕΜΑ (4.0 μονάδες):

Επιβατηγό αεροπλάνο τροχιοδρομεί πριν την απογείωση με ταχύτητα 150 [km/h]. Εάν η ροή πάνω από τα πτερύγιά του μπορεί να προσεγγιστεί ως ροη πάνω από επίπεδη πλάκα να υπολογίσετε:

(α) Το πάχος του οριακού στρώματος του αέρα σε απόσταση 3 [cm] και 2.35 [m] από την ακμή προσβολής του πτερυγίου. (***1.5 μονάδες***).

(β) Τον συντ/στή Α, εάν η κατανομή της ταχύτητας του αέρα δίνεται από τη σχέση $u/U_\infty=(4/3)(y/\delta)-(1/A)(y^3/\delta^3)$ και τη διατμητική τάση του τοιχώματος, τ_w, σε απόσταση 3 [cm] από την ακμή προσβολής. (***1.0 μονάδα***).

(γ) Να εκφράσετε το πάχος μετατόπισης δ* ως συνάρτηση του πάχους του οριακού στρώματος, δ, εφόσον ισχύει η κατανομή της ταχύτητας του ερωτήματος (β). (***1.5 μονάδες***).

ΘΕΜΑ 1ο

$\rho = 1.225\ kg/m^3$, $\mu = 1.82\times10^{-5}\ Pa.s$ $\Rightarrow \nu = \frac{\mu}{\rho} = 1.4857\times10^{-5}\ \frac{m^2}{s}$

α) $U_\infty = 150\ km/h = \frac{150\times1000}{3600} = 41.67\ m/s$

$Re_x = \frac{U_\infty \cdot x}{\nu}$ $\xrightarrow{x_1=0.03}$ $Re_{x1} = 84142.16 < 10^5$ ΣΤΡΩΤΗ ΡΟΗ

$\boxed{x_2 = 2.35} \rightarrow Re_{x2} = 6591135.49 > 3\times10^6$ ΤΥΡΒΩΔΗΣ ΡΟΗ

$\delta_1 = x_1 \frac{5.0}{Re_{x1}^{0.5}} \Rightarrow \delta_1 = 0.000517 m = \boxed{0.52\ mm}$

$\delta_2 = x_2 \frac{0.16}{Re_{x2}^{1/7}} \Rightarrow \delta_2 = 0.03991 m = \boxed{39.91\ mm}$

β) $\frac{u}{U_\infty} = \frac{4}{3}\frac{y}{\delta} - \frac{1}{A}\frac{y^3}{\delta^3}$

πρέπει το προφίλ να ικανοποιεί τις δύο βασικές συνθήκες:

i) για $y=0$ (τοίχος) $\Rightarrow u = 0$ (ισχύει για κάθε A)

ii) για $y=\delta$ (αδιατάρακτη ροή) $\Rightarrow u = U_\infty \Rightarrow$

$$\frac{u}{U_\infty} = \frac{4}{3}\frac{\delta}{\delta} - \frac{1}{A}\frac{\delta^3}{\delta^3} = 1 \Rightarrow \frac{4}{3} - \frac{1}{A} = 1 \Rightarrow \frac{4}{3} - \frac{3}{3} = \frac{1}{A} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{A} \Rightarrow \boxed{A=3}$$

$$\tau_w = \mu \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} \Rightarrow \tau_w = \left(\mu \cdot \frac{4}{3\delta} - \frac{3y^2}{3\delta^3}\mu\right)_{y=0} U_\infty, \quad \boxed{\tau_w = \frac{4\mu}{3\delta} U_\infty}$$

$$\tau_w(x=0.03) = \frac{4\mu U_\infty}{3\delta_1} = \frac{4\times1.82\times10^{-5}}{3\times0.00052} U_\infty = 0.04667\, U_\infty\ [Pa]$$

γ) $\delta^* = \int_0^\delta \left(1-\frac{u}{u_\infty}\right)dy = \int_0^\delta \left(1 - \frac{4}{3}\frac{y}{\delta} + \frac{1}{3}\frac{y^3}{\delta^3}\right)dy = \int_0^\delta dy - \frac{4}{3\delta}\int_0^\delta y\,dy + \frac{1}{3\delta^3}\int_0^\delta y^3\,dy =$

$= [y]_0^\delta - \frac{4}{3\delta}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^\delta + \frac{1}{3\delta^3}\left[\frac{y^4}{4}\right]_0^\delta = \delta - \frac{4\delta^2}{6\delta} + \frac{\delta^4}{12\delta^3} = \delta - \frac{2}{3}\delta + \frac{1}{12}\delta =$

$= \delta\left(1-\frac{2}{3}+\frac{1}{12}\right) = \delta\left(\frac{12-8+1}{12}\right) = \frac{5}{12}\delta$

ΗΜ/ΝΙΑ: 17 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2011

3° ΘΕΜΑ (3.0 μονάδες):

Εάν η κατανομή της παράλληλης ταχύτητας μέσα στο οριακό στρώμα επίπεδης πλάκας χαρακτηρίζεται από τη συνάρτηση $u/U_\infty=(4/3)(y/\delta)-(1/3)(y^2/\delta^2)$, να υπολογίσετε το πάχος ορμής θ και το πάχος μετατόπισης δ*.

3.

$$\theta=\int_0^\delta \frac{u}{U_\infty}\left(1-\frac{u}{U_\infty}\right)dy=\int_0^\delta\left(\frac{4}{3}\frac{y}{\delta}-\frac{1}{3}\frac{y^2}{\delta^2}\right)\left(1-\frac{4}{3}\frac{y}{\delta}+\frac{1}{3}\frac{y^2}{\delta^2}\right)dy=\int_0^\delta\left(\frac{4}{3}\frac{y}{\delta}-\frac{1}{3}\frac{y^2}{\delta^2}-\frac{16}{9}\frac{y^2}{\delta^2}+\frac{4}{9}\frac{y^3}{\delta^3}+\frac{4}{9}\frac{y^3}{\delta^3}-\frac{1}{9}\frac{y^4}{\delta^4}\right)dy$$

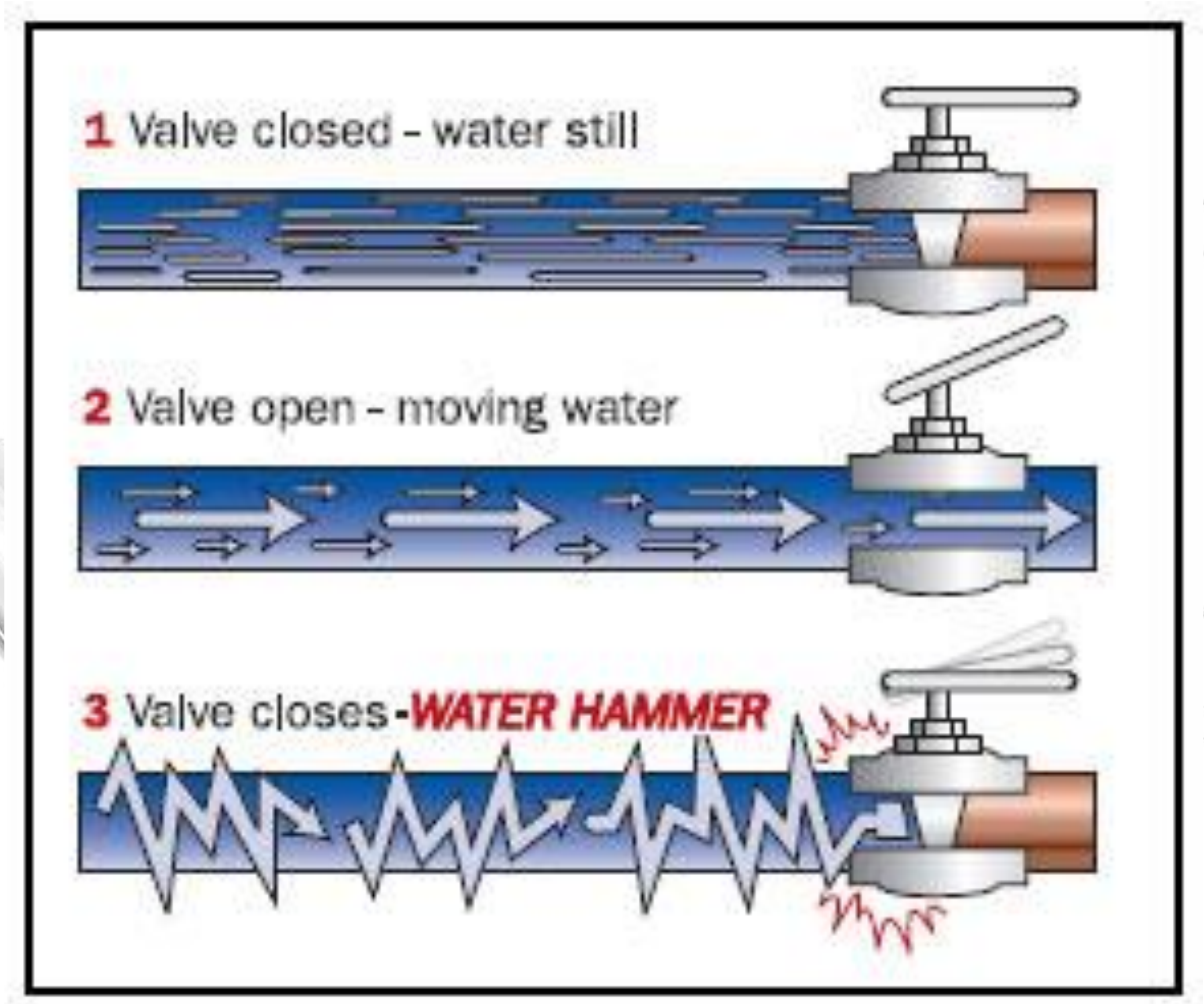
$$=\int_0^\delta\left(\frac{4}{3}\frac{y}{\delta}-\frac{19}{9}\frac{y^2}{\delta^2}+\frac{8}{9}\frac{y^3}{\delta^3}-\frac{1}{9}\frac{y^4}{\delta^4}\right)dy=\frac{4}{3\delta}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^\delta-\frac{19}{9\delta^2}\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^\delta+\frac{8}{9\delta^3}\left[\frac{y^4}{4}\right]_0^\delta-\frac{1}{9\delta^4}\left[\frac{y^5}{5}\right]_0^\delta=$$

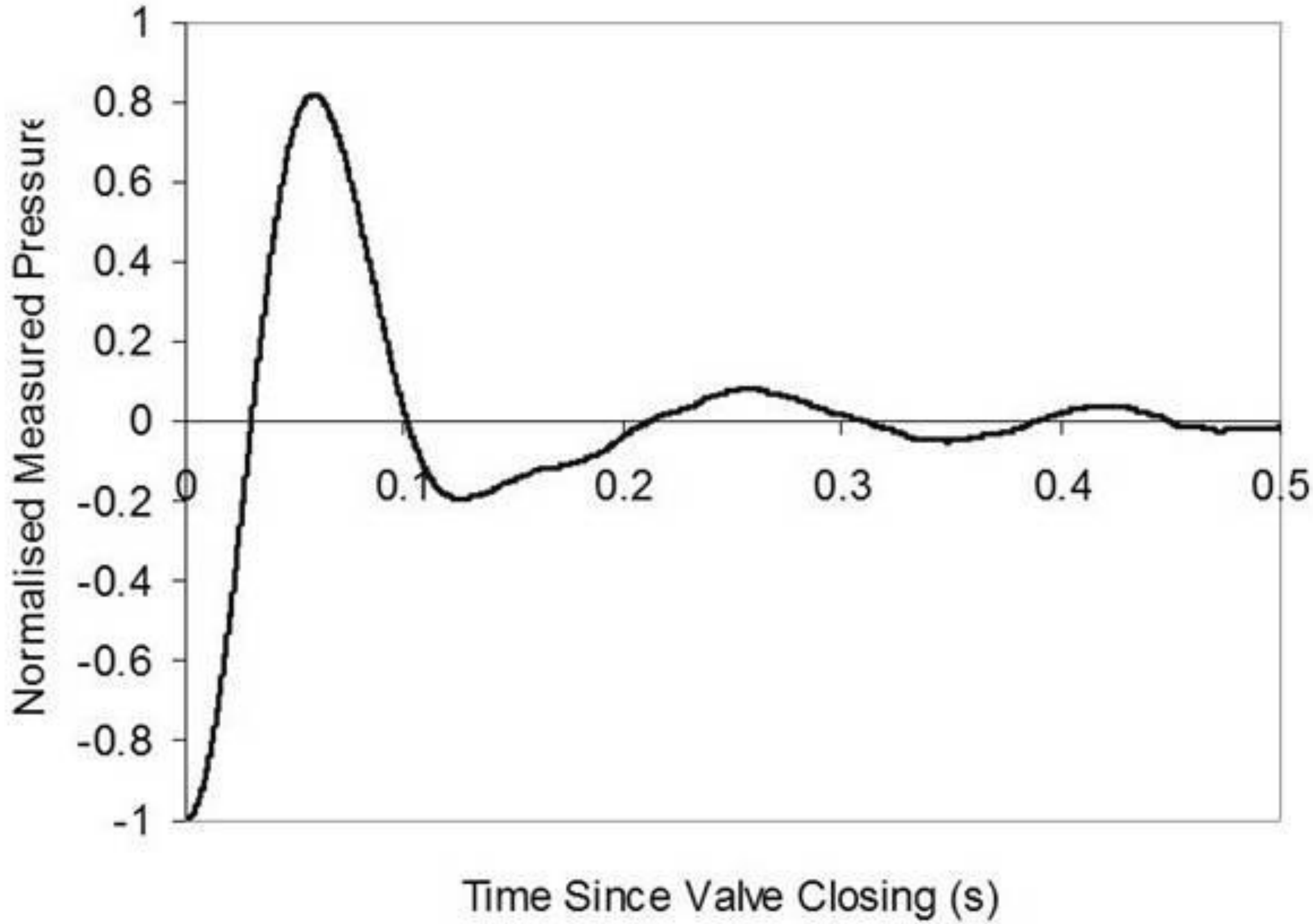
$$=\left(\frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{6}_{3}}-\frac{19}{27}+\frac{\cancel{8}^{2}}{\cancel{36}_{9}}-\frac{1}{45}\right)\delta=\frac{270-285+90-9}{405}\delta=\frac{66}{405}\delta=\boxed{\frac{22}{135}\delta=0.1630\delta}$$

$$\delta^*=\int_0^\delta\left(1-\frac{u}{U_\infty}\right)dy=\int_0^\delta\left(1-\frac{4}{3}\frac{y}{\delta}+\frac{1}{3}\frac{y^2}{\delta^2}\right)dy=\left[y\right]_0^\delta-\frac{4}{3\delta}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^\delta+\frac{1}{3\delta^2}\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^\delta=$$

$$=\delta-\frac{2\delta}{3}+\frac{1\delta}{9}=\frac{9-6+1}{9}\delta=\boxed{\frac{4}{9}\delta=0.4444\delta}$$

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ


1 Valve closed – water still
2 Valve open – moving water
3 Valve closes -WATER HAMMER


Normalised Measured Pressure
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
Time Since Valve Closing (s)

$$K = \frac{\Delta p}{-\frac{\Delta V}{V}} \Rightarrow K = -V\frac{\Delta p}{\Delta V} \qquad (5)$$

όπου V=όγκος ρευστού [m^3], ενώ το K του νερού είναι ίσο με 2.1×10^9 [Pa].

Επίσης, από τον ορισμό της πυκνότητας, **ρ=m/V**, εάν παραγωγίσουμε, έχουμε: $\Delta\rho = \frac{1}{V}\Delta m - \frac{m}{V^2}\Delta V$

και επειδή Δm=0 (λόγω Αρχής Διατήρησης Μάζας), τότε είναι:

$$\Delta\rho = -\frac{m}{V^2}\Delta V = -\left(\frac{m}{V}\right)\frac{1}{V}\Delta V \Rightarrow \Delta\rho = -\frac{\rho}{V}\Delta V \qquad (6)$$

Η εξίσωση (5) γράφεται και ως:

$$\frac{-V}{\Delta V} = \frac{K}{\Delta p} \qquad (7)$$

ενώ η εξίσωση (6),

χρησιμοποιώντας την (7) γίνεται:

$$\boxed{\Delta\rho = -\rho\frac{\Delta p}{K}} \qquad (8)$$

Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι **$\Delta\rho=\rho_2-\rho_1$**, και υποθέτωντας ότι **$\rho_2\approx\rho_1\approx\rho$**, η εξίσωση (8) γίνεται:

$$\rho_2-\rho_1 = \rho_1\frac{\Delta p}{K} \Rightarrow \rho_2 = \rho_1 + \rho_1\frac{\Delta p}{K} \Rightarrow \rho_2 = \rho_1\left(1+\frac{\Delta p}{K}\right) \qquad (9)$$

Συνεπώς, η εξίσωση της συνέχειας (3), λόγω της (9) γίνεται:

$$\rho_1 u_1 = \rho_1\left(1+\frac{\Delta p}{K}\right)u_2 \Rightarrow u_1-u_2 = u_2\frac{\Delta p}{K} \qquad (10)$$

Ενώ η εξίσωση της ορμής (4), λόγω τώρα της (10) μετασχηματίζεται ως:

$$\rho_1 u_1 u_2\frac{\Delta p}{K} = \Delta p \Rightarrow u_1 u_2 = \frac{K}{\rho_1} \qquad (11)$$

Επειδή όμως $\boldsymbol{u_1=u_0+\alpha}$ και $\boldsymbol{u_2=\alpha}$, έχουμε ότι: $\boldsymbol{u_1u_2=(u_0+\alpha)\alpha}$ και εάν τη συγκρίνουμε με την εξίσωση (11), έχουμε ότι:

$$u_1u_2=(u_0+\alpha)\alpha=\frac{K}{\rho_1} \quad \textbf{(12)}$$

και θεωρώντας πάλι ότι $\boldsymbol{\rho_2\approx\rho_1\approx\rho}$ και ότι $\boldsymbol{\alpha>>u_0}$, τότε η (12) γίνεται:

$$\boxed{(u_0+\alpha)\alpha=\frac{K}{\rho_1}\Rightarrow\alpha^2=\frac{K}{\rho}\Rightarrow\alpha=\sqrt{\frac{K}{\rho}}} \quad \textbf{(13)}$$

η οποία μας δίνει ότι **α≈1450 [m/s]** για το νερό.

Τέλος, επειδή $\boldsymbol{u_1-u_2=(u_0+\alpha)-\alpha=u_0}$ και $\boldsymbol{u_1=u_0+\alpha\approx\alpha}$ (επειδή $\boldsymbol{\alpha>>u_0}$), υπολογίζεται η υπερπίεση του κύματος συμπίεσης (ή υποπίεση για κύματα εκτόνωσης), Δp, από την εξίσωση ορμής (4) ως:

$$\boxed{\Delta p=\rho_1u_1(u_1-u_2)\Rightarrow\Delta p=\rho\alpha u_0} \quad \textbf{(14)}$$

Σημειώνεται ότι για να υπάρξει υδραυλικό πλήγμα, πρέπει το γεγονός που θα το προκαλέσει (π.χ. κλείσιμο βάνας) να διαρκέσει λιγότερο από $\boldsymbol{t=2L/\alpha}$, όπου L=μήκος αγωγού όπου θα μεταδοθεί το κύμα πίεσης και α=ταχύτητα του ήχου του ρευστού όπου θα εκδηλωθεί το υδραυλικό πλήγμα.

ΗΜ/ΝΙΑ: 30 ΙΟΥΝΙΟΥ 2011
- Η διάρκεια της γραπτής εξέτασης είναι δύο (**2**) ώρες.
- Μπορείτε να συμβουλεύεστε οτιδήποτε επιθυμείτε.
- Η παρούσα εκφώνηση **πρέπει να παραδοθεί** μαζί με το γραπτό.

1ο ΘΕΜΑ (2.0 μονάδες):

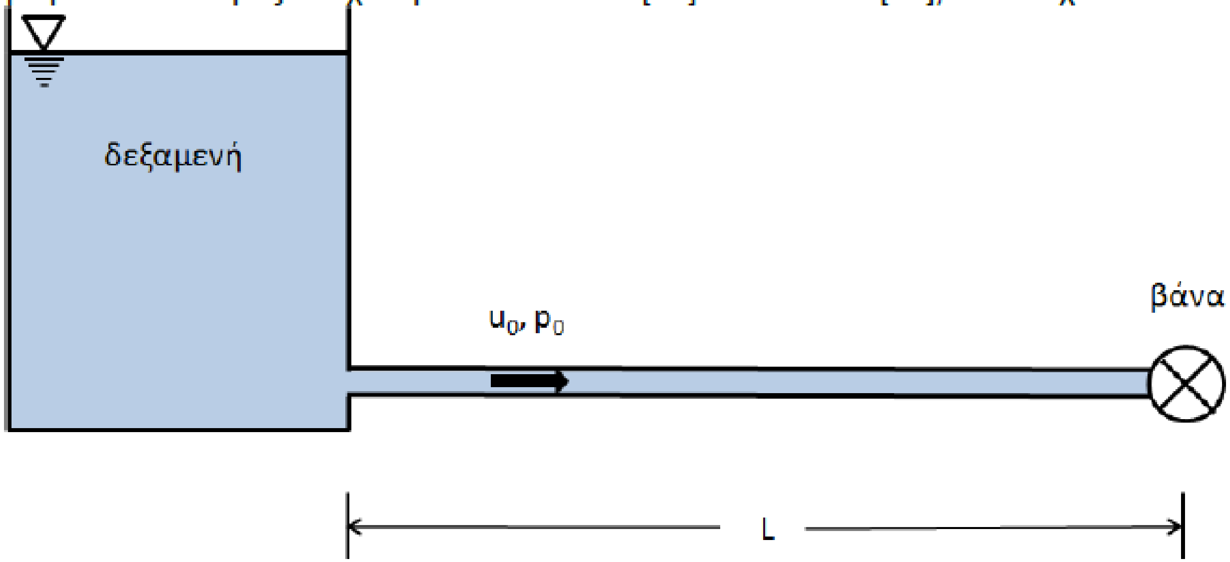
Νερό ρέει με παροχή 335 [lt/min] από δεξαμενή μέσα σε χαλύβδινο σωλήνα μήκους L=56.5 [m] και διαμέτρου 3", ο οποίος στο τέλος του έχει μία ανοικτή βάνα. Ο σωλήνας βρίσκεται σε πίεση 22 [bar]. Εάν η βάνα κλείσει εντελώς, να υπολογίσετε:

(α) Το χρονικό διάστημα του κλεισίματος της βάνας, κάτω από το οποίο προκαλείται υδραυλικό πλήγμα στην εγκατάσταση (***0.5 μονάδες***).

(β) Τη διαφορά πυκνότητας και τη διαφορά πίεσης, πριν και μετά το υδραυλικό πλήγμα, εάν η βάνα κλείσει σε μέσα σε διάστημα Δt=0.02 [s] (***1.0 μονάδα***).

(γ) Τη μέγιστη και ελάχιστη πίεση, καθώς και τη μέγιστη και ελάχιστη πυκνότητα μέσα στον αγωγό για το κλείσιμο της βάνας του ερωτήματος (β) (***0.5 μονάδες***).

Η πυκνότητα του νερού είναι 998.2 [kg/m^3], ενώ το μέτρο συμπιεστότητάς του νερού και το μέτρο ελαστικότητας του χάλυβα είναι 2.1×10^9 [Pa] και 2.1×10^{11} [Pa], αντιστοιχα.



① $\alpha = \sqrt{\dfrac{K}{\rho}} = \sqrt{\dfrac{2.1\times10^{9}}{998.2}} = 1450.44\ [m/s]$

α) $t_{cr} = \dfrac{2L}{\alpha} = \dfrac{2\times56.5}{1450.44} = 0.078\ [s]$

β) $\Delta p = \rho\cdot\alpha\cdot u_0 = 998.2\times1450.44\times1.2243 = 1772601.3\ [Pa] = 17.73\ [bar]$

$u_0 = \dfrac{Q}{A} = \dfrac{\frac{335}{60000}}{\frac{\pi}{4}\times(3\times0.0254)^2} = 1.2243\ [m/s]$

$\Delta\rho = \rho\cdot\dfrac{\Delta p}{K} = 998.2\times\dfrac{1772601.3}{2.1\times10^{9}} = 0.8426\ [Kg/m^3]$

γ) $p_{max} = p_0 + \Delta p = 22+17.73 = 39.73\ [bar]$, $\rho_{max} = \rho_0 + \Delta\rho = 999{,}04\ [Kg/m^3]$

$p_{min} = p_0 - \Delta p = 22-17.73 = 4.27\ [bar]$, $\rho_{min} = \rho_0 - \Delta p = 997.36\ [Kg/m^3]$

3° ΘΕΜΑ (3.0 μονάδες):

Υδραυλικό λάδι πυκνότητας 890 [kg/m^3] και μέτρου συμπιεστότητάς 5.8×10^8 [Pa] ρέει μεταξύ δύο κλειστών δεξαμενών, από την πάνω προς την κάτω μέσω σωλήνα διαμέτρου 2" και συνολικού μήκους 36 [m]. Το όλο σύστημα βρίσκεται υπό σχετική πίεση 27 [bar], εκτός από την κάτω δεξαμενή η οποία βρίσκεται σε πίεση 27.15 [bar]. Η διαφορά στάθμης μεταξύ της ελεύθερης επιφάνειας της πάνω δεξαμενής και της εισόδου του σωλήνα στην κάτω δεξαμενή είναι 2.3 [m],

Τη ροή στον σωλήνα την ρυθμίζει βάνα η οποία αρχικά είναι εντελώς ανοικτή. Εάν υποθέσουμε ότι δεν υπάρχουν απώλειες πίεσης στο σύστημα, να υπολογίσετε:

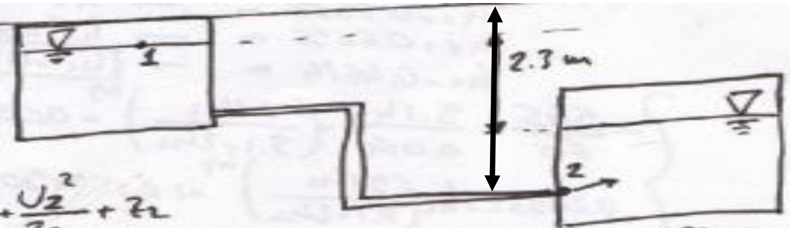
(α) Το χρονικό διάστημα του κλεισίματος της βάνας, κάτω από το οποίο προκαλείται υδραυλικό πλήγμα στην εγκατάσταση (***0.5 μονάδες***).

(β) Την ταχύτητα της ροής πριν το κλεισμο της βάνας (***0.5 μονάδες***).

(γ) Την ελάχιστη και μέγιστη τιμής της πίεσης, της πυκνότητας και της ταχύτητας εάν η βάνα κλείσει σε μέσα σε διάστημα Δt=0.066 [s] (***1.5 μονάδες***).

(δ) Την ελάχιστη και μέγιστη τιμής της πίεσης, της πυκνότητας και της ταχύτητας εάν η βάνα κλείσει σε μέσα σε διάστημα Δt=0.096 [s] (***0.5 μονάδες***).

ΘΕΜΑ 3



Bernoulli (1)→(2):

$$\frac{P_1}{\gamma}+\frac{U_1^2}{2g}+z_1=\frac{P_2}{\gamma}+\frac{U_2^2}{2g}+z_2 \quad (U_1^2 \to 0)$$

$\gamma = 890 \times 9.81 = 8730.9$ [N/m³]

$z_2 = 0$, $z_1 = 2.3$ m

$P_1 = 27\times10^5$, $P_2 = 27.15\times10^5$ [Pa]

$$\frac{2700000}{8730.9}+2.3=\frac{2715000}{8730.9}+\frac{U_2^2}{2\times9.81}+0 \Rightarrow$$

β) $U_2 = 3.38$ [m/s]

α) $t_{max} = \frac{2L}{\alpha}$

$L = 36$ m, $\alpha = \sqrt{\frac{K}{\rho}} = \sqrt{\frac{5.8\times10^8}{890}} = 807.27$ m/s $\Big\} \Rightarrow t_{max} = \frac{2\times36}{807.27} = 0.0892$ [s]

γ) $\boxed{0.066 < 0.0892}$ → Υπάρχει Υδραυλικό πλήγμα

$U_{min} = 0.0$ [m/s]

$U_{max} = U_o = 3.38$ [m/s] (και στις δύο δ/σεις)

$p_{min} = p_o - \Delta p = 27 - 24.28 = 2.72$ [bar]

$p_{max} = p_o + \Delta p = 27 + 24.28 = 51.28$ [bar]

$\Delta p = \rho \alpha U_o = 890 \times 807.27 \times 3.38 = 24.28$ [bar]

$\rho_{min} = \rho_o - \Delta\rho = 890 - 3.73 = 886.27$ [Kg/m³]

$\rho_{max} = \rho_o + \Delta\rho = 890 + 3.73 = 893.73$ [Kg/m³]

$\Delta\rho = -\rho\frac{\Delta p}{K} = -890 \cdot \frac{24.26\times10^5}{5.8\times10^8} = -3.73$ [Kg/m³]

δ) $0.096 > 0.0892$ → Δεν υπάρχει Υδραυλικό πλήγμα

$U_{min} = U_{max} = U_o = 3.38$ [m/s]

$p_{min} = p_{max} = p_o = 27$ [bar]

$\rho_{min} = \rho_{max} = \rho_o = 890$ [Kg/m³]