

**ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ  
ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ**

*ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ  
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΤΕ*

**ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι**

**ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ**

**Καθηγητής**

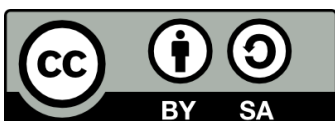
**Δρ. Μοσχίδης Νικόλαος**

**ΣΕΡΡΕΣ, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2015**



## Άδειες Χρήσης

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons. Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Το έργο αυτό αδειοδοτείται από την Creative Commons Αναφορά Δημιουργού - Παρόμοια Διανομή 4.0 Διεθνές Άδεια. Για να δείτε ένα αντίγραφο της άδειας αυτής, επισκεφτείτε <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.el>.

## Χρηματοδότηση

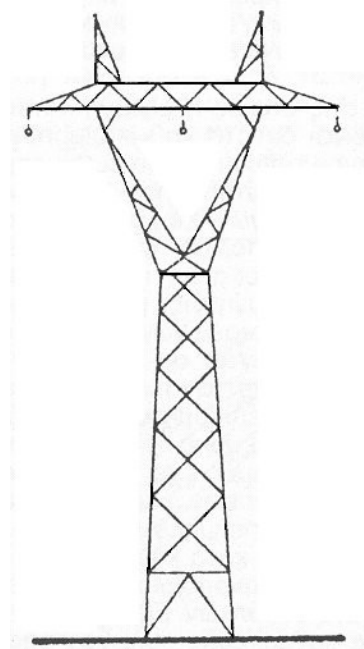
Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.

Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Κεντρικής Μακεδονίας**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



## 8. ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΑ

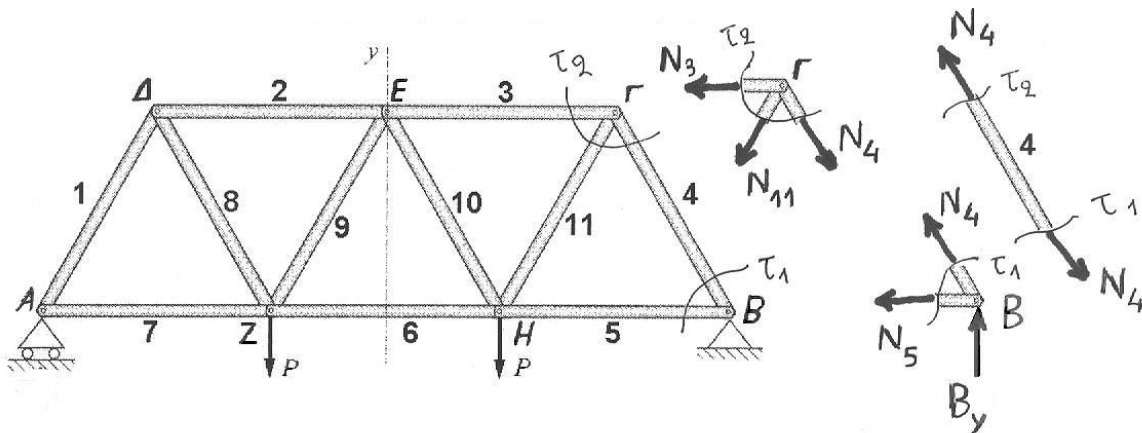


Σχ. 8.1 Παραδείγματα δικτυωμάτων

### 8.1 Ορισμοί:

**Δικτύωμα** θα λέγεται ένας σύνθετος φορέας που όλα τα μέλη του είναι ράβδοι. Παραδείγματα δικτυωμάτων δίνονται στο σχήμα παραπάνω. Πλεονέκτημα των δικτυωμάτων είναι ότι με αυτά μπορούμε να υλοποιήσουμε μία κατασκευή μεγάλων διαστάσεων αλλά μικρού βάρους.

**Κόμβος** λέγεται το τμήμα της κατασκευής που περιλαμβάνει τη σύνδεση δύο ή περισσότερων ράβδων του δικτυώματος. (Περιλαμβάνει μία μικρή περιοχή από κάθε συνδεόμενη ράβδο, κοντά στο άκρο της ράβδου, καθώς και τα συνδετικά στοιχεία (π.χ. συγκολλήσεις ή συνδετικά ελάσματα και κοχλίες).



Σχ. 8.2 Δυνάμεις σε ράβδο και σε κόμβους δικτυώματος. Παρατηρούμε ότι οι δυνάμεις  $N_4$  στην επάνω και κάτω όχθη της τομής  $\tau_1$  είναι η μία αντίδραση της άλλης. Το ίδιο ισχύει και για την τομή  $\tau_2$ .

Για να μπορεί να ονομασθεί δικτύωμα μια κατασκευή πρέπει να δέχεται δυνάμεις μόνο στους κόμβους της. Στην περίπτωση αυτή, τα μέλη της κατασκευής θα δέχονται μόνο εφελκυσμό/θλίψη, και είναι σωστό να χαρακτηρίζονται ράβδοι.

Όταν αντίθετα σε μερικά σίδερα (=μερικά μέλη) της κατασκευής ασκούνται δυνάμεις σε ενδιάμεσα σημεία, κάθετες ή πλάγιες ως προς το μήκος του μέλους, τότε αυτά τα μέλη θα δέχονται εφελκυσμό και διάτμηση και κάμψη, θα ονομάζονται δοκοί (και όχι ράβδοι), και όλη η κατασκευή θα ονομάζεται “σύνθετος φορέας με δοκούς και ράβδους” (και όχι δικτύωμα).

Όταν μας ζητούν “να επιλύσουμε το δικτύωμα”, αυτό σημαίνει ότι μας ζητούν να βρούμε πόση εφελκυστική (ή θλιπτική) δύναμη φορτίζει κάθε ράβδο του δικτύωματος. (Αυτές οι δυνάμεις λέγονται και **τάσεις των ράβδων**. Είναι απαραίτητο να υπολογισθούν ώστε να μπορεί κατόπιν να γίνει ο υπολογισμός αντοχής.)

(Παρατήρηση: Η λέξη “τάση” χρησιμοποιείται με διαφορετική σημασία στους υπολογισμούς αντοχής, όπου σημαίνει το κλάσμα “δύναμη προς επιφάνεια”. Να μη γίνεται σύγχυση με την τάση της ράβδου ενός δικτύωματος, που σημαίνει εφελκυστική ή θλιπτική δύναμη της ράβδου).

**Άγνωστες ράβδοι** θα λέγονται αυτές για τις οποίες είναι ακόμη άγνωστη η τάση τους. **Ακραίος κόμβος** θα λέγεται ένας κόμβος στον οποίο συναντιούνται δύο μόνο άγνωστες ράβδοι.

## 8.2 Διαδικασία υπολογισμού δικτύωματος με τη μέθοδο των κόμβων

- \* 1. Ονομάζουμε όλες τις ράβδους του δικτύωματος με αριθμούς. (Με αυτούς θα διευκολυνθούμε στα επόμενα να δώσουμε ονόματα στις τάσεις των ράβδων).
- \* 2. Υπολογίζουμε τις δυνάμεις στήριξης, θεωρώντας (μόνο γι' αυτό το βήμα) ότι το δικτύωμα είναι ένα συμπαγές σώμα.
- \* 3α. Βρίσκουμε έναν ακραίο κόμβο.
- \* 3β. Υπολογίζουμε τις γωνίες που σχηματίζουν οι ράβδοι του με την οριζόντια κατεύθυνση.
- \* 3γ. Τον απομονώνουμε και τον σχεδιάζουμε.
  - Σχεδιάζουμε μαζί και τις εξωτερικές δυνάμεις που δέχεται, και τις τάσεις των ράβδων.
  - Δίνουμε ονόματα στις τάσεις των ράβδων, με βάση τον αριθμό της κάθε ράβδου (και όχι με βάση το γράμμα του κόμβου).
  - Για τυποποίηση της εργασίας μας, τις τάσεις των ράβδων τις σχεδιάζουμε **πάντοτε εφελκυστικές**.(Το σχήμα που προκύπτει είναι το **Διάγραμμα Ελευθέρου Σώματος (ΔΕΣ)** του κόμβου).
- \* 3δ. Αναλύουμε τις δυνάμεις σε συνιστώσες κατά  $x$  και  $y$ , αν χρειάζεται. (Βασιζόμαστε στις γωνίες που υπολογίσαμε προηγουμένως στο βήμα 4β).

\* 3ε. Γράφουμε αναλυτικά τις εξισώσεις  $\Sigma F_x=0$  και  $\Sigma F_y=0$ , που περιέχουν ως αγνώστους τις τάσεις των ράβδων. Λύνουμε τις εξισώσεις και βρίσκουμε τις τάσεις των ράβδων.

Σημείωση: Τυχόν αρνητικό αποτέλεσμα θα σημαίνει ότι η δύναμη στην πραγματικότητα είναι θλιπτική. Για συντόμευση της εργασίας μας και για να αποφύγουμε λάθη: (α) δεν αλλάζουμε τα σχήματα, (β) αντιμετωπίζουμε τα βελάκια των δυνάμεων και τα γράμματα που τις συμβολίζουν ως εάν να δείχνουν την πραγματική φορά (δηλ. ως εάν οι τάσεις των ράβδων να είναι εφελκυστικές), και (γ) προσέχουμε μόνο στις αριθμητικές αντικαταστάσεις να βάλουμε την αρνητική τιμή της δύναμης, όπου έχει προκύψει αρνητική)

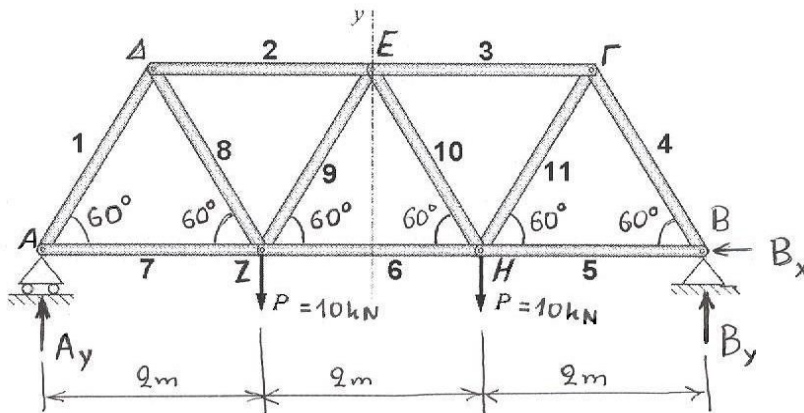
\* 4α. Τώρα που βρήκαμε τις τάσεις δύο ράβδων στο βήμα 3, απλουστεύουμε το δικτύωμα:

- Αφαιρούμε από το δικτύωμα τις ράβδους που μόλις υπολογίστηκαν.
- Τοποθετούμε όμως τις τάσεις τους στους απέναντι κόμβους (για να μην αλλοιωθεί η φόρτιση του δικτύωματος).
- Αυτές τις τάσεις τις θέτουμε **εφελκυστικές** για τους απέναντι κόμβους (δηλαδή με αντίθετη φορά από αυτήν που είχαν στο προηγούμενο βήμα. Έτσι επαληθεύεται αυτομάτως το αξίωμα της δράσης και της αντίδρασης).
- Διατηρούμε τα τυχόν αρνητικά πρόσημα που προέκυψαν στο προηγούμενο βήμα.

\* 4β. Προκύπτει ένα μικρότερο δικτύωμα, στο οποίο **επαναλαμβάνουμε το βήμα 3**.

### 8.3 Παράδειγμα υπολογισμού δικτυώματος με τη μέθοδο των κόμβων

Να επιλυθεί το δικτύωμα του σχήματος



Σχ. 8.3 Παράδειγμα δικτυώματος για επίλυση με τη μέθοδο των κόμβων

Βήμα 1: Οι ράβδοι του δικτυώματος έχουν ήδη αριθμούς.

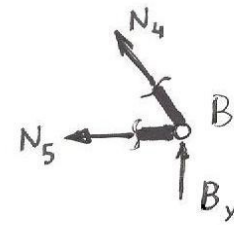
Βήμα 2: Υπολογίζουμε τις δυνάμεις στήριξης, θεωρώντας προς το παρόν το δικτύωμα σαν συμπαγές σώμα:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow B_x = 0$$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow B_y = P = 10 \text{ kN}$$

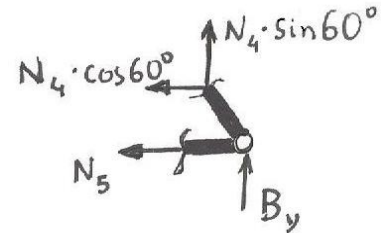
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y = P + P - B_y = 10 \text{ kN}$$

Βήματα 3α έως 3δ: Ένας ακραίος κόμβος (δηλ. με δύο μόνο ράβδους) είναι ο Β, και το ΔΕΣ του φαίνεται σε δύο παραλλαγές στα διπλανά σχήματα.



Βήμα 3ε: Οι εξισώσεις που θα χρησιμοποιήσουμε και η λύση τους είναι:

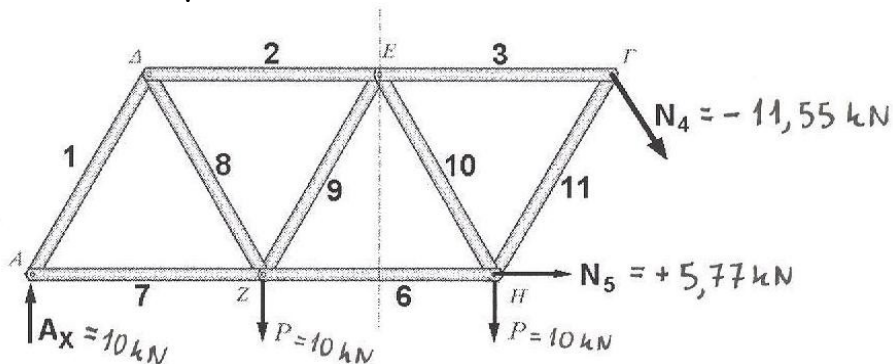
$$\begin{aligned} \Sigma F_y = 0 &\Rightarrow B_y + N_4 \sin 60^\circ = 0 \Rightarrow N_4 = -11,55 \text{ kN} \\ \Sigma F_x = 0 &\Rightarrow N_5 + N_4 \cos 60^\circ = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow N_5 = -N_4 \cos 60^\circ = -(-11,55 \text{ kN}) \cdot 0,5 = +5,77 \text{ kN} \end{aligned}$$



Σχ. 8.4 Δυνάμεις στον κόμβο Β

Βήμα 4: Αφαιρούμε τις δύο (γνωστές πια) ράβδους 4 και 5 και το δικτύωμα παίρνει τη μορφή που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία, από το βήμα 3α και παρακάτω, στο νέο δικτύωμα.



Σχ. 8.5 Το δικτύωμα μετά την αφαίρεση των ήδη γνωστών ράβδων

## 8.4 Υπολογισμός τάσεων σε εσωτερικές ράβδους δικτύωματος με τη μέθοδο της τομής Ritter

Όταν υπολογίζουμε δικτύωμα με τη μέθοδο των κόμβων, συναντούμε δύο δυσκολίες:

- Πρέπει να αρχίσουμε από “ακραίο κόμβο” (δηλ. με δύο μόνο άγνωστες ράβδους), και αυτοί οι κόμβοι συνήθως είναι λίγοι.
- Για υπολογισμό στον δεύτερο, τρίτο κτλ κόμβο βασιζόμαστε στα αποτελέσματα των προηγούμενων κόμβων. Αν ο υπολογισμός ενός κόμβου είναι λάθος, το σφάλμα μεταδίδεται σε όλους τους επόμενους κόμβους.

Αυτές οι δυσκολίες αποφεύγονται αν εφαρμόσουμε τη μέθοδο της τομής Ritter. Τα χαρακτηριστικά μιας τέτοιας τομής είναι:

- Κόβει το δικτύωμα σε δύο μέρη που το καθένα μπορεί να περιέχει πολλούς κόμβους.

- Κάθε νέα τομή Ritter εκτελείται στο αρχικό σχήμα. Έτσι, τα αποτελέσματα κάθε τομής Ritter δεν εμπλέκονται με τα αποτελέσματα προηγούμενων ή επόμενων υπολογισμών.

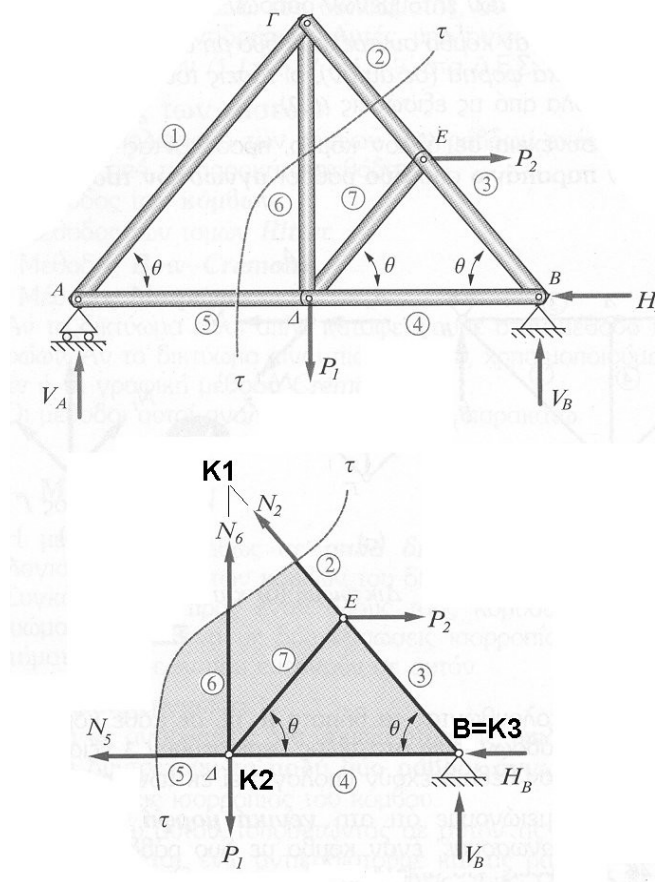
- Η τομή Ritter πρέπει να κόβει τρεις ράβδους που **δεν** συντρέχουν και οι τρεις στο ίδιο σημείο. Προκύπτουν τρεις εξισώσεις με έναν άγνωστο η κάθε μία (και όχι σύστημα εξισώσεων), και έτσι διευκολύνεται η επίλυση.

Η **διαδικασία** για εύρεση τάσεων σε ράβδους δικτύματος με τη μέθοδο της τομής Ritter είναι:

\* 1. Υπολογίζουμε τις δυνάμεις στήριξης.

\* 2α. Σημειώνουμε μία τομή που κόβει το δικτύωμα σε δύο μέρη, περνώντας από τρεις ράβδους που δεν συντρέχουν και οι τρεις στο ίδιο σημείο (τομή Ritter).

\* 2β. Σχεδιάζουμε το ένα από τα δύο τμήματα του δικτύματος, τοποθετούμε επάνω του τις δυνάμεις που δέχεται, και επίσης σημειώνουμε και τις (ακόμη άγνωστες) τάσεις των ράβδων που κόπηκαν από την τομή Ritter.



Σχήμα 8.6 Εφαρμογή της τομής Ritter σε δικτύωμα

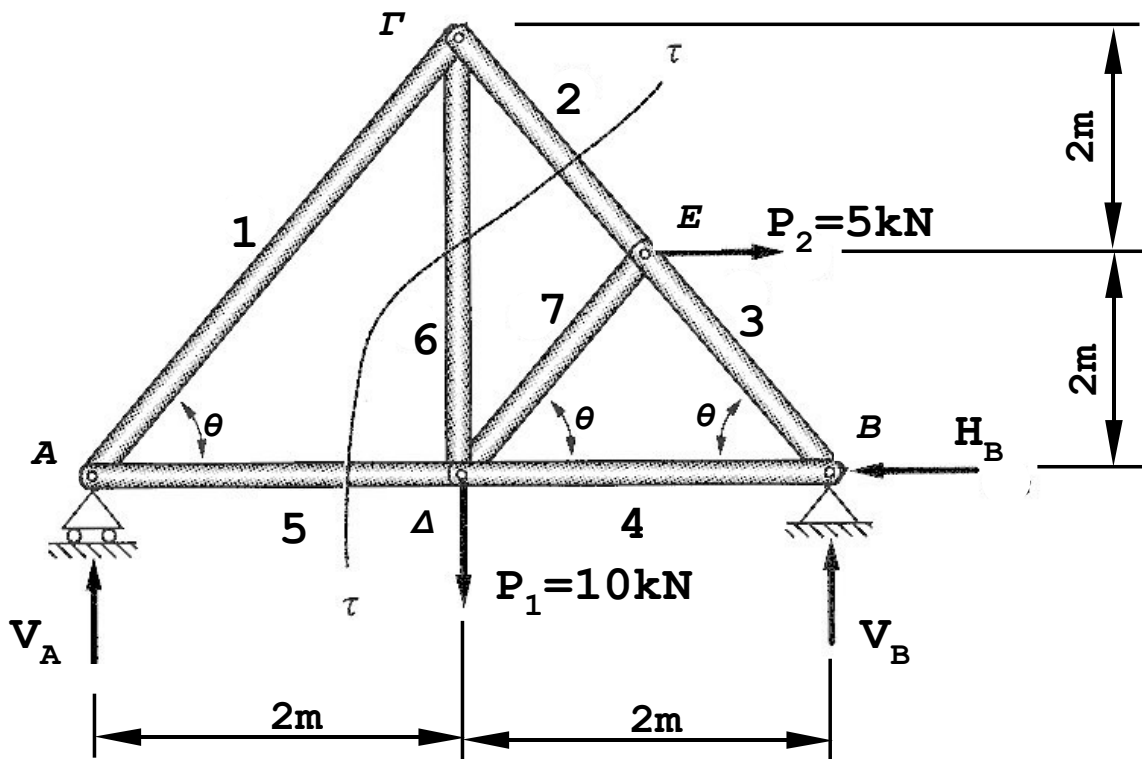
\* 2γ. Γράφουμε αναλυτικά τις εξισώσεις  $\Sigma M_{K1}=0$ ,  $\Sigma M_{K2}=0$ ,  $\Sigma M_{K3}=0$  που περιέχουν ως

αγνώστους τις τάσεις των ράβδων. Εννοείται ότι τα σημεία K1, K2, K3 είναι τα σημεία τομής της 1ης και 2ης άγνωστης ράβδου, της 2ης και 3ης και της 3ης και 1ης. Λύνουμε τις εξισώσεις και βρίσκουμε τις τάσεις των ράβδων.

Σημείωση: Αν δύο ράβδοι είναι παράλληλες, άρα δεν έχουν σημείο τομής, δοκιμάζουμε εξίσωση της μορφής  $\Sigma F_x = 0$  ή  $\Sigma F_y = 0$ .

## 8.5 Παράδειγμα υπολογισμού δικτύωματος με τη μέθοδο της τομής Ritter

Στο παρακάτω δικτύωμα να βρεθούν οι τάσεις των ράβδων 2, 5, 6 με τη μέθοδο της τομής Ritter.



Σχήμα 8.7 Παράδειγμα δικτύωματος για επίλυση με τη μέθοδο της τομής Ritter

Βήμα 1: Οι δυνάμεις στήριξης υπολογίζονται ως εξής:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow H_B = P_2 = 5 \text{ kN}$$

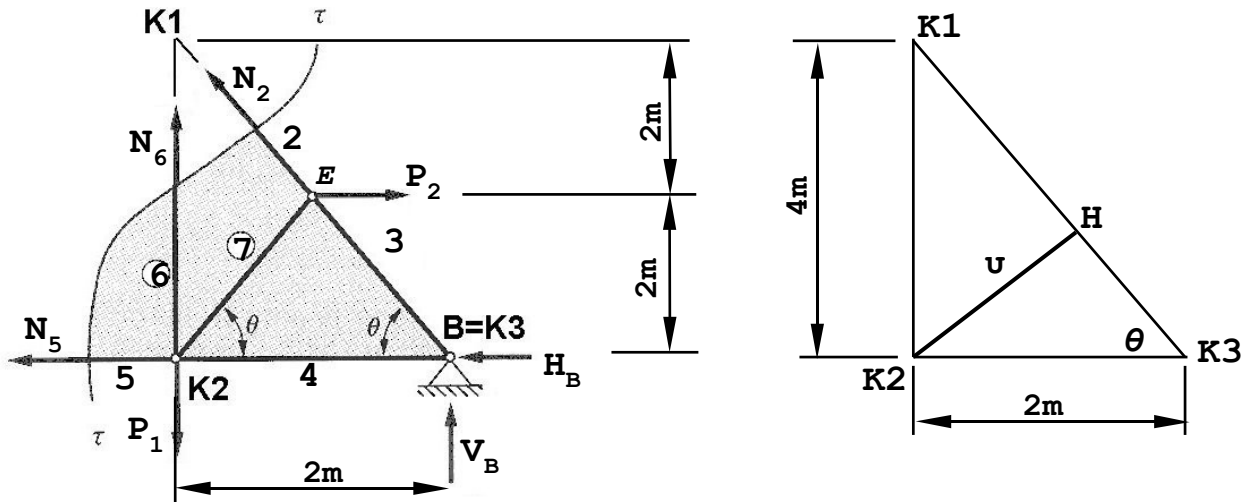
$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow P_1 \cdot 2\text{m} + P_2 \cdot 2\text{m} - V_B \cdot 4\text{m} = 0 \Rightarrow V_B = 7,5 \text{ kN}$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow V_A = P_1 - V_B = 2,5 \text{ kN}$$

Βήμα 2: Σημειώνουμε την τομή τ-τ, η οποία κόβει τις τρεις ράβδους που θέλουμε να



υπολογίσουμε. Παρατηρούμε ότι είναι πράγματι τομή Ritter (1ον, χωρίζει το δικτύωμα σε δύο μέρη· 2ον, κόβει τρεις ράβδους που δεν συναντιούνται και οι τρεις στο ίδιο σημείο). Σχεδιάζουμε το ένα από τα δύο τμήματα του δικτύωματος και παίρνουμε το παρακάτω σχήμα.



Σχ. 8.8 Τμήμα δικτύωματος μετά από τομή Ritter

Βοηθητικό σχήμα για τον υπολογισμό αποστάσεων

Αν πάρουμε την εξίσωση μηδενισμού των ροπών ως προς K1, θα βρούμε τη δύναμη N5:

$$\begin{aligned} \Sigma M_{K1} = 0 &\Rightarrow N_5 \cdot 4\text{m} + H_B \cdot 4\text{m} - V_B \cdot 2\text{m} - P_2 \cdot 2\text{m} = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow N_5 \cdot 4\text{m} = -H_B \cdot 4\text{m} + V_B \cdot 2\text{m} + P_2 \cdot 2\text{m} \Rightarrow \\ &\Rightarrow N_5 \cdot 4\text{m} = -5,0\text{kN} \cdot 4\text{m} + 7,5\text{kN} \cdot 2\text{m} + 5,0\text{kN} \cdot 2\text{m} \Rightarrow \\ &\Rightarrow N_5 \cdot 4\text{m} = 5,0 \text{ kN m} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow N_5 = \frac{5,0 \text{ kN m}}{4\text{m}} = 1,25 \text{ kN}$$

Αν πάρουμε την εξίσωση μηδενισμού των ροπών ως προς K3, θα βρούμε τη δύναμη N6:

$$\begin{aligned} \Sigma M_{K3} = 0 &\Rightarrow N_6 \cdot 2\text{m} - P_1 \cdot 2\text{m} + P_2 \cdot 2\text{m} = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow N_6 \cdot 2\text{m} = P_1 \cdot 2\text{m} - P_2 \cdot 2\text{m} = 10,0\text{kN} \cdot 2\text{m} - 5,0\text{kN} \cdot 2\text{m} = 10,0 \text{ kN m} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow N_6 = \frac{10,0 \text{ kN m}}{2\text{m}} = 5,0 \text{ kN}$$

Και τέλος, αν πάρουμε την εξίσωση μηδενισμού των ροπών ως προς K2, θα βρούμε τη δύναμη N2.

Για να διαμορφώσουμε όμως την εξίσωση χρειαζόμαστε πρώτα την κάθετη απόσταση

από το Κ2 στην ευθεία Κ1-Κ3. Αν συμβολίσουμε αυτή την απόσταση με  $v$  (βλ. σχ. 8.8) προκύπτει από το ορθογώνιο τρίγωνο Κ2-Κ3-Η (σχ. 8.8):

$$\tan\theta = \frac{4\text{m}}{2\text{m}} = 2,0 \Rightarrow \theta = 63,44^\circ$$

$$v = 2\text{m} * \sin 63,44^\circ = 1,79\text{m}$$

Η εξίσωση μηδενισμού των ροπών ως προς Κ2 είναι:

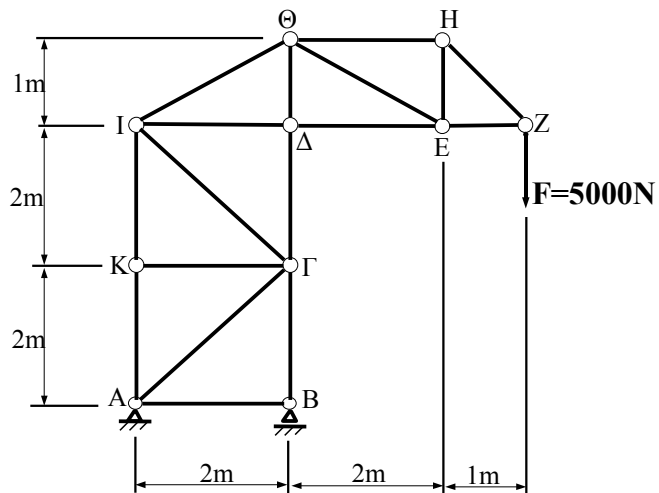
$$\begin{aligned} \Sigma M_{K2} = 0 &\Rightarrow N_2 v + V_B * 2\text{m} - P_2 * 2\text{m} = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow N_2 v = -V_B * 2\text{m} + P_2 * 2\text{m} = -7,5\text{kN} * 2\text{m} + 5,0\text{kN} * 2\text{m} = -5,0 \text{ kN m} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow N_6 = \frac{-5,0 \text{ kN m}}{v} = \frac{-5,0 \text{ kN m}}{1,79\text{m}} = -2,79 \text{ kN}$$

## Ασκήσεις κεφαλαίου 8

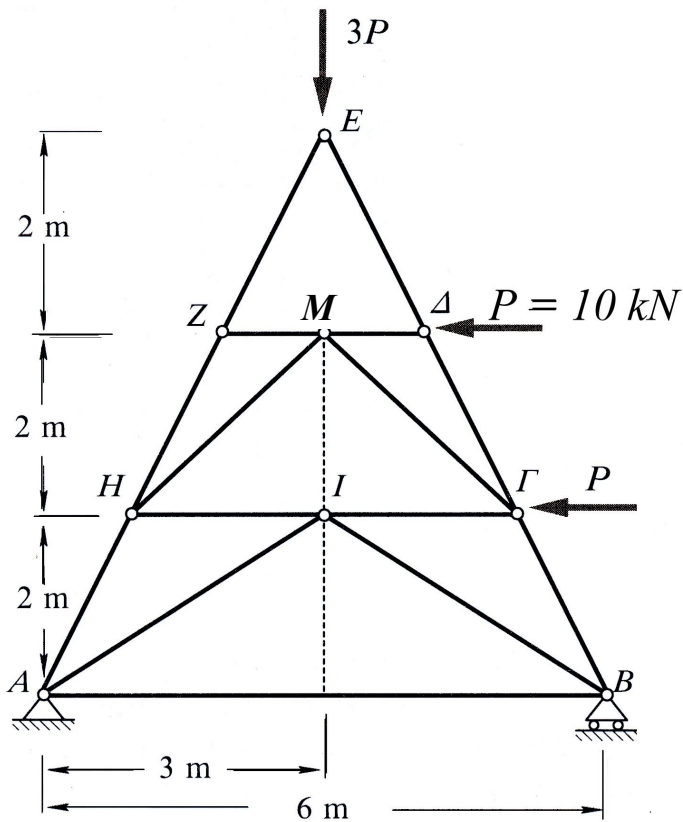
8.1 α) Να υπολογισθούν οι τάσεις των ράβδων ΕΖ, ΗΖ, ΘΗ, ΕΗ στο δικτύωμα του σχήματος με τη μέθοδο των κόμβων.

β) Επίσης να υπολογισθούν οι τάσεις των ΙΚ, ΙΓ, ΔΓ με τομή Ritter.



8.2 α) Στο δικτύωμα του σχήματος της επόμενης σελίδας να υπολογισθούν οι τάσεις των ράβδων ΕΖ, ΕΔ, ΖΜ, ΖΗ με τη μέθοδο των κόμβων.

β) Κατόπιν να εφαρμοσθεί τομή Ritter που να κόβει τις ράβδους ΖΗ, ΜΗ, ΜΓ, ΔΓ και να υπολογισθούν οι τάσεις των ράβδων ΜΗ, ΜΓ, ΔΓ. (Παρατήρηση: Αυτή η τομή κόβει τέσσερις ράβδους, αλλά μία από αυτές (η ΖΗ) είναι γνωστή από το ερώτημα (α)).



8.3 α) Να βρεθούν οι τάσεις των ράβδων του παρακάτω δικτυώματος.

(Εξ αιτίας της τροχαλίας ασκούνται στο  $\Gamma$  μία κατακόρυφη και μία οριζόντια δύναμη, όπως δείχνει το δεξιό σχήμα. Η αριθμητική τιμή του  $a$  δεν είναι απαραίτητη, αφού είναι πλήρως καθορισμένη η αναλογία πλάτους – ύψους).

β) Τί θα άλλαζε στις δυνάμεις στήριξης και στη φόρτιση του δικτυώματος αν αφαιρούσαμε τη ράβδο AB και ταυτόχρονα μετατρέπαμε τη στήριξη στο B σε άρθρωση; (Να υπολογίσετε τις νέες δυνάμεις στήριξης).

