Τίτλος Μαθήματος

ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ
ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΤΕ

ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ

Καθηγητής

Δρ. Μοσχίδης Νικόλαος

ΣΕΡΡΕΣ, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2015

Άδειες Χρήσης

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons. Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Το έργο αυτό αδειοδοτείται από την Creative Commons Αναφορά Δημιουργού - Παρόμοια Διανομή 4.0 Διεθνές Άδεια. Για να δείτε ένα αντίγραφο της άδειας αυτής, επισκεφτείτε http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.el.

Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.

Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Κεντρικής Μακεδονίας**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

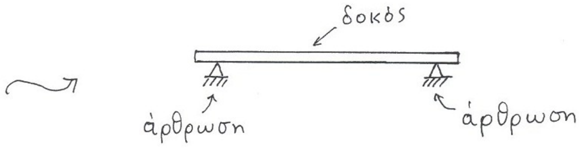
Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

3. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ ΣΤΗΡΙΞΗΣ

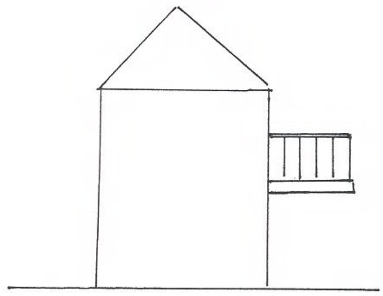
3.1 Ορισμός: **Φορέας** λέγεται ένα στερεό σώμα που δέχεται δυνάμεις (και θέλουμε τελικά να ελέγξουμε την αντοχή του).
Είδη γραμμικών φορέων: **ράβδος, δοκός, εύκαμπτος γραμμικός φορέας** (π.χ. σχοινί).Είδη στηρίξεων: **πάκτωση, άρθρωση, κύλιση, δεσμική ράβδος**.

3.2 Βασικά παραδείγματα:

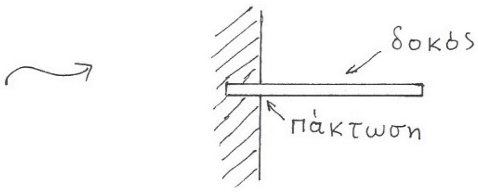
Σχ. 3.1 Παγκάκι



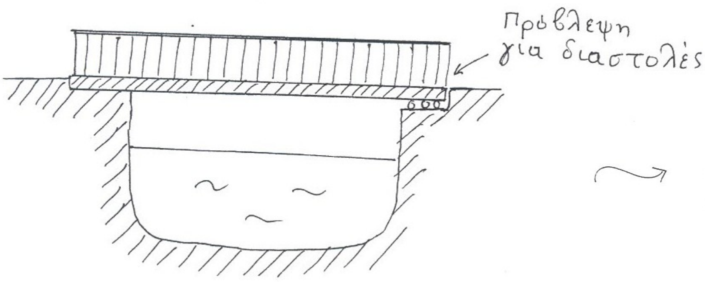
Σχ 3.2 Αμφιέρειστη δοκός (για μικρές απαιτήσεις: δύο αρθρώσεις)



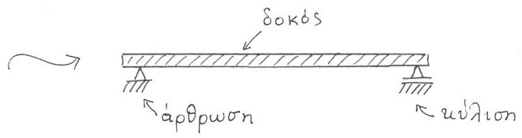
Σχ. 3.3 Μπαλκόνι



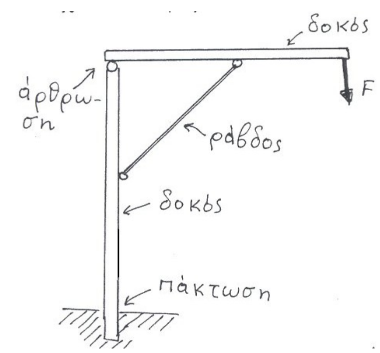
Σχ. 3.4 Πρόβολος



Σχ.3.5 Γέφυρα



Σχ. 3.6 Αμφιέρειστη δοκός (για υψηλές απαιτήσεις: μία άρθρωση και μία κύλιση)



Σχ. 3.7 Σύνθετος φορέας

3.3 Κινήσεις σώματος, λειτουργία των στηρίξεων

Από τη γεωμετρία διδασκόμαστε ότι όταν ένα σώμα εκτελεί κίνηση στο επίπεδο, τότε η συνολική του κίνηση μπορεί να αναλυθεί σε τρεις βασικές κινήσεις: μία ευθύγραμμη στην κατεύθυνση x, μία επίσης ευθύγραμμη στην κατεύθυνση y, και μία περιστροφή στο επίπεδο xy.

Θα λέμε ότι ένα σώμα είναι **πλήρως στηριγμένο** όταν εμποδίζεται κάθε κίνησή του.
(Για σώμα που κινείται σε επίπεδο, αρκεί να εμποδίζονται οι τρείς βασικές κινήσεις: κατά x, κατά y και η περιστροφή)

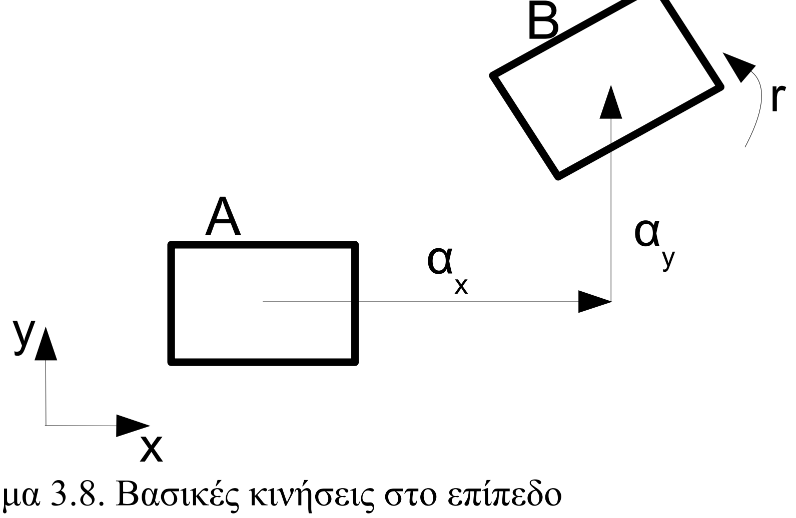
Θα λέμε ότι ένα σώμα **ισορροπεί** όταν το διανυσματικό άθροισμα των δυνάμεων που ενεργούν επάνω του είναι μηδέν, και η συνολική ροπή είναι επίσης μηδέν. (Το "διανυσματικό άθροισμα" πρέπει να έχει υπολογισθεί με τον κανόνα του παραλληλογράμμου ή με άλλο ισοδύναμο τρόπο, και πρέπει στο άθροισμα να περιλαμβάνονται και οι δυνάμεις στήριξης. Ανάλογες παρατηρήσεις ισχύουν για τη συνολική ροπή. Όλες οι ροπές του αθροίσματος ροπών πρέπει να έχουν υπολογισθεί ως προς το ίδιο σημείο, όποιο και αν είνα αυτό).

Όταν ένα σώμα είναι πλήρως στηριγμένο τότε ισορροπεί.

Αυτή η ισορροπία πετυχαίνεται επειδή ισχύει η παρακάτω
<u>Βασική ιδιότητα των στηρίξεων</u>: Όταν μία στήριξη **εμποδίζει τη μετακίνηση (ή την περιστροφή)** σε κάποια κατεύθυνση, **αυτό σημαίνει ότι ασκεί μία δύναμη (ή ροπή) στήριξης σ' αυτή την κατεύθυνση.** Η δύναμη στήριξης είναι τόση ώστε το άθροισμα αυτής και όλων των υπόλοιπων δυνάμεων σ' αυτή την κατεύθυνση να είναι μηδέν. (Προκειμένου για ροπές, πρέπει το άθροισμα αυτής και όλων των υπόλοιπων ροπών γύρω από τον άξονα στον οποίο εμποδίζεται η κίνηση να είναι μηδέν).

Όταν το σώμα κινείται στον χώρο, οι βασικές του κινήσεις είναι:
- τρείς ευθύγραμμες κινήσεις, κατά x, y και z αντίστοιχα
- τρείς περιστροφές, γύρω από τους άξονες x, y και z αντίστοιχα

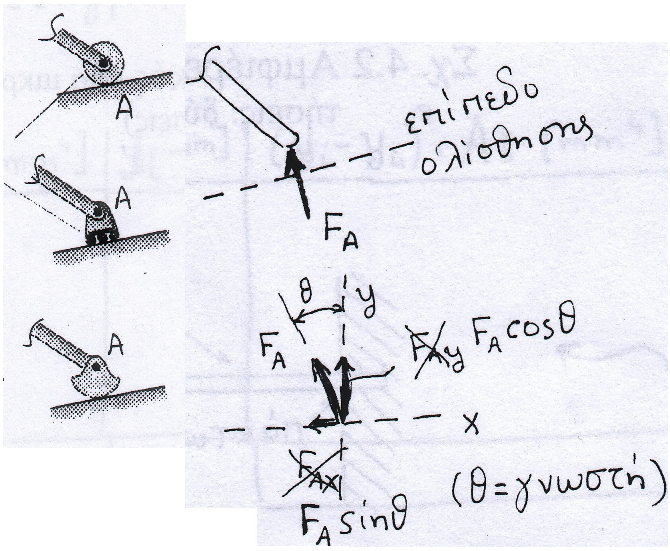
Κατά τα άλλα ισχύουν οι ανάλογες με τις παραπάνω παρατηρήσεις για τη στήριξη και την ισορροπία του σώματος.



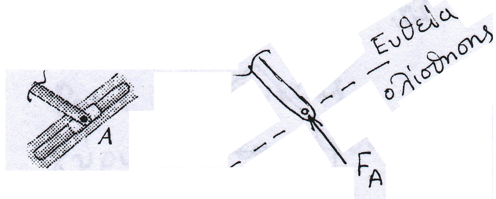
Σχήμα 3.8. Βασικές κινήσεις στο επίπεδο
Η κίνηση του σώματος από τη θέση Α στην Β
αναλύεται σε κινήσεις ευθύγραμμες κατά x και y (τις $α_x$, $α_y$) και
περιστροφή r.

3. Περιγραφή των στηρίξεων:

Κύλιση ονομάζεται μία στήριξη που εμποδίζει τη μετακίνηση σε μία κατεύθυνση (κ) αλλά την επιτρέπει σε κατεύθυνση κάθετη προς την (κ). Έτσι ασκεί δύναμη γνωστής κατεύθυνσης αλλά άγνωστου μεγέθους, και εισάγει **έναν** άγνωστο στις εξισώσεις ισορροπίας.
Κυλίσεις είναι: η απλή επαφή σώματος σε επίπεδη επιφάνεια χωρίς τριβή, η επαφή με μεσολάβηση κυλίνδρων κτλ που μηδενίζουν σχεδόν τις τριβές, οι ολισθητήρες κτλ.

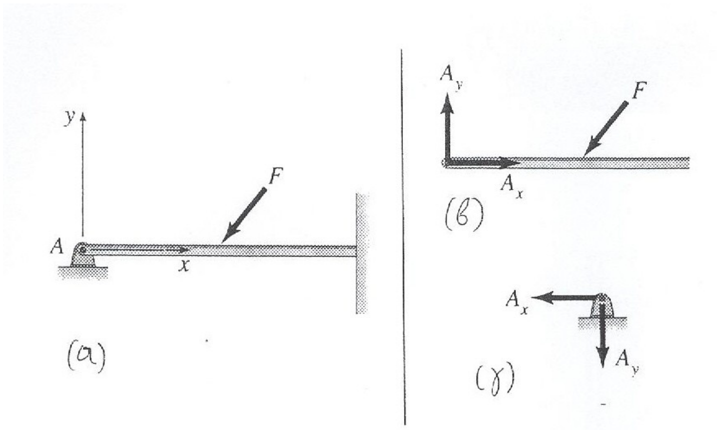


Σχ. 3.9 Κυλίσεις και οι δυνάμεις που ασκούν στον φορέα.



Σχ. 3.10 Ολισθητήρας και η δύναμη που ασκεί στον φορέα.

Άρθρωση ονομάζεται μία στήριξη που εμποδίζει κάθε μετακίνηση ενός σημείου του σώματος, ενώ ταυτόχρονα επιτρέπει την περιστροφή γύρω απ' αυτό το σημείο. Έτσι ασκεί δύναμη άγνωστης κατεύθυνσης και άγνωστου μεγέθους, την οποία αναλύουμε σε δύο συνιστώσες που είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Εισάγει λοιπόν **δύο** αγνώστους στις εξισώσεις ισορροπίας.
Αρθρώσεις είναι: οι συνδέσεις με πείρους, ο μεντεσές της πόρτας, το ρουλεμάν κ.ά.
Καταχρηστικά δεχόμαστε επίσης ως αρθρώσεις:
- τις συνδέσεις που περιορίζουν την περιστροφή χωρίς να την εμποδίζουν εντελώς, όπως π.χ. τις συνδέσεις με κοχλίες (κοινώς βίδες), ήλους (κοινώς περτσίνια) ή (για ξύλο) με καρφιά.
- την επαφή σώματος με επίπεδη επιφάνεια με τριβή, υπό τον όρο όμως να μην ξεπερνιέται το όριο στο οποίο αρχίζει η ολίσθηση του σώματος.

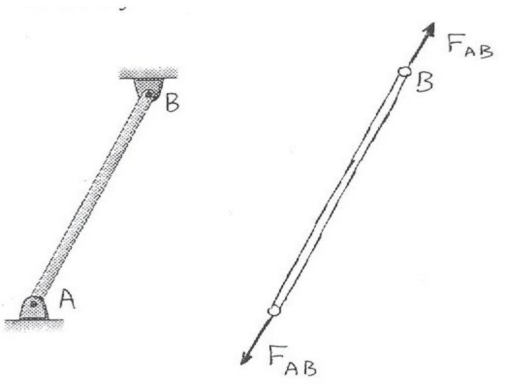


Σχ. 3.11 (α) Άρθρωση στο Α, κατασκευασμένη με πείρο
(β) Δυνάμεις που ασκεί η άρθρωση στον φορέα
(γ)Δυνάμεις που δέχεται η άρθρωση από τον φορέα

Δεσμική ράβδος ή απλώς **ράβδος** λέγεται ένα ευθύγραμμο στερεό με μήκος μεγάλο σε σχέση με τις διαστάσεις της κάθετης τομής του, το οποίο
- στηρίζεται με αρθρώσεις στα δύο του άκρα
- και επιπλέον, δέχεται μόνο δυνάμεις στα άκρα του, δεν δέχεται καμμία ροπή, και επίσης δεν δέχεται δυνάμεις κάθετες στο μήκος του σε ενδιάμεσα σημεία.

Αποδεικνύεται ότι για να ισορροπεί η ράβδος πρέπει οι δυνάμεις που δέχεται στα άκρα της να είναι παράλληλες με το μήκος της ράβδου. Όταν λοιπόν χρησιμοποιείται ως στήριξη ασκεί δύναμη γνωστής κατεύθυνσης και άγνωστου μεγέθους, άρα ισοδυναμεί με κύλιση.

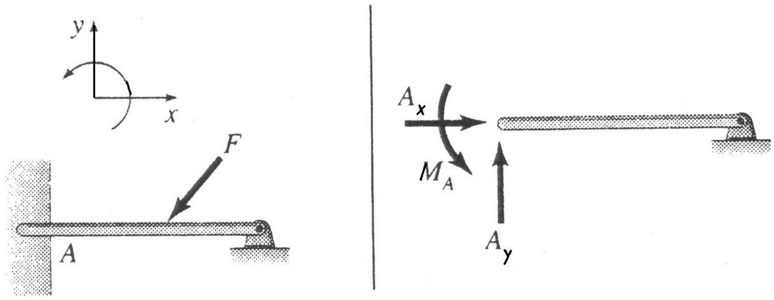
Τα **εύκαμπτα στοιχεία** (π.χ. σχοινί, συρματόσχοινο κτλ) μπορούν να ασκήσουν δύναμη μόνο παράλληλα προς το μήκος τους και μόνο εφελκυστική, άρα ισοδυναμούν και αυτά με κυλίσεις.



Σχ. 3.12 Ράβδος και οι δυνάμεις
που δέχεται στα άκρα της

Δοκός λέγεται ένα ευθύγραμμο στερεό με μήκος μεγάλο σε σχέση με τις διαστάσεις της κάθετης τομής του, που στηρίζεται και φορτίζεται χωρίς τους περιορισμούς των ράβδων. Επομένως η δοκός και η ράβδος μοιάζουν στην κατασκευή τους, και διαφοροποιούνται ανάλογα με τον τρόπο στήριξης και φόρτισης.

Πάκτωση λέγεται μία στήριξη που εμποδίζει κάθε μετακίνηση και περιστροφή. Έτσι ασκεί στο σημείο της πάκτωσης δύο δυνάμεις στήριξης που είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, και μία ροπή στήριξης. Εισάγει **τρείς** αγνώστους στις εξισώσεις ισορροπίας.
Οι πακτώσεις υλοποιούνται με διάφορους τρόπους: με πρόβλεψη να υπάρχει συνέχεια του υλικού (π.χ. μπαλκόνι που προεξέχει από τον τσιμεντένιο σκελετό κτιρίου), με συγκόλληση, με εμφύτευση δοκαριού σε άλλο υλικό (π.χ. σε τοίχο ή στο έδαφος), με σφικτή συναρμογή κ.ά..

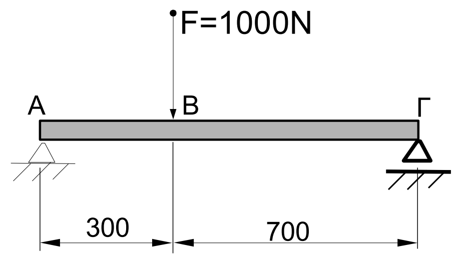


Σχήμα 3.13 Πάκτωση στο Α
και οι δυνάμεις και η ροπή που εξασκεί στο δοκάρι

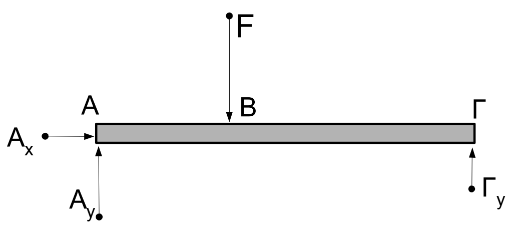
3.5 **Υπολογιστική διαδικασία**, παράδειγμα 3.1

<u>Βήμα 1</u>. Αναγνωρίζουμε τις στηρίξεις του σώματος.

Στο παράδειγμα του σχήματος οι στηρίξεις είναι η άρθρωση στο Α και η κύλιση στο Γ



<u>Βήμα 2</u>. Ξανασχεδιάζουμε το σώμα, αφαιρώντας τις στηρίξεις και τοποθετώντας στη θέση τους τις (ακόμη άγνωστες) δυνάμεις που ασκεί η κάθε στήριξη στο σώμα. **Δίνουμε ονόματα** σ' αυτές τις άγνωστες δυνάμεις στήριξης. Το σχήμα που παίρνουμε με τον τρόπο αυτό είναι το λεγόμενο **Διάγραμμα Ελευθέρου Σώματος** (ΔΕΣ).



<u>Βήμα 3α</u>. **Διαλέγουμε ένα σημείο γύρω από το οποίο θα υπολογίσουμε τις ροπές.** (Επιτρέπεται να διαλέξουμε όποιο σημείο θέλουμε, αλλά βολεύει να διαλέξουμε ένα

σημείο **από το οποίο περνούν δύο άγνωστες δυνάμεις**). Έστω ότι το σημείο που διαλέξαμε ονομάζεται Α.

Βήμα 3β. Σχηματίζουμε την εξίσωση μηδενισμού των ροπών γύρω από το σημείο Α που διαλέξαμε στο βήμα 3α:

Εξίσωση $\Sigma M_A=0$

(Στο παράδειγμά μας $F*300mm - \Gamma_y * 1000mm = 0$ (1))

Λύνουμε την εξίσωση και βρίσκουμε μία άγνωστη δύναμη.

(Στο παράδειγμά μας: (1) => $\Gamma_y * 1000mm = F*300mm$ =>

$$=> \Gamma_y = F * \frac{300mm}{1000mm} = ... = 300\ N$$)

Βήμα 4. Σχηματίζουμε επίσης τις εξισώσεις μηδενισμού των δυνάμεων:

$\Sigma F_x=0$

$\Sigma F_y=0$

Λύνουμε τις εξισώσεις και βρίσκουμε τις άλλες δύο άγνωστες δυνάμεις.

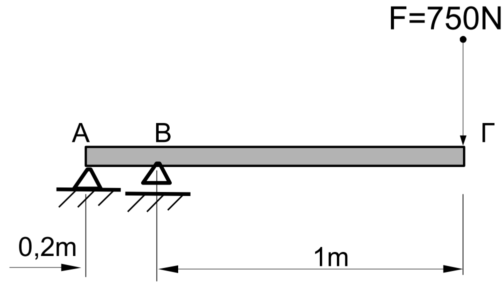
$\Sigma F_x=0$ => $A_x = 0$

$\Sigma F_y=0$ => $A_y + \Gamma_y - F = 0$ =>

=> $A_y = F - \Gamma_y = 1000\ N - 300\ N = 700\ N$

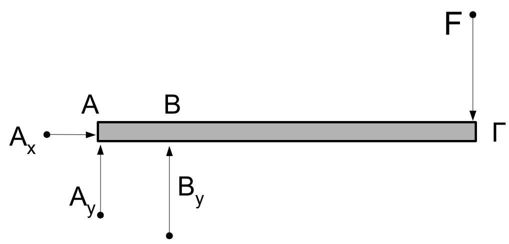
3.6 Άλλα παραδείγματα

Παράδειγμα 3.2: Να υπολογισθούν οι δυνάμεις στήριξης στη δοκό του σχήματος



Λύση:

Σχεδιάζουμε το διάγραμμα ελευθέρου σώματος:



Διαλέγουμε ως κέντρο των ροπών το Α, σχηματίζουμε την εξίσωση μηδενισμού των ροπών και την λύνουμε:

$\Sigma M_A=0$ => $F*1,2m - B_y * 0,2m = 0$ => $F*1,2m = B_y * 0,2m$ =>

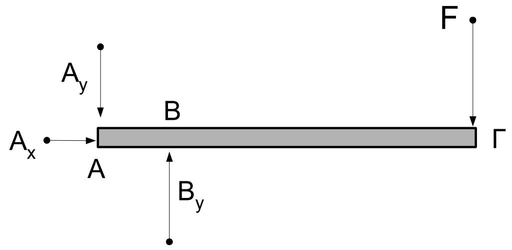
$$=> B_y = F * \frac{1,2\ m}{0,2\ m} = ... = 4500\ N$$

Σχηματίζουμε επίσης τις εξισώσεις μηδενισμού των δυνάμεων και τις λύνουμε:

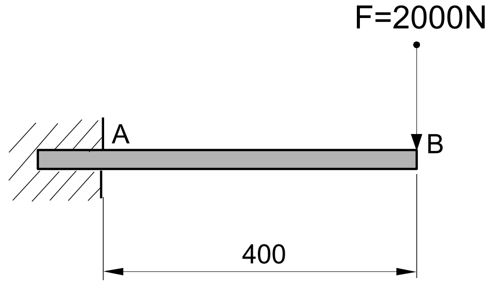
$\Sigma F_x=0$ => $A_x = 0$

$\Sigma F_y=0$ => $A_y + \Gamma_y - F = 0$ => $A_y = F - B_y = 750\ N - 4500\ N = -3750\ N$

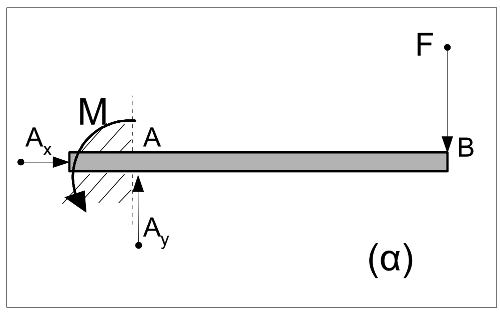
Η A_y προέκυψε αρνητική επειδή στην πραγματικότητα η στήριξη στο Α πιέζει τη δοκό αυτού του παραδείγματος προς τα κάτω και όχι προς τα πάνω (βλ. διπλανό σχήμα).



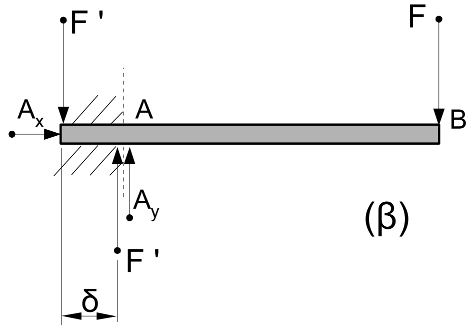
Παράδειγμα 3.3: Να υπολογισθούν οι δυνάμεις στήριξης στη δοκό του σχήματος



Λύση:
Η δοκός του σχήματος έχει μία μόνο στήριξη, την πάκτωση στο Α. Επειδή η πάκτωση εμποδίζει την περιστροφή του σώματος, ορίζουμε ότι ασκεί στο σώμα μία ροπή Μ και σχεδιάζουμε το διάγραμμα ελευθέρου σώματος όπως στο διπλανό σχήμα (α).



(Στην πραγματικότητα η περιστροφή του σώματος εμποδίζεται από δύο δυνάμεις μεγέθους F ' που απέχουν μεταξύ τους απόσταση δ, όπως δείχνει το σχήμα (β). Ισχύει
M = F ' δ
Έχει καθιερωθεί όμως να παριστάνονται οι πακτώσεις πάντοτε όπως στο παραπάνω σχ. (α))



Διαλέγουμε ως κέντρο των ροπών το Α, και η εξίσωση μηδενισμού των ροπών παίρνει τη μορφή:

$\mathbf{\Sigma M_A=0}$ => M – F*0,4m = 0

Η ροπή Μ της πάκτωσης πρέπει:

- **να μην απουσιάζει από την εξίσωση**
- **να μην είναι πολλαπλασιασμένη με καμμία απόσταση** (Γιατί; Βλ. σχ. (β) παραπάνω, και την ιδιότητα M = F ' δ)

Η εξίσωση μηδενισμού των ροπών λύνεται εύκολα ως προς Μ:

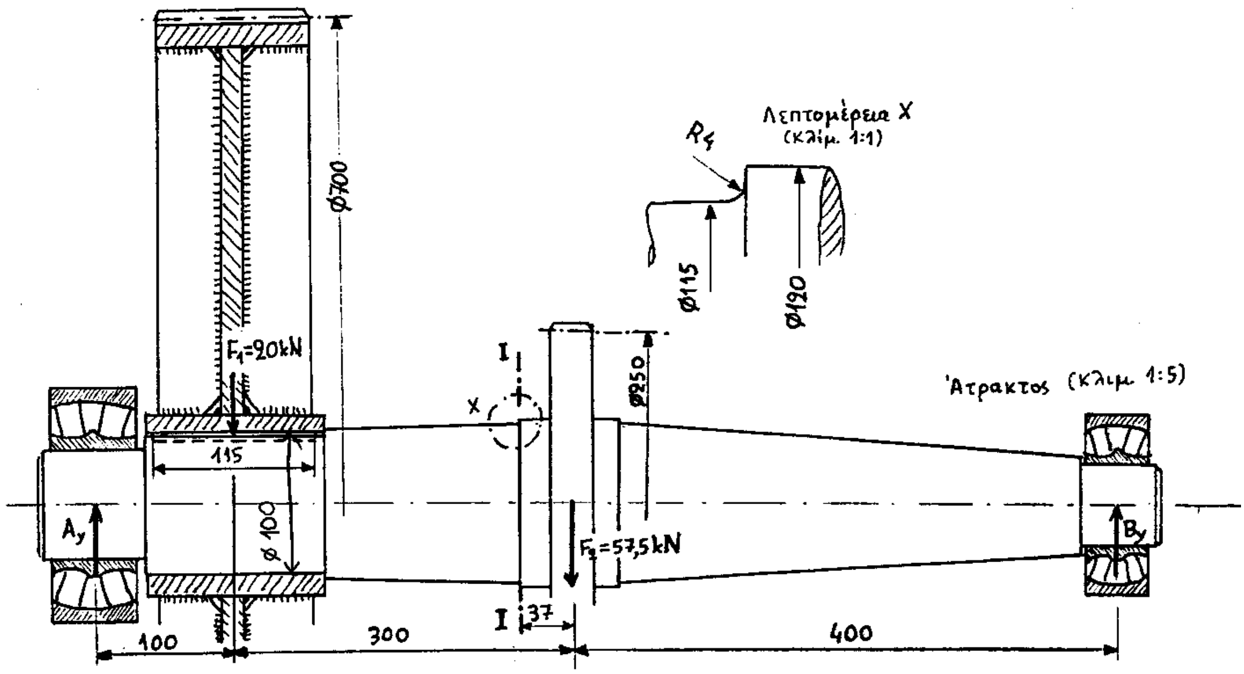
M – F*0,4m = 0 => M = F*0,4m = 2000 N * 0,4m = 800 Nm

Οι εξισώσεις μηδενισμού των δυνάμεων λύνονται επίσης εύκολα ως προς A_x και A_y:

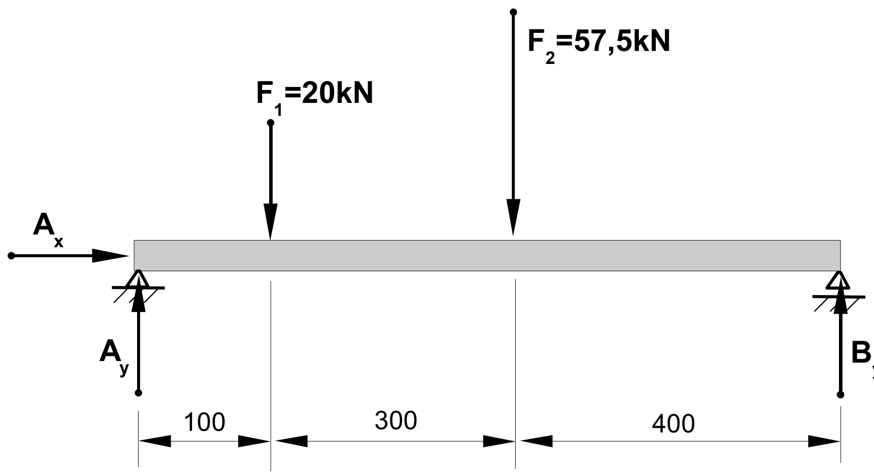
$\mathbf{\Sigma F_x=0}$ => $A_x = 0$

$\mathbf{\Sigma F_y=0}$ => $A_y – F = 0$ => $A_y = F = 2000$ N

Παράδειγμα 3.4: Να βρεθούν οι δυνάμεις A_y, B_y στα έδρανα της παρακάτω ατράκτου. Επίσης να βρεθεί το διάγραμμα καμπτικών ροπών της ατράκτου.



(<u>Βήμα 1</u>: Μετατρέπουμε το μηχανολογικό σχέδιο σε ισοδύναμο, απλοποιημένο σχήμα Μηχανικής:)



<u>Βήμα 2</u>: Υπολογίζουμε τις δυνάμεις στήριξης:

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$

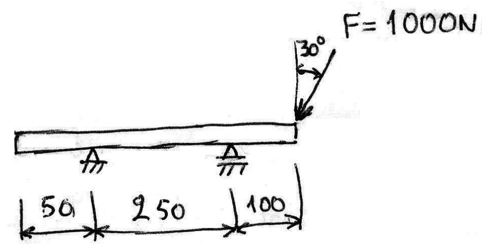
$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - F_1 - F_2 = 0 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \; \Rightarrow Ay + By = 77,5$ kN (1)

$\Sigma M_A = 0$ (Το κατάλληλο κέντρο των ροπών, σε αυτό το βήμα της λύσης, είναι το σημείο της άρθρωσης Α)

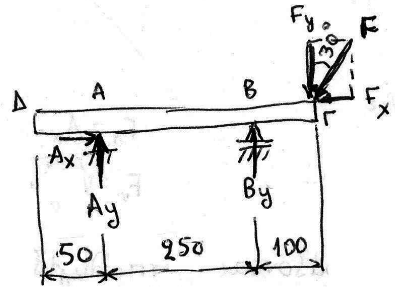
$\Rightarrow F_1 * 100mm + F_2 * 400mm - B_y * 800mm = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow By = F1 * \frac{100}{800} + F2 * \frac{400}{800} = 31,25 \text{ kN}$$

Άρα (1) $\Rightarrow A_y = 77,5 \text{ kN} - B_y = 46,25$ kN



Παράδειγμα 3.5: Να βρεθούν οι δυνάμεις στήριξης στη δοκό του σχήματος.



Σχήμα 5

Λύση:
Στα σημεία στήριξης δίνουμε τα ονόματα A, B.
Στά άκρα δίνουμε τα ονόματα Γ, Δ.
Τοποθετούμε τις δυνάμεις στήριξης A_y, B_y, A_x (η A_y θα προκύψει αρνητική).

Αναλύουμε την εξωτερική δύναμη F σε κατακόρυφη και οριζόντια συνιστώσα:

$$F_y = F*\cos 30° = 1000N*0,866 = 866\ N$$
$$F_x = F*\sin 30° = 1000N*0,500 = 500\ N$$

Σχηματίζουμε τις εξισώσεις ισορροπίας, και τις λύνουμε:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow A_x - F_x = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} A_x = F_x = 500\ N \quad (2)$$
$$\Sigma M_A = 0^{(*)} \Rightarrow B_y*250\cancel{mm} - F_y*350\cancel{mm} = 0 \Rightarrow B_y*250 = F_y*350 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow B_y = \frac{F_y*350}{250} = \frac{866N*350}{250} = 1212,4\ N$$
$$\Sigma f_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - F_y = 0 \underset{(3)}{\Rightarrow} A_y = F_y - B_y = 866N - 1212,4N = -346,4\ N$$

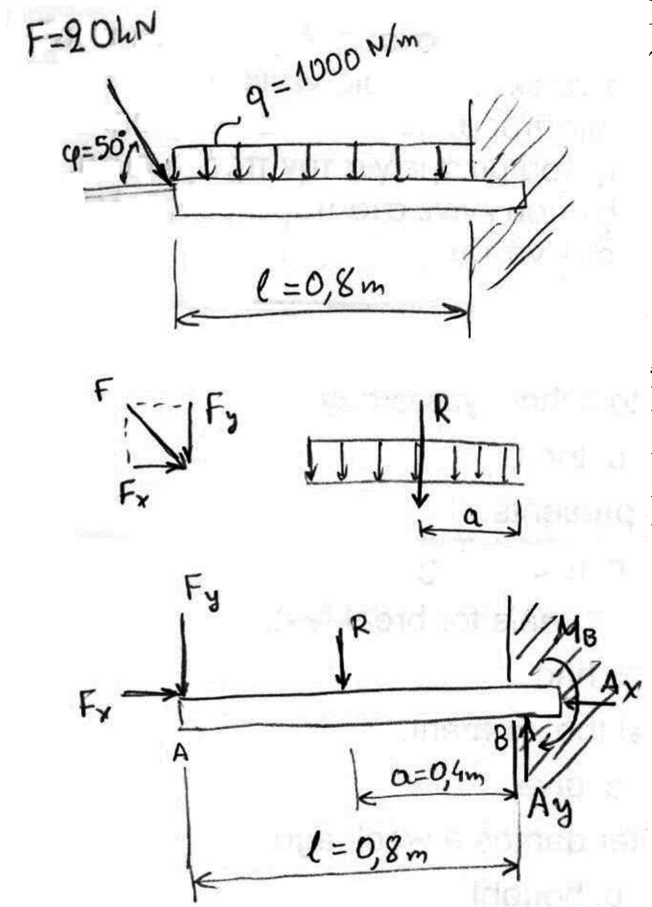
Άρα οι ζητούμενες αντιδράσεις στήριξης είναι
$A_x = 500N$, $A_y = -346,4N$, $B_y = 1212,4N$

(*) Οι ροπές υπολογίζονται ως προς το σημείο στήριξης A και όχι ως προς το άκρο Δ, διότι με τον τρόπο αυτό προκύπτει εξίσωση που λύνεται ευκολότερα. Αν παίρναμε ροπές ως προς το άκρο Δ θα προέκυπτε η εξίσωση

$$\Sigma M_\Delta = 0 \Rightarrow A_y*50mm + B_y*300mm - F_y*400mm = 0 \qquad (4)$$

η οποία έχει δύο αγνώστους (τις δυνάμεις A_y, B_y) και λύνεται δυσκολότερα (θα έπρεπε να σχηματίσουμε σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους – οι δύο εξισώσεις του συστήματος θα ήταν η $\Sigma M_\Delta = 0$ και η $\Sigma F_y = 0$).

Παράδειγμα 3.6: Να βρεθούν τα φορτία της πάκτωσης στη δοκό του σχήματος.



Σχήμα 6

<u>Λύση</u>:
Στα άκρα της δοκού δίνουμε τα ονόματα A,B.
Αναλύουμε τη δύναμη F σε κατακόρυφη και οριζόντια συνιστώσα:

$F_x = F*\cos\varphi = 20kN*\cos 50° =$
$= 20kN*0{,}643 = 12{,}86\ kN$

$F_y = F*\sin\varphi = 20kN*\sin 50° =$
$= 20kN*0{,}766 = 15{,}32\ kN$

Υπολογίζουμε τη συνισταμένη του ομοιόμορφου φορτίου και τη θέση της:

$$R = q*\ell = 1000 \frac{N}{\cancel{m}} * 0{,}8\cancel{m} = 800\ N = 0{,}8\ kN$$

$$\alpha = \ell/2 = 0{,}4\ m$$

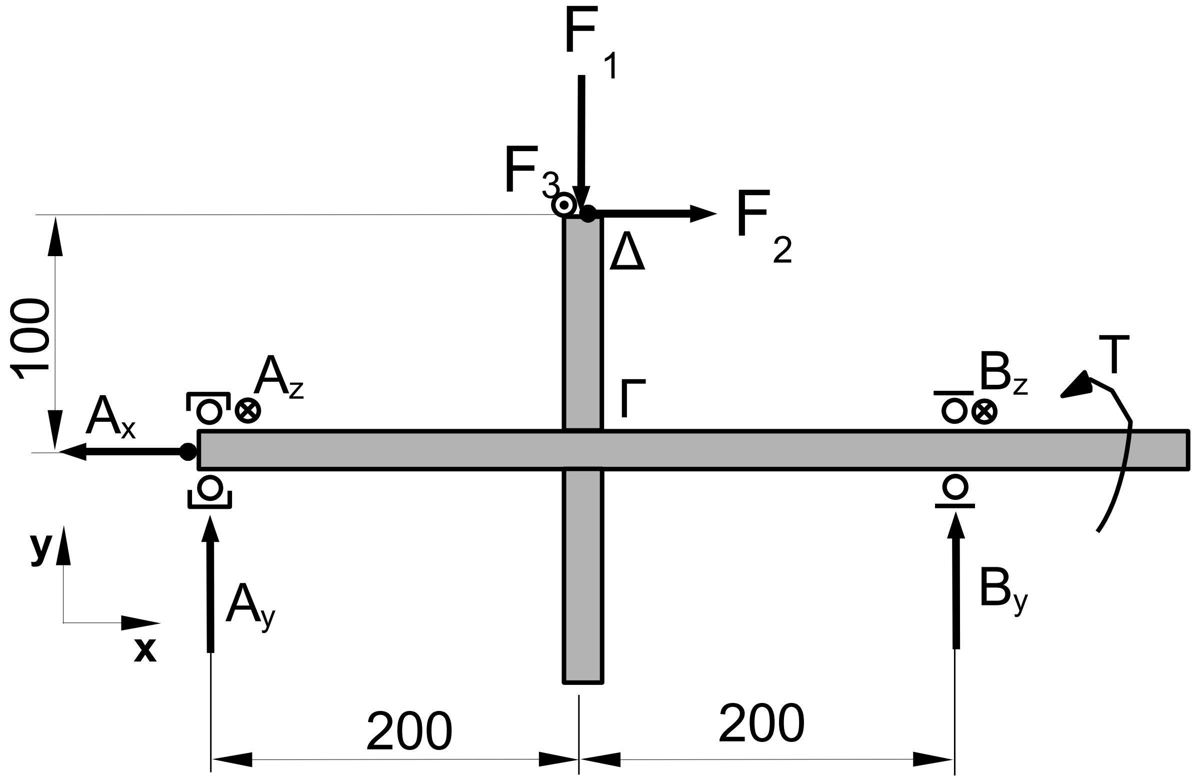
Τοποθετούμε στο σχήμα τις αντιδράσεις της πάκτωσης A_x, A_y, M_A.
Σχηματίζουμε τις εξισώσεις ισορροπίας, και τις λύνουμε:

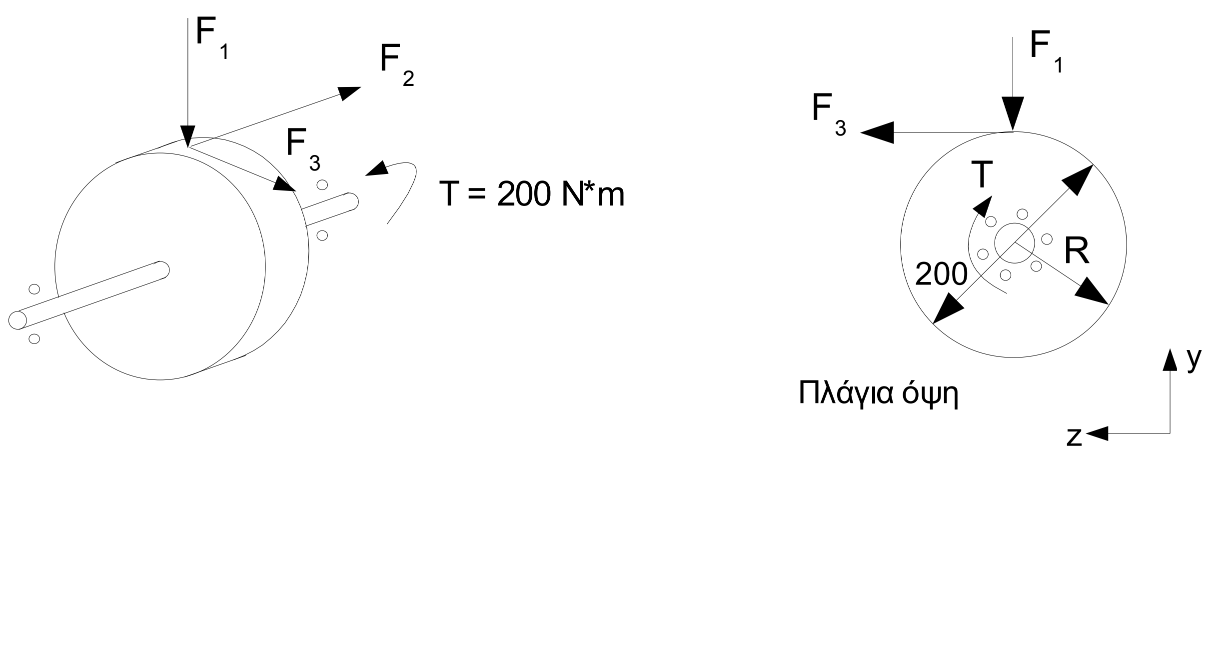
$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow A_x - F_x = 0 \Rightarrow A_x = F_x = 12{,}86\ kN$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y - R - F_y = 0 \Rightarrow A_y = F_y + R = 15{,}32kN + 0{,}8kN = 16{,}12kN$

$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow F_y*\ell + R*\alpha - M_B = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow M_B = F_y*\ell + R*\alpha = 15{,}32kN*0{,}8m \approx 12{,}90\ kNm$

Παράδειγμα 3.7: Δίδεται μία άτρακτος ΑΓΒΕ που φέρει οδοντοτροχό στη θέση Γ. Στο δεξιό της άκρο Ε είναι συνδεδεμένη με κινητήρα ο οποίος ασκεί στρεπτική ροπή ίση με T=200Nm. Στο σημείο Δ ο οδοντοτροχός εμπλέκεται με τον συνεργαζόμενό του τροχό και μεταδίδει κίνηση στο κινούμενο μηχάνημα.
Η δύναμη F_3 (κάθετη στο επίπεδο του σχεδίου προς τα έξω) εκφράζει την αντίσταση που προβάλλει το κινούμενο μηχάνημα στην περιστροφή. Άρα η F_3 μπορεί να υπολογισθεί με βάση την κινητήρια στρεπτική ροπή.
Για τις άλλες δύο δυνάμεις που ασκούνται στο σημείο Δ του οδοντοτροχού, ισχύουν οι σχέσεις $F_1 = 0{,}3\ F_3$ και $F_2 = 0{,}15\ F_3$
Να βρεθούν οι δυνάμεις στον οδοντοτροχό, καθώς και οι δυνάμεις στήριξης της ατράκτου.





Λύση:

α) Παρατηρώντας την πλάγια όψη της ατράκτου (βλ. προηγούμενη σελίδα) μπορούμε να υπολογίσουμε τη δύναμη F_3. Κινητήρια στρεπτική ροπή είναι η T και ανθιστάμενη η $F_3*R = F_3*100mm$ Πρέπει: κινητήρια στρεπτική ροπή = ανθιστάμενη στρεπτική ροπή

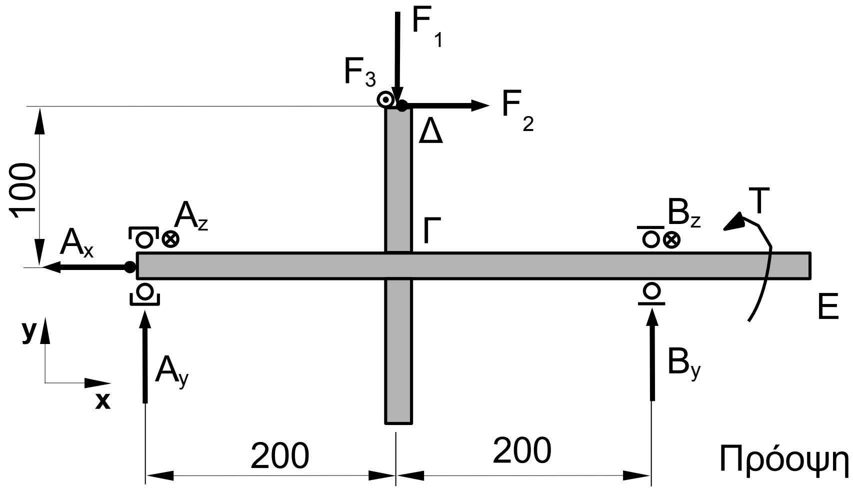
$$\text{δηλ.}\quad T = F_3*R \Rightarrow F_3 = \frac{T}{R} = \frac{200\ Nm}{100\ mm} = \frac{200.000\ Nmm}{100\ mm} = 2000\ N$$

(Προσοχή στην απαιτούμενη μετατροπή μονάδων)

Επίσης, με βάση την εκφώνηση υπολογίζονται οι δυνάμεις F_1, F_2 :

$F_1 = 0{,}3\ F_3 = \ldots = 600\ N$

$F_2 = 0{,}15\ F_3 = 0{,}15*2000N = 300\ N$



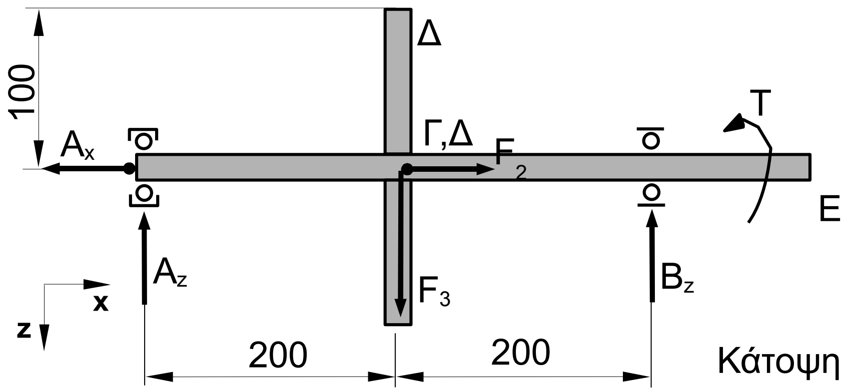
β) Μπορούμε να υπολογίσουμε τις δυνάμεις στήριξης που προέρχονται από τα έδρανα, αν παρατηρήσουμε το σχέδιο της ατράκτου σε όψεις. Πιο συγκεκριμένα, παρατηρώντας την πρόοψη μπορούμε να υπολογίσουμε τις δυνάμεις A_x, A_y, B_y:

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow A_x = F_2 = 300\ N$

$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow F_1*200mm + F_2*100mm - B_y*400mm = 0 \Rightarrow B_y = 375N$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y = F_1 - B_y = \ldots = 225N$

Σημείωση: Στην παραπάνω εξίσωση ροπών δεν πρέπει να συμπεριληφθεί η στρεπτική ροπή T, διότι εδώ η ΣM_A περιγράφει την περιστροφή στην οποία η άτρακτος ολισθαίνει πάνω στο επίπεδο της πρόοψης (επίπεδο x-y, περιστροφή γύρω από τον άξονα z). Η στρεπτική ροπή T, αντίθετα, περιγράφει περιστροφή γύρω από τον άξονα του μήκους της ατράκτου, δηλ. γύρω από τον άξονα x.



γ) Παρατηρώντας την κάτοψη υπολογίζουμε τις δυνάμεις A_z, B_z:
$\Sigma F_x = 0$ Ήδη εξετάσθηκε
$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow F_3 * 200mm - B_z * 400mm = 0 \Rightarrow B_z = F_3/2 = 1000$ N
$\Sigma F_z = 0 \Rightarrow A_z = F_3 - B_z = 1000$ N

Και εδώ πρέπει να μην συμπεριληφθεί η στρεπτική ροπή στην εξίσωση των ροπών.