

**ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ
ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ**

*ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΤΕ*

ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ

Καθηγητής

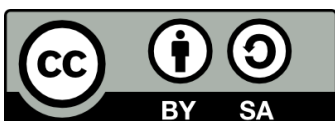
Δρ. Μοσχίδης Νικόλαος

ΣΕΡΡΕΣ, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2015



Άδειες Χρήσης

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons. Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Το έργο αυτό αδειοδοτείται από την Creative Commons Αναφορά Δημιουργού - Παρόμοια Διανομή 4.0 Διεθνές Άδεια. Για να δείτε ένα αντίγραφο της άδειας αυτής, επισκεφτείτε <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.el>.

Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.

Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Κεντρικής Μακεδονίας**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



9. ΦΟΡΤΙΑ ΔΙΑΤΟΜΗΣ ΔΟΚΩΝ

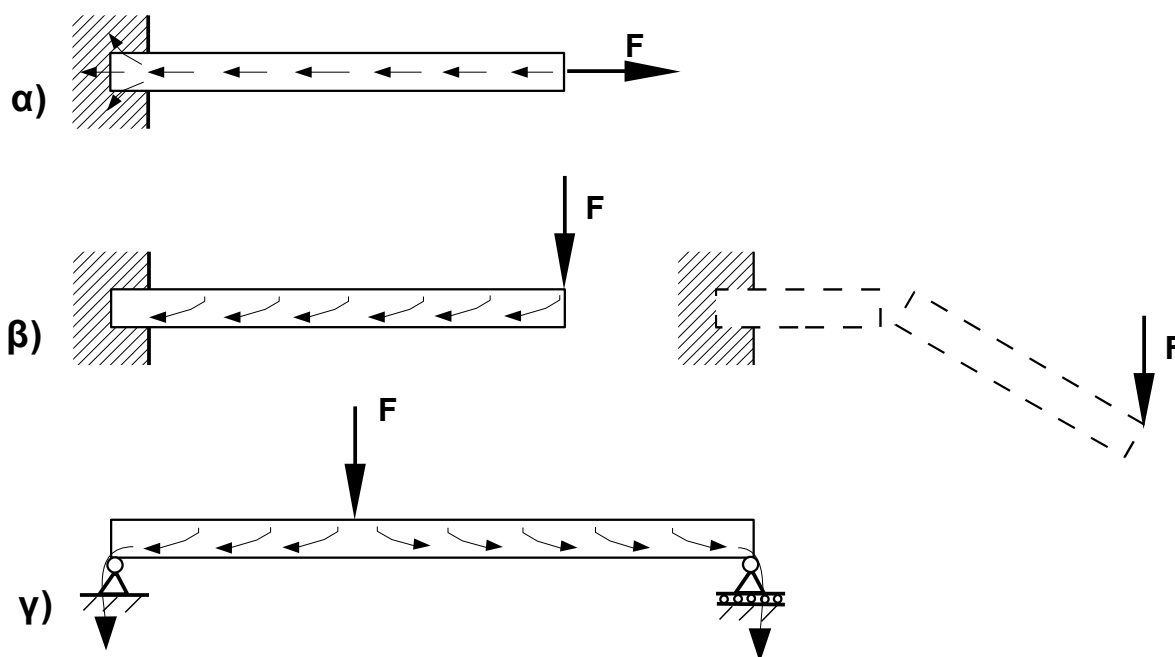
9.1 Γενικά

Ο όρος “**φορτία**” σημαίνει είτε δυνάμεις είτε ροπές.

Συνοψίζοντας αυτά που αναφέρθηκαν σε προηγούμενα κεφάλαια, μπορούμε να πούμε ότι **δοκός** είναι ένα σώμα με μεγάλο μήκος και μικρές διαστάσεις κάθετης τομής, που στηρίζεται και φορτίζεται με τέτοιο τρόπο ώστε να **μεταβιβάζει δυνάμεις κάθετες στο μήκος του**.

Διατομή λέγεται το σχήμα που παράγεται αν κόψουμε τη δοκό κάθετα στο μήκος της. Εξετάζοντας τη διατομή βλέπουμε τί συμβαίνει **στο εσωτερικό του σώματος**.

Τα φορτία που ασκούνται σε κάποιο σώμα από εξωτερικές αιτίες μεταδίδονται στο εσωτερικό του, και διατρέχουν το σώμα για να μεταδοθούν στις στηρίξεις, όπως δείχνουν τα παρακάτω παραδείγματα. Αυτά **τα φορτία που μεταδίδονται στο εσωτερικό του σώματος θα λέγονται φορτία διατομής**.



Σχήμα 9.1 Μετάδοση φορτίων στο εσωτερικό δοκού

α) Δύναμη παράλληλη με το μήκος της δοκού μεταβιβάζεται μέσω της δοκού αναλλοίωτη.

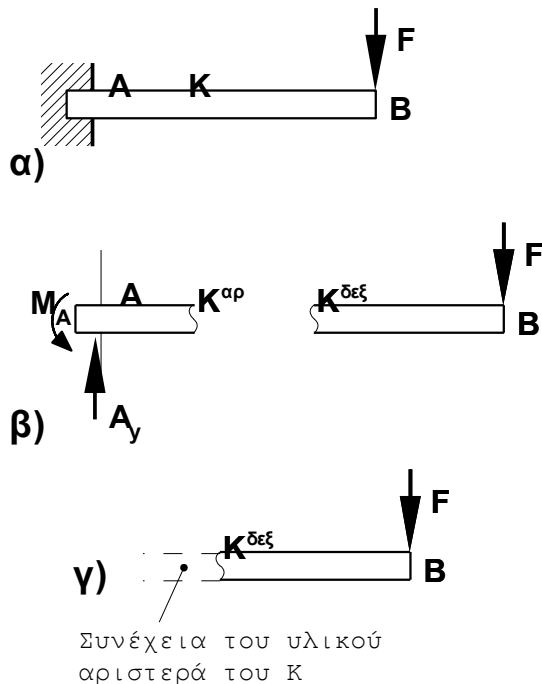
β) Όταν μεταβιβάζεται μία δύναμη κάθετη στο μήκος της δοκού, δημιουργείται ταυτόχρονα και μια ροπή. (Καταλαβαίνουμε την ύπαρξη της ροπής από το ότι μετά από τυχόν θραύση το δεξιό τμήμα περιστρέφεται πριν πέσει)

γ) Όταν η δοκός έχει δύο στηρίξεις, τότε η συνολική δύναμη F χωρίζεται σε δύο μέρη, από τα οποία το ένα μεταβιβάζεται στην αριστερή στήριξη και το άλλο στη δεξιά.

Αν τα φορτία διατομής ξεπεράσουν τα όρια αντοχής του σώματος, τότε το σώμα παθαίνει μηχανική βλάβη (π.χ. πλαστική παραμόρφωση ή θραύση). Επομένως ο υπολογισμός των φορτίων διατομής είναι το απαραίτητο πρώτο βήμα σε κάθε υπολογισμό αντοχής.

9.2 Θεμελιώδεις ιδιότητες και η μέθοδος των τομών

Για να υπολογίσουμε τα φορτία που υπάρχουν στο εσωτερικό του σώματος, σε κάποιο σημείο K που μας ενδιαφέρει, φανταζόμαστε ότι κόβουμε το σώμα σ' εκείνο το σημείο (στο K) και το χωρίζουμε σε δύο τμήματα.



Σχήμα 9.2 Δοκός και εφαρμογή τομής

α) Η αρχική δοκός

β) Χωρισμός της δοκού σε τμήματα

γ) Στην πραγματικότητα, το υλικό της δοκού συνεχίζεται και αριστερά από το K . Η συνέχεια του υλικού αποτελεί μια στήριξη για το KB , και συγκεκριμένα μία πάκτωση.

Ισχύουν οι ιδιότητες:

α) Ισορροπία συνόλου και κάθε τμήματος ξεχωριστά

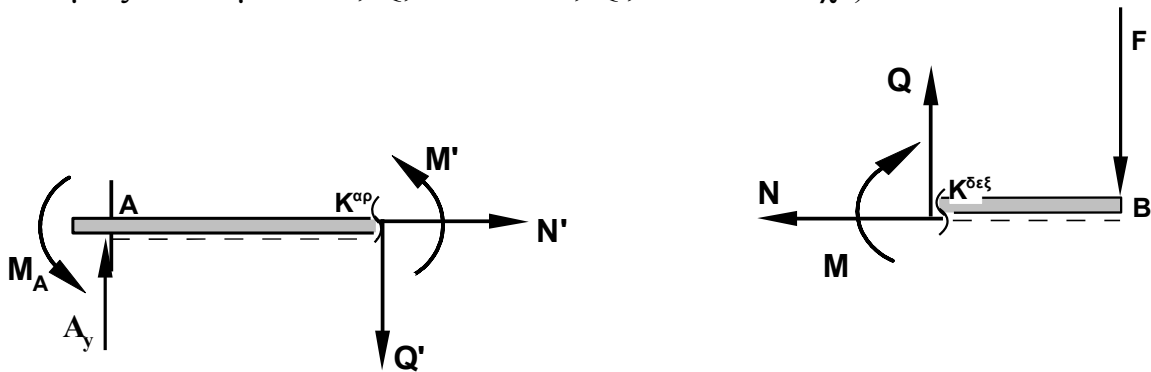
Όπως ισορροπεί ολόκληρη η δοκός κάτω από την επίδραση της εξωτερικής δύναμης F και των φορτίων της πάκτωσης (βλ. σχ. 9.2α), όμοια πρέπει να ισορροπούν:

- το δεξιό τμήμα του σώματος (τμήμα KB , βλ. σχ. 9.2β) κάτω από την επίδραση της F και των δυνάμεων που ενεργούν στο εσωτερικό της τομής, στο σημείο $K^{δεξ}$
- το αριστερό τμήμα του σώματος (τμήμα AK , βλ. σχ. 9.2β) κάτω από την επίδραση των A_y , M_A και των δυνάμεων που ενεργούν στο εσωτερικό της τομής, στο σημείο $K^{αρ}$

β) Ισοδυναμία της τομής με πάκτωση

Στο σημείο $K^{δεξ}$ ενεργούν εκείνα τα φορτία που θα προέκυπταν αν το τμήμα KB στηριζόταν στο K με πάκτωση (βλ. σχ. 9.2γ).

Αποδεικνύεται λοιπόν ότι στις **δύο όχθες της τομής** $K^{δεξ}$, $K^{απ}$ ενεργούν τα φορτία που φαίνονται στο παρακάτω σχήμα (ίδια με τα φορτία της πάκτωσης – τους έχουμε δώσει όμως τα ονόματα N , Q , M και N' , Q' , M' αντίστοιχα).



Σχήμα 9.3 Τμήματα της δοκού και τα φορτία στις δύο όχθες της τομής

Ισχύουν επιπλέον οι ιδιότητες

γ) Αλληλεπίδραση των δύο τμημάτων του σώματος:

Τα φορτία N , Q , M δεν ενεργούν αυτόνομα στο εσωτερικό του σώματος, αλλά εκφράζουν την αλληλεπίδραση ανάμεσα στα δύο τμήματα του σώματος: Το αριστερό τμήμα AK ασκεί στο δεξιό τμήμα KB τα φορτία N , Q , M , ενώ το δεξιό στο αριστερό τα N' , Q' , M' .

δ) Αξίωμα δράσης – αντίδρασης:

Πρέπει να επαληθεύεται το αξίωμα δράσης – αντίδρασης, άρα πρέπει οι N , N' να έχουν ίσα μεγέθη και αντίθετες φορές, ομοίως οι Q , Q' και οι M , M' .

(Για το λόγο αυτό, στη θέση των N' , Q' , M' χρησιμοποιούμε τα σύμβολα N , Q , M , ώστε να εξασφαλίζεται αυτόματα η ισότητα των αριθμητικών τιμών).

9.3 Συμβάσεις θετικής φοράς

Όταν θέλουμε να υπολογίσουμε τα φορτία διατομής της δοκού, ακολουθούμε μια διαδικασία που αρχίζει με τα εξής βήματα:

*1. Επιλέγουμε αυθαίρετα μία από τις δύο πλευρές της δοκού (συνήθως την κάτω πλευρά) ως πλευρά αναφοράς (ή στην επίσημη γλώσσα “**ίνα αναφοράς**”).

Τοποθετούμε μία διακεκομμένη γραμμή για να θυμόμαστε ποια είναι η ίνα αναφοράς.

*2. Κόβουμε το δοκάρι, ξανασχεδιάζουμε το ένα μόνο από τα δύο τμήματά του, και τοποθετούμε στην τομή τα **φορτία διατομής** ως εξής:

- μία δύναμη παράλληλη με το μήκος του δοκαριού, που την ονομάζουμε N , και την τοποθετούμε έτσι ώστε να κατευθύνεται **προς τα έξω**, να είναι δηλαδή **εφελκυστική** για το δοκάρι

- μία δύναμη κάθετη στο μήκος της δοκού, που την ονομάζουμε **διατμητική δύναμη**, την συμβολίζουμε με Q , και η κατεύθυνσή της προκύπτει **αν στρέψουμε**

την N κατά 90° κατά τη φορά του ωρολογιού

- μία ροπή M που ονομάζεται **καμπτική ροπή**, και και την τοποθετούμε στην κατεύθυνση που εφελκύνει την ίνα αναφοράς.

Αν εφαρμόσουμε αυτούς τους κανόνες για τις κατευθύνσεις των N , Q , M στην αριστερή και στη δεξιά όχθη της τομής, τα φορτία της μίας όχθης θα προκύψουν αντίθετης κατεύθυνσης από τα φορτία της άλλης, άρα επαληθεύεται αυτομάτως το αξίωμα δράσης – αντίδρασης.

Οι παραπάνω κανόνες για τις κατευθύνσεις των N , Q , M ονομάζονται **συμβάσεις θετικής φοράς**. Δεν επιβάλλονται από τους νόμους της φυσικής, αντίθετα καθιερώνονται με μία αυθαίρετη συμφωνία που έκαναν μεταξύ τους οι μηχανικοί για να τυποποιήσουν την εργασία τους. Η τροποποίησή τους επιτρέπεται μόνο εάν δεν παραβιάζεται το αξίωμα δράσης – αντίδρασης.

Όταν η πραγματική κατεύθυνση του N , του Q ή του M είναι αντίθετη από αυτή που προκύπτει από τις συμβάσεις θετικής φοράς, η αριθμητική τιμή του φορτίου θα προκύψει αρνητική. Στην περίπτωση αυτή **δεν** διορθώνουμε τα σχήματα, και παρουσιάζουμε τα τελικά αποτελέσματα με τα αρνητικά πρόσημα που προέκυψαν.

9.4 Παραδείγματα υπολογισμού φορτίων διατομής

9.4.1 Φορτία διατομής σε χαρακτηριστικά σημεία

Στη δοκό του σχήματος 9.4, να βρεθούν τα φορτία διατομής στα παρακάτω σημεία:

α) στα Γ, Γ' (λίγο αριστερά και λίγο δεξιά του σημείου εφαρμογής της F),

β) στα Δ, Ε

γ) στα άκρα Α, Β.

Λύση:

Υπολογίζουμε τα φορτία των στηρίξεων (βλ. σχ. 9.5):

$$F_x = F \cos \theta = 1414 \text{ N} * \cos 45^\circ = 1000 \text{ N} \quad (9-1)$$

$$F_y = F \sin \theta = 1414 \text{ N} * \sin 45^\circ = 1000 \text{ N}$$

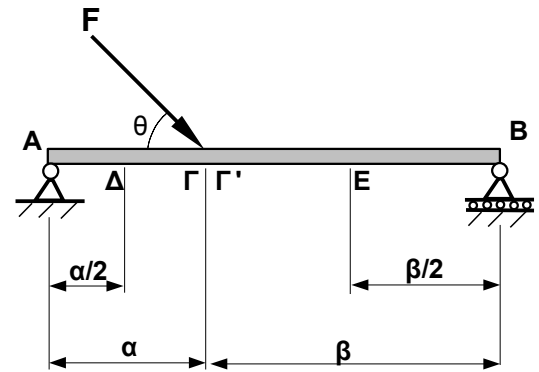
$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow A_x = F_x = 1000 \text{ N} \quad (9-2\alpha)$$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow$$

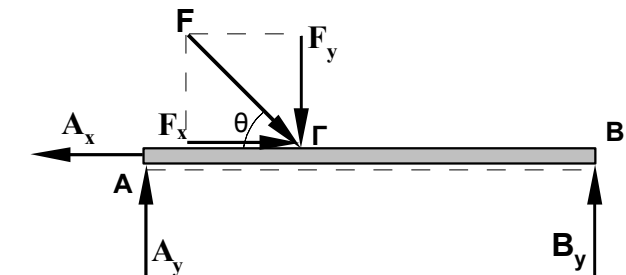
$$\Rightarrow B_y = F_y \frac{\alpha}{\alpha + \beta} = 300 \text{ N} \quad (9-2\beta)$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y = F_y - B_y = 700 \text{ N} \quad (9-2\gamma)$$

Επιλέγουμε τη θέση της ίνας αναφοράς από κάτω.



Σχ. 9.4 Αμφιέρειστη δοκός
(Δίδονται: $F=1414 \text{ N}$ $\theta=45^\circ$
 $\alpha=0,3\text{m}$ $\beta=0,7\text{m}$)



Σχήμα 9.5

Για να βρούμε τα φορτία διατομής N, Q, M

στο σημείο Γ, φανταζόμαστε τη δοκό κομμένη στο Γ και ξανασχεδιάζουμε μόνο ένα από τα δύο τμήματά της (έστω το αριστερό τμήμα ΑΓ).

Τοποθετούμε στο σχήμα όλες τις αποστάσεις και τα φορτία που δέχεται το ΑΓ.

Παρατηρούμε ότι στο σχήμα υπάρχουν τρία άγνωστα φορτία, τα N, Q, M, που μπορούν να υπολογισθούν από τις εξισώσεις ισοροπίας.

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N = A_x = 1000 \text{ N} \quad (9-3\alpha)$$

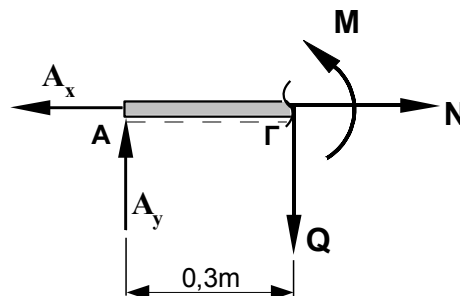
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow Q = A_y = 700 \text{ N} \quad (9-3\beta)$$

$$\Sigma M_\Gamma = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_y * 0,3\text{m} - M = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M = A_y * 0,3\text{m} =$$

$$= 700 \text{ N} * 0,3\text{m} = 210 \text{ Nm} \quad (9-3\gamma)$$



Σχήμα 9.6

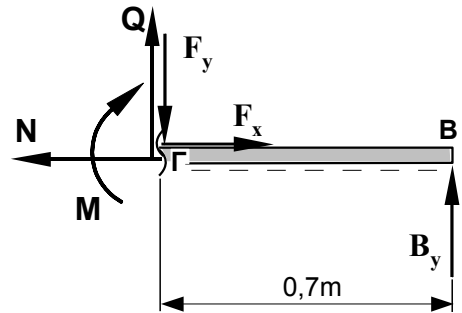
Υπάρχει ένα μικρό πλεονέκτημα στον υπολογισμό αν ως κέντρο των ροπών διαλέξουμε το σημείο της τομής (εδώ το Γ): δεν εμφανίζονται στην εξίσωση των ροπών οι άλλοι άγνωστοι N, Q).

Αν εξετάζουμε το τμήμα δεξιά της τομής (δηλ. Το ΓΓ'B), θα εμφανίζονταν στο σχήμα και οι δυνάμεις F_x και F_y (που στο αριστερό τμήμα ΑΓ δεν εμφανίστηκαν) και τα αποτελέσματα θα προέκυπταν ως εξής:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N = F_x = \mathbf{1000N} \quad (9-4\alpha)$$

$$\begin{aligned} \Sigma F_y = 0 &\Rightarrow Q - F + B_y = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow Q = F - B_y = \dots = \mathbf{700N} \end{aligned} \quad (9-4\beta)$$

$$\begin{aligned} \Sigma M_{\Gamma} = 0 &\Rightarrow M - B_y * 0,7m = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow M = B_y * 0,7m \\ &= 300N * 0,7m = \mathbf{210Nm} \end{aligned} \quad (9-4\gamma)$$



Σχήμα 9.7

(Η F_y δεν εμφανίστηκε στην εξίσωση των ροπών επειδή η απόστασή της από το κέντρο των ροπών Γ είναι απειροστή, πρακτικά ίση με το μηδέν).

Συγκρίνοντας τις σχέσεις (9-3) και (9-4) παρατηρούμε ότι:

- Όταν τα αποτελέσματα εκφραστούν με γράμματα, οι εκφράσεις προκύπτουν διαφορετικές (π.χ. $M = A_y * 0,3m$ στη σχέση (9-3γ), ενώ $M = B_y * 0,7m$ στη σχέση (9-4γ)).
- Όταν όμως υπολογισθούν οι αριθμητικές τιμές, αυτές προκύπτουν ίδιες ($M = 210Nm$) και στις δύο περιπτώσεις.

Γενικά ισχύει ο κανόνας:

Όταν τα φορτία στήριξης της δοκού (εδώ τα A_x , A_y , B_y) έχουν υπολογισθεί σωστά, τότε τα φορτία διατομής N, Q, M προκύπτουν ίδια είτε υπολογισθούν από την ισορροπία του αριστερού τμήματος της δοκού είτε του δεξιού.

(Το αριστερό και το δεξιά τμήμα πρέπει να έχουν προκύψει από την ίδια τομή.

Στην περίπτωση μας συγκρίνουμε τα αποτελέσματα της ισορροπίας του ΑΔΓ με εκείνα της ισορροπίας του ΓΓ'ΕΒ (προέκυψαν και τα δύο από τομή στο Γ). Αν το δεξιά τμήμα είχε προκύψει από τομή στο Γ' (τμήμα Γ'ΕΒ), τα αποτελέσματα θα ήταν διαφορετικά).

Για τα φορτία διατομής στο Γ', το σχήμα είναι το 9.8 και οι υπολογισμοί έχουν ως εξής:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N + F_x - A_x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N = A_x - F_x = 0$$

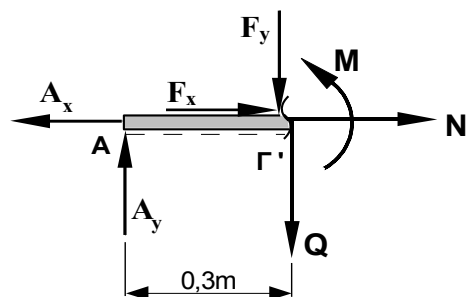
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y - F_y - Q = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q = A_y - F_y =$$

$$= 700N - 1000N = \mathbf{-300N}$$

$$\Sigma M_{\Gamma'} = 0 \Rightarrow A_y * 0,3m - M = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M = A_y * 0,3m = 700N * 0,3m = \mathbf{210Nm}$$



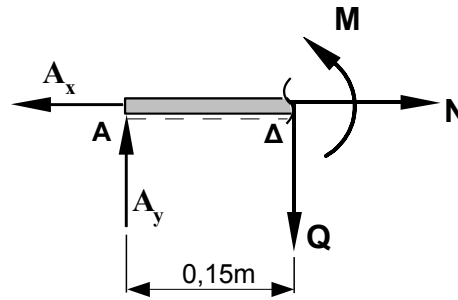
Σχήμα 9.8

Για τα φορτία διατομής στο Δ, το σχήμα είναι το 9.9 και οι υπολογισμοί έχουν ως εξής:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N = A_x = 1000N$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow Q = A_y = 700N$$

$$\begin{aligned} \Sigma M_{\Delta} = 0 &\Rightarrow A_y * 0,15m - M = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow M = A_y * 0,15m = 700N * 0,15m = \\ &= 105Nm \end{aligned}$$



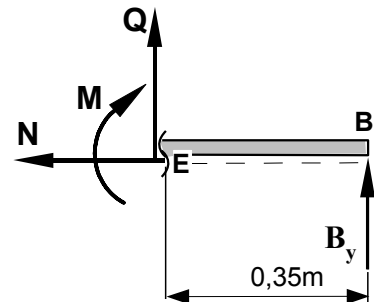
Σχήμα 9.9

Για να βρούμε τα φορτία διατομής στο Ε θα εξετάσουμε το τμήμα της δοκού δεξιά του Ε, επειδή δέχεται λιγότερες δυνάμεις από ότι το αριστερό τμήμα ΑΓΕ. Το σχήμα είναι το 9.10 και οι υπολογισμοί έχουν ως εξής:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N = 0$$

$$\begin{aligned} \Sigma F_y = 0 &\Rightarrow Q + B_y = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow Q = -B_y = -300N \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma M_E = 0 &\Rightarrow M - B_y * 0,35m = 0 \\ &\Rightarrow M = 300N * 0,35m = 105Nm \end{aligned}$$



Σχήμα 9.10

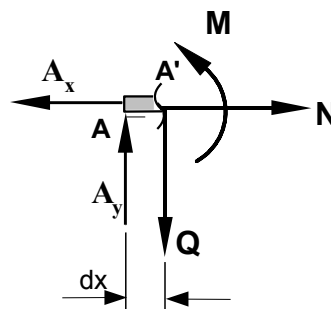
Για να βρούμε τα φορτία διατομής στο Α, φανταζόμαστε ότι κόβουμε το δοκάρι σε μικρή απόσταση δεξιά του Α και εξετάζουμε ένα τμήμα του με απειροστό μήκος dx. Οι ροπές υπολογίζονται ως προς το σημείο τομής Α'

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N = A_x = 1000N$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow Q = A_y = 700N$$

$$\Sigma M_{A'} = 0 \Rightarrow A_y dx - M = 0 \Rightarrow M = A_y dx$$

Επειδή $dx \approx 0$ άρα δεχόμαστε ότι στο σημείο Α' ισχύει: $M = A_y * 0 = 0$



Σχήμα 9.11α

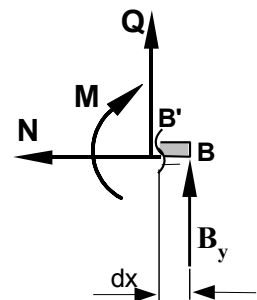
Όμοια για το σημείο Β ισχύει

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow Q = -B_y = -300N$$

$$\Sigma M_{B'} = 0 \Rightarrow M - B_y dx = 0 \Rightarrow$$

$$M = B_y dx \approx B_y * 0 = 0$$



Σχήμα 9.11β

Παρατηρούμε ότι σε διάφορες θέσεις κατά μήκος του δοκαριού προκύπτουν διαφορετικά αποτελέσματά για τα φορτία διατομής (λέμε ότι τα φορτία διατομής N, Q, M μεταβάλλονται κατά μήκος της δοκού).

9.4.2 Φορτία διατομής σε ολόκληρο το μήκος της δοκού, και διαγράμματα

Για το δοκάρι του σχήματος 9.12, να βρεθούν τα διαγράμματα φορτίων διατομής σε ολόκληρο το μήκος του.

Λύση:

Το δοκάρι που εξετάζουμε είναι ισοδύναμο με εκείνο του σχ. 9.4. Άρα οι δυνάμεις στήριξης θα προκύψουν όσες ακριβώς και στο σχ. 9.5:

$$A_x=1000\text{N}, A_y=700\text{N}, B_y=300\text{N}.$$

Σχεδιάζουμε το διάγραμμα ελευθέρου σώματος του δοκαριού (σχ. 9.13), στο οποίο τοποθετούμε την ίνα αναφοράς από κάτω.

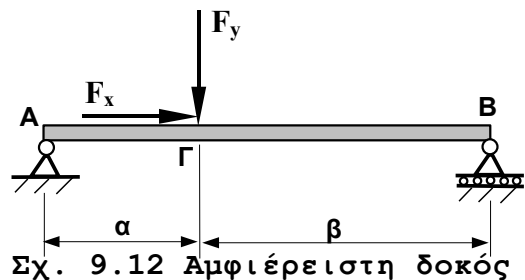
Θα εξετάσουμε αρχικά μία τομή του δοκαριού σε **τυχόν** σημείο K που βρίσκεται ανάμεσα στα A και Γ. Η έκφραση “**τυχόν** σημείο” σημαίνει “**μεταβλητό σημείο**” δηλαδή ότι μπορούμε να αλλάξουμε την θέση του μετακινώντας το προς τα αριστερά ή προς τα δεξιά .

Ονομάζουμε x την απόσταση του K από κάποιο σταθερό σημείο, εδώ από το A. (Μαθηματικές παρατηρήσεις:

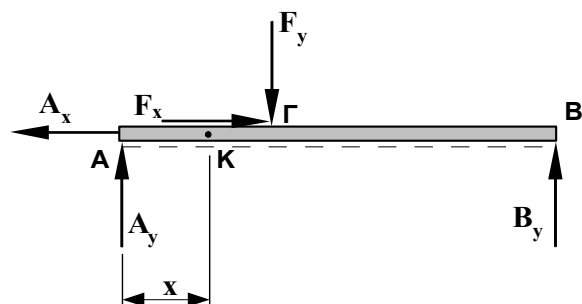
- Το x **δεν είναι άγνωστος** κάποιας εξίσωσης **αλλά μεταβλητή**.
- Οι τιμές που μπορούμε να δώσουμε στη μεταβλητή x προσδιορίζονται ως εξής: Στην αριστερή ακραία θέση του K (όταν $K \rightarrow A$) θα ισχύει $x = 0$, ενώ στη δεξιά θέση (όταν $K \rightarrow \Gamma$) θα ισχύει $x = 0,3\text{m}$. Άρα το διάστημα μεταβολής του x θα είναι $0 < x < 0,3\text{m}$)

Εξετάζουμε το αριστερό τμήμα του

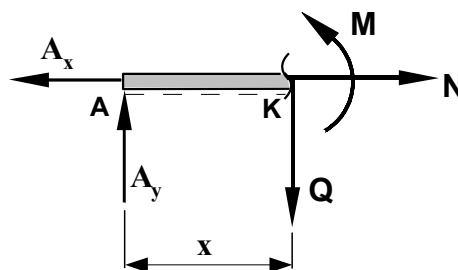
$$\begin{aligned} \Sigma F_x = 0 &\Rightarrow N = A_x = 1000\text{N} \\ \Sigma F_y = 0 &\Rightarrow Q = A_y = 700\text{N} \\ \Sigma M_K = 0 &\Rightarrow A_y x - M = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow M = A_y x = 700\text{N} * x \end{aligned}$$



Σχ. 9.12 Αμφιέρειστη δοκός
(Δίδονται: $F_x=1000\text{ N}$ $F_y=1000\text{ N}$
 $\alpha=0,3\text{m}$ $\beta=0,7\text{m}$)



Σχ. 9.13



Σχήμα 9.14

Παρατηρούμε ότι το N είναι σταθερό και ίσο με 1000N ανεξάρτητα από τη θέση του K κατά μήκος του $ΑΓ$, και όμοια το Q σταθερό και ίσο με 700N .

Η ροπή M , αντίθετα εξαρτάται από τη θέση του K κατά μήκος του $ΑΓ$. Το αποτέλεσμα για τη ροπή M εκφράζεται όχι με μορφή αριθμού αλλά με τον τύπο $M = A_y x$.

Τα αποτελέσματα λοιπόν γράφονται σωστότερα με την μορφή

$$N = 1000\text{N} \text{ (σταθερή συνάρτηση) για } 0 < x < 0,3\text{m} \quad (9-5\alpha)$$

$$Q = 700\text{N} \text{ (σταθερή συνάρτηση) για } 0 < x < 0,3\text{m} \quad (9-5\beta)$$

$$M = A_y x \Rightarrow M = 700\text{N} * x \text{ για } 0 < x < 0,3\text{m} \quad (9-5\gamma)$$

Οι ακραίες τιμές της M θα είναι:

$$\text{- Στο σημείο Α ισχύει } x=0, \text{ άρα } \mathbf{M} = \mathbf{0} \quad (9-6\alpha)$$

(όπως βρέθηκε και νωρίτερα, βλ. σχ. 9.11)

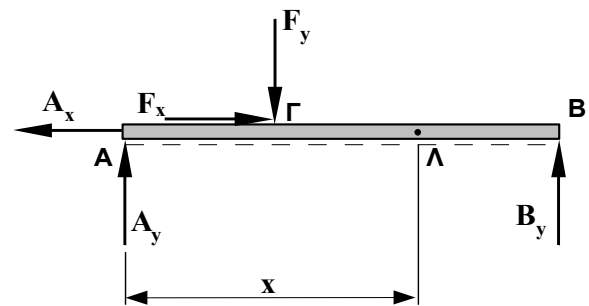
$$\text{- Στο σημείο Γ ισχύει } x=0,3\text{m} \text{ άρα } \mathbf{M} = 700\text{N} * 0,3\text{m} = \mathbf{210\text{ Nm}} \quad (9-6\beta)$$

(όπως βρέθηκε και νωρίτερα, βλ. σχ. 9.6).

Για να υπολογίσουμε τα φορτία διατομής N , Q , M που ισχύουν στην περιοχή $ΓΒ$ της δοκού, φανταζόμαστε τη δοκό κομμένη σε ένα άλλο τυχόν σημείο Λ το οποίο βρίσκεται μεταξύ Γ και B .

Αν διαλέξουμε να ονομάσουμε x την απόσταση $Α\Lambda$, και αν εξετάσουμε το αριστερό τμήμα του δοκαριού $ΑΓ\Lambda$, προκύπτει το παρακάτω σχήμα 9.16.

Σημειώνουμε στο σχήμα ότι η απόσταση $\Gamma\Lambda$ (που επίσης θα χρειαστεί) είναι $x-0,3\text{m}$



Σχήμα 9.15

Ακραίες τιμές του x : Για $\Lambda \rightarrow \Gamma$ προκύπτει $x = 0,3\text{m}$ ενώ για $\Lambda \rightarrow B$ προκύπτει $x = 1\text{m}$

Οι τιμές των N , Q , M είναι:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N + F_x - A_x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{N} = A_x - F_x = \mathbf{0}$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y - F_y - Q = 0 \Rightarrow$$

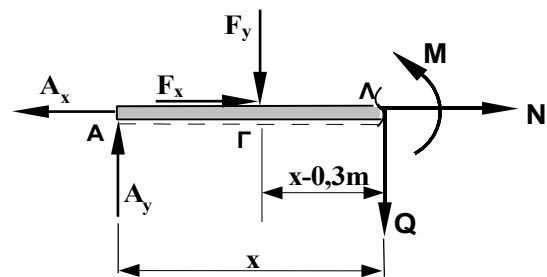
$$\Rightarrow \mathbf{Q} = A_y - F_y =$$

$$= 700\text{N} - 1000\text{N} = \mathbf{-300\text{N}}$$

$$\Sigma M_\Lambda = 0 \Rightarrow A_y x - F_y (x-0,3\text{m}) - M = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{M} = A_y x - F_y (x-0,3\text{m}) =$$

$$= \mathbf{700\text{N} * x - 1000\text{N} * (x - 0,3\text{m})}$$



Σχήμα 9.16

Τα αποτελέσματα γράφονται και στη μορφή

$$N = 0 \text{ (σταθερή συνάρτηση) για } 0,3\text{m} < x < 1\text{m} \quad (9-7\alpha)$$

$$Q = -300\text{N} \text{ (σταθερή συνάρτηση) για } 0,3\text{m} < x < 1\text{m} \quad (9-7\beta)$$

$$M = A_y x - F (x-0,3\text{m}) = 700\text{N} * x - 1000\text{N} * (x - 0,3\text{m}) \text{ για } 0,3\text{m} < x < 1\text{m} \quad (9-7\gamma)$$

Οι ακραίες τιμές της M θα είναι

- Στο **σημείο Γ** ισχύει $x=0,3m$,

$$\text{άρα } M = 700N * 0,3m - 1000N * 0 = \mathbf{210Nm} \quad (9-8\alpha)$$

- Στο **σημείο Β** ισχύει $x = 1m$,

$$\text{άρα } M = 700N * 1m - 1000N * (1m - 0,3m) = 700Nm - 700Nm = \mathbf{0} \quad (9-8\beta)$$

Εάν συνοψίσουμε τις σχέσεις (9-5) και (9-7) σε γραφική παράσταση, παίρνουμε τα διαγράμματα φορτίων διατομής που φαίνονται στο παρακάτω σχ. 9.17.

Παρατηρήσεις στα διαγράμματα:

- Γνωρίζουμε ήδη από τα μαθηματικά ότι η γραφική παράσταση οποιασδήποτε σταθερής συνάρτησης είναι μια οριζόντια ευθεία. Για το λόγο αυτό, οι γραφικές παραστάσεις των N , Q είναι οριζόντιες ευθείες.

- Η ροπή M εκφράζεται με δύο διαφορετικά μεταξύ τους πολυώνυμα πρώτου βαθμού, με ανεξάρτητη μεταβλητή την απόσταση x . (βλέπε σχέσεις (9-5γ), (9-7γ)). Όπως γνωρίζουμε από τα μαθηματικά, οι γραφικές τους παραστάσεις θα είναι ευθείες με κλίση. Γνωρίζουμε ήδη δύο σημεία της κάθε ευθείας, αφού έχουμε υπολογίσει τις ακραίες τιμές της ροπής:

Δύο σημεία της ευθείας $M=A_y x$ είναι τα $(x,M) = (0, 0)$ και $(x,M) = (0,3m, 210Nm)$ (βλ. σχέσεις (9-6)).

Τοποθετούμε τα σημεία στο διάγραμμα και χαράζουμε την ευθεία που ενώνει (ευθεία $\Delta\Delta$ στο σχ. 9.17γ, που είναι η γραφική παράσταση της $M=A_y x$).

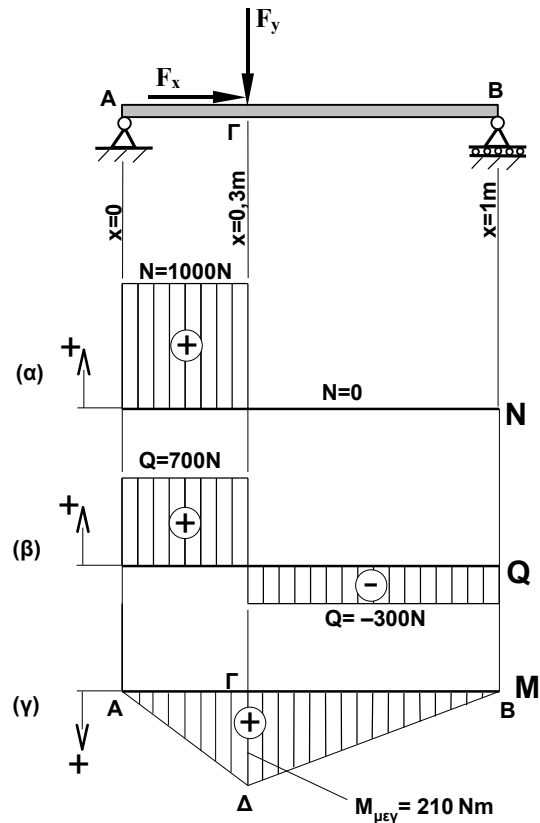
Όμοια, δύο σημεία της ευθείας

$$M = A_y x - F(x-0,3m)$$

είναι τα $(x, M) = (0,3m, 210Nm)$ και $(x, M) = (1m, 0)$ (βλ. σχέσεις 9.8) και η γραφική της παράσταση είναι η ευθεία ΔB στο σχ. 9.17γ.

- Στη γραφική παράσταση της καμπτικής ροπής εφαρμόστηκε ένα ζευγάρι συμβάσεων που συνήθως τις υιοθετούν οι μηχανικοί : α) Η ένα αναφοράς τέθηκε από κάτω και β) τα θετικά της καμπτικής ροπής τέθηκαν επίσης προς τα κάτω. Με τον τρόπο αυτό, το διάγραμμα καμπτικών ροπών μοιάζει με το σχήμα που θα πάρει η δοκός όταν παραμορφωθεί ελαστικά υπό την επίδραση των δυνάμεων που την φορτίζουν.

- Στο σημείο Γ η διατμητική δύναμη Q αλλάζει απότομα από $+700N$ σε $-300N$. Αυτή η μεταβολή λέγεται άλμα της διατμητικής δύναμης και είναι ίση με την εξωτερική



Σχήμα 9.17

Διαγράμματα φορτίων διατομής αμφιέρειστης δοκού

δύναμη F που ενεργεί πάνω στο δοκάρι, κάθετα προς το μήκος του, στο σημείο του άλματος.

Όμοια η N έχει άλμα από 1000N σε 0 στο σημείο Γ . Το άλμα είναι ίσο με την εξωτερική αξονική δύναμη F_x .

Στο σημείο του άλματος της Q , υπάρχει απότομη αλλαγή στην κλίση της καμπτικής ροπής M (βλ. σημείο Δ στο σχ. 9.17). Λέμε ότι “η M παρουσιάζει γόνατο στο σημείο Γ ”.

9.4.3 Διαγράμματα φορτίων διατομής σε πρόβολο

Στον πρόβολο του σχήματος 9.18 να υπολογισθούν τα διαγράμματα των φορτίων διατομής.

Λύση: Τοποθετούμε την ίνα αναφοράς από κάτω. Κόβουμε στο K , παίρνουμε το τμήμα KB που δεν περιέχει την πάκτωση, και προκύπτει:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N = 0 \quad (9-9\alpha)$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow Q = F = 1000\text{N} \quad (9-9\beta)$$

$$\begin{aligned} \Sigma M_K = 0 \Rightarrow M + F x = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow M = -F x \end{aligned} \quad (9-9\gamma)$$

Οι ακραίες τιμές της M θα είναι:

- Στο **σημείο B** ισχύει $x=0$, άρα $M = 0$

- Στο **σημείο Γ** ισχύει $x=0,7\text{m}$ άρα

$$M = -F \ell = -1000\text{N} * 0,7\text{m} = -700\text{Nm}$$

Παρατηρούμε ότι τα παραπάνω βρέθηκαν χωρίς να χρειαστεί να υπολογίσουμε τα φορτία στήριξης στην πάκτωση.

Άλλη λύση:

Αν διαλέγαμε να εξετάσουμε το τμήμα AK που περιέχει την πάκτωση, η συνολική λύση (αρκετά δυσκολότερη) θα ήταν:

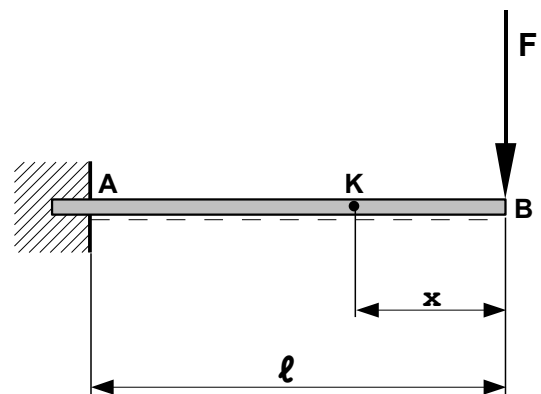
Βρίσκουμε τα φορτία στήριξης στην πάκτωση:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

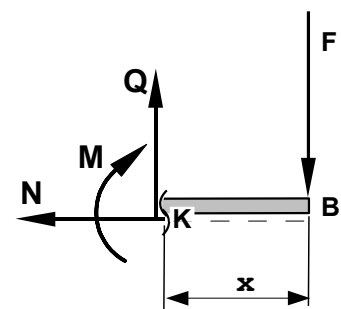
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y = F = 1000\text{N}$$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow F \ell - M_A = 0 \Rightarrow$$

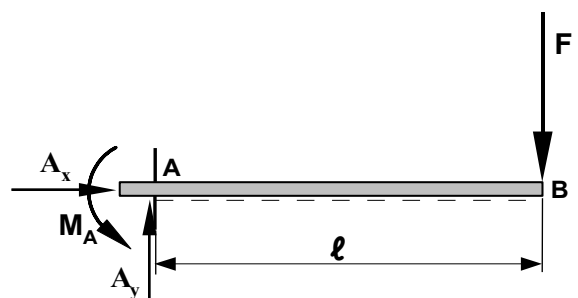
$$\Rightarrow M_A = F \ell = 1000\text{N} * 0,7\text{m} = 700\text{Nm}$$



Σχ. 9.18 Πρόβολος
(Δίδονται: $F=1000\text{N}$ $\ell=0,7\text{m}$)

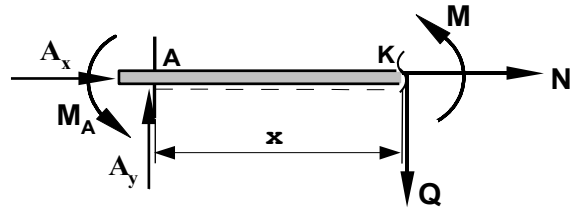


Σχήμα 9.19



Σχήμα 9.20

Τοποθετούμε την ίνα αναφοράς από κάτω, κόβουμε στο K, ονομάζουμε αυτή τη φορά την απόσταση AK με το γράμμα x (ακραίες τιμές: x=0 για το A και x=l=0,7m για το B) και έχουμε:



Σχήμα 9.21

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N = -A_x = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow Q = A_y = 1000\text{N}$$

$$\Sigma M_K = 0 \Rightarrow M - A_y x + M_A = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M = A_y x - M_A = 1000\text{N} * x - 700\text{Nm}$$

Οι ακραίες τιμές της M θα είναι

- Στο **σημείο A** ισχύει x=0, άρα $M = -M_A = -700\text{Nm}$

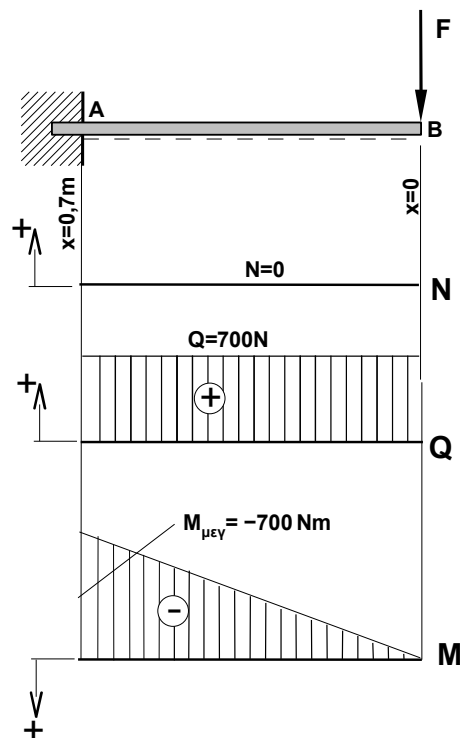
- Στο **σημείο B** ισχύει x = 0,7m,

άρα $M = A_y \ell - M_A = 1000\text{N} * 0,7\text{m} - 700\text{Nm} = (700 - 700)\text{Nm} = 0$

Παρατηρούμε ότι προκύπτουν ίδια αποτελέσματα, με αρκετά περισσότερες όμως πράξεις. Επομένως: Όταν υπολογίζουμε τα φορτία διατομής πακτωμένης δοκού, είναι προτιμότερο, αφού κόψουμε τη δοκό, να εξετάσουμε το τμήμα της που ΔΕΝ περιέχει την πάκτωση.

Τα διαγράμματα των φορτίων διατομής (δηλ. οι γραφικές παραστάσεις των σχέσεων (9-9)) δίνονται στο διπλανό σχήμα 9.22.

(Τέθηκαν τιμές του x σύμφωνα με τη σημασία που έχει το x στο σχ. 9.18. Αν βασισθούν τα διαγράμματα στο σχ. 9.21, θα αλλάξουν μόνο οι τιμές του x, ενώ η μορφή των διαγραμμάτων θα παραμείνει αναλλοίωτη.)



Σχήμα 9.22

Διαγράμματα φορτίων διατομής προβόλου

9.4.4 Διαγράμματα φορτίων διατομής σε δοκάρι με πολλές δυνάμεις

Να βρεθούν τα διαγράμματα φορτίων διατομής στο δοκάρι του σχ. 9.23, αν ισχύει:

$$F_1=1414 \text{ N} \quad \theta=45^\circ \quad F_2=700 \text{ N}$$

$$\alpha=0,3\text{m} \quad \beta=0,7\text{m} \quad \gamma=0,25\text{m}$$

Λύση:

Υπολογίζουμε τα φορτία των στηρίξεων (βλ. σχ. 9.24):

$$F_x = F \cos \theta = 1414 \text{ N} * \cos 45^\circ = 1000 \text{ N}$$

$$F_y = F \sin \theta = 1414 \text{ N} * \sin 45^\circ = 1000 \text{ N}$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow A_x = F_x = 1000 \text{ N}$$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_y * 0,3\text{m} + F_2 * 0,75\text{m} - B_y * 1\text{m} = 0$$

$$\Rightarrow B_y = \dots = 825 \text{ N}$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y = F_y + F_2 - B_y = 875 \text{ N}$$

Επιλέγουμε την θέση της ίνας αναφοράς από κάτω.

Κόβουμε σε τυχόν σημείο Κ στην περιοχή ΑΓ. Εξετάζουμε το αριστερό τμήμα του δοκαριού ΑΚ και παίρνουμε

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N = A_x = \mathbf{1000 \text{ N}} \quad (9-10\alpha)$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow Q = A_y = \mathbf{875 \text{ N}} \quad (9-10\beta)$$

$$\Sigma M_K = 0 \Rightarrow A_y x_K - M = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{M = A_y x_K = 875 \text{ N} * x_K} \quad (9-10\gamma)$$

όπου $0 < x_K < 0,3\text{m}$

Οι ακραίες τιμές της Μ θα είναι:

$$\text{- Σημείο Α: } x_K=0, \text{ άρα } \mathbf{M = 0} \quad (9-11\alpha)$$

$$\text{- Σημείο Γ: } x_K=0,3\text{m}$$

$$\text{άρα } \mathbf{M = 875 \text{ N} * 0,3\text{m} =}$$

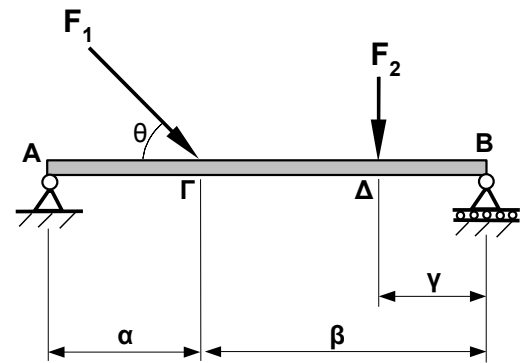
$$\mathbf{= 262,5 \text{ Nm}} \quad (9-11\beta)$$

Κόβουμε επίσης σε τυχόν σημείο Λ στην περιοχή ΓΔ. Εξετάζουμε το αριστερό τμήμα του δοκαριού ΑΓΛ και παίρνουμε

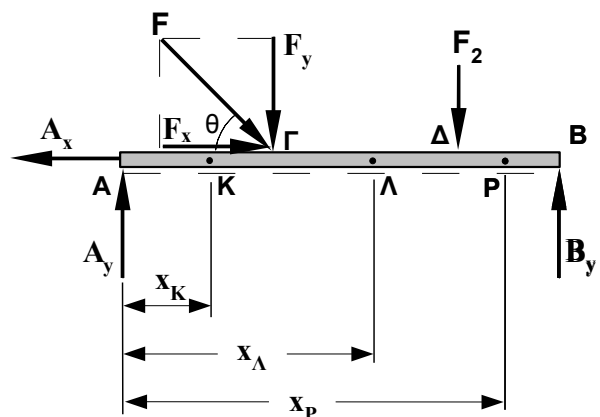
$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N = A_x - F_x = \mathbf{0} \quad (9-12\alpha)$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow Q = A_y - F_y = \mathbf{-125 \text{ N}} \quad (9-12\beta)$$

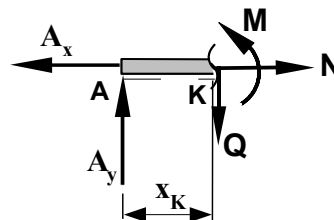
$$\Sigma M_\Lambda = 0 \Rightarrow A_y x_\Lambda - F_y (x_\Lambda - 0,3\text{m}) - M = 0$$



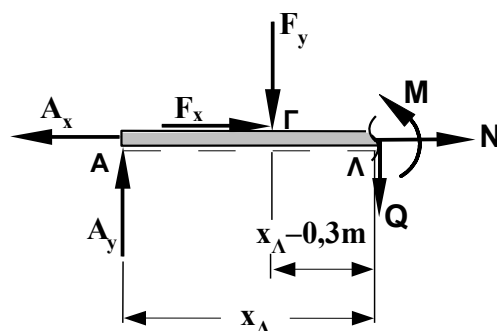
Σχ. 9.23



Σχ. 9.24



Σχ. 9.25α



Σχ. 9.25β

$$\Rightarrow M = A_y x_\Lambda - F_y (x_\Lambda - 0,3\text{m}) = 875\text{N} * x_\Lambda - 1000\text{N} (x_\Lambda - 0,3\text{m}) \quad (9-12\gamma)$$

όπου $0,3\text{m} < x_\Lambda < 0,75\text{m}$

Οι ακραίες τιμές της M θα είναι:

$$\text{- Σημείο Γ: } x_\Lambda = 0,3\text{m} \quad \text{άρα } M = 875\text{N} * 0,3\text{m} - 0 = 262,5\text{ Nm} \quad (9-13\alpha)$$

$$\text{- Σημείο Δ: } x_\Lambda = 0,75\text{m} \quad \text{άρα} \\ M = 875\text{N} * 0,75\text{m} - 1000\text{N} (0,75\text{m} - 0,3\text{m}) = 206,25\text{ Nm} \quad (9-13\beta)$$

Σημείωση: Στο παραπάνω σχήμα 9.26 πρέπει να εξετάσουμε το τμήμα ΑΓΛ που περιλαμβάνεται ανάμεσα στην τομή Λ και στο άκρο Α της αρχικής δοκού. (Περιέχει όλες τις περιοχές αριστερά του Λ (εδώ την ΑΓ και την ΓΛ), και όχι μόνο την τελευταία (εδώ την ΓΛ)).

Παραλλαγή των υπολογισμών για την περιοχή ΓΒ:

Εάν επιλέγαμε να εξετάσουμε το τμήμα ΓΛ (για την ακρίβεια το $\Gamma^{\text{op}}\Lambda$), το σχήμα θα έπρεπε να είναι όπως το σχ. 9.26. Δεν πρέπει να απουσιάζουν τα N' , Q' , M' από την αριστερή τομή Γ^{op} . Οι υπολογισμοί πρέπει να γίνουν ως εξής:

- Επειδή το σημείο Γ^{op} βρίσκεται στην περιοχή ΑΓ, άρα βασιζόμαστε στα αποτελέσματα που βρήκαμε στο σχ. 9.25α για να προσδιορίσουμε τα N' , Q' , M' :

$$N' = 1000\text{N}$$

$$Q' = 875\text{N}$$

$$M' = 875\text{N} * 0,3\text{m} = 262,5\text{ Nm}$$

(όπου τέθηκε $x_K = 0,3\text{m}$ ώστε το Κ του σχ. 9.25α να πέσει επάνω στο σημείο Γ^{op}).

- Από τις εξισώσεις ισορροπίας του τμήματος $\Gamma^{\text{op}}\Lambda$ υπολογίζουμε τα φορτία διατομής N , Q , M στο σημείο Λ:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N = N' - F_x = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow Q = Q' - F_y = -125\text{N}$$

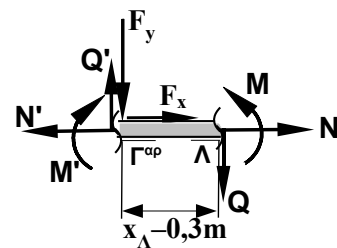
$$\Sigma M_\Lambda = 0 \Rightarrow (Q' - F_y)(x_\Lambda - 0,3\text{m}) + M' - M = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M = M' + (Q' - F_y)(x_\Lambda - 0,3\text{m}) = 262,5\text{ Nm} + (-125\text{ N}) * (x_\Lambda - 0,3\text{m})$$

- Οι ακραίες τιμές της M θα είναι:

$$\text{Σημείο Γ: } x_\Lambda = 0,3\text{m} \quad \text{άρα } M = 262,5\text{ Nm} + 0 = 262,5\text{ Nm}$$

$$\text{Σημείο Δ: } x_\Lambda = 0,75\text{m} \quad \text{άρα } M = 262,5\text{ Nm} - 125\text{N} (0,75\text{m} - 0,3\text{m}) = 206,25\text{ Nm}$$



Σχ. 9.26

Παρατηρούμε ότι οι τιμές των N , Q , M που βρέθηκαν από υπολογισμούς στο σχ. 9.26 είναι ίδιες με αυτές που βρέθηκαν στο σχ. 9.25, άρα **οι δύο τρόποι είναι ισοδύναμοι**. Όμως οι υπολογισμοί στο σχ. 9.25 (πρώτος τρόπος) παρακάμπτουν την ανάγκη να βρεθούν οι τιμές των N' , Q' , M' , και γι' αυτό είναι προτιμότεροι.

Απομένει να υπολογίσουμε τα φορτία διατομής σε σημείο Ρ της περιοχής ΔΒ. Στην περίπτωση αυτή βολεύει να εξετασθεί η ισορροπία του δεξιού τμήματος της δοκού ΡΒ, γιατί αυτό έχει λιγότερες δυνάμεις.

Στην απόσταση ΡΒ δίνουμε νέο όνομα x' . Το διάστημα μεταβολής της είναι από

$x'=0$ (για $P \rightarrow B$) έως $x'=0,25m$ (για $P \rightarrow \Delta$).

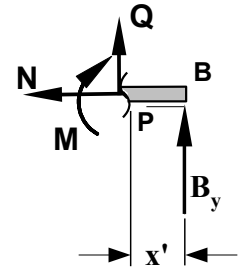
Από τις εξισώσεις ισοροπίας του τμήματος PB παίρνουμε:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N = 0 \quad (9-14\alpha)$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow Q + B_y = 0 \Rightarrow Q = -B_y = -825N \quad (9-14\beta)$$

$$\Sigma M_E = 0 \Rightarrow M - B_y x' = 0 \Rightarrow M = B_y x' = 825N \cdot x' \quad (9-14\gamma)$$

Σχ. 9.27



Οι ακραίες τιμές της M θα είναι:

- Σημείο Β: $x'=0$ άρα $M = 0$ (9-15α)

- Σημείο Γ: $x'=0,25m$ άρα $M = 825N \cdot 0,25m = 206,25 Nm$ (9-15β)

Η σχεδίαση των διαγραμμάτων φορτίων διατομής αυτής της δοκού αφήνεται στον αναγνώστη ως άσκηση.

9.4.5 Μεταβολή των φορτίων διατομής κατά μήκος της δοκού και φόρτιση με καταναμημένο φορτίο

Στα παραδείγματα που εξετάστηκαν μέχρι τώρα επιβεβαιώνεται ένας κανόνας που λέει ότι:

Όταν ένα δοκάρι φορτίζεται μόνο με μεμονωμένες δυνάμεις, χωρίς να ενεργούν επάνω του καταναμημένα φορτία (δηλ. όταν $q=0$),

τότε σε κάθε περιοχή του δοκαριού η εφεκλυστική και η διατμητική δύναμη είναι σταθερές (δηλ. $N, Q = \text{πολυώνυμο μηδενικού βαθμού}$)

ενώ η καμπτική ροπή M μεταβάλλεται ως πολυώνυμο πρώτου βαθμού (διαφορετικό πολυώνυμο για κάθε περιοχή του δοκαριού).

(Στα παραπάνω εννοείται ότι οι περιοχές διαχωρίζονται η μία από την άλλη στα σημεία όπου ενεργούν πάνω στο δοκάρι οι μεμονωμένες δυνάμεις).

Σ' αυτή την παράγραφο θα δούμε ένα παράδειγμα που ανήκει σε διαφορετική περίπτωση, και επαληθεύει τον κανόνα:

Όταν μία περιοχή ενός δοκαριού φορτίζεται με ομοιόμορφο καταναμημένο φορτίο (δηλ. όταν $q = \text{πολυώνυμο μηδενικού βαθμού και } q \neq 0$),

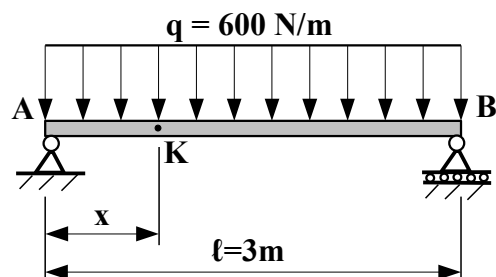
τότε σ' αυτή την περιοχή η διατμητική δύναμη Q μεταβάλλεται ως πολυώνυμο πρώτου βαθμού, ενώ η καμπτική ροπή M ως πολυώνυμο δεύτερου βαθμού.

Παράδειγμα:

Να βρεθούν τα διαγράμματα φορτίων διατομής στο δοκάρι του σχ. 9.28

Λύση:

Υπολογίζουμε τα φορτία των στηρίξεων (βλ. σχ. 9.29):



Σχ. 9.28 Αμφιέρειστη δοκός με ομοιόμορφο καταναμημένο φορτίο

$$R = q \ell = 600 \text{ N/m} * 3\text{m} = 1800\text{N}$$

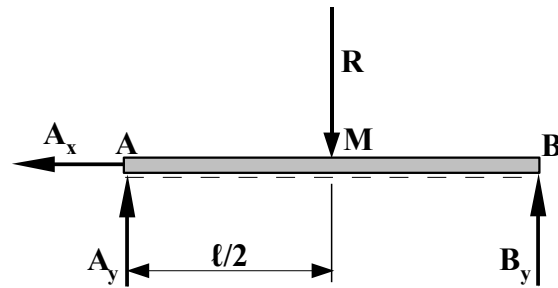
$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow R * \ell/2 - B_y * \ell = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_y = R/2 = 900\text{N}$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y = R - B_y = 900\text{N}$$

Επιλέγουμε την θέση της ίνας αναφοράς από κάτω.

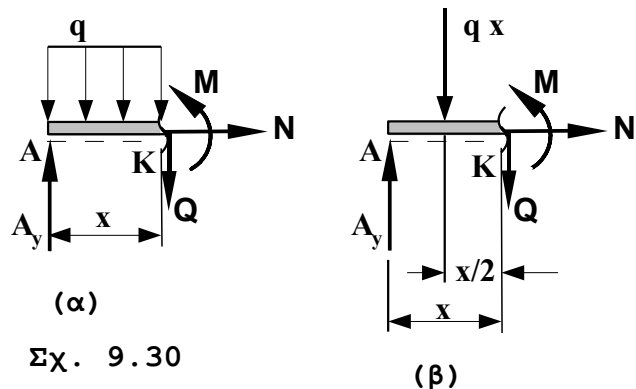


Σχ. 9.29

Κόβουμε το δοκάρι σε τυχόν σημείο K (βλ. σχ. 9.28 για τη θέση της τομής).

Εξετάζουμε το αριστερό τμήμα του δοκαριού AK, που ξανασχεδιάστηκε στο σχ. 9.30α.

Στα σχ. 9.30α, 9.30β δεν σχεδιάστηκε η δύναμη A_x , διότι είναι μηδενική.



Σχ. 9.30

Μετατρέπουμε το σχ. 9.30α στο 9.30β (το μέρος του κατανεμημένου φορτίου που πρόλαβε να πατήσει στο αριστερό τμήμα της δοκού AK είναι ίσο με $q x$ και αντικαθίσταται από μία δύναμη στο μέσον του AK).

Από τις εξισώσεις ισοροπίας στο σχ. 9.30β παίρνουμε

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N = 0 \quad (9-16\alpha)$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow Q = A_y - q x = 900\text{N} - 600 \text{ N/m} * x \quad (9-16\beta)$$

$$\Sigma M_K = 0 \Rightarrow A_y x - (q x) * (x/2) - M = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M = A_y x - (q x) * (x/2) = \dots = 900\text{N} * x - 300\text{N/m} * x^2 \quad (9-16\gamma)$$

Οι χαρακτηριστικές τιμές της Q θα είναι:

$$\text{- Σημείο A: } x=0, \text{ άρα } Q = 900\text{N} - 0 = 900\text{N} \quad (9-17\alpha)$$

$$\text{- Σημείο M (μέσον της δοκού): } x=1,5\text{m}$$

$$\text{άρα } Q = 900\text{N} - 600\text{N/m} * 1,5\text{m} = 0 \quad (9-17\beta)$$

$$\text{- Σημείο B: } x=3\text{m}, \text{ άρα } Q = 900\text{N} - 600\text{N/m} * 3\text{m} = -900\text{N} \quad (9-17\gamma)$$

Επομένως στο σημείο M (μέσον της δοκού) είναι ενδεχόμενο να εμφανισθεί η μέγιστη καμπτική ροπή, επειδή γενικά ισχύει:

Η μέγιστη καμπτική ροπή μπορεί να εμφανισθεί είτε σε ένα από τα δύο άκρα της περιοχής του δοκαριού που εξετάζουμε, είτε σε εσωτερικό σημείο της περιοχής, στο οποίο μηδενίζεται η διατμητική δύναμη Q.

Οι χαρακτηριστικές τιμές της M θα είναι:

$$\text{- Σημείο A: } x=0, \text{ άρα } M = 0 \quad (9-18\alpha)$$

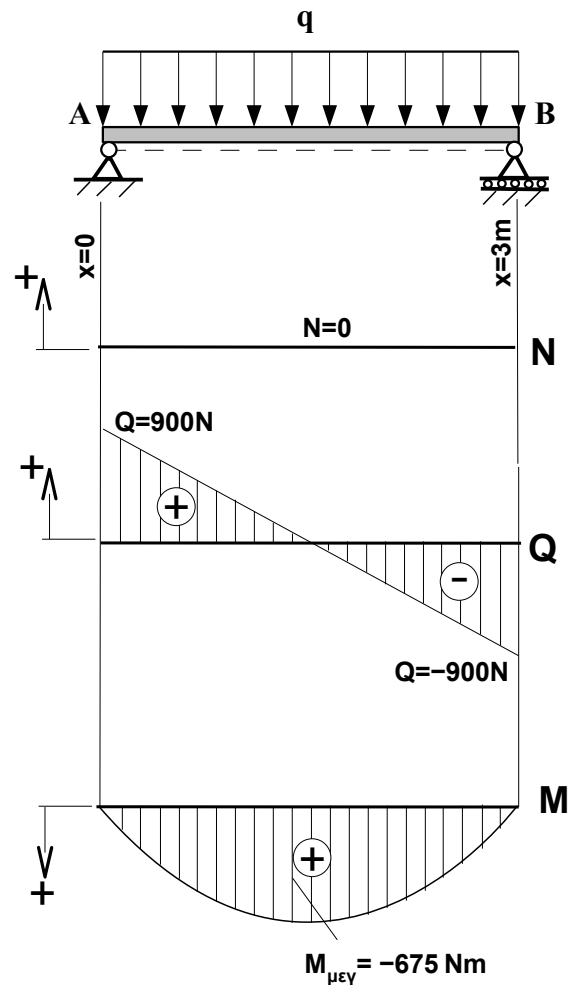
$$\text{- Σημείο M (μέσον της δοκού): } x=1,5\text{m} \text{ άρα } M = 900\text{N} * 1,5\text{m} - 300\text{N/m} * 1,5^2\text{m}^2$$

$$\text{δηλ. } M = 675\text{Nm} \quad (9-18\beta)$$

$$\text{- Σημείο B: } x=3\text{m}, \text{ άρα } M = 900\text{N} * 3\text{m} - 300\text{N/m} * 3^2\text{m}^2 = 0 \quad (9-18\gamma)$$

Παρατηρούμε ότι η μέγιστη καμπτική ροπή εμφανίζεται στο μέσον M της δοκού.

Τα διαγράμματα φορτίων διατομής του δοκαριού δίνονται στο διπλανό σχήμα (σχ. 9.31).



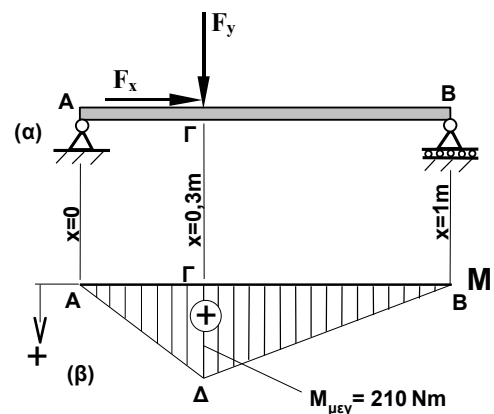
Σχ.9.31 Διαγράμματα φορτίων διατομής σε δοκό με ομοιόμορφο καταναεμημένο φορτίο

9.4.6 Φορείς με άλμα στην καμπτική ροπή

Στα μέχρι τώρα παραδείγματα συναντήσαμε περιπτώσεις στις οποίες η καμπτική ροπή M μεταβάλλεται κατά συνεχή τρόπο, χωρίς άλματα. Π.χ. στο δοκάρι της παραγ. 9.4.2 (το ξαναβλέπουμε στο διπλανό σχήμα) είχαμε δει ότι

- το δοκάρι χωρίζεται σε δύο περιοχές ΑΓ, ΓΒ
- το σύνορο μεταξύ των δύο περιοχών είναι το σημείο Γ στο οποίο ενεργεί η εξωτερική δύναμη F_y , (η κατεύθυνσή της είναι κάθετη στο μήκος του δοκαριού)
- η καμπτική ροπή υπολογίζεται από τους τύπους

(α) στην περιοχή ΑΓ (με $0 < x < 0,3\text{m}$): $M = 700\text{N} * x$



Σχ.9.32 Φορέας χωρίς άλμα στην καμπτική ροπή

(9-5γ)

(β) στην περιοχή ΓΒ (με $0,3\text{m} < x < 1\text{m}$): $M = 700\text{N} \cdot x - 1000\text{N} \cdot (x - 0,3\text{m})$ (9-7γ)
 Για την καμπτική ροπή στο σύνορο μεταξύ των δύο περιοχών (σημείο Γ, στο οποίο ισχύει $x = 0,3\text{m}$) κάνουμε την εξής διερεύνηση:

α) Αν δεχθούμε ότι το Γ ανήκει στην **αριστερή** περιοχή ΑΓ, βάζουμε στον τύπο (9-5γ) την τιμή $x = 0,3\text{m}$ και παίρνουμε:

$$M_{\Gamma}^{\text{αρι}} = 700\text{N} \cdot 0,3\text{m} = 210\text{ Nm}$$

β) Αν δεχθούμε ότι το Γ ανήκει στη **δεξιά** περιοχή ΓΒ, βάζουμε στον τύπο (9-7γ) την τιμή $x = 0,3\text{m}$ και παίρνουμε:

$$M_{\Gamma}^{\text{δεξ}} = 700\text{N} \cdot 0,3\text{m} - 1000\text{N} \cdot (0,3\text{m} - 0,3\text{m}) = 700\text{N} \cdot 0,3\text{m} - 0 = 210\text{ Nm}$$

Παρατηρούμε ότι σ' αυτό το παράδειγμα ισχύει

$$M_{\Gamma}^{\text{αρι}} = M_{\Gamma}^{\text{δεξ}} \quad (9-19)$$

Το παραπάνω συμπέρασμα (τύπος (9-19)) ισχύει γενικότερα όταν στο δοκάρι που εξετάζουμε:

- ασκούνται μόνο δυνάμεις ή καταναμημένα φορτία **και όχι ροπές**
- και **δεν υπάρχουν διακλαδώσεις**.

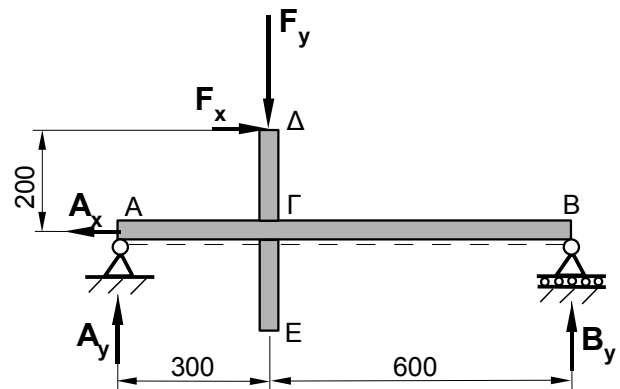
(Εννοείται ότι το σημείο Γ είναι το σύνορο μεταξύ δύο οποιωνδήποτε διαδοχικών περιοχών).

Σ' αυτή την παράγραφο, αντίθετα, θα εξετάσουμε δοκάρια στα οποία δεν ισχύουν οι παραπάνω προϋποθέσεις, και γι' αυτό παρουσιάζουν απότομη μεταβολή της καμπτικής ροπής σε ορισμένα σημεία.

Παράδειγμα:

Στο σχ. 9.33 παριστάνεται μία άτρακτος (κοινώς "άξονας") ΑΓΒ με στηρίξεις στα σημεία Α, Β. Στην άτρακτο είναι στερεωμένος ένας οδοντοτροχός ΔΓΕ, που στο σημείο Δ φορτίζεται με τις δυνάμεις $F_y = 1000\text{N}$ και $F_x = 500\text{N}$.

Ζητούνται οι καμπτικές ροπές λίγο αριστερά και λίγο δεξιά του σημείου Γ.



Σχ. 9.33 Φορέας με άλμα στην καμπτική ροπή (άτρακτος με εκκεντρική αξονική φόρτιση)

Λύση:

Τοποθετούμε στο σχήμα τις δυνάμεις στήριξης A_x , A_y , B_y καθώς και την ίνα αναφοράς στην κάτω πλευρά του δοκαριού.

Υπολογίζουμε τις δυνάμεις στήριξης:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = F_x = 500\text{N}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow F_y \cdot 300\text{mm} + F_x \cdot 200\text{mm} - B_y \cdot (300\text{mm} + 600\text{mm}) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_y = \frac{F_y \cdot 300\text{mm} + F_x \cdot 200\text{mm}}{300\text{mm} + 600\text{mm}} = \frac{1000\text{N} \cdot 300\text{mm} + 500\text{N} \cdot 200\text{mm}}{900\text{mm}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_y = 444,4\text{ N}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y = F_y - B_y = 1000\text{N} - 444,4\text{N} = 555,5\text{ N}$$

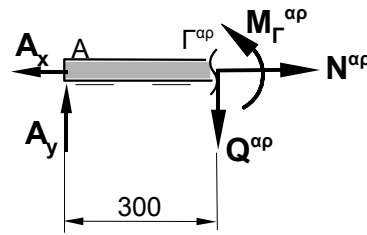
Κόβουμε το δοκάρι σε μικρή απόσταση αριστερά του σημείου Γ, εξετάζουμε το αριστερό τμήμα της ατράκτου, και παίρνουμε:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N^{ap} = A_x = 500N$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow Q^{ap} = A_y = 555,5N$$

$$\Sigma M_K = 0 \Rightarrow A_y * 300mm - M_{\Gamma}^{ap} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_{\Gamma}^{ap} = A_y * 300mm = 555,5N * 300mm = 166.600Nmm = 166,6Nm$$



(α)

Κατόπιν κόβουμε το δοκάρι σε μικρή απόσταση δεξιά του σημείου Γ, εξετάζουμε το αριστερό τμήμα της ατράκτου, και παίρνουμε:

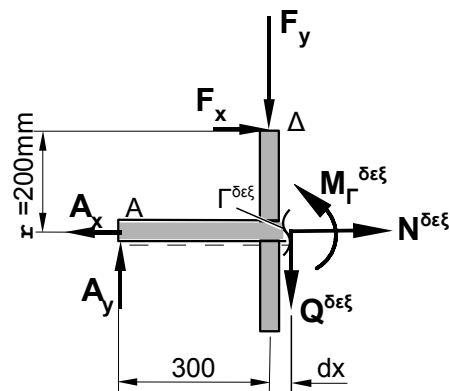
$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N^{\delta\epsilon\xi} = A_x - F_x = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow Q^{\delta\epsilon\xi} = A_y - F_y = -444,4N$$

$$\Sigma M_{\Lambda} = 0 \Rightarrow A_y * 300mm + F_x r - F_y dx - M_{\Gamma}^{\delta\epsilon\xi} = 0$$

Επειδή $dx \approx 0$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} M_{\Gamma}^{\delta\epsilon\xi} &\approx A_y * 300mm + F_x r = \\ &= 555,5N * 300mm + 500N * 200mm \\ &= 266.600Nmm = 266,6Nm \end{aligned}$$



(β)

Σχήμα 9.34 για υπολογισμό των N , Q , M σε θέσεις δεξιά και αριστερά του σημείου Γ

Παρατηρούμε ότι σ' αυτή την περίπτωση οι

καμπτικές ροπές M_{Γ}^{ap} , $M_{\Gamma}^{\delta\epsilon\xi}$ διαφέρουν μεταξύ τους, και η διαφορά τους είναι ίση με τη ροπή της έκκεντρης αξονικής δύναμης F_x ως προς σημείο της μέσης γραμμής του δοκαριού:

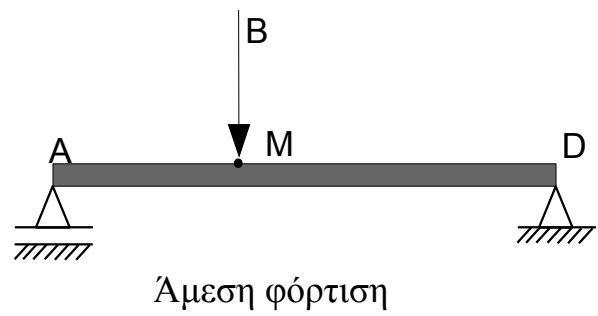
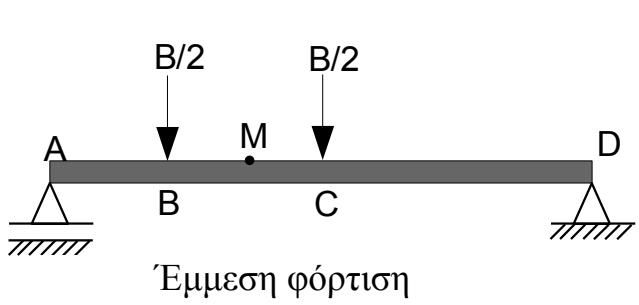
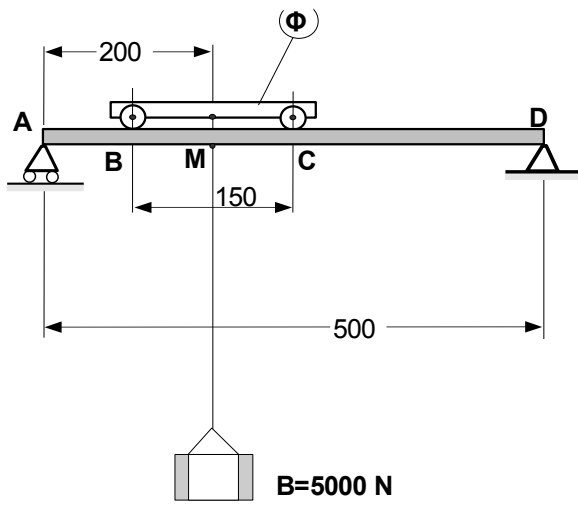
$$M_{\Gamma}^{\delta\epsilon\xi} - M_{\Gamma}^{ap} = F_x r \quad (9-20)$$

9.4.7 Άλλες περιπτώσεις

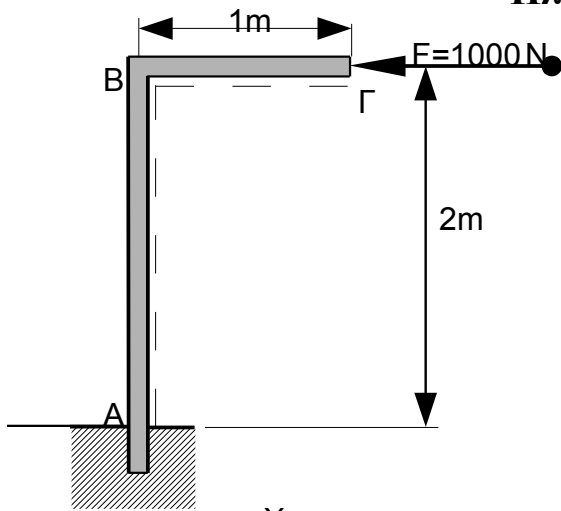
α) Για το δοκάρι του παρακάτω σχήματος να βρεθεί το διάγραμμα καμπτικής ροπής στην περίπτωση της άμεσης και της έμμεσης φόρτισης.

β) Για τις κατασκευές που περιγράφονται στις επόμενες σελίδες, να υπολογισθούν τα φορτία διατομής στις τομές B^{ap} , $B^{\delta\epsilon\xi}$, K που δίνονται στα σχήματα

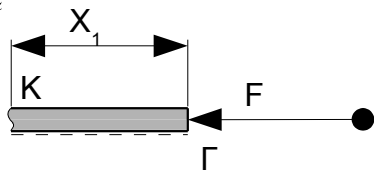
Έμμεση φόρτιση δοκού



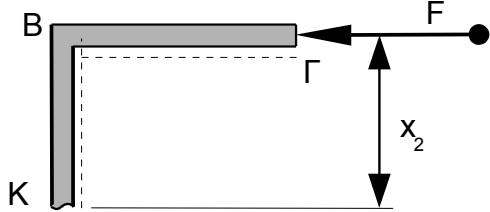
Πλαίσια



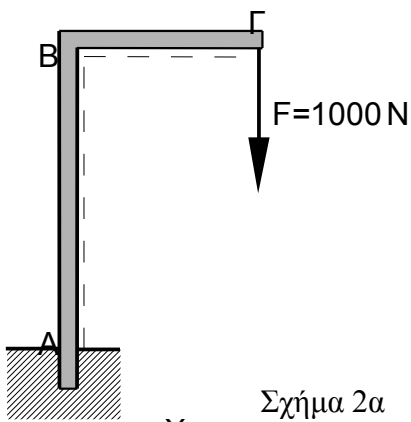
Σχήμα 1α



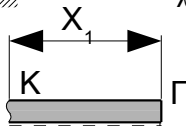
Σχήμα 1β



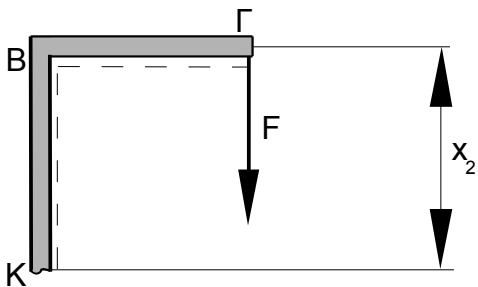
Σχήμα 1γ



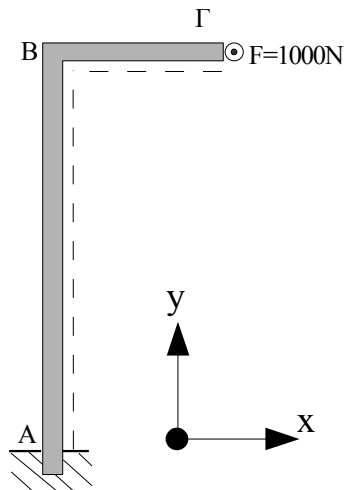
Σχήμα 2α



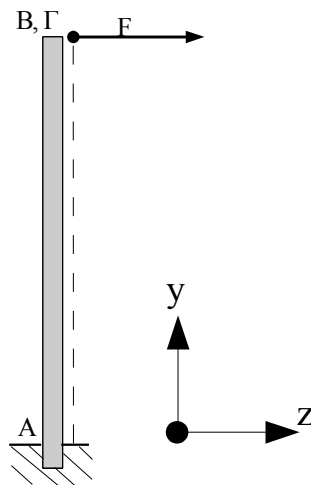
Σχήμα 2β



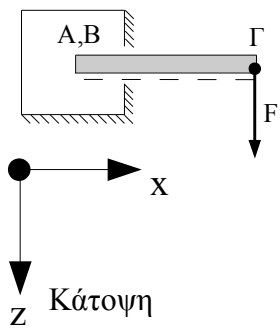
Σχήμα 2γ



Πρόοψη

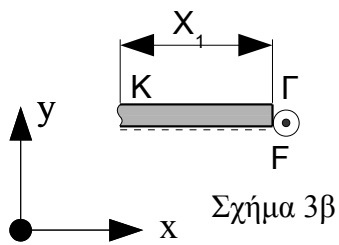


Πλάγια αριστερή όψη

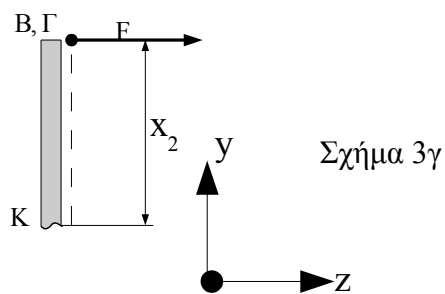


Κάτοψη

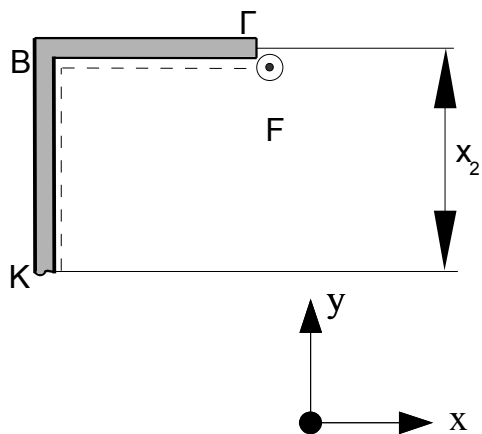
Σχήμα 3α Πλαίσια στον χώρο



Σχήμα 3β

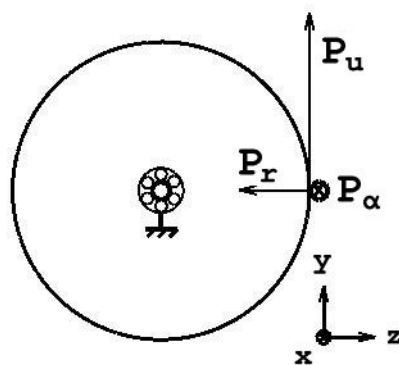
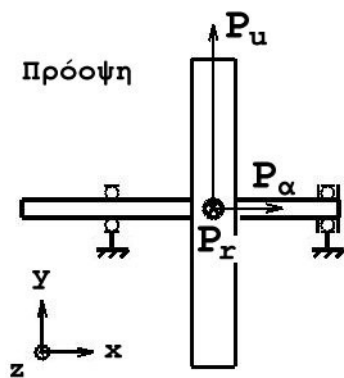
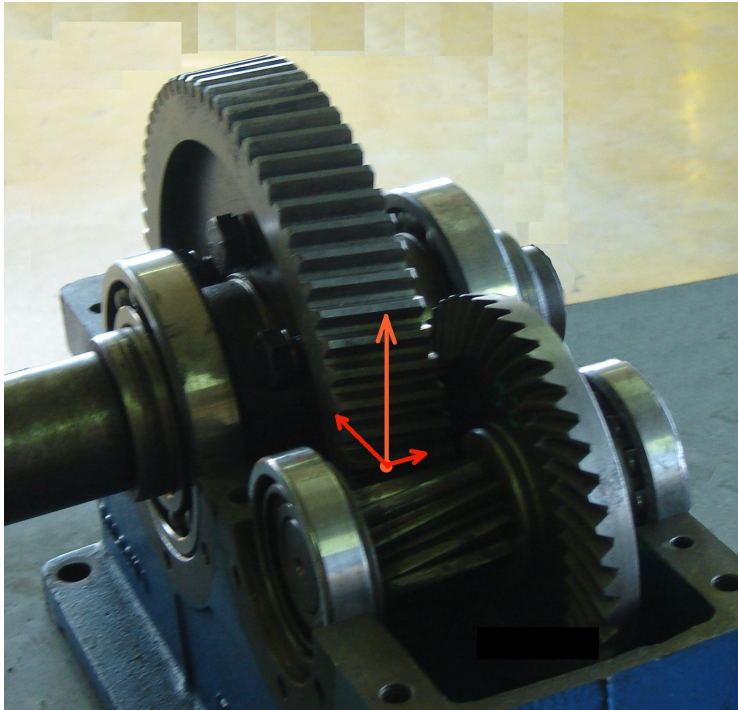


Σχήμα 3γ



Σχήμα 3δ

Διαγράμματα φορτίων διατομής σε άτρακτο (Δυνάμεις στο χώρο)



Πλάγια αριστερή όψη

