ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Κλείδης Κωνσταντίνος
ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΙΑΣ ΤΕ

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Κεντρικής Μακεδονίας» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Κεφάλαιο 2

Αριθμητική επίλυση μη γραμμικών εξισώσεων

2.1 Εντοπισμός των ριζών

Οι πραγματικές ρίζες μιας μη γραμμικής εξίσωσης

$$f(x)=0 \tag{2.1}$$

είναι , ως γνωστόν, τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης $y=f(x)$, με τον άξονα των x. Ο προσεγγιστικός υπολογισμός μιας ρίζας της εξ. (2.1) ξεκινά απ' τον προσδιορισμός ενός διαστήματος, *οσοδήποτε* *μικρού*, μέσα στο οποίο βρίσκεται η ζητούμενη ρίζα. Το διάστημα αυτό προσδιορίζεται με τη βοήθεια του *θεωρήματος* ***Bolzano***:

Έστω συνάρτηση $f(x)$ ορισμένη και συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, τέτοια ώστε $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$. Τότε υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα ρ της $f(x)=0$, που ανήκει στο (α, β).

Παράδειγμα Ι: Έστω η εξίσωση $f(x)=x^2-1=0$. Να εξεταστεί αν η εξίσωση έχει ρίζες στο διάστημα $[0, 5]$.

Είναι:

$\left.\begin{array}{l} f(0)=-1 \\ f(5)=24 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0)\cdot f(5)=-24<0$. Σύμφωνα λοιπόν με το θ. Bolzano υπάρχει ρίζα της εξίσωσης στο διάστημα $[0, 5]$.

Παράδειγμα ΙΙ: Να προσδιοριστούν τα διαστήματα μέσα στα οποία βρίσκονται οι ρίζες της εξίσωσης $f(x)=3x^3-9x+5=0$.

Υπολογίζουμε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης για να διαπιστώσουμε αν υπάρχουν *ακρότατα* (μέγιστα ή ελάχιστα), όπου είναι πιθανό να αλλάζει η *μονοτονία* της συνάρτησης.

$f'(x)=9x^2-9$. Οι ρίζες της $f'(x)=0$ είναι $x=\pm 1$.

Είναι $f(-\infty)<0, \quad f(-1)=11>0, \quad f(1)=-1<0, \quad f(+\infty)>0$

Έτσι $f(-\infty)\cdot f(-1)<0, \quad f(-1)\cdot f(1)<0, \quad f(1)\cdot f(+\infty)<0$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση έχει τρεις πραγματικές και άνισες ρίζες στα διαστήματα $(-\infty,-1], \quad [-1,1], \quad [1,+\infty)$

2.1.1 Γραφική μέθοδος εντοπισμού των ριζών

Ο εντοπισμός προσεγγιστικών τιμών των ριζών της εξίσωσης (2.1) είναι δυνατός με χρήση γραφημάτων. Μπορούμε να εργαστούμε με δύο τρόπους:

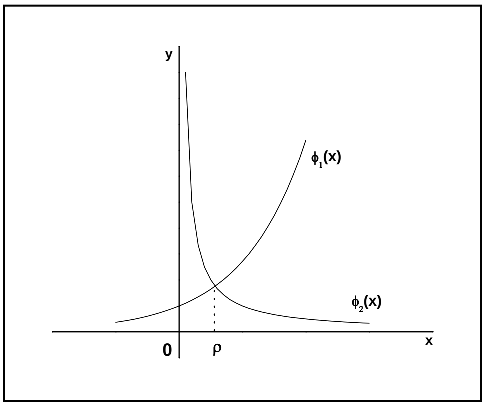
- Κατασκευάζουμε το γράφημα της συνάρτησης $y = f(x)$, σε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων. Οι τετμημένες των σημείων τομής του γραφήματος με τον άξονα x είναι οι ζητούμενες προσεγγιστικές τιμές των ριζών, που χρησιμοποιούνται συνήθως ως αρχικές τιμές για εύρεση ακριβέστερων προσεγγίσεων.
- Σε κάποιες περιπτώσεις είναι προτιμότερο να γράψουμε την εξίσωση $f(x)=0$ στη μορφή $\varphi_1(x)=\varphi_2(x)$, όπου $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ είναι απλούστερες συναρτήσεις. Στη συνέχεια κατασκευάζουμε τα γραφήματα των $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$. Οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφημάτων είναι οι ζητούμενες (αρχικές) προσεγγιστικές τιμές των ριζών της $f(x)=0$.

<u>*Παράδειγμα Ι*</u>: Να λυθεί η εξίσωση $f(x)=x\cdot e^x-1=0$, με τη μέθοδο των γραφημάτων.

Γράφουμε: $x\cdot e^x-1=0 \Rightarrow x\cdot e^x=1 \Rightarrow e^x=\dfrac{1}{x}$

Θέτουμε: $\varphi_1(x)=e^x \qquad \varphi_2(x)=\dfrac{1}{x}$

Από το διπλανό σχήμα διαπιστώνουμε ότι η εξίσωση έχει μία μόνο ρίζα ρ.



<u>*Παράδειγμα ΙΙ*</u>: Να λυθεί η εξίσωση $f(x)=x^3-x+1=0$, με τη μέθοδο των γραφημάτων.

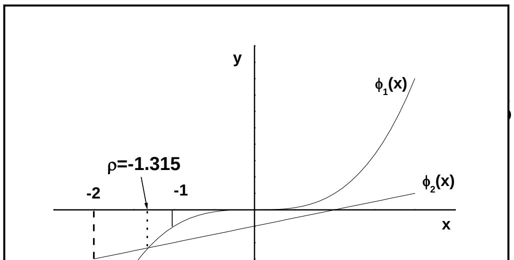
Η συνάρτηση $f(x)=x^3-x+1$ είναι πολυωνυμική και, συνεπώς, συνεχής σε όλο το *R*. Υπολογίζοντας τις τιμές της συνάρτησης σε κάποια σημεία του πεδίου ορισμού της βρίσκουμε: $f(-2)=-5,\ f(-1)=1,\ f(0)=1,\ f(1)=1,\ f(2)=7$ κ.ο.κ. Διαπιστώνουμε λοιπόν ότι

$f(-1)f(-2)=-5<0$, που σημαίνει ότι υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα ρ στο διάστημα (-2, -1).

Γράφουμε: $x^3-x+1=0 \Rightarrow x^3=x-1$

Θέτουμε: $\varphi_1(x)=x^3 \quad \varphi_2(x)=x-1$

Όπως φαίνεται στο σχήμα, μια ρίζα $\rho \cong 1.315$



βρίσκεται στο διάστημα (-2, -1).

2.1.2 Θεωρητική μέθοδος εντοπισμού των ριζών

Ας υποθέσουμε ότι για την εξ. (2.1) μπορούμε να βρούμε ένα διάστημα $[\alpha_o, \beta_o]$, στο οποίο η συνάρτηση $y = f(x)$ είναι συνεχής και ικανοποιείται η απαίτηση του θεωρήματος *Bolzano*. Τότε θα υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της (2.1) τέτοια ώστε $\alpha_o < \rho < \beta_o$.

Αν μπορούμε να προσδιορίσουμε έναν αριθμό $x_o \in [\alpha_o, \beta_o]$, τέτοιον ώστε η ρίζα να ανήκει σε κάποιο απ' τα διαστήματα $[\alpha_o, x_o]$ ή $[x_o, \beta_o]$, τότε μπορούμε να πάρουμε το διάστημα:

$$[\alpha_1, \beta_1] = \begin{cases} [\alpha_o, x_o] & \alpha\nu \quad f(\alpha_o) f(x_o) < 0 \\ [x_o, \beta_o] & \alpha\nu \quad f(\alpha_o) f(x_o) < 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

Με τον τρόπο αυτό προσδιορίζουμε μια *ακολουθία διαστημάτων*

$$[\alpha_o, \beta_o], [\alpha_1, \beta_1], [\alpha_2, \beta_2], ...[\alpha_n, \beta_n] \tag{2.3.α}$$

και την αντίστοιχη *ακολουθία προσεγγίσεων της ρίζας ρ*

$$x_o, x_1, x_2, ..., x_n \quad \mu\varepsilon \quad x_n \in [\alpha_n, \beta_n] \quad \kappa\alpha\iota \quad f(a_n) f(\beta_n) < 0 \tag{2.3.β}$$

Όταν το πλάτος του διαστήματος $[\alpha_n, \beta_n] \to 0$, για $n \to \infty$, τότε $x_n \to \rho$, γεγονός που σημαίνει ότι έχουμε μια προσέγγιση της ρίζας *ρ*.

Κάθε τέτοια μέθοδος προσέγγισης των ριζών μιας εξίσωσης ονομάζεται *<u>μέθοδος παρεμβολής</u>*, ακριβώς γιατί μεταξύ των ορίων κάθε διαστήματος $[\alpha_n, \beta_n]$ παρεμβάλλεται μια νέα προσέγγιση x_n της ρίζας ρ.

<u>Παρατηρήσεις:</u>

- Όταν σε κάποιο διάστημα $[\alpha_n, \beta_n]$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, η ρίζα *ρ* συμπίπτει με κάποιο απ' τα άκρα του, τότε διακόπτεται η διαδικασία, αφού έχει βρεθεί η *ακριβής τιμή* της ρίζας *ρ*.

- Στην πράξη, η διαδικασία διακόπτεται, όταν, για κάποιο *n*, το εύρος του διαστήματος $\left[\alpha_n,\beta_n\right]$ γίνει πολύ μικρό. Ως ρίζα της εξ. (2.1) θεωρείται η προσεγγιστική τιμή $x_n \in\left[\alpha_n,\beta_n\right]$, που έχει βρεθεί.

2.2 Υπολογισμός των ριζών με μεθόδους παρεμβολής

2.2.1 Μέθοδος διχοτόμησης

Με τη βοήθεια του θεωρήματος Bolzano εντοπίζουμε ένα διάστημα $\left[\alpha_o,\beta_o\right]$, στο οποίο η εξ. (2.1) έχει ρίζα ρ. Ελέγχουμε αν το <u>*μέσο*</u> $x_o=\dfrac{\alpha_o+\beta_0}{2}$ <u>*του*</u> <u>*διαστήματος*</u> είναι ρίζα της εξίσωσης. Αν όχι, εντοπίζουμε το διάστημα που περιέχει τη ρίζα, το οποίο θα είναι το $\left[\alpha_o,x_o\right]$ είτε το $\left[x_o,\beta_o\right]$ (βλ. εξ. 2.2). ελέγχουμε τώρα αν το μέσο $x_1=\dfrac{\alpha_1+\beta_1}{2}$, του $\left[\alpha_1,x_1\right]$ είναι ρίζα της εξίσωσης κ.ο.κ. Η ακολουθία των προσεγγίσεων που δημιουργείται (εξ. 2.3.β) <u>*συγκλίνει*</u> *στη ρίζα ρ*. Το σφάλμα της προσέγγισης, μετά από *n* επαναλήψεις είναι:

$$\left|E_n\right|=\left|x_n-\rho\right|\le\frac{\beta_o-\alpha_o}{2^{n+1}} \tag{2.4}$$

Αν μας ενδιαφέρει να βρεθεί ρίζα με προσέγγιση *k δεκαδικών ψηφίων*, τότε η (2.4) σε συνδυασμό με την (1.2) δίνει:

$$\frac{\beta_o-\alpha_o}{2^{n+1}}\le 0.5\cdot 10^{-k} \tag{2.5}$$

απ' την οποία υπολογίζουμε τον <u>*ελάχιστο*</u> <u>*αριθμό*</u> *επαναλήψεων που απαιτούνται.*

<u>*Παράδειγμα Ι*</u>: Αφού αποδειχθεί ότι η εξίσωση $x^3+x-1=0$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα (0,1), να βρεθεί η ρίζα αυτή με προσέγγιση ενός δεκαδικού ψηφίου και να γίνει εκτίμηση του σφάλματος. Έχει άλλη πραγματική ρίζα η εξίσωση αυτή; Ποιος είναι ο ελάχιστος απαιτούμενος αριθμός επαναλήψεων της μεθόδου διχοτόμησης, ώστε να βρεθεί η ρίζα με προσέγγιση 4 δεκαδικών ψηφίων;

Η συνάρτηση $f\left(x\right)=x^3+x-1$ είναι πολυωνυμική και γι΄αυτό συνεχής σε όλο το $\Re$. Είναι $f\left(0\right)=-1,\quad f\left(1\right)=1\quad\Rightarrow f\left(0\right)f\left(1\right)=-1<0$, οπότε η εξ. έχει τουλάχιστον μία ρίζα $\rho\in\left(0,1\right)$.

Η παράγωγος της συνάρτησης είναι $f'\left(x\right)=3x^2+1>0,\quad\forall x\in\Re$. Αυτό σημαίνει ότι είναι γνησίως αύξουσα και έτσι η ρίζα *ρ* είναι μοναδική και είναι η μόνη πραγματική ρίζα της εξίσωσης.

Απ' την εξ. (2.5) προκύπτει:

$$\frac{1-0}{2^{n+1}} \le 0.5 \cdot 10^{-k} \Rightarrow \frac{1}{2^n 2} \le \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^k} \overset{(k=1)}{\Rightarrow} \frac{1}{2^n} \le \frac{1}{10} \Rightarrow 2^n \ge 10 \Rightarrow n \ge 4$$, δηλ. απαιτούνται 4 επαναλήψεις.

1. Μέσο του (0,1):

$$x_o = \frac{1}{2} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{8} < 0 \quad \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) f(1) < 0 \quad \Rightarrow \rho \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

2. Μέσο του $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$:

$$x_1 = \frac{3}{4} \Rightarrow f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{11}{64} > 0 \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) f\left(\frac{3}{4}\right) < 0 \quad \Rightarrow \rho \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$$

3. Μέσο του $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$:

$$x_2 = \frac{5}{8} \Rightarrow f\left(\frac{5}{8}\right) = -\frac{67}{512} < 0 \Rightarrow f\left(\frac{5}{8}\right) f\left(\frac{3}{4}\right) < 0 \quad \Rightarrow \rho \in \left(\frac{5}{8}, \frac{3}{4}\right)$$

4. Μέσο του $\left(\frac{5}{8}, \frac{3}{4}\right)$:

$$x_3 = \frac{11}{16} \Rightarrow f\left(\frac{11}{16}\right) = \frac{51}{4096} > 0 \Rightarrow f\left(\frac{5}{8}\right) f\left(\frac{11}{16}\right) < 0 \quad \Rightarrow \rho \in \left(\frac{5}{8}, \frac{11}{16}\right)$$

Η ρίζα λοιπόν βρίσκεται στο διάστημα *(0.625, 0.6875)*, Αφού ζητείται με προσέγγιση ενός δεκαδικού ψηφίου είναι $\rho=0.6$.

Το σφάλμα της προσέγγισης υπολογίζεται με τη βοήθεια της εξ. (2.4) και είναι:

$$|E| \le \frac{1-0}{2^{4+1}} = 0.03125.$$

Αν μας ενδιαφέρει η εύρεση της ρίζας με προσέγγιση 4 δεκαδικών ψηφίων απαιτούνται 14 επαναλήψεις, όπως προκύπτει από την (2.5):

$$\frac{1-0}{2^{n+1}} \le 0.5 \cdot 10^{-k} \Rightarrow \frac{1}{2^n 2} \le \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^k} \Rightarrow \frac{1}{2^n} \le \frac{1}{10^4} \Rightarrow 2^n \ge 10^4 \Rightarrow n \ge 14$$

<u>Παράδειγμα ΙΙ</u>: Με τη μεθοδο της διχοτόμησης να υπολογιστεί, με ακρίβεια δύο δεκαδικών ψηφίων, μια ρίζα της εξίσωσης $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ στο διάστημα [1,2].

Η συνάρτηση $f(x)$ είναι πολυωνυμική και γι΄αυτό συνεχής σε όλο το $\Re$. Είναι $f(1) = -5, \quad f(2) = 14 \quad \Rightarrow f(1) f(2) = -70 < 0$, οπότε η εξ. έχει τουλάχιστον μία ρίζα $\rho \in (1, 2)$.

Απ' την εξ. (2.5) προκύπτει:
$\frac{1-0}{2^{n+1}} \le 0.5 \cdot 10^{-k} \Rightarrow \frac{1}{2^n 2} \le \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^k} \overset{(k=2)}{\Rightarrow} \frac{1}{2^n} \le \frac{1}{10^2} \Rightarrow 2^n \ge 100 \Rightarrow n \ge 7$, δηλ. απαιτούνται 7 επαναλήψεις, για την εύρεση της ρίζας με ακρίβεια δύο δεκαδικών ψηφίων:

1. Μέσο του (1,2):
$x_o = 1.5 \Rightarrow f(1.5) = 2.375 > 0 \quad \Rightarrow f(1)\,f(1.5) < 0 \quad \Rightarrow \rho \in (1,1.5)$

2. Μέσο του $(1,1.5)$:
$x_1 = 1.25 \Rightarrow f(1.25) = -1.796875 < 0 \Rightarrow f(1.25)\,f(1.5) < 0 \quad \Rightarrow \rho \in (1.25,1.5)$

3. Μέσο του $(1.25,1.5)$:
$x_2 = 1.375 \Rightarrow f(1.375) = 0.162109 > 0 \Rightarrow f(1.25)\,f(1.375) < 0 \quad \Rightarrow \rho \in (1.25,1.375)$

4. Μέσο του $(1.25,1.375)$:
$x_3 = 1.3125 \Rightarrow f(1.3125) = -0.848388 < 0 \Rightarrow f(1.3125)\,f(1.375) < 0 \quad \Rightarrow \rho \in (1.3125,1.375)$

5. Μέσο του $(1.3125,1.375)$:
$x_4 = 1.34375 \Rightarrow f(1.34375) < 0 \Rightarrow f(1.34375)\,f(1.375) < 0 \quad \Rightarrow \rho \in (1.34375,1.375)$

6. Μέσο του $(1.34375,1.375)$:
$x_4 = 1.359375 \Rightarrow f(1.359375) < 0 \Rightarrow f(1.359375)\,f(1.375) < 0 \quad \Rightarrow \rho \in (1.359375,1.375)$

7. Μέσο του $(1.359375,1.375)$:
$x_4 = 1.3671875 \Rightarrow f(1.3671875) > 0 \Rightarrow f(1.359375)\,f(1.3671875) < 0 \quad \Rightarrow \rho \in (1.359375,1.3671875)$

Από την τελευταία επανάληψη προκύπτει ότι η ζητούμενη ρίζα με ακρίβεια δύο δεκαδικών ψηφίων υπολογίζεται σε *ρ=1.36*. Το σφάλμα της ρίζας υπολογίζεται απ' την εξ. (2.4): $|E| \le \frac{2-1}{2^{7+1}} = 0.0039$

2.3 Υπολογισμός των ριζών με επαναληπτικές μεθόδους

2.3.1 Γενική επαναληπτική μέθοδος (Picard – Peano)

Η εξίσωση (2.1) μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$x = \varphi(x) \tag{2.6}$$

όπου $\varphi(x)$ παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$ και $\rho \in (\alpha,\beta)$ η ακριβής ρίζα της εξίσωσης (2.1). Θεωρούμε την ακολουθία σημείων $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$, που κατασκευάζεται με την αναδρομική σχέση:

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n = 0,1,2,.... \tag{2.7}$$

Αν ισχύει:

$$\left|\varphi'(x)\right| \le c < 1, \quad \forall x \in [\alpha, \beta] \tag{2.8}$$

όπου c σταθερή, τότε η ακολουθία (2.7) *συγκλίνει* στη ρίζα ρ, η οποία είναι μοναδική.

Μετά από *n* επαναλήψεις, το σφάλμα είναι $E_n = x_n - \rho$ και ισχύει:

$$\left|x_n - \rho\right| \le \frac{c^n}{1-c}\left|x_1 - x_o\right| \tag{2.9}$$

όπου x_0 μια ***αρχική προσέγγιση της ρίζας.***

Η μέθοδος υλοποιείται με τα ακόλουθα βήματα:

Βήμα 1. Γράφουμε την εξίσωση $y = f(x)$ σε ισοδύναμη μορφή $x = \varphi(x)$ (αν είναι δυνατό)

Βήμα 2. Υπολογίζουμε την παράγωγο $\varphi'(x)$ και λύνουμε την ανίσωση $\left|\varphi'(x)\right| < 1$. Ο στόχος είναι να βρούμε για ποιες τιμές x η μέθοδος συγκλίνει, δηλαδή το σφάλμα μειώνεται συνεχώς, ώστε να πάρουμε ρίζα με την επιθυμητή ακρίβεια.

- Αν $\left|\varphi'(x)\right| \cong 1 \;\Rightarrow$ αργή σύγκλιση
- Αν $\left|\varphi'(x)\right| \cong 0 \;\Rightarrow$ γρήγορη σύγκλιση

Βήμα 3. Ξεκινώντας από μια πρώτη προσέγγιση της ρίζας, x_o, βρίσκουμε την επόμενη προσέγγιση x_1.

Βήμα 4. Επαναλαμβάνουμε το Βήμα 3 *όσες φορές χρειαστεί*, υπολογίζοντας μια δεύτερη προσέγγιση x_2, στη συνέχεια x_3 κ.ο.κ. Κατασκευάζουμε έτσι μια ακολουθία τιμών, σύμφωνα με την εξ. (2.7).

Η διαδικασία διακόπτεται μόλις προκύψει $\boldsymbol{x_{n+1} = x_n}$

Παράδειγμα Ι: Με την επαναληπτική μέθοδο και ακρίβεια 3 δεκαδικών ψηφίων να βρεθεί μια ρίζα της εξίσωσης $f(x) = x^3 - 4x - 1 = 0$.

Βήμα 1. Γράφουμε $x^3 - 4x - 1 = 0 \Rightarrow 4x = x^3 - 1 \Rightarrow x = \dfrac{x^3-1}{4} \Rightarrow F(x) = \dfrac{x^3-1}{4}$

Βήμα 2. Είναι $F'(x) = \dfrac{3x^2}{4}$

$$\left|F'(x)\right| < 1 \Rightarrow \left|\frac{3x^2}{4}\right| < 1 \overset{\left(\frac{3x^2}{4}>0\right)}{\Rightarrow} \frac{3x^2}{4} < 1 \Rightarrow x^2 < \frac{4}{3} \Rightarrow |x| < \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow -\frac{2}{\sqrt{3}} < x < \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Βήμα 3. Αρχική προσέγγιση $x_o = 0$

Επανάληψη 1: $x_1 = F(x_o) = -\frac{1}{4} \Rightarrow x_1 = -0.250$

Βήμα 4. Επανάληψη 2: $x_2 = F(x_1) = \frac{(-0.250)^3 - 1}{4} = -0.2539 \Rightarrow x_2 = -0.254$

Επανάληψη 3: $x_3 = F(x_2) = \frac{(-0.254)^3 - 1}{4} = -0.25409 \Rightarrow x_3 = -0.254$

Αφού $x_2 = x_3 = -0.254$ σταματάμε τις επαναλήψεις. Η ζητούμενη ρίζα, με την επιθυμητή ακρίβεια, είναι $\rho = -0.254$.

Παράδειγμα ΙΙ: Με την επαναληπτική μέθοδο και ακρίβεια 2 δεκαδικών ψηφίων να βρεθεί μια ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 4x - \cos x = 0$.

Βήμα 1. Γράφουμε $4x - \cos x = 0 \Rightarrow 4x = \cos x \Rightarrow x = \frac{\cos x}{4} \Rightarrow F(x) = \frac{\cos x}{4}$

Βήμα 2. Είναι $F'(x) = -\frac{\sin x}{4}$

$|F'(x)| < 1 \Rightarrow \left|\frac{\sin x}{4}\right| < 1 \Rightarrow |\sin x| < 4$. Αυτό ισχύει $\forall\ x \in R$

Βήμα 3. Αρχική προσέγγιση $x_o = 0$

Επανάληψη 1: $x_1 = F(x_o) = \frac{\cos 0}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{4} = 0.25$

Βήμα 4. Επανάληψη 2: $x_2 = F(x_1) = \frac{\cos(0.25)}{4} = \frac{0.9689}{4} = 0.2422 \Rightarrow x_2 = 0.24$

Επανάληψη 3: $x_3 = F(x_2) = \frac{\cos(0.24)}{4} = \frac{0.9713}{4} = 0.2428 \Rightarrow x_3 = 0.24$

Αφού $x_2 = x_3 = 0.24$ σταματάμε τις επαναλήψεις. Η ζητούμενη ρίζα, με την επιθυμητή ακρίβεια, είναι $\rho = 0.24$.

Παράδειγμα ΙΙΙ: Με την επαναληπτική μέθοδο και ακρίβεια 3 δεκαδικών ψηφίων να βρεθεί μια ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 2x - \ln(x+1) - 4 = 0$.

Βήμα 1. Γράφουμε

$$2x - \ln(x+1) - 4 = 0 \Rightarrow 2x = \ln(x+1) + 4 \Rightarrow x = \frac{\ln(x+1)}{2} + 2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow F(x) = \frac{\ln(x+1)}{2} + 2$$

Βήμα 2. Είναι $F'(x)=\left(\frac{\ln(x+1)}{2}+2\right)'=\frac{1}{2}\left(\ln(x+1)\right)'=\frac{1}{2(x+1)}$

$$|F'(x)|<1\Rightarrow\left|\frac{1}{2(x+1)}\right|<1\Rightarrow\frac{1}{2|x+1|}<1\Rightarrow|x+1|>\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}x+1>\frac{1}{2}\\ x+1<-\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x>-\frac{1}{2}\\ x<-\frac{3}{2}\end{cases}\quad(1)$$

Για να ορίζεται το $\ln(x+1)$, θα πρέπει να ισχύει $x+1>0\Rightarrow x>-1\quad(2)$

Οι (1) και (2) συναληθεύουν για $x>-\frac{1}{2}$

Βήμα 3. Αρχική προσέγγιση $x_o=0$

Επανάληψη 1: $x_1=F(x_o)=\frac{\ln(0+1)}{2}+2\Rightarrow x_1=2$

Βήμα 4. Επανάληψη 2:

$$x_2=F(x_1)=\frac{\ln(2+1)}{2}+2=\frac{1.0986}{2}+2=2.5493\Rightarrow x_2=2.549$$

Επανάληψη 3:

$$x_3=F(x_2)=\frac{\ln(2.549+1)}{2}+2=\frac{1.266666}{2}+2=2.63333\Rightarrow x_3=2.633$$

Επανάληψη 4:

$$x_4=F(x_3)=\frac{\ln(2.633+1)}{2}+2=\frac{1.29006}{2}+2=2.6450\Rightarrow x_4=2.645$$

Επανάληψη 5:

$$x_5=F(x_4)=\frac{\ln(2.645+1)}{2}+2=\frac{1.29336}{2}+2=2.64668\Rightarrow x_5=2.647$$

Επανάληψη 5:

$$x_6=F(x_5)=\frac{\ln(2.647+1)}{2}+2=\frac{1.293905}{2}+2=2.64695\Rightarrow x_6=2.647$$

Αφού $x_5=x_6=2.647$ σταματάμε τις επαναλήψεις. Η ζητούμενη ρίζα, με την επιθυμητή ακρίβεια, είναι $\rho=2.647$.

2.3.2 Μέθοδος Newton – Raphson

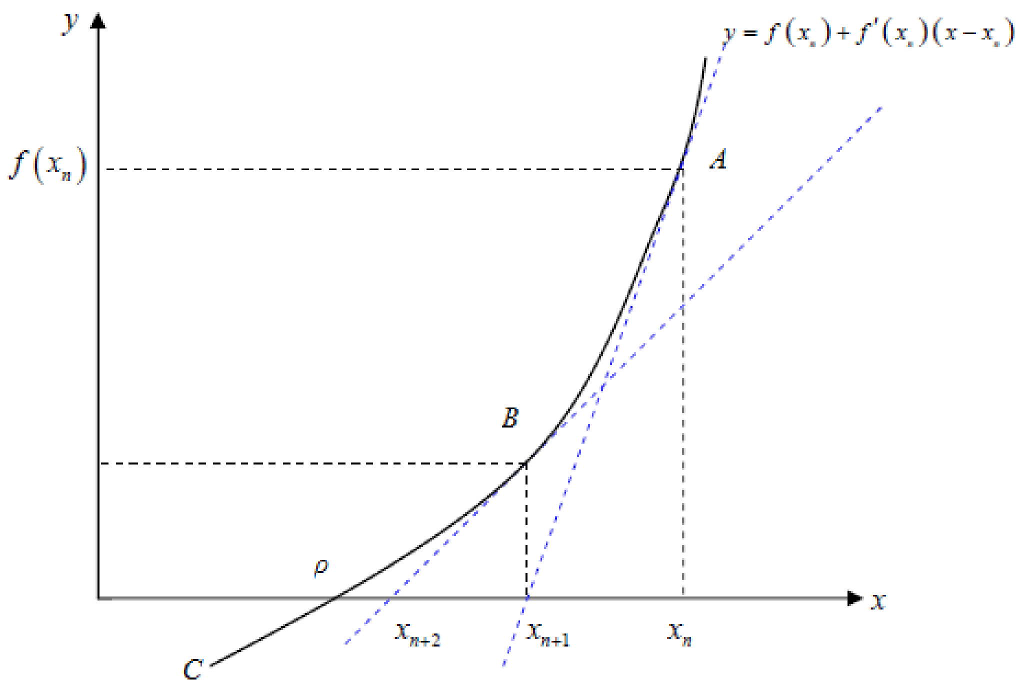
Η μέθοδος αυτή είναι η πιο δημοφιλής για τον προσδιορισμό μιας ρίζας σε μια μη-γραμμική εξίσωση. Είναι απλή στην εφαρμογή της και, για απλές ρίζες, η προκύπτουσα ακολουθία συγκλίνει γρήγορα (δηλ. απαιτούνται λίγες επαναλήψεις).

Περιγραφή της μεθόδου

Έστω η μη-γραμμική εξίσωση $f(x)=0$, όπου η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β), με συνεχή παράγωγο. Αν $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα *ρ* της εξίσωσης και είναι $\rho\in(\alpha,\beta)$. Για την προσέγγιση της ρίζας χρησιμοποιούμε τον αναγωγικό τύπο:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\quad n\in N \tag{2.10}$$

Η «κατασκευή» της εξ. (2.1) μπορεί να περιγραφεί με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $y=f(x)$.



Η γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι η γραμμή *C*, η οποία τέμνει τον *x*-άξονα στο σημείο *ρ*, το οποίο προφανώς είναι η ρίζα της εξίσωσης.

Απ' το σημείο $A(x_n,f(x_n))$, φέρουμε την εφαπτομένη στη *C*, η οποία έχει κλίση ίση με την πρώτη παράγωγο $f'(x_n)$ της συνάρτησης, στο σημείο Α. Η εξίσωση της εφαπτόμενης γραμμής είναι:

$$y-f(x_n)=f'(x_n)(x-x_n)\Rightarrow y=f(x_n)+f'(x_n)(x-x_n) \tag{2.11}$$

Η ευθεία (2.11) τέμνει τον *x*-άξονα στο σημείο με τετμημένη x_{n+1}. Για το σημείο αυτό ισχύει $y=0$, δηλαδή (απ' την εξ. (2.11)) παίρνουμε:

$$0 = f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) \Rightarrow -f(x_n) = f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) \Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

που είναι η εξ. (2.10).

Απ' το σημείο *B(x_{n+1},f(x_{n+1}))* φέρουμε την εφαπτόμενη στη *C*, η οποία τέμνει τον *x*-άξονα στο σημείο με τετμημένη x_{n+2}. Συνεχίζουμε μέχρι να βρούμε x_k τέτοιο ώστε: $|x_k - x_{k-1}| < E$, όπου E η ζητούμενη ακρίβεια.

Παρατηρήσεις

1. Σε κάθε επανάληψη, το σφάλμα της μεθόδου Newton-Raphson μειώνεται «τετραγωνικά» σε σχέση με την προηγούμενη τιμή του, ενώ στη γενική επαναληπτική μέθοδο μειώνεται ανάλογα με την προηγούμενη τιμή του.
2. Η εφαρμογή της μεθόδου παρουσιάζει πρόβλημα όταν η αρχική προσέγγιση της ρίζας είναι κοντά σε κάποιο ακρότατο της συνάρτησης, οπότε η μέθοδος αποκλίνει, ή δε δίνει την επιθυμητή προσέγγιση. Για να αντιμετωπίσουμε ένα τέτοιο ενδεχόμενο, αρχικά υπολογίζουμε τη δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης $f''(x)$ και, στη συνέχεια, επιλέγουμε ως πρώτη προσέγγιση της ρίζας μια τιμή x_o τέτοια ώστε $f(x_o)\,f''(x_o) > 0$.

Η μέθοδος υλοποιείται με τα ακόλουθα βήματα:

Βήμα 1. Προσδιορίζουμε ένα διάστημα (α, β), στο οποίο υπάρχει ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ (θα πρέπει $f(\alpha)\,f(\beta) < 0$ σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano)

Βήμα 2. Υπολογίζουμε την πρώτη $f'(x)$ και τη δεύτερη $f''(x)$ παράγωγο της συνάρτησης και επιλέγουμε μια πρώτη προσέγγιση x_o της ρίζας της εξίσωσης, σύμφωνα με το κριτήριο $f(x_o)\,f''(x_o) > 0$.

Βήμα 3. Ξεκινώντας από την πρώτη προσέγγιση της ρίζας, x_o, βρίσκουμε την επόμενη προσέγγιση x_1.

Βήμα 4. Επαναλαμβάνουμε το Βήμα 3 *όσες φορές χρειαστεί*, υπολογίζοντας μια δεύτερη προσέγγιση x_2, στη συνέχεια x_3 κ.ο.κ. Κατασκευάζουμε έτσι μια ακολουθία τιμών, σύμφωνα με την εξ. (2.10).

Η διαδικασία διακόπτεται μόλις προκύψει $x_{n+1} = x_n$

Παράδειγμα Ι: Με την μέθοδο Newton-Raphson και ακρίβεια 2 δεκαδικών ψηφίων να βρεθεί μια ρίζα της εξίσωσης $f(x) = x^3 - 5x^2 + 1 = 0$.

Η $f(x)$ είναι πολυωνυμική και συνεπώς παραγωγίσιμη (ως συνεχής) $\forall x \in R$.

Βήμα 1. Είναι $f(0) = 1, \quad f(1) = -3 \Rightarrow f(0)\,f(1) < 0 \Rightarrow$ υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα της εξίσωσης στο διάστημα (0,1).

Βήμα 2. Πρώτη παράγωγος: $f'(x)=3x^2-10x$

Δεύτερη παράγωγος: $f''(x)=6x-10$

Είναι $f''(0)=-10, \quad f''(1)=-4 \Rightarrow f(1)\,f''(1)>0 \Rightarrow$ ως πρώτη προσέγγιση επιλέγουμε την τιμή $x_0=1$.

Βήμα 3. Είναι $f'(1)=-7$, οπότε έχουμε:

Επανάληψη 1: $x_1=x_0-\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}=1-\dfrac{-3}{-7}=\dfrac{4}{7}=0.571428 \Rightarrow x_1 \cong 0.57$

Βήμα 4. Επανάληψη 2:

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}=0.57-\frac{f(0.57)}{f'(0.57)}=...=0.47703 \Rightarrow x_2 \cong 0.48$$

Επανάληψη 3:

$$x_3=x_2-\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}=0.48-\frac{f(0.48)}{f'(0.48)}=...=0.46992 \Rightarrow x_1 \cong 0.47$$

Επανάληψη 4:

$$x_4=x_3-\frac{f(x_3)}{f'(x_3)}=0.47-\frac{f(0.47)}{f'(0.47)}=...=0.46983 \Rightarrow x_4 \cong 0.47$$

Αφού $x_3=x_4=0.47$ σταματάμε τις επαναλήψεις. Η ζητούμενη ρίζα, με την επιθυμητή ακρίβεια, είναι $\rho=0.47$.

Επιβεβαίωση της τιμής της ρίζας με το <u>σχήμα</u> <u>Horner</u>.

Το σχήμα Horner χρησιμοποιείται για να *ελεγχθεί* αν κάποιος δοσμένος αριθμός είναι ρίζα μιας <u>*πολυωνυμικής*</u> εξίσωσης $f(x)=0$ (όπου $f(x)=\alpha_n x^n+\alpha_{n-1}x^{n-1}+....+\alpha_2 x^2+\alpha_1 x+\alpha_0$) και <u>*όχι*</u> <u>*για*</u> <u>*να*</u> <u>*βρεθεί*</u> *ρίζα*. Η μέθοδος περιγράφεται στη συνέχεια:

- Εκτελείται η διαίρεση $f(x)/\delta(x)$ (με $\delta(x)=(x-\rho)$) οπότε προκύπτει ένα νέο πολυώνυμο:

  $$p(x)=\beta_{n-1}x^{n-1}+\beta_{n-2}x^{n-2}+...+\beta_2 x^2+\beta_1 x+\beta_0 \qquad \text{(H.1)}$$

  που είναι το *πηλίκο*, καθώς και (στη γενική περίπτωση) ένα *υπόλοιπο* R.

- Ισχύει η *ταυτότητα της Ευκλείδιας διαίρεσης*:

  $$f(x)=\delta(x)\cdot p(x)+R(x) \qquad \text{(H.2)}$$

  οπότε $\deg[p(x)]=\deg[f(x)]-\deg[\delta(x)]$, που σημαίνει ότι ο <u>*βαθμός (deg) του πηλίκου p(x) είναι μικρότερος από αυτόν του αρχικού πολυωνύμου f(x)*</u>.

- Σύμφωνα με τη σχέση (Η.2), όταν $R(x)=0$ ο δοσμένος αριθμός είναι ρίζα της αρχικής εξίσωσης. Από τις (Η.1) και (Η.2) διαπιστώνουμε ότι:

$$\alpha_n x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + ... + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0 =$$
$$= \left(\beta_{n-1}x^{n-1} + \beta_{n-2}x^{n-2} + ... + \beta_2 x^2 + \beta_1 x + \beta_0\right)\cdot\left(x-\rho\right) + R = \qquad (Η.3)$$
$$= \beta_{n-1}x^n + \left(\beta_{n-2} - \rho\cdot\beta_{n-1}\right)x^{n-1} + ... + (\beta_1 - \rho\cdot\beta_2)x^2 + \left(\beta_0 - \rho\cdot\beta_1\right)x - \rho\cdot\beta_0 + R$$

Συγκρίνοντας τους συντελεστές στα δύο μέλη της (Η.3) καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι:

$$\begin{array}{c}
\beta_{n-1} = \alpha_n \\
\beta_{n-2} - \rho\cdot\beta_{n-1} = \alpha_{n-1} \quad \Rightarrow \quad \beta_{n-2} = \alpha_{n-1} + \rho\cdot\beta_{n-1} \\
\beta_{n-3} - \rho\cdot\beta_{n-2} = \alpha_{n-2} \quad \Rightarrow \quad \beta_{n-3} = \alpha_{n-2} + \rho\cdot\beta_{n-1} \\
\vdots \\
\beta_1 - \rho\cdot\beta_2 = \alpha_2 \quad \Rightarrow \quad \beta_1 = \alpha_2 + \rho\cdot\beta_2 \\
\beta_0 - \rho\cdot\beta_1 = \alpha_1 \quad \Rightarrow \quad \beta_0 = \alpha_1 + \rho\cdot\beta_1 \\
R - \rho\cdot\beta_0 = \alpha_0 \quad \Rightarrow \quad R = \alpha_0 + \rho\cdot\beta_0
\end{array}$$

Το σχήμα Horner μπορεί να περιγραφεί με την ακόλουθη μορφή:

α_n	α_{n-1}	$\cdots$	α_2	α_1	α_0
	$+\rho\beta_{n-1}$	$\cdots$	$+\rho\beta_2$	$+\rho\beta_1$	$+\rho\beta_0$
$\beta_{n-1} = \alpha_n$	β_{n-2}	$\cdots$	β_1	β_0	$\boxed{R}$

Για το Παράδειγμα Ι θα εξετάσουμε αν ο αριθμός ρ=0.47 είναι όντως ρίζα της αρχικής μας εξίσωσης:

1	-5	0	1
	0.47	-2.1291	-1.00068
1	-4.53	-2.1291	R=-0.00068

Το υπόλοιπο της διαίρεσης είναι $R \cong 0$, που σημαίνει ότι η τιμή που βρήκαμε είναι ρίζα της εξίσωσης.

<u>Παράδειγμα ΙΙ</u>: Με την μέθοδο Newton-Raphson να κατασκευαστεί ο αλγόριθμος υπολογισμού της τετραγωνικής ρίζας ενός θετικού αριθμού. Να υπολογιστεί η τιμή $\sqrt{3}$, με ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων.

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την τιμή $x=\sqrt{a},\ \left(a>0\right)$. Είναι $x=\sqrt{a} \Rightarrow x^2 = a \Rightarrow x^2 - a = 0$.

Βήμα 1. Η συνάρτηση $f\left(x\right) = x^2 - a$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη $\forall x \in R$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ρίζα στο *R*.

$f(x) > 0, \forall x > a$

Βήμα 2. $f'(x) = 2x \neq 0, \forall x > 0 \Rightarrow f(x) \cdot f''(x) > 0 \Rightarrow$ δεν υπάρχει περιορισμός για $f''(x) = 2 > 0$

την επιλογή της αρχικής προσέγγισης της ρίζας.

Βήμα 3. Αναγωγικός τύπος Newton-Raphson:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x_{n+1} = \frac{x_n^2 + a}{2x_n}}$$

Για τον υπολογισμό της τιμής $\sqrt{3}$ επιλέγουμε ως πρώτη προσέγγιση $x_0 = 1$.

Επανάληψη 1: $x_1 = \dfrac{1+3}{2 \cdot 1} = 4$

Επανάληψη 2: $x_2 = \dfrac{4^2+3}{2 \cdot 4} = 2.375$

Επανάληψη 3: $x_3 = \dfrac{2.375^2+3}{2 \cdot 2.375} = 1.819079 \cong 1.819$

Επανάληψη 4: $x_4 = \dfrac{1.819^2+3}{2 \cdot 1.819} = 1.734129 \cong 1.734$

Επανάληψη 5: $x_5 = \dfrac{1.734^2+3}{2 \cdot 1.734} = 1.732052 \cong 1.732$

Επανάληψη 6: $x_6 = \dfrac{1.732^2+3}{2 \cdot 1.732} = 1.732051 \cong 1.732$

Αφού $x_5 = x_6 = 1.732$ σταματάμε τις επαναλήψεις. Η ζητούμενη τιμή, με την επιθυμητή ακρίβεια, είναι $\sqrt{3} = 1.732$.

Παράδειγμα IV: Με την μέθοδο Newton-Raphson να βρεθεί μια ρίζα της εξίσωσης $f(x) = x - \frac{1}{5}\sin x - \frac{1}{2} = 0$, με ακρίβεια 5 δεκαδικών ψηφίων (x σε rad).

Η $f(x)$ είναι άθροισμα πολυωνυμικής και τριγωνομετρικής και συνεπώς παραγωγίσιμη.

Βήμα 1. Είναι

$$f(0) = -\frac{1}{2}, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{5} - \frac{1}{2} = 0.870796 \Rightarrow f(0)\, f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0 \Rightarrow \text{υπάρχει}$$

τουλάχιστον μια ρίζα της εξίσωσης στο διάστημα (0,π/2).

Βήμα 2. Πρώτη παράγωγος: $f'(x) = 1 - \frac{1}{5}\cos x$

Δεύτερη παράγωγος: $f''(x) = \frac{1}{5}\sin x$

Είναι

$$f(0)=-0.5, \quad f'(0)=0.8, \quad f''(0)=0$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0.87079, \quad f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1, \quad f''\left(\frac{\pi}{2}\right)=0.02$$

Έτσι ως πρώτη προσέγγιση επιλέγουμε την τιμή $x_0=0$ (το 0 θεωρείται χωρίς πρόσημο).

Βήμα 3. Επανάληψη 1: $x_1=x_0-\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}=0-\dfrac{f(0)}{f'(0)}=-\dfrac{-0.5}{0.8}=0.62500$

Βήμα 4. Επανάληψη 2: $x_2=x_1-\dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}=\ldots\Rightarrow x_2=0.61547$

Επανάληψη 3: $x_3=x_2-\dfrac{f(x_2)}{f'(x_2)}=\ldots\Rightarrow x_3=0.61547$

Αφού $x_2=x_3=0.61547$ σταματάμε τις επαναλήψεις. Η ζητούμενη ρίζα, με την επιθυμητή ακρίβεια, είναι $\rho=0.61547$.

2.3.3 Μέθοδος τέμνουσας

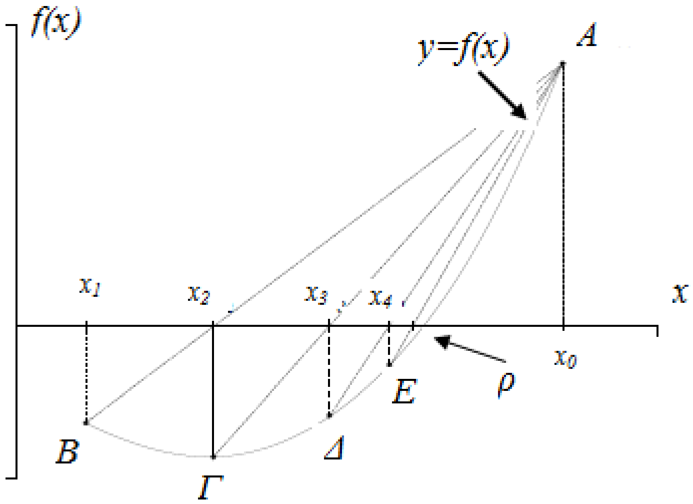
Με τη μέθοδο αυτή, οι προσεγγίσεις της ρίζας ρ υπολογίζονται με χρήση του αναγωγικού τύπου:

$$x_{n+1}=x_n-f(x_n)\frac{x_n-x_{n-1}}{f(x_n)-f(x_{n-1})}, \quad n\in N \tag{2.12}$$

Για τη χρήση της εξ. (2.12) απαιτείται η γνώση δύο αρχικών τιμών x_0, x_1. Η εξ. (2.12) προκύπτει από τον τύπο της μεθόδου Newton-Raphson, με την αντικατάσταση:

$$f'(x)=\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}$$

Γεωμετρική ερμηνεία



Αν $f(x_0)f(x_1)<0$, η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ρίζα $\rho\in(x_0,x_1)$.
Η χορδή ΑΒ τέμνει τη γραφική παράσταση της $f(x)$ στο $\Gamma(x_2, f(x_2))$. Η τιμή x_2 είναι προσέγγιση της ρίζας. Η χορδή ΑΓ τέμνει τη γραφική παράσταση της $f(x)$ στο $\Delta(x_3, f(x_3))$ κ.ο.κ.

Με τον τρόπο αυτό δημιουργείται μια ακολουθία τιμών $\{x_n\}$, $n = 0, 1, 2, ...$, που είναι δυνατό να συγκλίνει στην τιμή της ρίζας ρ.

<u>*Παράδειγμα Ι:*</u> Με την μέθοδο της τέμνουσας να βρεθεί μια ρίζα της εξίσωσης $f(x) = x^3 + x - 1 = 0$. Να γίνει σύγκριση με τη μέθοδο Newton-Raphson.

Έχουμε, για $x_0 = 0, x_1 = 1 \Rightarrow f(x_0) = -1, f(x_1) = 1 \Rightarrow f(x_0) f(x_1) < 0 \Rightarrow$ υπάρχει ρίζα $\rho \in (0,1)$.

Με τη βοήθεια της εξ. (2.12) βρίσκουμε:

$$x_2 = x_1 - f(x_1)\frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} = 1 - 1 \cdot \frac{1}{2} = 0.5$$

$$x_3 = x_2 - f(x_2)\frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)} = 0.636$$

$$x_4 = x_3 - f(x_3)\frac{x_3 - x_2}{f(x_3) - f(x_2)} = 0.606$$

$$x_5 = x_4 - f(x_4)\frac{x_4 - x_3}{f(x_4) - f(x_3)} = 0.624$$

$$x_6 = x_5 - f(x_5)\frac{x_5 - x_4}{f(x_5) - f(x_4)} = 0.687$$

$$x_7 = x_6 - f(x_6)\frac{x_6 - x_5}{f(x_6) - f(x_5)} = 0.682$$

$$x_8 = x_7 - f(x_7)\frac{x_7 - x_6}{f(x_7) - f(x_6)} = 0.682$$

Με προσέγγιση δύο δεκαδικών ψηφίων έχουμε τη ρίζα *ρ=0.68*.

Αν εφαρμόσουμε τη μέθοδο Newton-Raphson, με αρχική προσέγγιση $x_0 = 0.5$ θα έχουμε:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 + x_n - 1}{3x_n^2 + 1} = \frac{2x_n^3 + 1}{3x_n^2 + 1}$$

οπότε βρίσκουμε: $x_1 = 0.714$, $x_2 = 0.683$, $x_3 = 0.682$ κ.ο.κ. Έτσι βρίσκουμε τη ρίζα σε τρεις μόνον επαναλήψεις.