



ΦΥΣΙΚΗ ΙΙ (Θ)

Χασάπης Δημήτριος
ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΙΑΣ ΤΕ



Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Κεντρικής Μακεδονίας» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



ΣΤΑΤΙΚΟΣ ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΣ

Ηλεκτρισμός ονομάσθηκε (Θαλής ο Μιλήσιος, 600 π.Χ.) η ιδιότητα του ήλεκτρου να έλκει, αφού τριφθεί με στεγνό ύφασμα, μικρά κομμάτια άχυρου.

Μαγνητισμός ονομάσθηκε η ιδιότητα του μαγνητίτη ($Fe_3O_4 = FeO \cdot Fe_2O_3$, Fe_3O_4 , «μαγνήτης λίθος») από τη Μαγνησία της Μικράς Ασίας) να έλκει τον σίδηρο.

Αρχικά Ηλεκτρισμός και Μαγνητισμός εθεωρούντο σαν δύο εντελώς ανεξάρτητα φαινόμενα. Αργότερα όμως (αφού παρατηρήθηκε, ότι ρευματοφόρος αγωγός επηρεάζει την μαγνητική βελόνη, Oersted 1820) αποδείχθηκε, ότι πρόκειται ουσιαστικά για τις δύο όψεις του ίδιου νομίσματος, γεγονός το οποίο αποδίδεται με τον όρο **Ηλεκτρομαγνητισμός**: είναι ο κλάδος της Φυσικής, ο οποίος μελετάει τα λεγόμενα ηλεκτρικά και μαγνητικά φαινόμενα.

Στα επόμενα κεφάλαια θα ασχοληθούμε με τον **στατικό ηλεκτρισμό**, την μελέτη δηλαδή της συμπεριφοράς ακίνητων ηλεκτρικών φορτίων.

1.1 Το ηλεκτρικό φορτίο

Δομικός λίθος του Ηλεκτρομαγνητισμού είναι το **ηλεκτρικό φορτίο**, με την έννοια ότι χωρίς αυτό δεν θα υπήρχαν και τα διάφορα ηλεκτρομαγνητικά φαινόμενα. Πιο συγκεκριμένα, και όπως θα δούμε στη συνέχεια, ο μεν Ηλεκτρισμός απαιτεί απλώς την ύπαρξη, ο δε Μαγνητισμός επιπλέον και την κίνηση των ηλεκτρικών φορτίων.

Πειραματικά αποδείχθηκαν οι ακόλουθες **θεμελιώδεις ιδιότητες του ηλεκτρικού φορτίου**:

1. το ηλεκτρικό φορτίο εμφανίζεται με δύο μορφές, οι οποίες (εντελώς αυθαίρετα!) χαρακτηρίζονται σαν **θετική** και **αρνητική**. Φορτία της μιας μορφής έλκουν όλα τα φορτία της άλλης και απωθούν όλα τα φορτία της ίδιας μορφής:

τα ομώνυμα φορτία απωθούνται ενώ τα ετερόνυμα έλκονται

2. το συνολικό φορτίο (=αλγεβρικό άθροισμα των θετικών και αρνητικών φορτίων) ενός κλειστού κυκλώματος (= σύστημα το οποίο δεν ανταλλάσσει ύλη με το περιβάλλον του και το οποίο χαρακτηρίζεται συνήθως σαν απομονωμένο, ατυχώς βέβαια μια και επιτρέπεται η ανταλλαγή ενέργειας με το περιβάλλον του) διατηρείται σταθερό. Μάλιστα το συνολικό φορτίο ενός τέτοιου συστήματος είναι και σχετικιστικά αναλλοίωτο, ανεξάρτητο δηλαδή από την κινητική του κατάσταση, πράγμα το οποίο (Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας, Einstein) δεν ισχύει και για την μάζα του.

3. το ηλεκτρικό φορτίο είναι κβαντισμένο, υπάρχει δηλαδή σε τυποποιημένα, πακετοποιημένα και όχι σε τυχαία, δηλαδή συνεχή ποσά.

Συγκεκριμένα αποδείχθηκε πειραματικά (Πείραμα του Millikan), ότι όλα τα μετρούμενα στην φύση ηλεκτρικά φορτία είναι ακέραια και πολλαπλάσια μιας στοιχειώδους ποσότητας φορτίου, η οποία και ονομάζεται

Στοιχειώδες ηλεκτρικό φορτίο: $e = 1,6021 \cdot 10^{-19} C$

παρατηρούμενα στη φύση φορτία: $q = n \cdot e$ [1.1]

όπου $n =$ ακέραιος αριθμός, $-\infty < n < \infty$.

Φορτίο πρωτονίου: $q_p = e$

Φορτίο ηλεκτρονίου: $q_{e^-} = -e$

Παρατήρηση: Τα τελευταία χρόνια θεωρητικές και πειραματικές μελέτες φαίνεται να κατοχυρώνουν την ύπαρξη των **quarks** σαν δομικών μονάδων των χανδρονίων (πρωτόνιο, ουδετερόνιο, μεσόνια). Τα quarks έχουν φορτία $-e/3$ και $2e/3$, δεν παρατηρούνται όμως ελεύθερα στη φύση και συνδυάζονται πάντα έτσι, ώστε το προκύπτον χανδρόνιο να έχει ηλεκτρικό φορτίο, το οποίο εκπληρώνει την σχέση [1.1].

Ο **κλασικός Ηλεκτρομαγνητισμός** αγνοεί την κβάντωση του φορτίου και θεωρεί, ότι ένα σημειακό ή μη φορτίο μπορεί να έχει οποιαδήποτε τιμή. (Αντιστοιχία: η κλασική Μηχανική αγνοεί την ατομιστική δομή της ύλης). Η «ατέλεια» αυτή δεν δημιουργεί προβλήματα μια και αντικείμενο του κλασικού Ηλεκτρομαγνητισμού είναι η μελέτη ηλεκτρομαγνητικών φαινομένων σε **μακροσκοπική** κλίμακα. (Τα κβάντα του φορτίου, δηλαδή το στοιχειώδες ηλεκτρικό φορτίο, είναι τόσα μικρά, ώστε για παράδειγμα να απαιτείται να διέρχονται $3 \cdot 10^{18}$ στοιχειώδη ηλεκτρικά φορτία ανά δευτερόλεπτο από το νήμα ενός ηλεκτρικού λαμπτήρα 100W/220V, όταν αυτός φωτοβολεί).

1.2 Ο νόμος του Coulomb

Ο νόμος του Coulomb περιγράφει ποσοτικά την αλληλεπίδραση των δύο ακινήτων ηλεκτρικών (= ηλεκτροστατικών) σημειακών (οι διαστάσεις τους πρέπει να είναι αμελητέες σε σχέση με την μεταξύ τους απόσταση) φορτίων. (Όταν τα φορτία κινούνται αναπτύσσονται και μαγνητικές δυνάμεις, όπως θα δούμε αργότερα)



$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \text{ :μοναδιαίο διάνυσμα} \quad |\hat{r}| = 1, |\vec{r}| \equiv r$$

στην κατεύθυνση \vec{r}

Σχήμα 1.1: Εξήγηση της «γεωμετρίας» του νόμου του Coulomb.

Ο νόμος αυτός διατυπώνεται μαθηματικά ως εξής:

Νόμος του Coulomb:
$$\vec{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r} \quad [1.2]$$

Η τιμή της σταθερής k εξαρτάται τόσο από το σύστημα μονάδων όσο και από το μέσον, εντός του οποίου βρίσκονται τα φορτία q_1 και q_2 . Στο σύστημα SI, το οποίο θα χρησιμοποιήσουμε αποκλειστικά, το k έχει την τιμή

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon}$$

(SI)

ϵ = διηλεκτρική σταθερή του μέσου εντός του οποίου βρίσκονται φορτία q_1 και q_2 . (Τιμές της για διάφορα υλικά περιέχονται στον Πίνακα 1.2.1)

Η **διηλεκτρική σταθερή του κενού** συμβολίζεται με ϵ_0 και έχει την τιμή:
 $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} C^2 / (Nm^2)$.

Πίνακας 1.2.1: Διηλεκτρική ϵ σταθερή διαφόρων διηλεκτρικών

Οι παρακάτω τιμές πρέπει να πολλαπλασιασθούν επί $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} C^2 / (Nm^2)$

Αέρας(κ.σ.)	1,000594	Ελαιόλαδο	3
Άζωτο(κ.σ.)	1,000528	Ήλιο(κ.σ.)	1,000066
Αργό(κ.σ.)	1,000504	Μάρμαρο	8,4-14
Ασβέστης	4,8	Ναφθαλίνη	3,78
Άσφαλτος	2,66	Νερό	81
Βαζελίνη	2,1-2,3	Νιτροβενζόλιο	35,5
Βακελίτης	3-5	Οξυγόνο (κ.σ.)	1,000486
Βενζόλιο	2,28	Παραφίνη	2,2
Βρώμιο	3,1	Πετρέλαιο	2,2
Γυαλί	3-15	Πολυστυρόλη	2,3-2,5
Γλυκερίνη	41,1	Τέφλον	2
Διοξείδιο του		Χαλαζίας	3,5-4,5
Άνθρακα (κ.σ.)	1,000985	χαρτί	5

(κ.σ. = κανονικές συνθήκες: 0 °C, 1,013 bar)

Ο λόγος που η σταθερή k γράφεται (στο σύστημα SI εννοείται) με αυτή την κάπως πολύπλοκη μορφή σχετίζεται με την σφαιρική συμμετρία του χώρου (4π είναι μια απλή στερεή γωνία!), την οποία

εκμεταλλευόμαστε προκειμένου να απλουστευθεί η μορφή άλλων θεμελιωδέστερων νόμων από εκείνον του Coulomb (π.χ. νόμος του Gauss), όπως θα δούμε αργότερα.

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να κάνουμε την ακόλουθη, πολύ σπουδαία επισήμανση: Ο νόμος του Coulomb διατυπώνεται κατ' αρχήν για φορτία τα οποία βρίσκονται στο κενό. Η περίπτωση όμως αυτή έχει μειωμένο πρακτικό ενδιαφέρον (π.χ. όταν μελετάμε την έλξη μεταξύ ηλεκτρονίου και πρωτονίου στο άτομο του υδρογόνου, τα δύο αυτά σωματίδια βρίσκονται πράγματι μέσα στο κενό) κατά τη μακροσκοπική μελέτη των ηλεκτρικών φαινομένων, η οποία και χαρακτηρίζει τον κλασικό Ηλεκτρομαγνητισμό, μια και μεταξύ των ηλεκτρικών φορτίων θα παρεμβάλλεται πάντα κάποιο υλικό, συνήθως ο αέρας. Επειδή δε η ύλη συνδέεται αναπόσπαστα με την ύπαρξη ηλεκτρικών φορτίων (ηλεκτρικά ουδέτερη ύλη σημαίνει απλώς, ότι περιέχει συνολικά τόσα αρνητικά όσα και θετικά ηλεκτρικά φορτία), δύο τυχαία υπό μελέτη ηλεκτρικά φορτία, δέχονται πέραν της «δικής» τους δύναμης Coulomb, και την συλλογική δύναμη Coulomb όλων των υπόλοιπων φορτίων. Αυτό βέβαια δεν μεταβάλλει την δύναμη αλληλεπίδρασης των δύο φορτίων, διαφοροποιεί όμως την συνολική ηλεκτρική δύναμη, την οποία δέχεται το καθένα. Επειδή τώρα η συνολική αυτή δύναμη (δηλαδή η συνισταμένη των δύο παραπάνω δυνάμεων Coulomb) παρουσιάζει αυξημένο πρακτικό ενδιαφέρον στις περισσότερες περιπτώσεις είναι και μόνη μετρήσιμη!) την συμπεριλαμβάνουμε στον (γενικευμένο) νόμο του Coulomb, μέσω μιας χαρακτηριστικής για το παρεμβαλλόμενο υλικό παραμέτρου της διηλεκτρικής του σταθερής ϵ . Σημειωτέον ότι η εξίσωση [1.2] ισχύει απόλυτα όταν το περιβάλλον μέσο εκτείνεται απεριόριστα προς όλες τις κατευθύνσεις, είναι ομογενές (διαφορετικά δεν θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ενιαία με ένα και μόνο ϵ) και ισότροπο (διαφορετικά το ϵ εξαρτάται από την κατεύθυνση, οπότε δεν είναι πλέον μονόμετρο μέγεθος αλλά ταυστής $2^{ου}$ μεγέθους).

Όπως πιθανώς θα έχετε υποψιαστεί, η παραπάνω γενίκευση του νόμου του Coulomb, είναι απίθανο να αποτελεί προϊόν του πειράματος και μόνο, όπως συμβαίνει με την αρχική του διατύπωση. Η μέτρηση για παράδειγμα της δύναμης μεταξύ δυο ηλεκτρικών φορτίων ενσωματωμένων μέσα σε ένα στερεό υλικό είναι πρακτικά αδύνατη! Πράγματι η διεύρυνση του νόμου του Coulomb βρίσκει την λογική της εξήγηση μόνο στα πλαίσια ενός θεμελιωδέστερου νόμου, εκείνου του Gauss, τον οποίο θα γνωρίσουμε αργότερα. Τότε θα δούμε, ότι στην περίπτωση που το περιβάλλον μέσο είναι ένας αγωγός (= υλικό το οποίο επιτρέπει την μετακίνηση ηλεκτρικών φορτίων μέσα στην μάζα του), η δύναμη Coulomb μεταξύ δυο ενσωματωμένων μέσα σ' αυτό σημειακών φορτίων μηδενίζεται, όταν βέβαια το όλο σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση ηλεκτροστατικής ισορροπίας, δεν παρατηρείται δηλαδή μετακίνηση φορτίων. Αν θέλουμε λοιπόν να συμπεριλάβουμε στην εξίσωση [1.2] και τα αγωγιμα υλικά θα τα χαρακτηρίσουμε ενιαία με την «διηλεκτρική» τους σταθερή $\epsilon \rightarrow \infty$.

Κλείνουμε αυτή την κάπως μακρά παρένθεση με την ακόλουθη υπόδειξη: Η παραπάνω γενίκευση του νόμου του Coulomb αναφέρθηκε ουσιαστικά χάριν πληρότητας και όχι επειδή έχει κάποιο αξιόλογο πρακτικό ενδιαφέρον. Η μελέτη της αλληλεπίδρασης ηλεκτρικών φορτίων παρουσία ύλης γίνεται πολύ κομψότερα με την βοήθεια του προαναφερθέντος νόμου του Gauss, πράγμα το οποίο θα έχουμε την δυνατότητα να διαπιστώσουμε στα επόμενα κεφάλαια.

Παρατηρήσεις: Στην εξίσωση [1.2] **α)** Τα φορτία q_1 και q_2 λαμβάνονται μαζί με το πρόσημό τους.

β) Το μοναδιαίο διάνυσμα \hat{r} έχει φορά προς το φορτίο, το οποίο

δέχεται την επίδραση της δύναμης \vec{F} .

γ) Από το α) και β) προκύπτει, ότι στην περίπτωση ομονύμων φορτίων τα διανύσματα \vec{F} και \vec{r} είναι ομόρροπα, ενώ στην αντίθετη αντίρροπα:

$$\left. \begin{array}{l} q_1 > 0 \text{ και } q_2 > 0 \\ q_1 < 0 \text{ και } q_2 < 0 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} q_1 > 0 \text{ και } q_2 > 0 \\ q_1 < 0 \text{ και } q_2 < 0 \end{array} \right\}$$

δ) Πειραματικά αποδεικνύεται, ότι

Η δύναμη Coulomb μεταξύ δύο σημειακών φορτίων είναι ανεξάρτητη από την παρουσία άλλων φορτίων.

Έτσι η ολική δύναμη Coulomb, την οποία δέχεται ένα σημειακό φορτίο από άλλα σημειακά φορτία, υπολογίζεται ως εξής: Με την βοήθεια της εξίσωσης [1.2] υπολογίζουμε την δύναμη, την οποία δέχεται το συγκεκριμένο φορτίο από το καθένα των υπολοίπων χωριστά, σαν δηλαδή να μην υπήρχαν και άλλα φορτία, στην συνέχεια προσθέτουμε διανυσματικά όλες αυτές τις δυνάμεις (**Αρχή της γραμμικής υπερθέσεως**): α) **Σύστημα N σημειακών φορτίων q_i :**

$$\vec{F} = kq \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i \quad \Gamma_i = \text{απόσταση μεταξύ } q \text{ και } q_i \quad [1.2]$$

$\hat{r}_i = \text{μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση } q_i \rightarrow q$

β) **Συνεχής κατανομή φορτίου:**



$$d\vec{F} = kq \frac{dq}{r^2} \hat{r} = kq \frac{\rho dV}{r^2} \hat{r} \Rightarrow \vec{F} = kq \int \frac{\rho \hat{r}}{r^2} dV \quad [1.2\beta]$$

$\rho = dq/dV$ **πυκνότητα φορτίου**

(αν το φορτίο κατανέμεται επιφανειακά (ή γραμμικά), αντικαθιστούμε την πυκνότητα φορτίου με την **επιφανειακή πυκνότητα φορτίου** $\sigma = dq/dS$ (ή **γραμμική πυκνότητα φορτίου** $\lambda = dq/dl$), και το στοιχείο όγκου dV με το **στοιχείο επιφάνειας dS** (ή μήκους dl))

Παράδειγμα 1.2.1: Η ακτίνα της τροχιάς του ηλεκτρονίου στο άτομο του υδρογόνου ισούται με $5,3 \cdot 10^{-11}$ m περίπου. Να συγκριθούν τα μέτρα των δυνάμεων Coulomb και παγκόσμιας έλξης μεταξύ του πρωτονίου και του ηλεκτρονίου. Δίδονται: οι μάζες (ηρεμίας) των δύο σωματιδίων:

$$m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}, m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \text{ και } \eta \text{ σταθερή της παγκόσμιας έλξης } G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2}$$

Λύση

Οι δύο δυνάμεις υπολογίζονται από τους νόμους του Coulomb και της παγκόσμιας έλξης (Newton) αντίστοιχα:

$$\text{Νόμος του Coulomb : } F_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} = \frac{1}{4 \cdot 3,14 \cdot 8,854 \cdot 10^{-12}} \cdot \frac{1,6021 \cdot 10^{-19} \cdot 1,6021 \cdot 10^{-19}}{(5,3 \cdot 10^{-11})^2} \Rightarrow$$
$$\underline{F_C = 8,2 \cdot 10^{-8} \text{ N}}$$

$$\text{Νόμος της παγκόσμιας έλξης: } F_N = G \frac{m_1 m_2}{r^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{1,67 \cdot 10^{-27} \cdot 9,11 \cdot 10^{-31}}{(5,3 \cdot 10^{-11})^2} \Rightarrow$$
$$F_N = 3,61 \cdot 10^{-47} \text{ N}$$

Βλέπουμε λοιπόν, ότι η παγκόσμια έλξη μεταξύ ηλεκτρονίου και πρωτονίου στο άτομο του υδρογόνου είναι κατά 10^{39} φορές περίπου ασθενέστερη από την αντίστοιχη έλξη Coulomb. Το γεγονός αυτό μας δείχνει τον καθοριστικό ρόλο της δύναμης Coulomb σε επίπεδο ατόμων. Αν θέλαμε οι δύο δυνάμεις να είναι ίσες, θα έπρεπε η μάζα του ηλεκτρονίου ή του πρωτονίου να πολλαπλασιασθεί με τον παράγοντα $F_C/F_N = 2,27 \cdot 10^{39}$, ή και των δύο συγχρόνως με τον παράγοντα $(F_C/F_N)^{1/2} = 4,76 \cdot 10^{19}$.

Παράδειγμα 1.2.2: Σωματίδιο φορτίου q_1 κινείται επί της ευθείας, η οποία διέρχεται από το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος, το οποίο ορίζεται από τα κέντρα δύο άλλων σωματιδίων, και είναι κάθετη προς αυτό, όπως φαίνεται στο σχήμα Π1.2.2. Τα δύο αυτά σωματίδια θεωρούνται ακίνητα και το καθένα τους έχει φορτίο q_2 . Ζητείται η θέση στην οποία το κινούμενο σωματίδιο δέχεται την μέγιστη δύναμη Coulomb.



Λύση

Λόγω ασυμμετρίας και ισότητας των ακινήτων φορτίων έχουμε:

$$[1.2] \quad \text{σχήμα}$$
$$F_1 = F_2 = k \frac{q_1 q_2}{r^2} = k \frac{q_1 q_2}{x^2 + (b/2)^2} \quad \{1\}$$

Η συνισταμένη F των δύο αυτών δυνάμεων ισούται με το άθροισμα των οριζοντίων τους συνιστωσών (οι κατακόρυφες συνιστώσες είναι ίσες και αντίθετες, όπως φαίνεται από το σχήμα Π1.2.2:

$$F = 2(F_1 \cos \theta) \stackrel{\{1\}}{=} 2 \left(k \frac{q_1 q_2}{x^2 + (b/2)^2} \frac{x}{r} \right) \Rightarrow F = 2 \left(k \frac{q_1 q_2}{x^2 + (b/2)^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + (b/2)^2}} \right) \Rightarrow$$
$$F = 2 \left(k q_1 q_2 \frac{x}{[x^2 + (b/2)^2]^{3/2}} \right) \quad \{2\}$$

Όπως γνωρίζουμε από την Ανάλυση, για να γίνει η παραπάνω συνάρτηση μέγιστη πρέπει να μηδενίζεται η πρώτη της παράγωγος ως προς x :

παραγώγιση σαν πηλικο συναρτήσεων'

$$F = \max \rightarrow \frac{dF}{dx} = 0 \quad \text{και μηδενισμός του αριθμητή} \Rightarrow (x^2 + b^2/4)^{3/2} - x \frac{3}{2}(x^2 + b^2/4)^{1/2} \cdot 2x = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + b^2/4 = 3x^2 \Rightarrow 2x^2 = b^2/4 \Rightarrow x = \pm \frac{b}{\sqrt{8}} = \pm \frac{b}{2\sqrt{2}}$$

διά $(x^2 + b^2/4)^{1/2}$

1.3 Το ηλεκτρ(οστα)τικό πεδίο

Η έννοια του πεδίου εισήχθη στην προσπάθεια να κατανοηθεί η « μεταφορά » των δυνάμεων Coulomb (στον ηλεκτρισμό, βαρύτητας στην παγκόσμια έλξη κ.λ.π.) από το ένα φορτίο στο άλλο, επειδή η προϋπάρχουσα **θεωρία της δράσης από απόσταση** δεν ήταν ικανοποιητική. Σύμφωνα με την θεωρία αυτή οι δυνάμεις « μεταφέρονται » από το ένα φορτίο στο άλλο ακαριαία και χωρίς την μεσολάβηση κάποιου μέσου (με τρόπο μαγικό δηλαδή!). Η ακαριαία όμως μεταφορά συγκρούεται με την θεωρία της Σχετικότητας, σύμφωνα με την οποία θα μπορούσε να πραγματοποιηθεί το πολύ με την ταχύτητα του φωτός. Η έννοια του πεδίου ορίσθηκε στα πλαίσια της **θεωρίας της δράσης εκ του πλησίον**, σύμφωνα με την οποία η αλληλεπίδραση τόσο μεταξύ σωματιδίων όσο και απομακρυσμένων μακροσκοπικών σωμάτων αποδίδεται στην δράση κάποιου **φυσικού πεδίου** (στην περίπτωση μας του ηλεκτροστατικού).

Το ηλεκτροστατικό πεδίο πηγάζει από ακίνητα ηλεκτρικά φορτία, είναι εξ ορισμού χρονικά αμετάβλητο και αποτελεί ειδική περίπτωση του **ηλεκτρομαγνητικού πεδίου**, το οποίο δημιουργείται από *κινούμενα* ηλεκτρικά φορτία. Η δύναμη την οποία δέχεται ένα τυχαίο (ακίνητο) φορτίο σε κάποιο επίσης τυχαίο σημείο του χώρου αποδίδεται στην δράση του πεδίου που επικρατεί στο συγκεκριμένο σημείο, γεγονός το οποίο μας απαλλάσσει από την ανάγκη εφεύρεσης κάποιου τρόπου μετάδοσης των δυνάμεων Coulomb από φορτίο σε φορτίο. Όσον αφορά την ερώτηση κατά πόσο η έννοια του πεδίου έχει πραγματική ή μη υπόσταση, εμείς αρκούμαστε στο γεγονός, ότι η εισαγωγή της αποτέλεσε ένα από τα πιο καρποφόρα βήματα της Φυσικής, το οποίο διευκόλυνε και διευκολύνει δραματικά την επίλυση πολλών βασικών της προβλημάτων. και ότι δεν συγκρούεται με οποιονδήποτε από τους μέχρι τώρα γνωστούς φυσικούς νόμους.

Φορέας της πληροφορίας για την ποσοτική επίδραση του ηλεκτροστατικού πεδίου σε φορτία, τα οποία θα βρεθούν σε κάποιο σημείο του χώρου, όπου εκτείνεται το πεδίο, δηλαδή για τις δυνάμεις Coulomb που θα εξασκηθούν στα φορτία αυτά, είναι η

Ένταση του ηλεκτροστατικού πεδίου: καλείται το διανυσματικό μέγεθος \vec{E} , το οποίο έχει την διεύθυνση και φορά της δύναμης \vec{F} , η οποία ασκείται σε (συμβατικά!) θετικό μοναδιαίο φορτίο +q, το οποίο βρίσκεται στο συγκεκριμένο σημείο:

Ένταση του
ηλ. πεδίου

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{+q}$$

όπου: \vec{F} είναι η συνολική δύναμη Coulomb, η οποία ασκείται στο φορτίου +q, όταν αυτό βρίσκεται

στο συγκεκριμένο σημείο του πεδίου. (Η αναγκαιότητα συμβατικού προσδιορισμού της φοράς πηγάζει από την ύπαρξη δύο ειδών φορτίου, των θετικών και αρνητικών.)

Παρατήρηση: Ο παραπάνω ορισμός της έντασης είναι μονοσήμαντος μόνο στην περίπτωση που τα γενεσιουργά του πεδίου φορτία είναι ακίνητα. Διαφορετικά η εισαγωγή του μη μηδενικού φορτίου +q μπορεί να προκαλέσει μετατόπιση των φορτίων αυτών και κατά συνέπεια αλλαγή του πεδίου. Αυτός είναι και ο λόγος για τον οποίο πολλοί συγγραφείς ορίζουν την ένταση βάσει ενός απειροστού ($q \rightarrow 0$) δοκιμαστικού φορτίου, γεγονός βέβαια το οποίο δεν έχει φυσική υπόσταση μια και το μικρότερο παρατηρούμενο στην φύση φορτίο είναι το e . Η απειροστότητα παύει να είναι απαραίτητη, αν τα φορτία που δημιουργούν το πεδίο είναι ακίνητα. Σε περίπτωση που μετακινηθούν θα περιμένουμε απλώς μέχρι να αποκατασταθεί η νέα κατάσταση ηλεκτροστατικής ισορροπίας, η οποία και είναι εξ άλλου αυτή που μας ενδιαφέρει.

Αν γνωρίζουμε την ένταση \vec{E} σε όλα τα σημεία του πεδίου μπορούμε να υπολογίσουμε αμέσως την δύναμη \vec{F} , η οποία ασκείται σε οποιοδήποτε φορτίο q , το οποίο βρέθηκε σε κάποιο σημείο του πεδίου από την εξίσωση

$$\vec{F} = q\vec{E} \quad [1.4]$$

(Το q λαμβάνεται εδώ μαζί με το πρόσημο του!)

Από την παραπάνω εξίσωση φαίνεται, ότι
η δύναμη, η οποία ασκείται σε θετικά φορτία,
έχει την διεύθυνση και φορά της έντασης του πεδίου
η δύναμη, η οποία ασκείται σε αρνητικά φορτία
έχει την διεύθυνση της έντασης του πεδίου αλλά αντίθετη προς αυτήν φορά.

Η απλούστερη μορφή πεδίου είναι το λεγόμενο ομογενές: καλείται το πεδίο, του οποίου η ένταση είναι σε όλα του τα σημεία η ίδια.

1.4 Δυναμικές γραμμές

Οι δυναμικές γραμμές « αισθητοποιούν » το πεδίο, μια και σχεδιάζονται έτσι ώστε

α) Η διεύθυνση της εφαπτομένης σε κάποιο σημείο μιας δυναμικής γραμμής συμπίπτει με εκείνη της έντασης πεδίου στο σημείο αυτό.

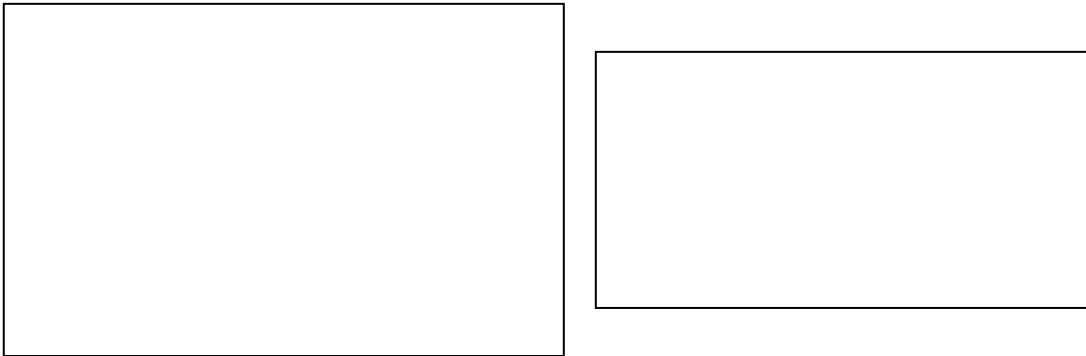
β) Η φορά των ηλεκτρικών δυναμικών γραμμών συμπίπτει με την φορά της έντασης. Επομένως οι ηλεκτρικές δυναμικές γραμμές (ενός ηλεκτροστατικού πεδίου) πηγάζουν από θετικά και καταλήγουν σε αρνητικά φορτία

γ) Ο αριθμός των δυναμικών γραμμών, οι οποίες διέρχονται από την μοναδιαία επιφάνεια, κάθετης στην ένταση \vec{E} , του πεδίου στο κέντρο της μοναδιαίας επιφάνειας, είναι ανάλογος προς το μέτρο της έντασης στο σημείο αυτό. Έτσι όπου το πεδίο είναι ισχυρό, οι δυναμικές γραμμές πυκνώνουν, όπου ασθενές αραιώνουν.

Οι δυναμικές γραμμές πρέπει να θεωρούνται σαν ένα εποπτικό μέσο, το οποίο μας επιτρέπει να πάρουμε μια γενική και παραστατική εικόνα του πεδίου και της ποιοτικής μεταβολής της έντασης του από περιοχή σε περιοχή, ακατάλληλο όμως για την ποσοτική περιγραφή του πεδίου.

Από τις παραπάνω ιδιότητες συμπεραίνουμε, ότι η μορφή των δυναμικών γραμμών εξαρτάται από την κατανομή των φορτίων στον χώρο. Ιδιαίτερα δε για ένα ομογενές πεδίο προκύπτει, ότι

οι δυναμικές γραμμές ομογενούς πεδίου είναι ευθείες παράλληλες και ισαπέχουσες.



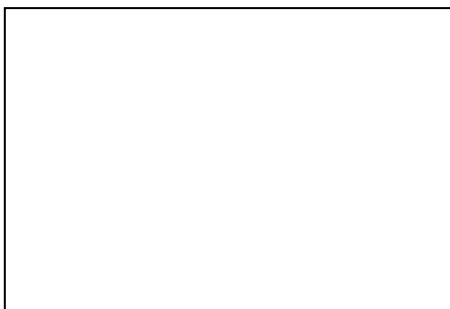
Σχήμα 1.2: Δυναμικές γραμμές συστήματος δύο ετερόνυμων και ομώνυμων φορτίων.



Σχήμα 1.3: Δυναμικές γραμμές ενός σημειακού θετικού φορτίου και ενός λεπτού επίπεδου στρώματος θετικού φορτίου, απείρων διαστάσεων (στο σχήμα φαίνεται τμήμα της τομής του).

1.5 Ροή του ηλεκτρικού πεδίου

Σε πολλές περιπτώσεις ενδιαφέρει εκτός από το μέγεθος (εμβαδόν) μιας επιφάνειας και ο προσανατολισμός της μέσα στον χώρο (π.χ. επιφάνεια ενός ηλιακού συλλέκτη, ενός παραθύρου κ.λ.π.).



$$|d\vec{S}| = \text{εμβαδόν στοιχειώδους επιφάνειας } dS$$

Σχήμα 1.4: Περιγραφή του μεγέθους και του προσανατολισμού στοιχειώδους επιφάνειας με την βοήθεια διανύσματος $d\vec{S}$.

Στην περίπτωση που η επιφάνεια είναι στοιχειώδης (= απειροστή και επομένως επίπεδη!), τα δύο της παραπάνω χαρακτηριστικά μπορούν να περιγραφούν συγχρόνως με την βοήθεια ενός διανύσματος $d\vec{S}$, το οποίο είναι κάθετο στην (στοιχειώδη) επιφάνεια και έχει μέτρο dS , ίσο προς το εμβαδόν της (βλ.

σχ.1.4).

Αν η στοιχειώδης επιφάνεια βρίσκεται εντός ηλεκτρικού πεδίου μπορεί (μια και είναι στοιχειώδης) να χαρακτηριστεί (όσον αφορά στην δράση του πεδίου) ενιαία από την ένταση \vec{E} , η οποία επικρατεί π.χ. στο κέντρο της. Τότε ο ακόλουθος ορισμός είναι μονοσήμαντος:

Ηλεκτρική ροή $d\Phi$ μέσω μιας στοιχειώδους επιφάνειας dS , η οποία βρίσκεται εντός ηλεκτρικού πεδίου έντασεως \vec{E} , καλείται το γινόμενο

$$d\Phi = (\vec{E} \cdot d\vec{S}) = E \cdot dS \cdot \cos \vartheta \quad [1.5]$$

Οι δυναμικές γραμμές, όπως ορίστηκαν στην §1.4, δίνουν στην αφηρημένη κατ' αρχήν, έννοια της (στοιχειώδους) ροής την ακόλουθη παραστατική διάσταση:

Όπως είπαμε, το μέτρο

της έντασης \vec{E} είναι ίσο (γενικά ανάλογο, αλλά η σταθερή αναλογίας θα μπορούσε να επιλεγεί έτσι ώστε να έχουμε ισότητα) προς τον αριθμό των δυναμικών γραμμών, οι οποίες διέρχονται από την μοναδιαία επιφάνεια, η οποία είναι κάθετη προς το διάνυσμα \vec{E} στο κέντρο της. Εξάλλου το γινόμενο ($dS \cdot \cos\theta$) στην [1.5] ισούται με το εμβαδόν της προβολής της επιφάνειας dS πάνω σε ένα επίπεδο κάθετο στο διάνυσμα \vec{E} . Άρα

η (στοιχειώδης) ηλεκτρική ροή $d\Phi = E \cdot dS \cdot \cos\theta$ ισούται με τον αριθμό των δυναμικών γραμμών, οι οποίες περνούν («κάθετα») από την (στοιχειώδη) επιφάνεια dS (δηλαδή μέσω της κάθετης προς την \vec{E} προβολής της).

Στην περίπτωση που πρόκειται για το διανυσματικό **πεδίο της ταχύτητας ροής ενός ρευστού** η (στοιχειώδεις) ροή ισούται αριθμητικά με τον **ρυθμό ροής** (εξ ου και η ονομασία «**ροή**»), δηλαδή τον όγκο του ρευστού, ο οποίος ρέει στην μονάδα του χρόνου μέσω της στοιχειώδους επιφάνειας.

Όταν η επιφάνεια είναι μακροσκοπική, την θεωρούμε χωρισμένη (βλ. σχήμα 1.5) σε n μικρές



(σχεδόν επίπεδες) επιφάνειες ΔS_i , ($i = 1, 2, \dots, n$), κάθε μια από τις οποίες μπορεί σε πρώτη προσέγγιση να χαρακτηριστεί ενιαία από την ένταση \vec{E}_i του πεδίου στο κέντρο της. Η ολική ροή Φ μέσω της εν λόγω επιφάνειας προκύπτει (προσεγγιστικά) αθροίζοντας όλες τις «στοιχειώδεις» ροές $\Delta\Phi_i = \vec{E}_i \cdot \Delta\vec{S}_i$. Η προσέγγιση αυτή γίνεται τόσο καλύτερη, όσο μεγαλώνει ο αριθμός n των επιφανειών και, κατά συνέπεια, μικραίνει το εμβαδόν τους

$\Delta\vec{S}_i$:

Σχήμα 1.5: Υπολογισμός της ροής μέσω τυχαίας μακροσκοπικής επιφάνειας

**ηλεκτρική ροή
μέσω τυχαίας
ανοιχτής
επιφάνειας S**

$$\Phi = \lim_{\substack{\Delta \vec{S} \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n \vec{E}_i \cdot \Delta \vec{S}_i \equiv \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad [1.5\alpha]$$

↑ επιφανειακό ολοκλήρωμα

Αν η επιφάνεια είναι κλειστή, η σχέση [1.5α] γράφεται

**ηλεκτρική ροή
μέσω τυχαίας
κλειστής
επιφάνειας S**

$$\Phi = \oint_S \vec{E} d\vec{S} \quad [1.5\beta]$$

Παράδειγμα 1.5.1: Να υπολογιστεί η ηλεκτρική ροή μέσω μιας κλειστής κυλινδρικής επιφάνειας, η οποία βρίσκεται εντός ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου, η διεύθυνση της έντασης του οποίου συμπίπτει με τον άξονα συμμετρίας της εν λόγω επιφάνειας.

Λύση



Η κλειστή κυλινδρική επιφάνεια χωρίζεται με βάση τον προσανατολισμό του διανύσματος $d\vec{S}$ σε τρεις υποεπιφάνειες (βλ. σχ. Π 1.5.1) : την παράπλευρη επιφάνεια και τις δύο βάσεις.

Η ολική ηλεκτρική ροή υπολογίζεται από την σχέση [1.5 β]:

$$\begin{aligned} \Phi &= \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{E} d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{E} d\vec{S} + \int_{S_3} \vec{E} d\vec{S} = \\ &= \int_{S_1} E \cos \vartheta_1 dS + \int_{S_2} E \cos \vartheta_2 dS + \int_{S_3} E \cos \vartheta_3 dS = \end{aligned}$$

Σχήμα Π 1.5.1: Ροή μέσω κλειστής κυλινδρικής επιφάνειας εντός ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου.

$$\begin{aligned} E &= \sigma \alpha \vartheta. \\ &= E \left[\int_{S_1} \cos 0 dS + \int_{S_2} \cos 90 dS + \int_{S_3} \cos 180 dS \right] = E \left[\int_{S_1} dS + 0 + \int_{S_3} (-1) dS \right] \begin{matrix} S_1 = \pi R^2 \\ S_3 = \pi R^2 \end{matrix} \\ &= E [\pi R^2 - \pi R^2] \Rightarrow \Phi = 0 \end{aligned}$$

$S_1 = \pi R^2$
 $S_3 = \pi R^2$

(R = ακτίνα του κυλίνδρου).

μ.γ.ό.ε.

Παράδειγμα 1.5.2: Να υπολογιστεί η ηλεκτρική ροή μέσω ημισφαιρίου ακτίνας R, το οποίο βρίσκεται εντός ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου, παραλλήλου προς τον άξονα του.

Λύση:

Η ηλεκτρική ροή Φ υπολογίζεται από την σχέση [1.5α]:

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_S E \cos \vartheta dS = E \int_S \cos \vartheta dS$$

$E = \sigma \alpha \vartheta.$

$\uparrow \left\{ \begin{array}{l} \text{μεταπήδιση σε σφαιρικές} \\ \text{συντεταγμένες (βλ.Σχ.Π1.5.2.1)} \end{array} \right.$

Σφαιρικές συντεταγμένες r, θ, ϕ
(Χωρικές πολικές συντεταγμένες)



Σχέσεις μεταξύ σφαιρικών και καρτεσιανών συντεταγμένων:

$$\begin{aligned} x &= r \cos\theta \cos\phi \\ y &= r \cos\theta \sin\phi \\ z &= r \sin\theta \end{aligned}$$

Στοιχείο όγκου:

$$\begin{aligned} dV &= dx dy dz = \\ &= r^2 \cos\theta dr d\theta d\phi \end{aligned}$$

Στοιχείο επιφάνειας

$$\begin{aligned} dS &= dx dy = \\ &= R^2 \cos\theta d\theta d\phi \end{aligned}$$

(R = ακτίνα σφαιρικής επιφάνειας, στην οποία ανήκει το στοιχείο)

Σχήμα Π1.5.2.1: Γεωμετρία και χαρακτηριστικά σφαιρικών συντεταγμένων.

βλ.σχήμα Π1.5.2.2

↑

$$\cos\theta = \sin\Theta$$

$$E \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos\theta (R^2 \cos\theta d\theta d\phi) = ER^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sin\Theta \cos\Theta d\phi =$$

$$= dS$$

$$\int \sin ax \cos ax = \frac{1}{2a} \sin^2 ax$$

↑
=

$$\frac{1}{2} ER^2 \int_0^{2\pi} d\phi \Rightarrow \Phi = ER^2 \pi$$



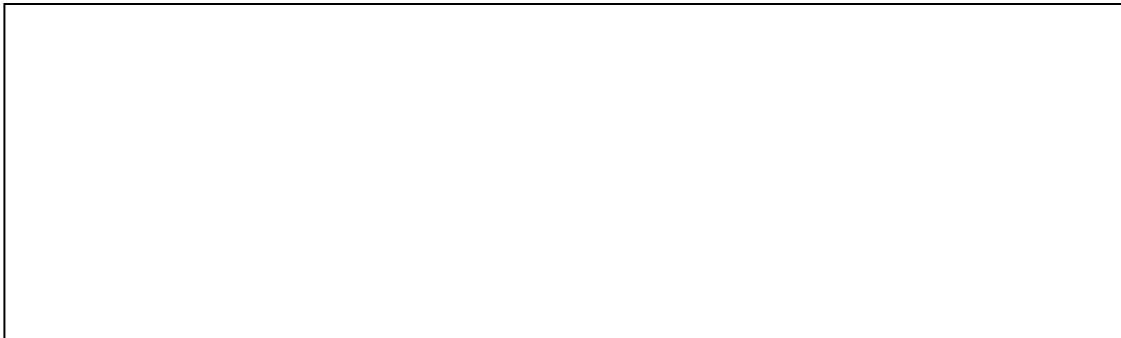
Σχήμα Π1.5.2.2: Ημισφαίριο εντός ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου, παραλλήλου προς τον άξονα του.

1.6 Ο νόμος του Gauss

Σύμφωνα με όσα αναπτύξαμε από την αρχή του μαθήματος έως τώρα, η μόνη δυνατότητα, που μας παρέχεται για τον υπολογισμό της έντασης του πεδίου ενός συστήματος σημειακών φορτίων, φαίνεται να είναι, ο συνδυασμός της εξίσωσης ορισμού [1.3] της έντασης με τον νόμο του Coulomb. Όπως δε εύκολα μπορούμε να φανταστούμε, η μέθοδος αυτή είναι επίπονη ακόμη και σε περιπτώσεις, κατά τις οποίες η γεωμετρία των γενεσιουργών του πεδίου φορτίων είναι σχετικά απλή, προϋποθέτει εξάλλου πάντα την γνώση της ακριβούς θέσης των φορτίων αυτών.

Ευτυχώς όμως για μας, τα πράγματα δεν είναι πάντα έτσι, όπως φαίνονται: Σε πολλές περιπτώσεις, αυξημένου μάλιστα πρακτικού ενδιαφέροντος, ο υπολογισμός της έντασης του ηλεκτροστατικού πεδίου απλοποιείται δραματικά με την βοήθεια του νόμου του Gauss, τον οποίο θα αναπτύξουμε ευθύς αμέσως.

Προς τον σκοπό αυτό θεωρούμε ένα σημειακό φορτίο q και μια κλειστή επιφάνεια *τυχαίας* μορφής, η οποία περικλείει το φορτίο q (βλ. σχ. 1.6). Σύμφωνα με την εξίσωση [1.5β], η ολική ροή μέσω της εν λόγω επιφάνειας είναι:



Σχήμα 1.6: Υπολογισμός της ολικής ροής μέσω κλειστής επιφάνειας, η οποία περικλείει ή αποκλείει σημειακό φορτίο q .

$$\Phi = \oint_S \vec{E} d\vec{S} \stackrel{[1.3] \& [1.2]}{=} \oint_S \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2} \right) d\vec{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\cos\theta}{r^2} dS \stackrel{\substack{\text{βλέπε} \\ \text{σχήμα 1.7}}}{=} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int \cos\theta dS = r^2 d\Omega$$

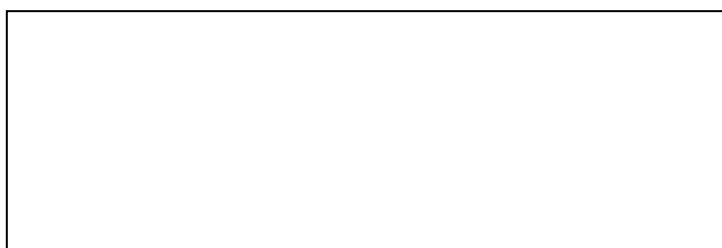
$$\int_R \frac{r^2}{r^2} d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi \Rightarrow \Phi = \int_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad [1.16]$$

ολοκλήρωση σε όλο τον χώρο (Νόμος του Gauss)

q = ολικό φορτίο εντός της κλειστής επιφάνειας (βλ. συνέχεια)

ΣΤΕΡΕΕΣ ΓΩΝΙΕΣ

Στερεά γωνία ονομάζουμε μέρος του χώρου, το οποίο περιορίζεται από τον γεωμετρικό τόπο των ημιευθειών, οι οποίες ξεκινούν από ένα τυχαίο σημείο (**κορυφή**) του χώρου και κατευθύνονται προς όλα τα σημεία μιας κλειστής καμπύλης. Πρόκειται ουσιαστικά για την καλούμενη γωνία οράσεως, την γωνία δηλαδή υπό την οποία βλέπουμε την εν λόγω καμπύλη, όταν το μάτι μας βρίσκεται στην κορυφή της γωνίας. Το μέτρο μιας στερεάς γωνίας μετράται σε **sterad** (sr), η δε αριθμητική της τιμή ισούται με το πηλίκο του εμβαδού A, το οποίο τέμνει η στερεά γωνία επί περιγεγραμμένης σφαιρικής επιφάνειας ακτίνας r, προς το τετράγωνο της ακτίνας : $\Omega = A / r^2$. Από τον ορισμό αυτό προκύπτει αυτομάτως, ότι μια **πλήρης στερεά γωνία** ισούται με 4π sr.



$$\Omega = A / r^2 \text{ sr}$$

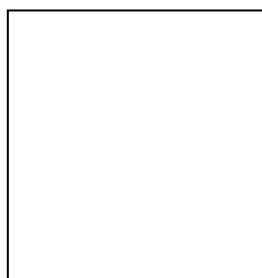
Περιπτώσεις στερεών γωνιών και υπολογισμός του μέτρου μιας στερεάς γωνίας.



dΩ = στοιχειώδεις στερεή γωνία, η οποία ορίζεται από την θέση του q και το στοιχείο dS.

dA= στοιχειώδης επιφάνεια, η οποία περιορίζεται από την στοιχειώδη γωνία dΩ, επί της σφαιρικής επιφάνειας η οποία έχει κέντρο την θέση του φορτίου q και ακτίνα την απόσταση r του στοιχείου dS από το φορτίο.

$$d\Omega = dq/r^2 \quad \{ 1 \}$$



Σκεφτόμενοι ότι 1°) οι επιφάνειες dA και dS σαν στοιχειώδεις είναι επίπεδες και 2°) οι ακτίνες οι οποίες περιορίζουν την dΩ είναι κάθετες στην dA, συμπεραίνουμε, ότι η dA είναι ουσιαστικά η προβολή της dS σε ένα επίπεδο κάθετο στην διεύθυνση της έντασης \vec{E} , η οποία συμπίπτει με εκείνη της ακτίνας r.

$$dA = \cos\theta dS \quad \{ 2 \}$$

$$\{ 1 \} \& \{ 2 \} \rightarrow \cos\theta dS = r^2 d\Omega$$

Σχήμα 1.7: Γενικά περί στερεών γωνιών και σχηματική ανάλυση της ισότητας $\cos\theta \, dS = r^2 d\Omega$.

Παρατήρηση: α) Στην περίπτωση που το φορτίο q βρίσκεται εκτός της κλειστής επιφάνειας, η ολοκλήρωση πάνω από το στοιχείο της στερεής γωνίας δίνει μηδέν, επειδή κάθε στοιχείο τέμνει την εν λόγω επιφάνεια (βλ. σχ. 1.6) τόσο από την πλευρά που η γωνία θ μεταξύ των διανυσμάτων $d\vec{S}$ και \vec{E} είναι αμβλεία ($\sim \rightarrow \cos\theta < 0$), οπότε το στοιχείο μετράει αρνητικά, όσο και από την απέναντι όπου η γωνία είναι οξεία ($\cos\theta > 0$), οπότε το στοιχείο μετράει και θετικά.

β) Κατά την παραπάνω απόδειξη του νόμου του Gauss περιοριστήκαμε στην περίπτωση ενός και μοναδικού σημειακού φορτίου εντός της κλειστής επιφάνειας, απλώς και μόνο χάριν απλότητας. Η γενίκευση για περισσότερα, τυχαίως κατανομημένα φορτία είναι απλή: **β1)** Σύστημα N σημειακών φορτίων q_i :

$$\Phi = \oint_S \vec{E} d\vec{S} \stackrel{\text{αρχή υπερθέσεως, 1.2}}{=} \oint_S \sum_i \vec{E}_i d\vec{S} = \sum_i \left(\oint_S \vec{E}_i d\vec{S} \right) \stackrel{\text{Gauß.[1.6]}}{=} \sum_i \left(\frac{q_i}{\epsilon_0} \right)$$

$$\sum_i q_i / \epsilon_0 \Rightarrow \Phi = q_{\text{ολ}} / \epsilon_0$$

β2) Συνεχής κατανομή φορτίου: $\Phi = \oint_S \vec{E} d\vec{S} \stackrel{\text{αρχή υπερθέσεως}}{=} \oint_S \left(\int_{\mathfrak{R}_q} d\vec{E} \right) d\vec{S} = \int_{\mathfrak{R}_q} \left(\oint_S d\vec{E} \right) d\vec{S} \stackrel{\text{Gauß.[1.6]}}{=} \int_{\mathfrak{R}_q} \frac{dq}{\epsilon_0} \Rightarrow \Phi = q_{\text{ολ}} / \epsilon_0$

χώρος κατανομής φορτίου

$$= \int_{\mathfrak{R}_q} \left(\oint_S d\vec{E} d\vec{S} \right) \stackrel{\text{Gauß.[1.6]}}{=} \int_{\mathfrak{R}_q} \frac{dq}{\epsilon_0} \Rightarrow \Phi = q_{\text{ολ}} / \epsilon_0$$

Βλέπουμε λοιπόν, ότι **σύμφωνα με τον νόμο του Gauss** η ηλεκτρική ροή μέσω οποιασδήποτε κλειστής επιφάνειας ισούται με το πηλίκο του ολικού φορτίου (=άθροισμα όλων των επιμέρους φορτίων), το οποίο βρίσκεται εντός της επιφάνειας, προς την διηλεκτρική σταθερή του κενού.

Ο νόμος του Gauss αποτελεί μια από τις θεμελιώδεις εξισώσεις της Ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας, οι οποίες είναι γνωστές σαν **εξισώσεις του Maxwell**. Συνδέει ουσιαστικά το ηλεκτρικό πεδίο με τις πηγές του (τα ηλεκτρικά φορτία), γεγονός το οποίο συντελεί στην βαθύτερη κατανόηση της φύσης του πεδίου αυτού. Αποτελεί δε (όπως φαίνεται από την απόδειξη του) προϊόν

α) του νόμου του αντιστρόφου τετραγώνου, ο οποίος διέπει την αλληλεπίδραση δύο (ακίνητων) σημειακών φορτίων.

β) του κεντρικού χαρακτήρα της δύναμης Coulomb,

γ) της αρχής της υπερθέσεως, η οποία διέπει την δράση των ηλεκτρικών φορτίων.

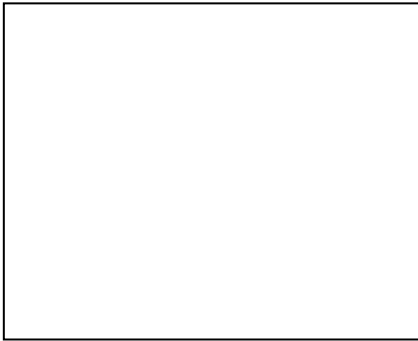
Με την βοήθεια του νόμου του Gauss μπορούμε, όταν γνωρίζουμε την ένταση του πεδίου, να υπολογίσουμε το φορτίο, το οποίο περιέχεται σε (θεωρητικά) οποιαδήποτε περιοχή του χώρου, πράγμα το οποίο δεν συμβαίνει με τον νόμο του Coulomb. Ο τελευταίος μας επιτρέπει απλώς να υπολογίζουμε (και μάλιστα σε πρακτικά ενδιαφέρουσες περιπτώσεις μόνο μετά κόπων και βασάνων) το πεδίο, όταν δίδονται τα φορτία και η ακριβής τους στον χώρο διάταξη. Αντιθέτως ο νόμος του Gauss αποτελεί ένα

φανταστικό εργαλείο υπολογισμού της έντασης του ηλεκτροστατικού πεδίου, όπως θα διαπιστώσουμε κατά τις ακόλουθες

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1η) Πεδίο σφαιρικής κατανομής φορτίου:

Σφαιρική κατανομή φορτίου έχουμε, όταν το φορτίο κατανέμεται με σφαιρική συμμετρία γύρω από κάποιο κέντρο, το φορτίο δηλαδή το οποίο περιέχεται στην μονάδα του όγκου (= πυκνότητα φορτίου ρ) εξαρτάται μόνο από την απόσταση από το λεγόμενο **κέντρο της σφαιρικής κατανομής**. Λόγω της σφαιρικής συμμετρίας, η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου σε κάποιο σημείο του χώρου πρέπει να έχει την διεύθυνση της ακτίνας (βλ. σχ.1.8), η οποία συνδέει το κέντρο της σφαιρικής κατανομής με το συγκεκριμένο σημείο, και η τιμή της να εξαρτάται από την τιμή της ακτίνας και μόνο. Αυτό σημαίνει, ότι το μέτρο E της έντασης θα είναι το ίδιο σε όλα τα σημεία μιας τυχαίας σφαιρικής επιφάνειας, της οποίας το κέντρο συμπίπτει με εκείνο της σφαιρικής κατανομής.



Σύμφωνα με τον νόμο του Gauss η ροή μέσω μιας τέτοιας **επιφάνειας(Gauss, όπως λέγεται)** είναι:

$$\vec{E} \uparrow \uparrow \vec{S}$$

$$\Phi = q / \epsilon_0 \Leftrightarrow \oint_S \vec{E} d\vec{S} = q / \epsilon_0 \Rightarrow \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint_S E dS =$$

$$E = \text{σταθ} \quad E = \text{σφαιρ}$$

$$= E \oint_S dS = E 4\pi r^2 \Rightarrow \underline{E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}} \quad [1.7]$$

(Ένταση του πεδίου σφαιρικής κατανομής φορτίου σε απόσταση r από το κέντρο της. Στην [1.7] q είναι το φορτίο, το οποίο περικλείει σφαιρική επιφάνεια ακτίνας r και κέντρου ίδιου με εκείνο της σφαιρικής κατανομής).

Το φορτίο q, το οποίο περικλείεται από την επιφάνεια S, θα μπορούσε κάλλιστα (στην απλούστερη δυνατότητα σφαιρικής κατανομής φορτίου) να είναι ένα μοναδικό σημειακό φορτίο ευρισκόμενο στο κέντρο της σημειακής κατανομής. Άρα

το ηλεκτρικό πεδίο (στο εξωτερικό) μιας σφαιρικής κατανομής φορτίου είναι το ίδιο με το πεδίο που θα παρατηρούσαμε, αν το ολικό της φορτίο ήταν συγκεντρωμένο στο κέντρο της.

Στην περίπτωση λοιπόν του ενός σημειακού φορτίου (έστω q₁) η [1.7] γράφεται:

$$E = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Η δύναμη, η οποία ασκείται σε δεύτερο σημειακό φορτίο q₂, ευρισκόμενο απόσταση r από το πρώτο θα είναι:

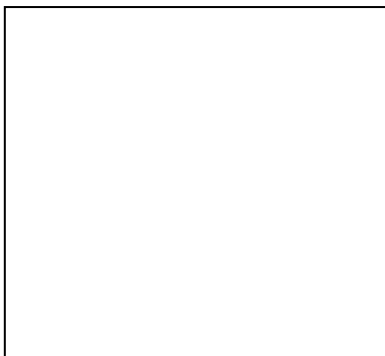
$$F = q_2 E = \frac{q_2 q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Δηλαδή η δύναμη Coulomb (βλ. κεφ 1.2). με άλλα λόγια

ο νόμος του Coulomb αποτελεί ουσιαστικά εφαρμογή του νόμου του Gauss για την περίπτωση σφαιρικής κατανομής φορτίου.

Λόγω αυτού ακριβώς του θεμελιωδέστερου χαρακτήρα του νόμου του Gauss προτιμάμε τον παράγοντα $1/4\pi$ να τον κουβαλάμε στον επιμέρους νόμο του Coulomb.

Σημειωτέον ότι τα ιόντα, από τα οποία αποτελούνται οι ιοντικοί καλούμενοι κρύσταλλοι, μπορούν να θεωρηθούν με πολύ καλή προσέγγιση σφαιρικές κατανομές φορτίου. Το γεγονός αυτό μας δίνει, κατά την μελέτη της ηλεκτροστατικής τους συμπεριφοράς, την δυνατότητα αντικατάστασης τους με ισοδύναμα σημειακά φορτία ευρισκόμενα στο κέντρο τους, απλουστεύοντας έτσι σημαντικά την επίλυση πολλών βασικών προβλημάτων.



Παρατήρηση: Η σχέση [1.7] ισχύει προφανώς και στην περίπτωση, κατά την οποία η σφαιρική επιφάνεια Gauss βρίσκεται εντός της σφαιρικής κατανομής (βλ. σχ.1.9). Στην περίπτωση αυτή το πεδίο επί της επιφάνειας S έχει την τιμή που θα είχε, αν όλα τα φορτία του εσωτερικού της ευρίσκοντο στο κέντρο της και δεν υπήρχαν φορτία στο εξωτερικό της. Αυτό το τελευταίο σημαίνει, ότι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο εσωτερικό ενός φορτισμένου σφαιρικού φλοιού είναι ίση με μηδέν.

Σχήμα 1.9: Πεδίο στο εσωτερικό: σφαιρικής κατανομής φορτίου (επάνω) και σφαιρικού φλοιού (κάτω).

μ.γ.ό.ε.

2^η) Πεδίο λεπτού, ευθυγράμμου σύρματος: Ένα φορτισμένο, λεπτό σύρμα αποτελεί ένα καλό παράδειγμα για την υλοποίηση της γραμμικής κατανομής φορτίου. Με εξαίρεση την περιοχή των άκρων του, τα οποία στην περίπτωση ενός μακριού σύρματος παίζουν ασήμαντο ρόλο, το ηλεκτρικό πεδίο θα κατευθύνεται λόγω συμμετρίας ακτινικά. Εκμεταλλευόμενοι το γεγονός αυτό, επιλέγουμε σαν επιφάνεια Gauss την επιφάνεια κυλίνδρου με άξονα το σύρμα, ακτίνα r και μήκος l (αρκετά μικρότερο από εκείνο του σύρματος), όπως φαίνεται στο σχήμα 1.10. Η προαναφερθείσα συμμετρία συνεπάγεται τον μηδενισμό



της ροής ($\cos(\vec{E}, d\vec{S})$) μέσω των βάσεων του κυλίνδρου και επιπλέον την ισότητα του μέτρου της έντασης και της γωνίας μεταξύ έντασης και διανύσματος $d\vec{S}$ ($= 0^\circ$) για όλα τα σημεία της παράπλευρης (κυλινδρικής) επιφάνειας. Η ροή μέσω της παράπλευρης αυτής επιφάνειας, η οποία είναι και η ολική ροή μέσω του κυλίνδρου συνολικά, υπολογίζεται πολύ εύκολα με την βοήθεια της παρακάτω «πρότασης», η οποία έγινε φανερή κατά την μελέτη του πεδίου της σφαιρικής κατανομής:

Σχήμα 1.10: Υπολογισμός του πεδίου λεπτού ευθυγράμμου σύρματος με τον νόμο του Gauss.

Η ροή μέσω μιας τυχαίας ανοιχτής ή κλειστής επιφάνειας, καθ' όλη την έκταση της οποίας είναι σταθερά το μέτρο της έντασης \vec{E} καθώς και η μεταξύ των διανυσμάτων \vec{E} και $d\vec{S}$ (διάνυσμα προσανατολισμένου στοιχείου επιφάνειας) γωνία, ισούται, με το γινόμενο $E \cdot S \cdot \cos(\vec{E}, d\vec{S})$:

$$\left. \begin{array}{l} E = \sigma\alpha\theta. \\ \theta \equiv \langle \vec{E}, d\vec{S} \rangle = \sigma\alpha\theta. \end{array} \right\} \Rightarrow \Phi_S = E \cdot S \cdot \cos\theta \quad [1.8]$$

S = ολικό εμβαδόν της επιφάνειας

[1.8]

Σύμφωνα λοιπόν με τον νόμο του Gauss θα έχουμε: $\Phi = \Phi_{\text{παραπλ.}} = q / \epsilon_0 \Rightarrow \theta = 0^\circ$

$$ES_{\text{παραπλ.}} = q / \epsilon_0 \Rightarrow E(2\pi r l) = q / \epsilon_0 \Rightarrow E = \frac{q}{2\pi r l \epsilon_0} = \frac{\lambda l}{2\pi r l \epsilon_0} \Rightarrow$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r}$$

$$\lambda = dq/dl = q/l = \text{γραμμική πυκνότητα φορτίου}$$

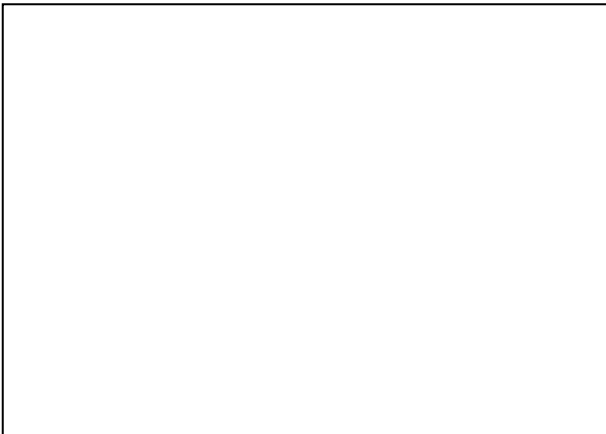
↑
εδώ

↓

(Το φορτίο θεωρείται ομοιόμορφα κατανεμημένο καθ' όλο το μήκος του σύρματος)

μ.γ.ό.ε

3^η) Πεδίο λεπτής, επίπεδης, φορτισμένης πλάκας απείρων διαστάσεων:



Στην προκειμένη περίπτωση η κατανομή φορτίου είναι, λόγω του αμελητέου πάχους, επιφανειακή, οπότε χαρακτηρίζεται από την επιφανειακή πυκνότητα φορτίου $\sigma = dq/dS$. Στην απλούστερη περίπτωση το φορτίο θα κατανέμεται ομοιόμορφα σε όλη την επιφάνεια και η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου θα είναι σταθερή: $\sigma = q/S = \text{σταθ.}$, όπου q είναι το φορτίο τμήματος της επιφάνειας εμβαδού S .

Από την συμμετρία της κατανομής προκύπτει, ότι το πεδίο θα πρέπει να είναι κάθετο στο επίπεδο της πλάκας και ότι η ένταση του πεδίου σε όλα τα σημεία ενός επίπεδου, παράλληλου προς την πλάκα θα είναι η ίδια.

Σχήμα 1.11: Υπολογισμός του πεδίου λεπτής, επίπεδης πλάκας απείρων διαστάσεων.

Μετά τις παραπάνω διαπιστώσεις επιλέγουμε σαν επιφάνεια Gauss (βλ. σχ. 1.11) κύλινδρο ακτίνας r , του οποίου ο άξονας είναι κάθετος προς την πλάκα, η οποία και τον διχοτομεί. Η ολική ροή μέσω του κυλίνδρου ισούται με εκείνη μέσω των βάσεων του μια και σε όλα τα σημεία της παράπλευρης επιφάνειας τα διανύσματα \vec{E} και $d\vec{S}$ είναι κάθετα μεταξύ τους. Επομένως ο νόμος του Gauss μας δίνει

$$\Phi = \Phi_{\text{βάσεις}} = q / \epsilon_0 \Rightarrow 2(ES_{\text{βάσης}}) = q / \epsilon_0 \Rightarrow 2E(\pi r^2) = q / \epsilon_0 \Rightarrow E = \frac{q}{2\pi r^2 \epsilon_0} \Rightarrow q = \sigma S_{\text{βάσης}} = \sigma \pi r^2$$

$$\Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει προσεγγιστικά και για επίπεδη, λεπτή πλάκα πεπερασμένων διαστάσεων, μόνο όμως για τα σημεία των οποίων η απόσταση από την πλάκα είναι πολύ μικρότερη από την απόσταση τους από τα άκρα της πλάκας. Στην περίπτωση βέβαια αυτή η πλάκα πρέπει να είναι μονωτική, αν θέλουμε ομοιόμορφη κατανομή φορτίου.

Όπως διαπιστώσαμε κατά τις παραπάνω εφαρμογές, σε περιπτώσεις συμμετρικής κατανομής φορτίου η ένταση του ηλεκτροστατικού πεδίου μπορεί να υπολογιστεί πολύ εύκολα (χωρίς να απαιτείται ουσιαστικά η αξιολόγηση οποιουδήποτε επιφανειακού ολοκληρώματος!) με την βοήθεια του νόμου του Gauss. Προϋπόθεση είναι βέβαια η αντικειμενική δυνατότητα εύρεσης κατάλληλης κλειστής επιφάνειας Gauss, στα σημεία της οποίας το μέτρο της έντασης και η γωνία θ μεταξύ των διανυσμάτων \vec{E} και $d\vec{S}$ είναι σταθερά για λόγους συμμετρίας. Τότε, όπως είδαμε, ο **νόμος του Gauss** παίρνει την μορφή $\Phi = \mathbf{E} \cdot \mathbf{S} \cos\theta = q/\epsilon_0$, όπου S το εμβαδόν της επιφάνειας και q το ολικό φορτίο εντός της επιφάνειας.

Στις περιπτώσεις, κατά τις οποίες είναι αδύνατο να ευρεθεί μια τέτοια επιφάνεια Gauss, η ένταση του ηλεκτροστατικού πεδίου υπολογίζεται με την βοήθεια του νόμου του Coulomb, κατά τον ακόλουθο τρόπο:

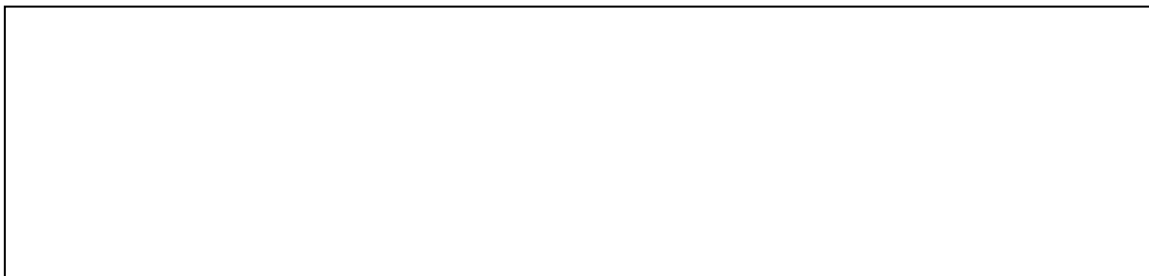
α) Περίπτωση δύο ή περισσότερων σημειακών φορτίων: Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου σε ένα σημείο είναι το διανυσματικό άθροισμα των εντάσεων \vec{E}_i , οι οποίες οφείλονται στα μεμονωμένα σημειακά φορτία q_i και υπολογίζονται συνδυάζοντας την εξίσωση ορισμού της έντασης [(1.3)] με τον νόμο του Coulomb [1.2α]:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i = \vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i \quad [1.11]$$

όπου r_i = απόσταση μεταξύ q_i και σημείου, στο οποίο υπολογίζουμε το πεδίο

\hat{r}_i = μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση $q_i \rightarrow$ σημείο υπολογισμού

β) Περίπτωση συνεχούς κατανομής φορτίου: θεωρούμε τον χώρο (ή την επιφάνεια, ή την γραμμή) κατανομής του γενεσιουργού φορτίου χωρισμένο σε μικρές κυψελίδες dV (ή επιφανειακά στοιχεία dS , ή γραμμικά τμήματα dl), έκαστη των οποίων περιέχει φορτίο dq , το οποίο στο σημείο \vec{r} δημιουργεί την στοιχειώδη ένταση $d\vec{E}$ (βλ. σχ.1.12). Η ένταση \vec{E} του πεδίου στο συγκεκριμένο σημείο υπολογίζεται στην συνέχεια βάσει της αρχής της υπερθέσεως ως το διανυσματικό άθροισμα (ουσιαστικά ολοκλήρωμα) όλων των στοιχειωδών εντάσεων $d\vec{E}$:



Σχήμα 1.12: Υπολογισμός πεδίου συνεχούς κατανομής φορτίου.

(αν το φορτίο κατανέμεται επιφανειακά (ή γραμμικά), αντικαθιστούμε την πυκνότητα φορτίου $\rho=dq/dV$ με την επιφανειακή πυκνότητα φορτίου $\sigma=dq/dS$ (ή γραμμική πυκνότητα φορτίου $\lambda=dq/dl$), και το στοιχείο όγκου dV με το στοιχείο επιφάνειας dS (ή μήκους dl))

Δεν εξετάζεται!

Παράδειγμα 1.6.1: Να υπολογιστεί η ένταση του πεδίου φορτισμένου με φορτίο q δακτυλίου ακτίνας r και αμελητέου πάχους στα σημεία του άξονα του.

Λύση:



Το πεδίο υπολογίζεται από την σχέση [1.12], όπως αυτή γράφεται για γραμμική κατανομή φορτίου, μια και ο δακτύλιος έχει αμελητέο πάχος:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi R} \frac{\lambda \hat{r}}{r^2} dl \quad \{1\}$$

Η γραμμική πυκνότητα φορτίου είναι (το φορτίο θεωρείται ομοιόμορφα κατανεμημένο): $\lambda = q/(2\pi R)$, οπότε η {1} γράφεται:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} \frac{\hat{r}}{r^2} dl \quad \{2\}$$

Σχήμα Π1.6.1: Υπολογισμός του πεδίου φορτισμένου δακτυλίου.

Λόγω συμμετρίας το πεδίο επί του άξονα του δακτυλίου έχει μόνο παράλληλη προς αυτόν συνιστώσα. Συγκεκριμένα κάθε στοιχειώδες τμήμα dl του δακτυλίου, το οποίο έχει φορτίο dq , δημιουργεί σε ένα τυχαίο σημείο P του άξονα το στοιχειώδες πεδίο $d\vec{E}$ (βλ. σχ.Π1.6.1).

Το στοιχειώδες αυτό πεδίο μπορεί να αναλυθεί, σε δύο συνιστώσες: μια \parallel και μια \perp προς τον άξονα. Η \perp είναι ίση και αντίθετη με την αντίστοιχη συνιστώσα του στοιχειώδους πεδίου, το οποίο δημιουργεί στο σημείο P το αντιδιαμετρικό στοιχείο του δακτυλίου. Έτσι η συνισταμένη ένταση προκύπτει από την ολοκλήρωση των παραλλήλων συνιστωσών:

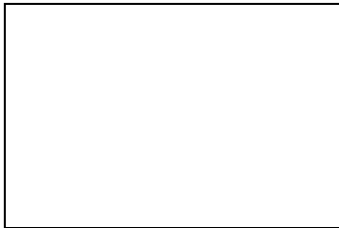
$$\begin{aligned} \vec{E} = \vec{E}_{\parallel} &\Rightarrow E_{\parallel} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} \frac{|\hat{r}_{\parallel}|}{r^2} dl & \text{σχ.Π1.6.1: } |\hat{r}_{\parallel}| = \cos\theta = x/r \\ & & = \\ & = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} \frac{x/r}{r^2} dl & \begin{matrix} x \neq f(l) \\ r \neq f(l) \end{matrix} \\ & = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qx}{2\pi R r^3} \int_0^{2\pi R} dl = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qx}{2\pi R r^3} (2\pi R) = \end{aligned}$$

$$= \frac{qx}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad r = (x^2 + R^2)^{1/2} \quad \Rightarrow \quad E_{||} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qx}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

1.7 Δυναμικό του ηλεκτροστατικού πεδίου

$$\int_{\vec{A}\vec{B}} \vec{F} d\vec{s} \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\sum_{j=1}^N \vec{F}_j \Delta \vec{s}_j \right] \\ \Delta \vec{s}_j \rightarrow 0$$

Με λόγια: Χωρίζουμε την συγκεκριμένη καμπύλη σε N μικροσκοπικά τμήματα ΔS_j , υπολογίζουμε για το καθένα απ' αυτά το γινόμενο $(\vec{F}_j \Delta \vec{s}_j) = F \Delta S_j \cos \theta_j$, τα προσθέτουμε και βρίσκουμε το όριο του αθροίσματος αυτού, όταν τα τμήματα τείνουν να γίνουν άπειρα σε αριθμό και απειρωστά σε διαστάσεις



Σχήμα 1.13: Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ενός διανύσματος.

Όπως γνωρίζουμε, το έργο, το οποίο παράγεται από μια δύναμη F κατά την μετακίνηση του σημείου εφαρμογής της από την θέση A (βλ. σχ. 1.13) έως την θέση B , δίδεται από το **επικαμπύλιο ολοκλήρωμα**

$$W_{AB} = \int_{\vec{A}\vec{B}} \vec{F} d\vec{s}$$

Ο όρος «επικαμπύλιο» σημαίνει, ότι ο ολοκληρωτέος $(\vec{F} d\vec{s})$ πρέπει να ολοκληρωθεί κατά μήκος της συγκεκριμένης καμπύλης, η οποία αποτελεί τον γεωμετρικό τόπο (= σύνολο) των σημείων, από τα οποία διήλθε το σημείο εφαρμογής της δύναμης κατά την μετακίνηση $A \rightarrow B$. Η «επικαμπυλότητα» του παραπάνω ολοκληρώματος αντικατοπτρίζει την εξάρτηση του έργου W_{AB} από την διαδρομή μετατόπισης του σημείου εφαρμογής της δύναμης \vec{F} , στην γενική εννοείται περίπτωση.

Δυνάμεις, των οποίων το έργο δεν εξαρτάται από την συγκεκριμένη διαδρομή, αλλά απλώς, από το σημείο εκκίνησης (A) και το σημείο άφιξης (B), καλούνται **συντηρητικές**:

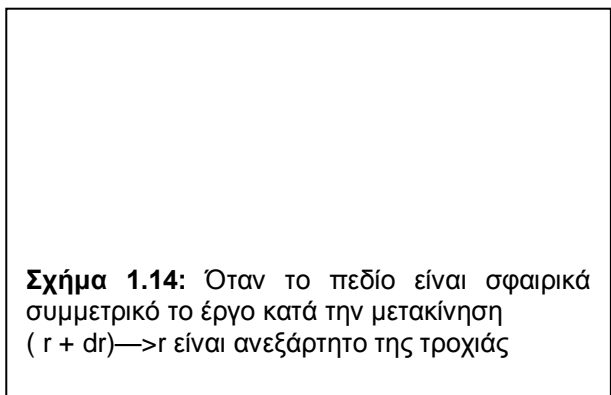
$$\text{Συντηρητικές δυνάμεις} \quad \int_{\vec{AB}} \vec{F} d\vec{s} = \int_A^B \vec{F} d\vec{s} = \begin{matrix} \text{ανεξάρητο} \\ \text{της διαδρομής} \end{matrix} \Leftrightarrow \oint \vec{F} d\vec{s} = 0$$

Κατ' επέκταση καλούνται **συντηρητικά** και τα αντίστοιχα **πεδία δυνάμεων**. (Η ονομασία οφείλεται στο γεγονός, ότι κατά την μετακίνηση ενός σώματος υπό την επίδραση συντηρητικών και μόνο δυνάμεων έχουμε *συντήρηση*, δηλαδή διατήρηση της ολικής (= δυναμικής + κινητικής) ενέργειας του σώματος).

Αποδεικνύεται (βλ. σχ. 1.14) ότι το **ηλεκτροστατικό και το βαρυτικό πεδίο είναι, συντηρητικά**.

Συντηρητικότητα σφαιρικά συμμετρικών πεδίων

Προκειμένου να αποδείξουμε την συντηρητικότητα του ηλεκτροστατικού πεδίου εξετάζουμε την μετακίνηση ενός δοκιμαστικού φορτίου q (εδώ θετικού) μέσα στην απλούστερη δυνατή μορφή ηλεκτροστατικού πεδίου, του πεδίου ενός σημειακού φορτίου Q (εδώ αρνητικού). Έστω ότι το φορτίο q μετακινείται από την θέση A έως την θέση B ακολουθώντας δύο εντελώς τυχαίες, διαφορετικές τροχιές. Το στοιχειώδες έργο, το οποίο παράγεται υπό του πεδίου κατά την στοιχειώδη μετακίνηση $d\vec{s}$, είναι ως



Σχήμα 1.14: Όταν το πεδίο είναι σφαιρικά συμμετρικό το έργο κατά την μετακίνηση $(r + dr) \rightarrow r$ είναι ανεξάρτητο της τροχιάς

γνωστόν $dW = \vec{F} d\vec{s} = F \cos \theta ds = F dr$. Επειδή τώρα το πεδίο που εξετάζουμε είναι σφαιρικά συμμετρικό (όπως και το πεδίο βαρύτητας!), η δύναμη έχει την ίδια τιμή σε όλα τα σημεία μιας σφαιρικής επιφάνειας με κέντρο το Q. Επομένως το στοιχειώδες έργο, το οποίο παράγεται κατά την μετακίνηση από ένα τυχαίο σημείο μιας εξωτερικής σφαιρικής επιφάνειας ακτίνας $(r + dr)$ προς ένα τυχαίο σημείο μιας εσωτερικής (ακτίνας r) είναι για

όλες τις διαδρομές το ίδιο και ίσο προς $(F dr)$. Το ίδιο θα ισχύει και για το ολικό έργο κατά την μακροσκοπική πλέον μετακίνηση από ένα σημείο A (μιας σφαιρικής επιφάνειας ακτίνας r_A) προς ένα σημείο B (μιας σφαιρικής επιφάνειας ακτίνας r_B), μια και θα ισούται με το άθροισμα όλων των στοιχειωδών έργων, τα οποία αντιστοιχούν στα στοιχειώδη τμήματα ds , στα οποία χωρίζεται η τροχιά από το άπειρο πλήθος των ομόκεντρων σφαιρών ακτίνας $\{ r_B, r_B + dr, r_B + 2dr, \dots r_A \}$

Το ηλεκτροστατικό πεδίο οποιασδήποτε κατανομής φορτίων προκύπτει ως γνωστόν υπερθέτοντας απλώς τα πεδία των σημειακών φορτίων, στα οποία μπορούμε να θεωρήσουμε διηρημένη την κατανομή. Επομένως σε κάθε ηλεκτροστατικό πεδίο το παραγόμενο ή δαπανώμενο υπό του πεδίου έργο θα είναι το άθροισμα των έργων, τα οποία παράγονται ή δαπανώνται κατά την ίδια μετακίνηση εντός του πεδίου έκαστου των παραπάνω σημειακών φορτίων χωριστά, δηλαδή ανεξάρτητο από την διαδρομή.

Σημειώνουμε ότι η συντηρητικότητα του ηλεκτροστατικού πεδίου οφείλεται στην σφαιρική συμμετρία

του ηλεκτροστατικού πεδίου ενός σημειακού φορτίου και μόνο. Αυτό σημαίνει, ότι **κάθε σφαιρικά συμμετρικό πεδίο είναι συντηρητικό.**

Συντηρητικά πεδία μπορούν να χαρακτηρισθούν πλήρως με την βοήθεια μιας μονόμετρης (βαθμωτής, όπως αλλιώς λέγεται) συναρτήσεως, του δυναμικού $U(\vec{r})$:

Δυναμικό U_Σ ενός ηλεκτροστατικού πεδίου σε σημείο Σ καλείται το πηλίκο του έργου $W_{\infty \rightarrow \Sigma}^{\text{δαπ.}}$, το οποίο απαιτείται για να μετακινηθεί (συμβατικά θετικό) ηλεκτρικό φορτίο q από το ∞ μέχρι το σημείο Σ , προς το φορτίο q :

$$U_\Sigma = \frac{W_{\infty \rightarrow \Sigma}^{\text{δαπ.}}}{(+q)} \quad [1.13]$$

Εδώ πρέπει να τονίσουμε, ότι το έργο $W_{\infty \rightarrow \Sigma}$ είναι στην περίπτωση του ηλεκτροστατικού πεδίου ανεξάρτητο από την συγκεκριμένη διαδρομή, επειδή ακριβώς το ηλεκτροστατικό πεδίο είναι *συντηρητικό*. Στην περίπτωση μη συντηρητικών πεδίων το «δυναμικό» U_Σ , όπως και το έργο $W_{\infty \rightarrow \Sigma}$ εξαρτάται από την διαδρομή και όχι μόνο από την θέση του σημείου Σ . Επομένως για ένα και το αυτό σημείο θα είχαμε άπειρα «δυναμικά», οπότε δεν θα μπορούσαμε να χαρακτηρίσουμε το πεδίο μονοσήμαντα.

Όσον αφορά την **επιλογή του απείρου (∞) ως σημείου αναφοράς**, θα πρέπει να έχουμε υπ' όψη μας, ότι **είναι καθαρά συμβατική.**

Το έργο $W_{\infty \rightarrow \Sigma}^{\text{δαπ.}}$, το οποίο απαιτείται (προσφέρεται δηλαδή από κάποια εξωτερική δύναμη) προκειμένου να μετακινηθεί η μονάδα του θετικού φορτίου από το ∞ μέχρι το σημείο Σ , αποταμιεύεται υπό μορφή δυναμικής ενέργειας του εν λόγω φορτίου, η οποία ξαναδίνει ισόποσο έργο κατά την μετακίνηση του φορτίου κάτω από την επίδραση του πεδίου πλέον από το σημείο Σ μέχρι το ∞ . Επομένως **δυναμικό U_Σ ενός ηλεκτροστατικού πεδίου σε ένα σημείο Σ καλείται η δυναμική ενέργεια, την οποία κατέχει η θετική μονάδα φορτίου στο σημείο Σ και (συμβατικά) σε σχέση με το ∞ , δηλαδή το έργο το οποίο παράγεται υπό του πεδίου κατά την μετακίνηση της θετικής μονάδας φορτίου από το σημείο Σ ως το ∞ :**

$$U_\Sigma = \frac{E_{\text{δυν.}\Sigma}}{(+q)} = \frac{W_{\infty \rightarrow \Sigma}^{\text{δαπ.}}}{(+q)} \quad [1.13\alpha]$$

Έστω τώρα ότι το σημείο Σ βρίσκεται εντός ηλεκτροστατικού πεδίου, του οποίου η ένταση \vec{E} είναι τυχαία συνάρτηση του χώρου. Προκειμένου να μετακινήσουμε ένα θετικό φορτίο q από το ∞ μέχρι κάποιο σημείο Σ κατά μήκος μιας τυχαίας διαδρομής, πρέπει να ασκείται επί του φορτίου δύναμη $\vec{F}_{\text{εξ}}$ ίση και αντίθετη προς την δύναμη \vec{F} , την οποία ασκεί το πεδίο επί του φορτίου σε κάθε σημείο της διαδρομής (βλ. σχ. 1.15). Η δύναμη αυτή προσφέρει κατά την στοιχειώδη μετατόπιση $d\vec{s}$ στο φορτίο q το στοιχειώδες έργο $dW = \vec{F}_{\text{εξ}} \cdot d\vec{s} = -\vec{F} \cdot d\vec{s} = -q\vec{E} \cdot d\vec{s}$. Επομένως το ολικό έργο, το οποίο προσφέρεται στο

φορτίο q κατά την μετατόπιση από το ∞ μέχρι το σημείο Σ , θα είναι:

$$W_{\infty \rightarrow \Sigma}^{\delta\alpha\pi.} = \int_{\infty}^{\Sigma} \vec{F}_{\epsilon\epsilon} d\vec{s} = - \int_{\infty}^{\Sigma} \vec{F} d\vec{s} \Rightarrow U_{\Sigma} = \frac{W_{\infty \rightarrow \Sigma}^{\delta\alpha\pi.}}{(+q)} = - \int_{\infty}^{\Sigma} \vec{E} d\vec{s} \quad [1.14]$$

Το αρνητικό πρόσημο στην παραπάνω σχέση είναι συμβατικό, και μας δείχνει πως στην περίπτωση που η μετακίνηση γίνει στην κατεύθυνση της έντασης $\vec{E} (d\vec{s} \uparrow \vec{E} \Rightarrow \cos(\vec{d\vec{s}}, \vec{E}) = 1)$ κάθε άλλο παρά απαιτείται έργο.

1.7.1 Πρακτικός υπολογισμός του δυναμικού

Η εξίσωση [1.14] μας επιτρέπει βέβαια να υπολογίσουμε το δυναμικό οποιοδήποτε σημείου ενός ηλεκτροστατικού πεδίου, όταν είναι γνωστή η ένταση του σε όλα τα σημεία του χώρου. Στην πράξη όμως σπάνια χρησιμοποιούμε αυτόν τον τρόπο υπολογισμού του δυναμικού (ουσιαστικά μόνο όταν ο υπολογισμός της έντασης του πεδίου είναι απλός, όπως σε περιπτώσεις συμμετρικής κατανομής φορτίου), θα ήταν άλλωστε παράδοξο, από την μια να εισάγουμε ένα μονόμετρο μέγεθος (το δυναμικό) προκειμένου να απλοποιήσουμε τα πράγματα και από την άλλη να πρέπει να υπολογίσουμε πρώτα, το διανυσματικό εκείνο μέγεθος (την ένταση) το οποίο ουσιαστικά θέλαμε να αποφύγουμε.

Είναι λοιπόν θέμα ουσίας να προσπαθήσουμε να αναπτύξουμε μεθόδους, οι οποίες θα μας επιτρέπουν την απ' ευθείας εύρεση του δυναμικού. Στην προσπάθεια μας αυτή θα ξεκινήσουμε φυσικά από την απλούστερη δυνατή περίπτωση, το

α) δυναμικό οφειλόμενο σε ένα σημειακό φορτίο: Λόγω της σφαιρικής συμμετρίας του πεδίου, το οποίο εξετάζουμε, το δυναμικό ενός τυχαίου σημείου θα εξαρτάται προφανώς από την απόσταση του και μόνο από το σημειακό φορτίο. Για τον λόγο αυτό θα το συμβολίζουμε σαν U_r .

Σχήμα 1.15: Υπολογισμός του δυναμικού εντός του πεδίου ενός σημειακού φορτίου.

Σύμφωνα τώρα με την εξίσωση [1.14] έχουμε:

$$U_r = \frac{W_{\infty \rightarrow r}^{\delta\alpha\pi.}}{(+q)} = - \int_{\infty}^r \vec{E} d\vec{s} \stackrel{[1.2] \& [1.3]}{=} - \int_{\infty}^r \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r} \right) d\vec{s} =$$

$$= - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{\hat{r}}{r^2} d\vec{s} = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{|\hat{r}| \cos(\hat{r}, d\vec{s})}{r^2} ds \quad \begin{matrix} |\hat{r}| = 1 \\ \cos(\hat{r}, d\vec{s}) = -1 \end{matrix} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{ds}{r^2} = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^2} =$$

$$= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{\infty}^r \Rightarrow U_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$

: **δυναμικό σημειακού φορτίου Q σε απόσταση r από το φορτίο**

Στην παραπάνω εξίσωση το φορτίο Q λαμβάνεται μαζί με το πρόσημο του. Στην περίπτωση δηλαδή ενός αρνητικού φορτίου το δυναμικό είναι αρνητικό. Αυτό σημαίνει πως η μετακίνηση ενός θετικού φορτίου από το ∞ (= συμβατικό σημείο αναφοράς) μέχρι κάποιο τυχαίο σημείο, ευρισκόμενο σε απόσταση r από το φορτίο Q, κάθε άλλο παρά απαιτεί έργο, με την προϋπόθεση βέβαια ότι δεν επιδρούν άλλα φορτία εκτός του Q.

B) δυναμικό οφειλόμενο σε ομάδα σημειακών φορτίων Q_i: Σύμφωνα με την γνωστή μας αρχή της γραμμικής υπερθέσεως (βλ. κεφ.1.2), το δυναμικό U σε κάποιο σημείο του χώρου ισούται με το άθροισμα των δυναμικών των μεμονωμένων φορτίων στο εν λόγω σημείο:

$$U = \sum_{i=1}^N U_i \stackrel{[1.15]}{=} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{r_i} \quad [1.16]$$

Όπου N = συνολικός αριθμός των φορτίων Q_i

r_i = απόσταση του εξεταζόμενου φορτίου από το φορτίο Q_i

γ) δυναμικό οφειλόμενου σε συνεχή κατανομή φορτίου: υπολογισμός του δυναμικού στην

περίπτωση αυτή είναι ανάλογος με εκείνον της έντασης του πεδίου της συνεχούς κατανομής (βλ. κεφ.1.6): θεωρούμε τον χώρο (ή την επιφάνεια, ή την γραμμή) κατανομής του γενεσιουργού φορτίου χωρισμένο σε μικρές κυψελίδες dV (ή επιφανειακά στοιχεία dS, ή γραμμικά τμήματα dl), έκαστη των οποίων περιέχει φορτίο dQ, το οποίο στο σημείο Σ δημιουργεί το στοιχειώδες δυναμικό dU) (βλ. σχ.1.16), το οποίο υπολογίζεται από την σχέση [1.15]. Το ολικό δυναμικό U στο συγκεκριμένο σημείο υπολογίζεται στην συνέχεια αθροίζοντας (ουσιαστικά ολοκληρώνοντας) τα στοιχειώδη δυναμικά όλων των στοιχειωδών φορτίων της κατανομής:

$$dU = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho dV}{r} \Rightarrow U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho}{r} dV \quad [1.17]$$

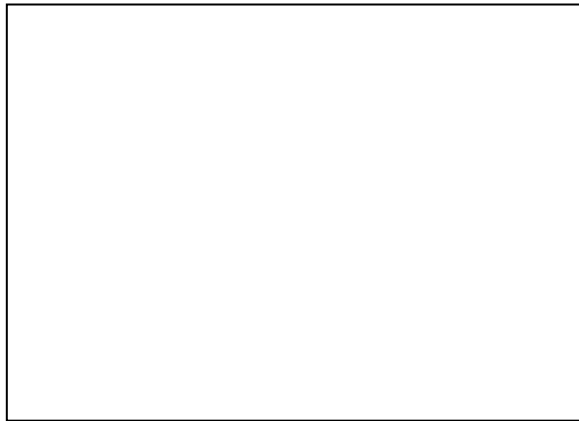
Σχήμα 1.16: Υπολογισμός του δυναμικού

(αν το φορτίο κατανέμεται επιφανειακά (ή γραμμικά), αντικαθιστούμε την πυκνότητα φορτίου $\rho=dq/dV$ με την επιφανειακή πυκνότητα φορτίου $\sigma=dq/dS$ (ή γραμμική πυκνότητα φορτίου $\lambda = dq/dl$), και το στοιχείο όγκου dV με το στοιχείο επιφανείας dS (ή μήκους dl)).

Αν συγκρίνουμε την παραπάνω σχέση [1.17] με την αντίστοιχη ([1.12]) για τον υπολογισμό της έντασης του πεδίου, θα δούμε ότι, πέραν του γεγονότος πως στον ολοκληρωτέο της [1.12] εμφανίζεται το τετράγωνο της απόστασης r , ο ολοκληρωτέος της [1.12] είναι διανυσματικό, ενώ της [1.17] μονόμετρο μέγεθος. Ο υπολογισμός λοιπόν του δυναμικού είναι αισθητά απλούστερος από εκείνον της έντασης, πράγμα βέβαια λογικό εξ αιτίας της διαφοράς που μόλις αναφέραμε. Το παράδειγμα που ακολουθεί θα μας το αποδείξει και έμπρακτα:

Παράδειγμα 1.7.1.1: Να υπολογισθεί το δυναμικό στα σημεία του άξονα φορτισμένου με φορτίο q δακτυλίου, ακτίνας R και αμελητέου πάχους.

Λύση:



Σχήμα Π 1.7.1.1: Υπολογισμός του δυναμικού φορτισμένου δακτυλίου.

Το δυναμικό υπολογίζεται από την σχέση [1.17], όπως αυτή γράφεται για γραμμική κατανομή φορτίου, μια και ο δακτύλιος έχει αμελητέο πάχος:

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi R} \frac{\lambda}{r} dl \quad \{1\}$$

Η γραμμική πυκνότητα φορτίου είναι $\lambda = q/(2\pi R)$, μια και το φορτίο θεωρείται ομοιόμορφα κατανεμημένο, εξάλλου η απόσταση r δεν εξαρτάται από το στοιχείο dl (βλ. σχ. Π 1.7.1.1), οπότε η {1} γράφεται,

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{2\pi R} \frac{1}{r} \int_0^{2\pi R} dl = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{2\pi R} \frac{1}{r} (2\pi R) \quad r = (x^2 + R^2)^{1/2} \quad \Rightarrow \quad U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(x^2 + R^2)^{1/2}}$$

Ο υπολογισμός του δυναμικού είναι ασύγκριτα ευκολότερος από εκείνον της έντασης, τον οποίο είδαμε στο Παράδειγμα 1.6.1.

Αφού βεβαιωθήκαμε πλέον, ότι ο υπολογισμός του δυναμικού είναι ευκολότερος από εκείνον της έντασης (βλ. παράδειγμα 1.7.1.1), απομένει να δούμε, αν πράγματι μπορούμε να περιγράψουμε τα συμβαίνοντα σ' ένα ηλεκτροστατικό πεδίο με την βοήθεια του δυναμικού εξίσου καλά, όπως μέσω της έντασης του. Είναι δε προφανές, ότι η δυνατότητα υπολογισμού της έντασης από το δυναμικό θα διέλυε κάθε μας αμφιβολία περί αυτού, γι' αυτό και θα την εξετάσουμε ευθύς αμέσως.

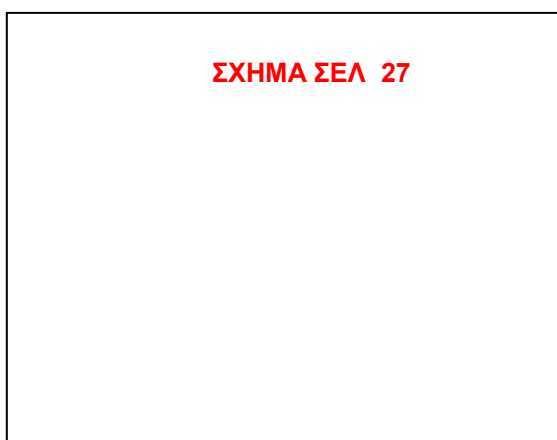
1.8 Υπολογισμός της έντασης του ηλεκτροστατικού πεδίου από το δυναμικό του

Από μαθηματική άποψη το δυναμικό είναι απλώς ένα μονόμετρο (αριθμητικό) μέγεθος, του οποίου η τιμή μεταβάλλεται σε συνάρτηση από τον τόπο: $U = U(x,y,z)$.

Έστω $U = U(x,y,z)$ και $U = U(x+dx,y+dy,z+dz)$ οι τιμές του δυναμικού σε δύο γειτονικά σημεία (x,y,z) και $(x+dx,y+dy,z+dz)$ αντίστοιχα. Η μεταβολή ΔU της τιμής του δυναμικού U μεταξύ των δύο αυτών σημείων ισούται με τυχαία προσέγγιση με το λεγόμενο πλήρες διαφορικό dU της συνάρτησης U (βλ. χ. 1.16):

$$\Delta U = U(x+dx, y+dy, z+dz) - U(x, y, z) = dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \quad [1.18]$$

Γεωμετρική σημασία του πλήρους διαφορικού



ΣΧΗΜΑ ΣΕΛΑ 27

"E": εφαπτομενικό επίπεδο της επιφάνειας $f(x,y)$ στο σημείο (x,y)

Από το διπλανό σχήμα φαίνεται ότι

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} [\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)] = f(x_0 + dx, y_0 + dy) - f(x_0, y_0) \equiv df$$

(Στο παραπάνω σχήμα βέβαια το Δf είναι πολύ μεγαλύτερο του df , επειδή χάριν ευκρίνειας παραστήσαμε το dx και dy πολύ μεγάλα, ενώ στην πραγματικότητα τα μεγέθη αυτά είναι απειροστά)

$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$: μερική παράγωγος της συνάρτησης $f(x,y)$ ως προς x και y αντίστοιχα

Προς υπενθύμιση: Κατά την μερική παραγωγή ως προς μια μεταβλητή οι υπόλοιπες μεταχειρίζονται ως σταθερές:

$$\text{Π.χ. } f(x, y) = 2xy^2 + 3y : \frac{\partial f}{\partial x} = 2y^2, \frac{\partial f}{\partial y} = 2 \cdot 2xy + 3$$

Σχήμα 1.16: Γεωμετρική σημασία του πλήρους διαφορικού στην περίπτωση συναρτήσεως δύο μεταβλητών, η οποία ως γνωστόν παριστάνεται γραφικά σαν μία επιφάνεια στον χώρο ή καλύτερα σε ένα τριαξονικό σύστημα συντεταγμένων.

Η μεταβολή του δυναμικού μεταξύ των σημείων A και B, στα οποία έχει τις τιμές $U_A = U(x_A, y_A, z_A)$ και $U_B = U(x_B, y_B, z_B)$ αντίστοιχα, δίδεται κατά συνέπεια από την ακόλουθη σχέση, η οποία αποτελεί χαρακτηριστική ιδιότητα των τελείων (= πλήρων) διαφορικών:

$$\int_A^B dU = U_B - U_A \Leftrightarrow \oint dU = 0 \quad [1.19]$$

Για το δυναμικό, και γενικότερα για κάθε άλλο μονόμετρο πεδίο (= μονόμετρο μέγεθος του οποίου η τιμή είναι συνάρτηση του τόπου), μπορούμε να ορίσουμε ένα διανυσματικό πεδίο την λεγόμενη **βαθμίδα** του $gradU \equiv \nabla U$, ως εξής:

:ορισμός της βαθμίδας του δυναμικού	$gradU \equiv \nabla U = \frac{\partial U}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial U}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial U}{\partial z} \hat{z}$	[1.20]
--	---	--------

όπου $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ = μοναδιαία διανύσματα κατά μήκος των αξόνων x, y και z αντίστοιχα.

$$\nabla \equiv \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \text{ : Διανυσματικός διαφορικός τελεστής Nabla}$$

Η βαθμίδα του δυναμικού είναι επομένως το δiάνυσμα εκείνο, του οποίου οι τρεις συνιστώσες, $(\nabla U)_x, (\nabla U)_y$ και $(\nabla U)_z$, έχουν μέτρο ίσο με εκείνο των μερικών παραγώγων $\partial U / \partial x, \partial U / \partial y$ και $\partial U / \partial z$ στο σημείο για το οποίο υπολογίζεται η βαθμίδα, αντίστοιχα.

Η φυσική τώρα υπόσταση της βαθμίδας του δυναμικού γίνεται εμφανής με τον ακόλουθο τρόπο:

Έστω ότι υπολογίζουμε την βαθμίδα ∇U του δυναμικού U σε κάποιο σημείο Σ και την πολλαπλασιάζουμε διανυσματικά με την στοιχειώδη μετατόπιση $d\vec{s}$ (βλ. σχ. 1.17):



$d\vec{s} = dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z}$: **στοιχειώδης μετατόπιση** με σημείο εκκίνησης το Σ.

(Επειδή οι διανυσματικές συντεταγμένες dx, dy και dz δεν πρέπει να είναι υποχρεωτικά ίσες, το δiάνυσμα ds έχει τυχαίο προσανατολισμό)

Σχήμα 1.17: Για την φυσική υπόσταση της βαθμίδας.

$$\nabla U \cdot d\vec{s} = \left(\frac{\partial U}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial U}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial U}{\partial z} \hat{z} \right) \cdot (dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z}) \stackrel{\hat{x} \perp \hat{y} \perp \hat{z}}{=} \frac{\partial U}{\partial x} x + \frac{\partial U}{\partial y} y + \frac{\partial U}{\partial z} z$$

$$\begin{aligned} [1.18] \\ \Rightarrow \nabla U \cdot d\vec{s} = dU \{1\} \quad d\vec{s} = ds \cdot \hat{s} \\ \Rightarrow \nabla U \cdot ds \cdot \hat{s} = dU \Rightarrow \underline{\underline{\frac{dU}{ds} = \hat{s} \cdot \nabla U}} \quad [1.21] \end{aligned}$$

Το γινόμενο $\hat{s} \cdot \nabla U$ ισούται, όπως βλέπουμε, με την μεταβολή του δυναμικού σε συνάρτηση από την μετατόπιση στην διεύθυνση \hat{s} και καλείται κατευθυνόμενη παράγωγος.

Το γινόμενο $\hat{s} \cdot \nabla U$ γίνεται, όπως ξέρουμε, μέγιστο, όταν τα διανύσματα \hat{s} και ∇U γίνουν \parallel και ομόρροπα, όταν δηλαδή η διεύθυνση και φορά της μετατόπισης \hat{s} συμπίπτει με αυτήν της βαθμίδας ∇U . Επομένως

Η βαθμίδα του δυναμικού είναι ένα διάνυσμα, το οποίο κατευθύνεται προς την περιοχή μέγιστης (ανά μονάδα μήκους) αύξησης του δυναμικού, ίσης προς την απόλυτη τιμή της βαθμίδας.

$$\text{Από την σχέση [1.14] ξέρουμε εξάλλου, ότι} \quad dU = -\vec{E}d\vec{s} = \nabla U d\vec{s} \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{\Rightarrow \vec{E} = -\nabla U \equiv -gradU}} \quad [1.22]$$

Το αρνητικό πρόσημο στην παραπάνω σχέση δείχνει, ότι η ένταση \vec{E} του ηλεκτροστατικού πεδίου κατευθύνεται προς το σημείο μέγιστης ελάττωσης και όχι αύξησης του δυναμικού,

Σύμφωνα λοιπόν με την σχέση [1.22]

Η ένταση \vec{E} του ηλεκτροστατικού πεδίου σε κάποιο σημείο του χώρου είναι ένα διάνυσμα, με φορά την κατεύθυνση μέγιστης (ανά μονάδα μήκους) ελάττωσης του ηλεκτροστατικού δυναμικού U , ίσης με την απόλυτη τιμή της έντασης \vec{E} .

Κλείνοντας την ενότητα υπολογισμού του πεδίου από το δυναμικό, παραθέτουμε μερικούς πολύ χρήσιμους κανόνες υπολογισμού της βαθμίδας, η απόδειξη των οποίων βρίσκεται σε όλα τα εξειδικευμένα εγχειρίδια της Διανυσματικής Ανάλυσης:

Κανόνες υπολογισμού της βαθμίδας
 $\alpha, \beta =$ σταθερές, $\phi, \psi =$ μονόμετρα πεδία (συνεχόμενα παραγωγίσιμα)

$$\text{grad } \alpha = 0 \quad \text{grad } (\alpha \phi + \beta \psi) = \alpha \text{ grad } \phi + \beta \text{ grad } \psi \quad \text{grad } (\phi \psi) = \phi \text{ grad } \psi + \psi \text{ grad } \phi$$

$$\text{grad } (\phi(\psi)) = (d\phi / d\psi) \text{ grad } \psi \quad \text{grad } U(r) = (dU / dr) \quad U(r) = \text{κεντρικό πεδίο}$$

(η τιμή του εξαρτάται

μόνο από την απόσταση r από κάποιο σημείο, το κέντρο του).

\hat{r} = μοναδιαίο διάνυσμα με κατεύθυνση από το κέντρο του πεδίου προς το σημείο που εξετάζουμε.

Παρατήρηση: Η βαθμίδα ενός μονόμετρου πεδίου ϕ (το οποίο είναι συνεχόμενα παραγωγίσιμο, όπως λένε τα «ψιλά γράμματα» των Μαθηματικών) είναι πάντα ένα διανυσματικό, συντηρητικό πεδίο, επειδή, όπως είδαμε ($\{1\}$), ισχύει

$$\int_A^B \nabla \phi \cdot d\vec{s} = \int_A^B d\phi = \phi(B) - \phi(A)$$

Αυτό όμως δεν σημαίνει πως και κάθε διανυσματικό πεδίο μπορεί να γραφεί σαν βαθμίδα ενός μονόμετρου πεδίου, πως δηλαδή είναι συντηρητικό!

Παράδειγμα 1.8.1: Να υπολογισθεί η ένταση του πεδίου στα σημεία του άξονα φορτισμένου με φορτίο q δακτυλίου, ακτίνας R και αμελητέου πάχους, όταν ξέρουμε ότι το δυναμικό αυτών των σημείων

$$\text{ισούται με } U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(x^2 + R^2)^{1/2}} \quad (\text{βλ. σχ. Π. 1.8.1}).$$

Λύση:

Η ένταση \vec{E} υπολογίζεται απ' ευθείας από το δυναμικό U σύμφωνα με την σχέση [1.22]:

$$\vec{E} = -\text{grad}U \quad \{1\}$$

Παίρνοντας υπόψη, ότι για τα σημεία του άξονα του δακτυλίου το πεδίο είναι κεντρικό, μια και εξαρτάται μόνο από την απόστασή τους x από το κέντρο του άξονα, αντικαθιστούμε το U και υπολογίζουμε:

Σχήμα Π 1.8.1: Υπολογισμός του πεδίου φορτισμένου δακτυλίου.

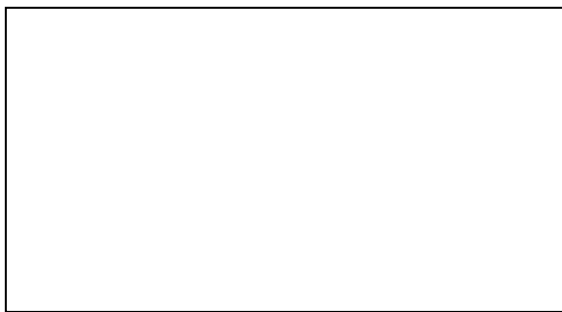
$$\vec{E} = -gradU(x) = \frac{dU}{dx} \hat{x} = -\frac{d}{dx} \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(x^2 + R^2)^{1/2}} \right] \hat{x} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{2} (x^2 + R^2)^{-3/2} \right) \cdot (2x) \hat{x} \Rightarrow$$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \hat{x}$$

Πρόκειται φυσικά για το αποτέλεσμα του παραδείγματος Π 1.6.1. Η σύγκριση όμως του εδώ και εκεί εφαρμοσθέντος τρόπου υπολογισμού συνιστάται αυστηρώς, μια και αποκαλύπτει την σχέση μεταξύ έντασης και δυναμικού στην περίπτωση μιας συγκεκριμένης και απτής κατανομής φορτίου.

Παράδειγμα 1.8.2: Να υπολογισθεί το δυναμικό και στην συνέχεια η ένταση του πεδίου σε όλα τα σημεία του άξονα λεπτού, ομοιόμορφα φορτισμένου, μονωτικού δίσκου ακτίνας R και φορτίου q. (Αν ο δίσκος δεν είναι μονωτικός δεν θα είναι ομοιόμορφα φορτισμένος).

Το δυναμικό υπολογίζεται από την σχέση [1.7], όπως αυτή γράφεται για επιφανειακή πυκνότητα φορτίου, μια και ο δίσκος έχει αμελητέο πάχος: $U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma}{r} dS$ {1}



Σαν στοιχείο επιφάνειας επιλέγουμε δακτύλιο ακτίνας l και πάχους dl (βλ. σχ. Π1.8.2), οπότε έχουμε $dS = 2\pi l dl$. Επειδή εξάλλου η επιφανειακή πυκνότητα σ θεωρείται σταθερή, η σχέση { 1 } παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$U = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{2\pi dl}{r} \quad r = (x^2 + l^2)^{1/2}$$

Σχήμα Π 1.8.2: Υπολογισμός του δυναμικού και του πεδίου λεπτού, μονωτικού δίσκου.

$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{l}{\sqrt{x^2 + l^2}} dl =$$

$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{x^2 + l^2} \right]_0^R \Rightarrow \quad U = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{x^2 + R^2} - x \right) \quad \{2\}$$

Η ένταση \vec{E} υπολογίζεται απ' ευθείας από το δυναμικό U σύμφωνα με την σχέση [1.22]:

$$\vec{E} = -gradU \quad \{3\}$$

Παίρνοντας υπόψη, ότι για τα σημεία του άξονα του δίσκου το πεδίο είναι κεντρικό, μια και εξαρτάται μόνο από την απόστασή τους x από το κέντρο του άξονα, αντικαθιστούμε το U και υπολογίζουμε:

$$\vec{E} = -gradU(x) = \frac{dU}{dx} \hat{x} = -\frac{d}{dx} \left[\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left((x^2 + R^2)^{1/2} - x \right) \right] \hat{x} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\left(\frac{1}{2} (x^2 + R^2)^{-1/2} \cdot 2x \right) - 1 \right] \hat{x} \Rightarrow$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - x(x^2 + R^2)^{-1/2} \right] \hat{x}$$

1.9 Διαφορά δυναμικού (ή τάση)

Στην πράξη δεν ενδιαφερόμαστε για το δυναμικό (το οποίο ούτως ή άλλως ορίζεται σε σχέση με κάποιο αυθαίρετο σημείο), αλλά για τις διαφορές δυναμικού:

ΣΧΗΜΑ ΣΕΛ 31

Διαφορά δυναμικού (ή τάση) μεταξύ δύο σημείων καλείται η διαφορά των δυναμικών των δύο αυτών σημείων:

$$\begin{aligned}
 & \text{ανεξαρτησία του έργου} \\
 & \text{από την διαδρομή} \\
 [1.14] \quad V_{AB} \equiv U_B - U_A &= \frac{W_{\infty \rightarrow B}^{\delta\alpha\pi.}}{q} - \frac{W_{\infty \rightarrow A}^{\delta\alpha\pi.}}{q} = \\
 & = \left[\frac{W_{\infty \rightarrow A}^{\delta\alpha\pi.}}{q} - \frac{W_{A \rightarrow B}^{\delta\alpha\pi.}}{q} \right] - \frac{W_{\infty \rightarrow A}^{\delta\alpha\pi.}}{q} \Rightarrow \underline{V_{BA} \equiv U_B - U_A = \frac{W_{A \rightarrow B}^{\delta\alpha\pi.}}{q}} \quad [1.23]
 \end{aligned}$$

Επομένως η διαφορά δυναμικού $V_{BA} \equiv U_B - U_A$ μεταξύ δύο σημείων A και B ισούται με το έργο που απαιτείται προκειμένου να μετακινηθεί η μονάδα του θετικού φορτίου από το σημείο A μέχρι το B.

Με την βοήθεια της [1.14] η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$\underline{V_{BA} \equiv U_B - U_A = - \int_A^B \vec{E} ds} \quad [1.23\alpha]$$

Από την σχέση αυτή φαίνεται πως αν η μετακίνηση γίνει κατά την διεύθυνση του πεδίου, η διαφορά $V_{BA} \equiv U_B - U_A$ είναι αρνητική, δηλαδή πως $U_B < U_A$. Θετικά φορτία μετακινούνται όπως γνωρίζουμε, κατά την φορά του πεδίου, άρα κατά την φορά μειωμένου δυναμικού:

τα θετικά φορτία κινούνται πάντα προς τα σημεία με μικρότερο, τα αρνητικά προς τα σημεία με μεγαλύτερο δυναμικό, (όταν βέβαια επάνω τους επιδρά το ηλεκτροστατικό πεδίο και μόνο).

1.10 Ισοδυναμικές επιφάνειες

Ισοδυναμικές καλούνται οι επιφάνειες, των οποίων όλα τα σημεία έχουν το ίδιο δυναμικό.

Οι ισοδυναμικές επιφάνειες στην περίπτωση ενός σημειακού φορτίου Q, για παράδειγμα υπολογίζονται από την σχέση [1.15]:

$$U_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} = \text{σταθ.} \Rightarrow r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \text{σταθ.}}$$

Στην περίπτωση ενός σημειακού φορτίου οι ισοδυναμικές επιφάνειες είναι σφαιρικές με κέντρο το σημειακό φορτίο.

Η μετακίνηση ενός σημειακού φορτίου επάνω σε οποιαδήποτε ισοδυναμική επιφάνεια ούτε παράγει ούτε απαιτεί έργο και μάλιστα εξ ορισμού. Αυτό σημαίνει αυτομάτως, ότι η ένταση του πεδίου σε όλα τα σημεία της εν λόγω επιφάνειας δεν έχει παράλληλη (εφαπτομενική) προς την επιφάνεια συνιστώσα. Άρα

Η ένταση \vec{E} του πεδίου είναι κάθετη σε όλα τα σημεία μιας ισοδυναμικής επιφάνειας.

Επομένως

Οι δυναμικές γραμμές διαπερνούν κάθετα τις ισοδυναμικές επιφάνειες.

1.10 Αγωγοί μέσα σε ηλεκτροστατικό πεδίο

Όπως αναφέραμε ήδη στο κεφάλαιο 1.2, η ύλη συνδέεται αναπόσπαστα με την ύπαρξη ηλεκτρικών φορτίων, εμφανίζεται δε συχνά ως ηλεκτρικά ουδέτερη, απλώς και μόνο επειδή περιέχει τον ίδιο αριθμό θετικών και αρνητικών φορτίων.

Χωρίς, στο σημείο αυτό, να μας ενδιαφέρει ποιοι ακριβώς είναι οι φορείς του ηλεκτρικού

φορτίου στην ύλη, σημειώνουμε, ότι ήδη οι πρώτες εμπειρίες των ανθρώπων με τον ηλεκτρισμό έδειξαν μια διαφοροποίηση στην συμπεριφορά των διαφόρων υλικών, η οποία οδήγησε τελικά στην κατάταξη τους στις ακόλουθες τρεις κατηγορίες:

α) Αγωγοί καλούνται τα υλικά, τα οποία επιτρέπουν την εύκολη μετακίνηση ηλεκτρικών φορτίων μέσα από την μάζα τους. Στην κατηγορία ανήκουν π.χ. τα μέταλλα, τα ιονισμένα αέρια, ανθρώπινοι και ζωικοί ιστοί, ηλεκτρολυτικά διαλύματα οξέων, βάσεων και αλάτων, τήγματα αλάτων, νερό.

β) Μονωτές καλούνται τα υλικά, τα οποία δεν επιτρέπουν την εύκολη μετακίνηση των ηλεκτρικών φορτίων μέσα στην μάζα τους. Μονωτές είναι για παράδειγμα το γυαλί, τα πλαστικά, η πορσελάνη, το καουτσούκ, το (στεγνό) χαρτί και ξύλο, διάφορα λιπαντικά.

γ) Ημιαγωγοί καλούνται τέλος τα υλικά μιας ενδιάμεσης κατηγορίας, των οποίων η αγωγιμότητα επηρεάζεται σημαντικά από διάφορους εξωτερικούς παράγοντες. Τέτοιος είναι π.χ. η θερμοκρασία, είναι δε χαρακτηριστικό, ότι η αγωγιμότητα των ημιαγωγών αυξάνει με αυξανόμενη θερμοκρασία. Οι γνωστότεροι ημιαγωγοί είναι το Γερμάνιο (Ge) και το Πυρίτιο (Si). Η αγωγιμότητα των υλικών αυτών μεταβάλλεται δραστικά με την ενσωμάτωση μικρών ποσοτήτων Βορίου (B) και Αρσενίου (As) και μάλιστα κατά τρόπο απόλυτα ελεγχόμενο. Το γεγονός αυτό βρίσκει εφαρμογή στην κατασκευή τόσο μεμονωμένων ηλεκτρονικών στοιχείων, όπως οι κρυσταλλοτρίοδοι (transistors), όσο και των γνωστών μας ολοκληρωμένων κυκλωμάτων, τα οποία οδήγησαν στην επανάσταση των ηλεκτρονικών υπολογιστών (computers).

Η εξήγηση της διαφορετικής συμπεριφοράς των υλικών, τα οποία ανήκουν στις τρεις παραπάνω κατηγορίες, βρίσκεται στην δομή τους: Χωρίς να μπορούμε σε λεπτομέρειες μπορούμε να πούμε, ότι αγωγοί είναι εκείνα τα υλικά, τα οποία διαθέτουν ευκίνητους φορείς ηλεκτρικού φορτίου, μονωτές εκείνα τα οποία δεν διαθέτουν, και ημιαγωγοί εκείνα στα οποία ο αριθμός ευκίνητων φορέων επηρεάζεται αποφασιστικά από τις εξωτερικές συνθήκες.

Η αγωγιμότητα των μετάλλων, επί παραδείγματι, οφείλεται στην ύπαρξη των λεγομένων ελευθέρων ηλεκτρονίων. Πρόκειται για τα εξωτερικά ηλεκτρόνια των ατόμων (ηλεκτρόνια σθένους), τα οποία κινούνται μέσα σε όλη την μάζα του μετάλλου σχηματίζοντας το λεγόμενο ηλεκτρονικό νέφος. Ελεύθερα ηλεκτρόνια δημιουργούν και την αγωγιμότητα των καθαρών (χωρίς προσμίξεις) ημιαγωγών σε υψηλές θερμοκρασίες. Η αγωγιμότητα των ηλεκτρολυτών πηγάζει από την δυνατότητα μετακίνησης θετικών και αρνητικών ιόντων.

Ο αριθμός των ευκίνητων φορέων ανά μονάδα όγκου ποικίλει σημαντικά από υλικό σε υλικό. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα οι τιμές της αγωγιμότητας να καλύπτουν όλη την κλίμακα μεταξύ των καλύτερων αγωγών και του τέλει μονωτή, του κενού. Θα πρέπει λοιπόν να ξεκαθαρίσουμε, ότι τα επόμενα ισχύουν για « καλούς » αγωγούς, των οποίων η αγωγιμότητα είναι της ίδιας τάξεως με εκείνη των μετάλλων.

Ας δούμε τώρα τα συμβαίνοντα σε έναν τέτοιο αγωγό, όταν αυτός βρίσκεται σε κατάσταση ηλεκτροστατικής ισορροπίας, όταν δηλαδή δεν έχουμε κατευθυνόμενη κίνηση φορτίων στο εσωτερικό του. (Τόσο τα ελεύθερα ηλεκτρόνια των μετάλλων όσο και τα ιόντα των ηλεκτρολυτών κινούνται φυσιολογικά στατιστικά, δηλαδή άτακτα, και ακατάπαυστα. Στην περίπτωση

όμως που επιδράσει κάποιο εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο, η κίνηση των ηλεκτρονίων παύει να είναι καθαρά στατιστική και αποκτά μια συνιστώσα προς την διεύθυνση του πεδίου: γίνεται κατευθυνόμενη.)

Αυτομάτως βγαίνει το συμπέρασμα, ότι **το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό ενός αγωγού, ο οποίος βρίσκεται σε κατάσταση ηλεκτροστατικής ισορροπίας, είναι μηδέν**. Διαφορετικά οι ευκίνητοι φορείς (π.χ. τα ελεύθερα ηλεκτρόνια των μετάλλων) θα έπρεπε να κινούνται. (Όταν μιλάμε για πεδίο στο εσωτερικό του αγωγού, εννοούμε την μέση του τιμή σε μικροσκοπική κλίμακα έχουμε πολύ ισχυρά πεδία, των οποίων η τιμή μεταβάλλεται δραματικά από σημείο σε σημείο). Σημειωτέον δε, ότι η παραπάνω πρόταση ισχύει, είτε πρόκειται για φορτισμένο, είτε για αφόρτιστο αγωγό, και ανεξάρτητα από το αν υπάρχουν ή όχι πεδία στο εξωτερικό του.

Τα συμπεράσματα, τα οποία βγαίνουν από τα παραπάνω έχουν αποφασιστική σημασία για τις εφαρμογές, οπότε δικαιολογείται να τα δούμε κάπως αναλυτικά:

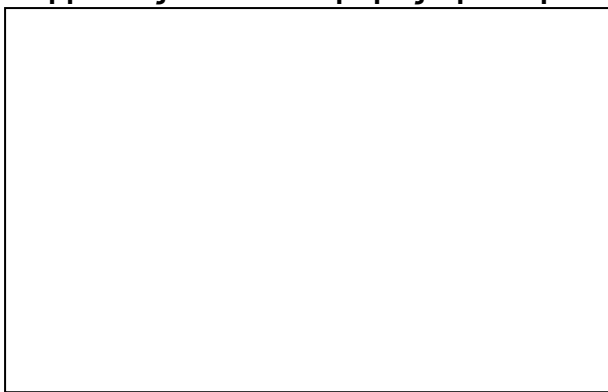


— Αφού η μετακίνηση ενός φορτίου από το τυχαίο σημείο Α της επιφάνειας προς το τυχαίο σημείο Β του εσωτερικού του αγωγού, καθώς και η μετακίνηση από το Β προς το τυχαίο σημείο Γ της επιφάνειας δεν απαιτεί έργο, λόγω μηδενισμού της έντασης στο εσωτερικό του αγωγού, τα τρία αυτά σημεία θα έχουν το ίδιο δυναμικό. Επομένως

Όλα τα σημεία ενός αγωγού (συμπεριλαμβανομένων και εκείνων της επιφάνειάς του) σε κατάσταση ηλεκτροστατικής ισορροπίας έχουν το ίδιο δυναμικό.

Η επιφάνεια ενός αγωγού σε κατάσταση ηλεκτροστατικής ισορροπίας είναι ισοδυναμική επιφάνεια. Οπότε

Η ένταση του πεδίου στα σημεία της επιφάνειας αγωγού ευρισκόμενου σε κατάσταση ηλεκτροστατικής ισορροπίας είναι κάθετη προς την επιφάνεια του αγωγού.



Στον μηδενισμό του πεδίου στο εσωτερικό ενός αγωγού (σε κατάσταση ηλεκτροστατικής, εννοείται πάντα, ισορροπίας) στηρίζεται η

ηλεκτροστατική θωράκιση: ένας χώρος θωρακίζεται έναντι ηλεκτροστατικών πεδίων αν το περιβάλουμε με μεταλλικό περίβλημα. Σε πολλές μάλιστα περιπτώσεις αρκεί ένα αρκετά πυκνό μεταλλικό δίκτυο, το λεγόμενο **κλουβί του Faraday**. (Όταν λοιπόν το αεροπλάνο, με το οποίο ταξιδεύετε πληγεί από κεραυνό, μόνο από ηλεκτροπληξία δεν κινδυνεύετε!). Ο μηχανισμός με τον οποίο επιτυγχάνεται η παραπάνω απομόνωση του εσωτερικού των αγωγών από την δράση ηλεκτροστατικών πεδίων είναι απλός: Όταν ένας αγωγός βρεθεί μέσα σε ηλεκτροστατικό πεδίο, οι εντός αυτού ευρισκόμενοι ευκίνητοι φορείς μετακινούνται κάτω από την επίδραση του, οι μεν θετικοί κατά την φορά του, οι δε αρνητικοί αντίθετα προς αυτήν. Η μετακίνηση αυτή μπορεί να γίνει φυσικά μέχρι την επιφάνεια του αγωγού (εκτός βέβαια από την περίπτωση εξαιρετικά ισχυρών πεδίων), όπου και συσσωρεύονται. Ο διαχωρισμός αυτός των φορτίων, γνωστός σαν **ηλεκτρική επαγωγή** έχει σαν αποτέλεσμα την δημιουργία ενός πεδίου αντίθετης φοράς προς το εξωτερικό και συνεχίζεται μέχρις ότου η συνισταμένη ένταση στο εσωτερικό του αγωγού γίνει μηδέν, οπότε και αποκαθίσταται η νέα κατάσταση ηλεκτροστατικής ισορροπίας. Τα παραπάνω συμβαίνουν σε ελάχιστο χρόνο, όπως αποδεικνύεται πρακτικά.

Εφαρμογές της ηλεκτροστατικής θωράκισης: Προστασία επιστημονικών οργάνων και διαφόρων ηλεκτρονικών συσκευών (κυρίως στον τομέα των τηλεπικοινωνιών) από ανεπιθύμητα ηλεκτροστατικά πεδία, δυνατότητα εργασίας πλησίον εγκαταστάσεων υψηλής τάσεως, επιβάτες αυτοκινήτων και αεροπλάνων δεν κινδυνεύουν από κεραυνούς. Στην περίπτωση που τα χρησιμοποιούμενα δοχεία φέρουν μικρές οπές ή πρόκειται για μεταλλικά πλέγματα, το ηλεκτροστατικό πεδίο στο εσωτερικό τους δεν είναι εντελώς μηδέν, αλλά σημαντικά εξασθενημένο, εκτός βέβαια από τα σημεία τα οποία βρίσκονται πολύ κοντά στις οπές. Το ίδιο ισχύει και για ένα σωλήνα με ανοιχτά άκρα, όταν το μήκος του είναι πολύ μεγαλύτερο από την διάμετρο του: όσο απομακρυνόμαστε από τα άκρα του τόσο ασθενέστερο γίνεται το πεδίο στο εσωτερικό του.

— Στην κατάσταση

ηλεκτροστατικής ισορροπίας όλο το πλεονάζον φορτίο ενός φορτισμένου (και μονωμένου) αγωγού κατανέμεται στην εξωτερική του επιφάνεια.



Αυτό προκύπτει εύκολα, αν εφαρμόσουμε τον νόμο του Gauss για μία κλειστή επιφάνεια ευρισκόμενη αμέσως κάτω από την πραγματική επιφάνεια του αγωγού και επομένως στο εσωτερικό του (βλ. διπλανό σχήμα). Η ροή μέσω της εν λόγω επιφάνειας θα είναι μηδέν, μια μηδέν είναι και η ένταση του πεδίου σε όλα της τα σημεία.

Η μικροσκοπική εξήγηση είναι και πάλι απλή: Τυχόν πλεονάζοντα φορτία, τα οποία θα βρεθούν με κάποιο τρόπο στο εσωτερικό ενός αγωγού, δημιουργούν ηλεκτρικά πεδία, κάτω από την επίδραση των



οποίων μετακινούνται προς την επιφάνεια του αγωγού, δημιουργώντας τέτοια επιφανειακή κατανομή φορτίου, ώστε η ένταση του πεδίου στο εσωτερικό του αγωγού να μηδενισθεί. Τότε σταματά κάθε μετακίνηση φορτίου και ο αγωγός ηρεμεί ηλεκτροστατικά.

Εφαρμογή του παραπάνω φαινομένου αποτελεί το λεγόμενο **δοχείο του Faraday** (βλ. σχήμα 1.19), το οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την πλήρη αποφόρτιση ενός φορτισμένου αγωγού: Ο προς εκφόρτιση αγωγός φέρεται σε επαφή με το **εσωτερικό** κοίλου δοχείου. Το φορτίο του ρέει τότε προς την εξωτερική επιφάνεια του δοχείου, έως ότου ο αγωγός εκφορτισθεί πλήρως, οπότε και αποκαθίσταται κατάσταση ηλεκτροστατικής ισορροπίας. (Θα πρέπει να πούμε, ότι τα παραπάνω ισχύουν απόλυτα, μόνο αν το δοχείο διαθέτει μεταλλικό σκέπασμα, με το οποίο το κλείνουμε όσο διαρκεί η εκφόρτιση. Στην πράξη βέβαια είναι αρκετό το βάθος του δοχείου να είναι αρκετά μεγαλύτερο από το στόμιο του.)

1.11.1 Ένταση του πεδίου επί της (εξωτερικής) επιφάνειας φορτισμένου αγωγού

Σχήμα 1.20: Υπολογισμός της έντασης του πεδίου πλησίον της επιφάνειας φορτισμένου αγωγού. (Χάριν απλότητας της επιχειρηματολογίας θεωρούμε κυλινδρική επιφάνεια Gauss, της οποίας ο άξονας είναι κάθετος προς την επιφάνεια του αγωγού αρά και προς την ένταση \vec{E}).

Έστω ότι ένας αγωγός έχει φορτίο q και βρίσκεται σε κατάσταση ηλεκτροστατικής ισορροπίας, η οποία χαρακτηρίζεται από την επιφανειακή πυκνότητα φορτίου $\sigma = dq/dS$. Αν εφαρμόσουμε τον νόμο του Gauss για μια στοιχειώδη κλειστή επιφάνεια Gauss (τυχαίου σχήματος), η οποία περιέχει το στοιχειώδες τμήμα dS της επιφάνειας του αγωγού (βλ. σχ. 1.20), παίρνουμε:

$$\Phi = \Phi_{\beta\acute{\alpha}\sigma\eta\varsigma} + \Phi_{\omicron\rho\phi\acute{\eta}\varsigma} + \Phi_{\pi\alpha\rho\alpha\pi\lambda.} = dq / \epsilon_0$$

βλ. παρακάτω

$$\Rightarrow \Phi_{\omicron\rho\phi\acute{\eta}\varsigma} = dq / \epsilon_0$$

$$\Rightarrow EdS = dq / \epsilon_0 \Rightarrow E = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{dq}{dS} \Leftrightarrow$$

$$\underline{\underline{E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad [1.24]}}$$

Κατά τον παραπάνω υπολογισμό πήραμε υπόψη, ότι: **1°**) το πεδίο στο εσωτερικό του αγωγού είναι μηδέν, οπότε μηδέν είναι και η ροή μέσω της βάσης $\Phi_{\beta\acute{\alpha}\sigma\eta\varsigma}$.

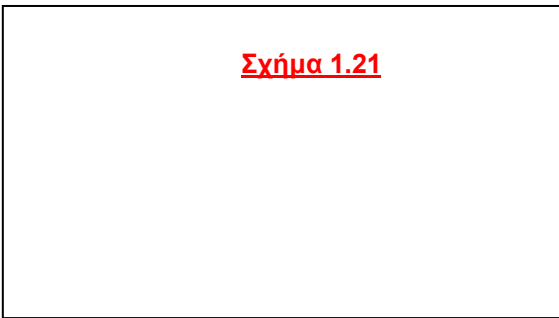
2°) το πεδίο είναι κάθετο προς την επιφάνεια

του αγωγού, οπότε η ροή, $\Phi_{\text{παραπλ.}}$, μέσω της παράπλευρης επιφάνειας του στοιχειώδους κυλίνδρου είναι επίσης μηδέν, ενώ η ροή μέσω της οροφής του είναι ($E \, dS$) (όπου E είναι η ένταση του πεδίου επί του στοιχείου dS και επομένως και επί της οροφής του κυλίνδρου, μια και αυτή βρίσκεται απειροστά πλησίον του στοιχείου).

3°) dq είναι το φορτίο, το οποίο περιέχεται στο στοιχείο επιφάνειας dS .

Σύμφωνα λοιπόν με την σχέση [1.24], η ένταση του πεδίου στα σημεία που βρίσκονται κοντά στην επιφάνεια ενός φορτισμένου αγωγού είναι ανάλογη προς την επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ του αγωγού. Όπως τώρα αποδεικνύεται πειραματικά (στο σχ. 1.21 και θεωρητικά, σε ποιοτικό όμως επίπεδο)

η ένταση του πεδίου στα σημεία (και πλησίον) της επιφάνειας φορτισμένου αγωγού, ευρισκόμενου σε κατάσταση ηλεκτροστατικής ισορροπίας, είναι αντιστρόφως ανάλογη προς την ακτίνα καμπυλότητας της γεωμετρικής μορφής της επιφάνειάς του: στις αιχμές (μικρή ακτίνα καμπυλότητας) μεγάλη, στα σημεία μικρής καμπυλότητας μικρή.



Όπως το πεδίο (βλ. κεφ.1.6) έτσι και το δυναμικό σφαιρικής κατανομής φορτίου συμπίπτει με εκείνο σημειακού φορτίου, ίσου με το συνολικό φορτίο της σφαιρικής κατανομής και ευρισκόμενου στο κέντρο της σφαιρικής κατανομής. Επομένως το δυναμικό επί της επιφάνειας φορτισμένης με φορτίο Q σφαίρας ακτίνας R είναι (βλ. [1.15]):

$$U_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} \quad \{1\}.$$

Η επιφανειακή εξάλλου πυκνότητα φορτίου της σφαίρας είναι εξ ορισμού: $\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2} \quad \{2\}.$

Οι δύο σφαίρες του παραπάνω σχήματος, φορτίου Q_1 και Q_2 και ακτίνας R_1 και R_2 αντίστοιχα, εφόσον συνδέονται με μεταλλικό σύρμα θα έχουν επί της επιφάνειάς τους το ίδιο δυναμικό, μια και αποτελούν ουσιαστικά έναν αγωγό, του οποίου η επιφάνεια θα είναι κατά συνέπεια (βλ. κεφ.1.11) ισοδυναμική. Στην περίπτωση τώρα που οι δύο σφαίρες βρίσκονται αρκετά μακριά, ώστε η κατανομή φορτίου επί της επιφάνειας της μιας να μην επηρεάζει την κατανομή φορτίου επί της επιφάνειας της άλλης, το δυναμικό επί της επιφάνειας έκαστης θα δίδεται από την σχέση {1}, οπότε η ισότητα του δυναμικού γράφεται:

$$U_{R1} = U_{R2} \Rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{R_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{R_2} \Rightarrow \frac{Q_1}{R_1} = \frac{Q_2}{R_2} \quad \{3\}$$

Για τις επιφανειακές πυκνότητες φορτίου, σ_1 και σ_2 , των δύο σφαιρών έχουμε:

$$\sigma_i = \frac{Q_i}{4\pi R_i^2}, (i = 1,2) \Rightarrow \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{Q_1 / R_1^2}{Q_2 / R_2^2} \Rightarrow \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1} \quad \{4\}$$

Σύμφωνα λοιπόν με την σχέση {4} η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου, και επομένως βάσει της [1.24] και η ένταση του πεδίου κοντά στην επιφάνεια, των δυο σφαιρών είναι αντιστρόφως ανάλογη προς την ακτίνα τους.

Η επιφάνεια τώρα ενός αγωγού τυχαίου σχήματος αποτελείται από τμήματα διαφορετικής (ακτίνας) καμπυλότητας και κατά συνέπεια διαφορετικής επιφανειακής πυκνότητας φορτίου. Ιδιαίτερα μεγάλη είναι η πυκνότητα φορτία στα αιχμηρά τμήματα, τα οποία δρουν σαν μικρές σφαίρες. Μεγάλη είναι επομένως και η ένταση του πεδίου στα σημεία αυτά.

Λόγω του ισχυρού πεδίου στις αιχμές ενός αγωγού, ο οποίος βρίσκεται μέσα στον αέρα, έχουμε σταδιακή εκφόρτιση του αγωγού μέσω έλξης των λίγων ιόντων, τα οποία πάντα υπάρχουν στον αέρα. Μάλιστα δε η τιμή του πεδίου στα αιχμηρά τμήματα ενός αγωγού μπορεί να γίνει τόσο μεγάλη, ώστε να ιονίσει τον περιβάλλοντα αέρα, με αποτέλεσμα την ακαριαία εκφόρτιση του αγωγού, γνωστής σαν εκκένωση αιχμής, όταν δε συνοδεύεται από φωτοβολία του αέρα και σαν εκκένωση στέμματος. (Ο ιονισμός του αέρα πραγματοποιείται ως εξής: τα υπάρχοντα σ' αυτόν ελάχιστα ιόντα, επιταχύνονται από το πεδίο του αγωγού, κινούμενα δε προς αυτόν συγκρούονται με ουδέτερα άτομα του αέρα, τα οποία και ιονίζουν, λόγω της μεγάλης τους ταχύτητας. Το φαινόμενο επαναλαμβάνεται με την συμμετοχή και των νέων, δευτερογενών ιόντων με αποτέλεσμα την τρομακτική αύξηση του αριθμού τους με μορφή χιονοστιβάδας.)

Εφαρμογές: 1^η) Κατά τον σχεδιασμό εγκαταστάσεων υψηλής τάσης αποφεύγονται τα αιχμηρά τμήματα προς αποφυγή ηλεκτρικών εκκενώσεων σαν συνέπεια ισχυρών πεδίων.

2^η) Με την βοήθεια των αλεξικέραυνων πετυχαίνουμε, μέσω του ισχυρού πεδίου στην κορυφή τους, την λεγόμενη «σιωπηλή» (δηλαδή χωρίς κεραυνό) εκκένωση. Με τον τρόπο αυτό πραγματοποιείται ανταλλαγή φορτίου με την ατμόσφαιρα, χωρίς τις καταστροφικές συνέπειες του κεραυνού.

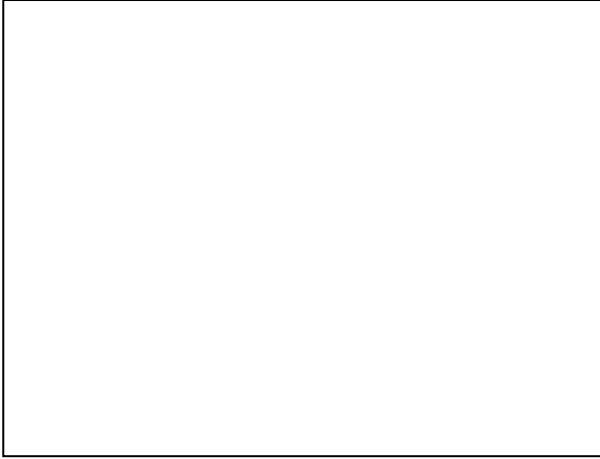
3^η) Η εξαγωγή ηλεκτρονίων από ένα μέταλλο με την βοήθεια ηλεκτρικού πεδίου («εκπομπή πεδίου») απαιτεί εντάσεις της τάξεως 10^9 V/m. Με την βοήθεια μεταλλικών ακίδων ακτίνας 1μm πετυχαίνουμε τέτοιες εντάσεις με τάσεις μερικών μόνο εκατοντάδων Volts. Ακίδες αυτού του είδους χρησιμοποιούνται για την δημιουργία ελευθέρων ηλεκτρονίων σε υψηλό κενό και καλούνται κάθοδοι πεδίου.

Συμπληρωματικά παραδείγματα

Παράδειγμα Σ.1.1: Όπως δείχνουν πειραματικές μελέτες, το πεδίο της γης είναι, σε μεγάλες περιοχές της ατμόσφαιρας, ακτινικό με φορά προς την επιφάνεια της γης. Η ένταση του σε ύψος 200m και 300m ισούται με 100 N/C και 60 N/C περίπου, αντίστοιχα. Να υπολογισθεί το φορτίο, το οποίο περιέχεται σε κύβο ακμής 100m και ευρισκόμενο μεταξύ 200 και 300m ύψους από την επιφάνεια της γης. (Η καμπυλότητα της γης να παραληφθεί)

Λύση:

Εφαρμόζουμε τον νόμο του Gauss για την επιφάνεια του εν λόγω κύβου, σκεπτόμενοι ολική ροή μέσω της παράπλευρης επιφάνειας είναι μηδέν, μια και η γωνία μεταξύ της έντασης \vec{E} και του αντίστοιχου διανύσματος \vec{S} είναι 90° :



Αν υποθέσουμε ότι τα ιόντα, στα οποία οφείλεται το παραπάνω φορτίο είναι μονοσθενή, τότε στον παραπάνω κύβο περιέχονται

$$N = q / e = 3,54 \cdot 10^{-6} / (1,6021 \cdot 10^{-19}) \Rightarrow$$

$$N = 2,21 \cdot 10^{13} \text{ ιόντα} / 10^6 \text{ m}^3$$

Επομένως ο μέσος αριθμός ιόντων ανέρχεται σε $\vec{N} = 2,21 \cdot 10^7 \text{ ιόντα/m}^3$ ή $22,1 \text{ ιόντα /cm}^3$. Ο αντίστοιχος αριθμός των ελεύθερων ηλεκτρονίων ενός μετάλλου ισούται με $10^{22} \sim 10^{23} \text{ e/ cm}^3$, είναι δηλαδή περίπου 10^{22} φορές μεγαλύτερος! Το

γεγονός αυτό μας δείχνει πόσο κακός αγωγός είναι ο ατμοσφαιρικός αέρας, κάτω από φυσιολογικές εννοείται συνθήκες.

Παράδειγμα **Σ.1.2:** Σφαίρα ακτίνας ρ είναι τοποθετημένη στο κέντρο σφαιρικού φλοιού ακτίνας $P (> \rho)$. Η σφαίρα και ο φλοιός έχουν φορτίο q και Q αντίστοιχα. Ζητείται η διαφορά δυναμικού μεταξύ τους.

Λύση:

Το παραπάνω σύστημα σφαίρας - φλοιού αποτελεί προφανώς μια δυνατότητα υλοποίησης της σφαιρικής κατανομής φορτίου. Βάσει δε των όσων είπαμε στο κεφάλαιο 1.6, το πεδίο στον χώρο μεταξύ σφαίρας και φλοιού δίδεται από την σχέση ([1.7]):

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \quad \{1\}$$

Η διαφορά του δυναμικού μεταξύ των δύο σφαιρών υπολογίζεται από την σχέση [1.23α]

Σχήμα Π.Σ.1.2: Φορτισμένη σφαίρα ακτίνας ρ εντός φορτισμένου σφαιρικού φλοιού ακτίνας P .

$$U_P - U_\rho = - \int_\rho^P \vec{E} d\vec{s} \stackrel{\{1\}}{=} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_\rho^P \frac{\hat{r}}{r^2} d\vec{s} \quad \hat{r}d\vec{s} = ds \equiv dr = - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_\rho^P r^{-2} dr = - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} [-r^{-1}]_\rho^P \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U_P - U_\rho = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{\rho} \right)$$

Στην περίπτωση που η σφαίρα είναι θετικά φορτισμένη ($q > 0$), η παραπάνω διαφορά είναι αρνητική, ο φλοιός δηλαδή έχει μικρότερο δυναμικό από την σφαίρα. Αν συνδέσουμε τότε την σφαίρα με τον φλοιό μέσω ενός σύρματος, όλο το φορτίο της σφαίρας θα κινηθεί προς τον φλοιό, μια και όπως ξέρουμε, τα θετικά φορτία κινούνται πάντα προς χαμηλότερο δυναμικό. Το αποτέλεσμα αυτό είναι ευνόητο, μια και το σύστημα (σφαίρα-σύρμα-φλοιός) αποτελεί ουσιαστικά έναν μοναδικό αγωγό όπως δε είδαμε στο κεφάλαιο 1.11, στην κατάσταση ηλεκτροστατικής ισορροπίας όλο το πλεονάζον φορτίο ενός αγωγού κατανέμεται εξ ολοκλήρου στην εξωτερική του επιφάνεια.

Παρατήρηση: Αρκετά διδακτικός και πιο κοντά στην πρακτική αντιμετώπιση παρόμοιων ηλεκτροστατικών προβλημάτων (αν και λιγότερο κομψός) είναι ο ακόλουθος τρόπος επίλυσης:

Σύμφωνα με την αρχή της γραμμικής υπερθέσεως (βλ. κεφ. 1.7.1), το δυναμικό έκαστου αγωγού θα είναι το άθροισμα των δυναμικών, τα οποία θα είχε, αν μόνο ένας εκ των δύο ήταν φορτισμένος:

$$\left. \begin{aligned} U_p &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{P} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{P} \\ U_\rho &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{P} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\rho} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Ο πρώτος προσθετέος είναι το δυναμικό λόγω του φορτίου} \\ \text{του φλοιού ο δεύτερος λόγω του φορτίου της σφαίρας.} \end{array}$$

(Κατά τα παραπάνω πήραμε υπόψη, ότι και οι δύο κατανομές φορτίου είναι σφαιρικές (οπότε το δυναμικό στο εξωτερικό τους δίδεται από την σχέση [1.15]), και ότι το δυναμικό στο εσωτερικό ενός αγωγού ευρισκόμενου σε κατάσταση ηλεκτροστατικής ισορροπίας ισούται με εκείνο της επιφάνειας του αγωγού .)

Για την διαφορά δυναμικού παίρνουμε: $U_p - U_\rho = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{\rho} \right)$, το ίδιο δηλαδή αποτέλεσμα

όπως και προηγουμένως.

Παρατήρηση: Όπως είδαμε, το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό ενός αγωγού, ευρισκόμενου σε κατάσταση ηλεκτροστατικής ισορροπίας είναι μηδέν. Αν λοιπόν θεωρήσουμε έναν αγωγό ευρισκόμενο σε κατάσταση ηλεκτροστατικής ισορροπίας, και επιφάνεια Gauss τυχαίας μορφής στο εσωτερικό του, τότε το πεδίο σε όλα τα σημεία της επιφάνειας αυτής θα ισούται με μηδέν, οπότε μηδέν είναι και η αντίστοιχη επιφανειακή πυκνότητα φορτίου καθώς και το εντός της επιφάνειας ευρισκόμενο ηλεκτρικό φορτίο. Έτσι το τμήμα του αγωγού, το οποίο βρίσκεται εντός της επιφάνειας Gauss, ουδεμία ηλεκτρική επίδραση ασκεί επί του εκτός της επιφάνειας κείμενο (αλλά και γενικότερα επί του περιβάλλοντος)* και κατά συνέπεια δεν επηρεάζει την τιμή του ηλεκτρικού πεδίου. Αυτό σημαίνει ότι το πεδίο παραμένει ίσο με μηδέν στο εσωτερικό ακόμη και ενός κοίλου αγωγού συμπεριλαμβανομένης και της κοιλότητας.

*) Βέβαια και ένας αφόρτιστος αγωγός στερείται εξ ορισμού πλεονάζοντος φορτίου. Αυτό όμως δεν σημαίνει ότι δεν επηρεάζει την τιμή του εκτός αυτού επικρατούντος ηλεκτρικού πεδίου, επειδή δεν στερείται οπωσδήποτε και επιφανειακής πυκνότητας φορτίου: Όταν ο αγωγός βρεθεί εντός εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου φορτίζεται επαγωγικά με αποτέλεσμα την εμφάνιση επιφανειακής πυκνότητας φορτίου ίσης με $\epsilon_0 E$, η οποία επιδρά οπωσδήποτε επί του περιβάλλοντος και επιπλέον φροντίζει για τον μηδενισμό του συνολικού πεδίου στο εσωτερικό του αγωγού.

2.1 Διηλεκτρικά

Όπως είδαμε στο κεφάλαιο 1.11, οι αγωγοί έχουν την ικανότητα να θωρακίζουν το εσωτερικό τους από ηλεκτροστατικά πεδία. Το γεγονός δε αυτό πηγάζει από την (εξ ορισμού) ύπαρξη ευκίνητων φορέων φορτίου:

Όταν ένας αγωγός βρεθεί εντός ηλεκτρικού πεδίου, τότε οι δυνάμεις, οι οποίες επιδρούν επάνω στους ευκίνητους φορείς φορτίου, τους μετακινούν και μάλιστα τους μεν θετικούς προς την κατεύθυνση του πεδίου τους δε αρνητικούς προς την αντίθετη κατεύθυνση. Αποτέλεσμα του διαχωρισμού αυτού είναι η δημιουργία ενός νέου πεδίου στο εσωτερικό του αγωγού με αντίθετη προς το εξωτερικό πεδίο φορά. Ο διαχωρισμός αυτός του φορτίου συνεχίζεται, έως ότου η συνολική ένταση του πεδίου στο εσωτερικό του αγωγού μηδενισθεί, οπότε αποκαθίσταται η κατάσταση ηλεκτροστατικής ισορροπίας.

Από τα παραπάνω γίνεται εμφανές, ότι η συμπεριφορά ενός *μονωτή* εντός ηλεκτρικού πεδίου θα είναι διαφορετική, μια και στο εσωτερικό του δεν υπάρχουν (εξ ορισμού!) ευκίνητοι φορείς φορτίου. Πιο

συγκεκριμένα περιμένουμε, ότι το ηλεκτρικό πεδίο θα διαπερνά τα μονωτικά υλικά, πράγμα το οποίο επιβεβαιώνεται και πειραματικά. Αυτός είναι εξ άλλου και ο λόγος για τον οποίο οι (εντός ηλεκτρικών πεδίων ευρισκόμενοι) μονωτές χαρακτηρίζονται και ως διηλεκτρικά.

Με την μελέτη των διηλεκτρικών θα ασχοληθούμε εκτενώς στα επόμενα κεφάλαια. Προηγουμένως όμως θα γνωρίσουμε την απλούστερη και οικονομικότερη δυνατότητα δημιουργίας ελεγχόμενων ηλεκτρικών πεδίων περιορισμένων διαστάσεων, τους πυκνωτές, οι οποίοι είναι και ένα από τα στοιχεία, τα οποία οδήγησαν στην ηλεκτρονική επανάσταση.

2.2 Πυκνωτές

Πυκνωτής καλείται κάθε ζεύγος γειτονικών, μονωμένων αγωγών τυχαίου σχήματος και γεωμετρίας.

Οι δύο αγωγοί από τους οποίους αποτελείται ο πυκνωτής, ονομάζονται οπλισμοί. Ανάλογα με το σχήμα τους, το οποίο στην πράξη των ηλεκτρονικών κυκλωμάτων είναι απλό γεωμετρικό, διακρίνουμε σφαιρικούς, κυλινδρικούς και επίπεδους πυκνωτές.

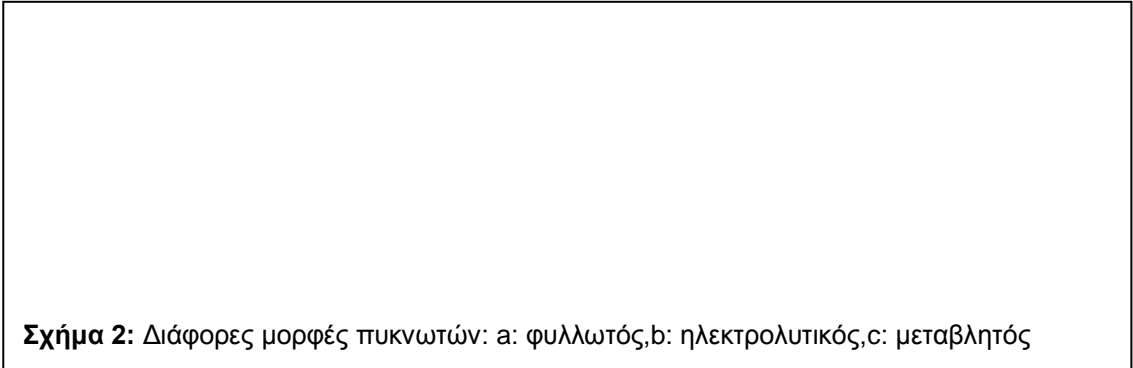
Σαν μονωτικό μεταξύ των δύο οπλισμών παρεμβάλλεται κενό ή κάποιο άλλο μονωτικό υλικό (συνήθως σε στερεή ή υγρή κατάσταση), το οποίο καλείται διηλεκτρικό, μια και βρίσκεται εντός του ηλεκτρικού πεδίου μεταξύ των οπλισμών.

Εφαρμογές: Αποθήκευση ηλεκτρικής ενέργειας, με την μορφή ηλεκτρικού πεδίου περιορισμένου ουσιαστικά στον μεταξύ των οπλισμών ευρισκόμενο χώρο, γεγονός το οποίο καθιστά τους πυκνωτές απαραίτητο στοιχείο όλων σχεδόν των ηλεκτρονικών κυκλωμάτων.

Μορφές πυκνωτών: **α) Πυκνωτές κενού:** Οι οπλισμοί είναι κλεισμένοι μέσα σε δοχεία υψηλού κενού. Χρησιμοποιούνται όπου υπάρχουν πολύ υψηλά και γρήγορα μεταβαλλόμενα δυναμικά.

β) Φυλλωτοί πυκνωτές: Οι οπλισμοί τους αποτελούνται από λεπτά μεταλλικά ή συνθετικά φύλλα και τυλίγονται έτσι ώστε να έχουν μικρό όγκο (βλ. σχ.2).

γ) Ηλεκτρολυτικοί πυκνωτές: Ο ένας εκ των δύο οπλισμών είναι ένας ηλεκτρολύτης, εντός του οποίου είναι βυθισμένος ο δεύτερος μεταλλικός οπλισμός, ο οποίος περιβάλλεται από λεπτό στρώμα οξειδίου, το διηλεκτρικό (βλ. σχ.2b) Έχουν σχετικά μεγάλη χωρητικότητα, το οξύδιο όμως αντέχει μόνο σε χαμηλές τάσεις λειτουργίας. Πρέπει εξάλλου να πολώνονται σωστά (κίνδυνος έκρηξης!), οπότε χρησιμοποιούνται μόνο σε κυκλώματα συνεχούς ρεύματος.



Σχήμα 2: Διάφορες μορφές πυκνωτών: a: φυλλωτός, b: ηλεκτρολυτικός, c: μεταβλητός

δ) Μεταβλητοί πυκνωτές: Επιτρέπουν την συνεχόμενη μεταβολή της χωρητικότητας τους μέσω μεταβολής της δρώσας επιφάνειας των οπλισμών τους (βλ. σχ.2c).

(σχετική) χωρητικότητα ζεύγους αγωγών: $C = \frac{Q}{V}$ [2.2]

όπου: V = διαφορά δυναμικού μεταξύ των αγωγών

Q = φορτίο, το οποίο πρέπει να μετακινηθεί από τον έναν αγωγό στον άλλο, προκειμένου να εξαφανιστεί η μεταξύ τους διαφορά δυναμικού.

Ζεύγος αγωγών αποτελεί εξ ορισμού και κάθε πυκνωτής, οπότε η χωρητικότητα του θα δίδεται επίσης από την σχέση [2.2]:

χωρητικότητα πυκνωτή: $C = \frac{Q}{V}$ [2.2α]

όπου: V = διαφορά δυναμικού μεταξύ των οπλισμών

Q = φορτίο, ενός εκ των δύο οπλισμών

Η χωρητικότητα δηλαδή ενός πυκνωτή είναι το συνώνυμο της *σχετικής* χωρητικότητας των δύο οπλισμών του και περιγράφει ποσοτικά το φορτίο, το οποίο μπορούμε να αποθηκεύσουμε στον πυκνωτή, όταν τον συνδέσουμε με μια πηγή συγκεκριμένης τάσεως. Το γεγονός ότι στην σχέση [2.2α] υπεισέρχεται, το φορτίο του ενός από τους δυο (ίσα και αντίθετα φορτισμένους) οπλισμούς του, είναι αυτονόητο μια και η ροή του φορτίου αυτού είναι το αίτιο, το οποίο δημιούργησε την διαφορά δυναμικού μεταξύ των δύο οπλισμών κατά την φόρτιση του πυκνωτή.

Η χωρητικότητα ενός πυκνωτή εξαρτάται, μόνο από την μορφή του (γεωμετρική κατανομή του φορτίου του), τις διαστάσεις του και το διηλεκτρικό μεταξύ των οπλισμών του (όπως θα δούμε στις επόμενες §§).

Το **πλεονέκτημα ενός πυκνωτή σε σχέση με δύο ανεξάρτητους αγωγούς** (π.χ. τους οπλισμούς του σε μεγάλη απόσταση) είναι το ακόλουθο: Όσο πιο μακριά βρίσκονται οι «οπλισμοί» τόσο μεγαλύτερη είναι η διαφορά δυναμικού μεταξύ τους και αντίστροφα (όταν βέβαια το φορτίο τους παραμένει αμετάβλητο). Ανάλογα μεγαλώνει και η τάση της πηγής, την οποία πρέπει να χρησιμοποιήσουμε προκειμένου να αποθηκεύσουμε μια συγκεκριμένη ποσότητα φορτίου. Με άλλα λόγια, όσο αυξάνει η απόσταση μεταξύ των οπλισμών του (οπότε ο πυκνωτής τείνει να εκφυλισθεί σε σύστημα δύο ανεξαρτήτων αγωγών), τόσο ελαττώνεται η χωρητικότητα του πυκνωτή

Μονάδες χωρητικότητας : Από την εξίσωση [2.2α] προκύπτει αυτομάτως η εξίσωση ορισμού των μονάδων της χωρητικότητας:

$$[2.2 \alpha] \rightarrow [C] = \frac{[Q]}{[V]} = \frac{C}{V} \equiv F(arad)$$

Επειδή το Farad είναι πολύ μεγάλη μονάδα (π.χ. επίπεδος πυκνωτής, του οποίου οι οπλισμοί

απέχουν κατά 1 mm και ο οποίος έχει αέρα ως διηλεκτρικό, θα έπρεπε να διαθέτει οπλισμούς εμβαδού 100 km² περίπου, προκειμένου η χωρητικότητα του να είναι ίση με 1F) στην πράξη χρησιμοποιούνται τα υποπολλαπλάσια μF ($\equiv 10^{-6}$ F) και pF ($\equiv 10^{-12}$ F).

2.4 Υπολογισμός της χωρητικότητας ορισμένων μορφών πυκνωτών

α) Επίπεδος πυκνωτής: Το πεδίο είναι περιορισμένο κατά κύριο λόγο μεταξύ των οπλισμών και είναι ουσιαστικά ομογενές (βλ. σχ. 2.1) με εξαίρεση τα άκρα, τα οποία όμως παίζουν τόσο μικρότερο λόγο όσο ελαττώνεται η απόσταση των οπλισμών. (Το πειραματικά κατοχυρωμένο αυτό γεγονός γίνεται κατανοητό, αν θεωρήσουμε ότι οι φορτισμένοι οπλισμοί του πυκνωτή ευρίσκοντο αρχικά σε μεγάλη απόσταση, για να πλησιάσουν στην συνέχεια σιγά - σιγά σχηματίζοντας τον επίπεδο πυκνωτή. Όταν η απόσταση των οπλισμών ήταν μεγάλη, το φορτίο τους θα κατανέμετο, λίγο πολύ ομοιόμορφα, σε όλη τους την επιφάνεια, δηλαδή και στις προς το εξωτερικό του «πυκνωτή» στραμμένες πλευρές. Αυτό σημαίνει πως και το πεδίο εκτείνεται σε όλο τον χώρο. Με την σταδιακή όμως ελάττωση της απόστασης αυξάνεται συνεχώς η πυκνότητα φορτίου στις εσωτερικές πλευρές των οπλισμών λόγω της αμοιβαίας έλξης των ετερωνύμων τους φορτίων. Όταν η απόσταση των οπλισμών γίνει πολύ μικρή (σε σχέση πάντα με τις διαστάσεις των οπλισμών), όλο σχεδόν το φορτίο έχει μετακινηθεί προς τις δύο αυτές πλευρές, μεταξύ των οποίων περιορίζεται πλέον και το πεδίο. Επειδή δε η πυκνότητα φορτίου έκαστου οπλισμού είναι η ίδια για όλη του την επιφάνεια (μια και δεν υπάρχει λόγος να μην είναι) με εξαίρεση την περιοχή των άκρων, το πεδίο είναι ουσιαστικά ομογενές.)

Μετά την κάπως μακρά αυτή παρένθεση επαναλαμβάνουμε, ότι τα επόμενα ισχύουν με την **προϋπόθεση** πως το **πεδίο είναι περιορισμένο στον μεταξύ των οπλισμών χώρο και είναι ομογενές**, γεγονός το οποίο λίγο μόνον απέχει από την πραγματικότητα.



Σχήμα 2.1: Πεδίο επίπεδου πυκνωτή (α) και υπολογισμός του φορτίου ενός εκ των δύο οπλισμών με την βοήθεια του νόμου του Gauss (b).

Η χωρητικότητα ενός επίπεδου (όπως άλλωστε και κάθε) πυκνωτή θα δίνεται από την σχέση [2.2α]:

$$C = \frac{Q}{V} \quad \{ 1 \} \quad (V = \text{διαφορά δυναμικού μεταξύ των οπλισμών})$$

Q = φορτίο ενός εκ των δύο οπλισμών)

Ο υπολογισμός του φορτίου Q του ενός οπλισμού, το οποίο χρειαζόμαστε προκειμένου να υπολογίσουμε την χωρητικότητα του πυκνωτή, μπορεί να γίνει με την βοήθεια του νόμου του Gauss:

Η ροή μέσω της κλειστής επιφάνειας Gauss του σχήματος 2.1(b) ισούται με την ροή μέσω του μεταξύ των οπλισμών ευρισκόμενου τμήματός της: Μέσω του επάνω τμήματος η ροή είναι μηδέν, επειδή μηδέν είναι και το πεδίο στο εσωτερικό του οπλισμού, μια και πρόκειται για αγωγό. Οι δύο πλευρικές εξάλλου επιφάνειες είναι παράλληλες προς την ένταση, οπότε η ροή τους είναι επίσης μηδενική. Απομένει λοιπόν μόνο η ροή μέσω του κάτω τμήματος, η οποία ισούται απλώς με το γινόμενο της έντασης E επί το εμβαδόν S του εν λόγω τμήματος, μια και η ένταση είναι σταθερή και κάθετη προς την επιφάνεια:

$$\Phi \stackrel{E=\sigma\alpha\theta}{=} \frac{ES}{\cos\theta} \stackrel{\text{Gauß}}{=} Q / \epsilon_0 \Rightarrow Q = \epsilon_0 ES \quad \{2\}$$

:Φορτίο οπλισμού επιπέδου πυκνωτή (S = επιφάνεια οπλισμού)

Η διαφορά δυναμικού V μεταξύ των οπλισμών υπολογίζεται από την γενική σχέση [1.23a]:

$$V \equiv U_+ - U_- = -\int_0^l -E ds = E \int_0^l ds \Rightarrow V = EI \quad [2.3]$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει για όλα τα ομογενή πεδία και μας επιτρέπει να υπολογίζουμε την **διαφορά δυναμικού V μεταξύ δύο τυχαίων σημείων ενός ομογενούς πεδίου, των οποίων η απόσταση κατά την διεύθυνση της έντασης E ισούται με l.**

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις [2.3] και {2} στην {1} παίρνουμε:

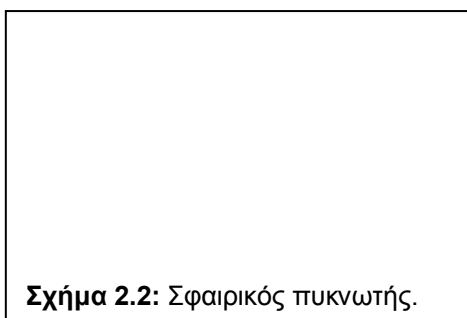
$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon_0 ES}{EI} \Rightarrow C = \epsilon_0 \frac{S}{l}$$

Χωρητικότητα επίπεδου πυκνωτή με
κενό σαν διηλεκτρικό

όπου S = επιφάνεια οπλισμού

l = απόσταση οπλισμών

β) Σφαιρικός πυκνωτής: Στον σφαιρικό πυκνωτή οι οπλισμοί είναι ομόκεντρες σφαίρες ακτίνας R και r (<R) αντίστοιχα (βλ. σχ. 2.2).



Οι φορτισμένοι οπλισμοί του αποτελούν χαρακτηριστικό παράδειγμα *σφαιρικής* κατανομής φορτίου, οπότε το πεδίο στον χώρο μεταξύ των οπλισμών θα δίνεται από την σχέση

$$[1.7]: \vec{E} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \hat{r} \quad \{1\}$$

όπου r η απόσταση από το κέντρο των οπλισμών και Q το φορτίο του μικρού οπλισμού.

Η τάση V μεταξύ των οπλισμών υπολογίζεται από την σχέση [1.23a]:

$$V \equiv U_+ - U_- = -\int_R^r \vec{E} d\vec{s} = -\int_R^r -E ds = \int_R^r E ds \stackrel{\{1\}}{=} \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R r^2} \int_R^r ds \stackrel{ds=-dr}{=} -\frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R r^2} \int_R^r dr = -\frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_R^r \Rightarrow$$

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right] \quad \{2\}$$

Η χωρητικότητα C του πυκνωτή θα είναι:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right]} = \frac{4\pi\epsilon_0}{\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right]} \Rightarrow C = 4\pi\epsilon_0 \frac{Rr}{R-r}$$

**Χωρητικότητα σφαιρικού
πυκνωτή οπλισμών ακτίνων R>r**

***μ.γ.ο.ε!**

γ) Κυλινδρικός πυκνωτής: Οι οπλισμοί ενός κυλινδρικού πυκνωτή είναι δύο ομοαξονικοί κύλινδροι ακτίνας R και r (< R) αντίστοιχα (βλ. σχ. 2.3).

Το πεδίο μεταξύ των οπλισμών μπορεί να υπολογισθεί από τον νόμο του Gauss. Προς τον σκοπό αυτό επιλέγουμε σαν επιφάνεια Gauss κύλινδρο ομοαξονικό προς τους οπλισμούς (βλ. σχ.2.3) και μήκους l ίσο με το μήκος των οπλισμών.

Αν το μήκος l των οπλισμών είναι πολύ μεγαλύτερο από την ακτίνα R του εξωτερικού οπλισμού και κατά συνέπεια και από την απόσταση (R - r) των οπλισμών, το πεδίο θα έχει την ίδια τιμή σε όλα τα σημεία του παράπλευρου (κυλινδρικού)

τμήματος της παραπάνω επιφάνειας Gauss και θα είναι κάθετο προς αυτήν. (Εξαίρεση θα αποτελούν τα άκρα, τα οποία όμως θα παίζουν τόσο μικρότερο ρόλο στην διαμόρφωση της ηλεκτρικής ροής μέσω της εν λόγω επιφάνειας Gauss, όσο μεγαλώνει η διαφορά μεταξύ l και R.

Με την **προϋπόθεση** λοιπόν ότι l >> R ο νόμος του Gauss μας δίνει:

$$\Phi = \Phi_{\text{παραπλ.}} = \int_{S_{\text{παραπλ.}}} \vec{E} d\vec{S} = \int_{S_{\text{παραπλ.}}} E dS = E \int_{S_{\text{παραπλ.}}} dS = E(2\pi r l) \stackrel{\text{Gau\beta}}{=} Q / \epsilon_0 \Rightarrow$$

$$E = \frac{Q}{2\pi l \epsilon_0 r} \quad \{1\}$$

Σημειωτέον ότι η παραπάνω σχέση περιγράφει ουσιαστικά το πεδίο του εσωτερικού οπλισμού, μια και ο εξωτερικός οπλισμός δεν δημιουργεί πεδίο στο εσωτερικό του, με την προϋπόθεση βέβαια ότι το μήκος του είναι πολύ μεγαλύτερο από την διάμετρο του (βλ. κεφ. 1.11).

Η τάση V μεταξύ των οπλισμών υπολογίζεται και πάλι από την σχέση [1.23α]:

$$V \equiv U_+ - U_- = - \int_R^r \vec{E} d\vec{s} = - \int_R^r - E ds = \int_R^r E ds = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_R^r \frac{r}{Rr} ds \stackrel{\{1\}}{=} - \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \int_R^r \frac{r}{Rr} dr =$$

$$- \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} [\ln r]_R^r = - \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{R} \Rightarrow V = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R}{r} \quad \{2\}$$

Η χωρητικότητα τέλος του κυλινδρικού πυκνωτή θα είναι:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R}{r}} \Rightarrow C = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{R}{r}}$$

**Χωρητικότητα κυλινδρικού
πυκνωτή ακτίνων R και r και μήκους l**

Παρατήρηση: Όπως εξηγήσαμε στο κεφάλαιο 2.2, η χωρητικότητα ενός πυκνωτή αυξάνεται, όσο ελαττώνεται η απόσταση των οπλισμών του. Το γεγονός αυτό αντικατοπτρίζεται άμεσα στις σχέσεις [2.4] ως [2.6].

2.5. Συνδεσμολογίες πυκνωτών

Είναι βέβαια προφανές πως για λόγους καθαρά τεχνικοοικονομικούς στο εμπόριο δεν διατίθενται πυκνωτές τυχαίας χωρητικότητας. Οι απαιτούμενες λοιπόν στην πράξη χωρητικότητες επιτυγχάνονται συνδυάζοντας τις λίγες τυποποιημένες του εμπορίου. Οι χρησιμοποιημένες προς τον σκοπό αυτό διατάξεις πυκνωτών προκύπτουν από τους ακόλουθους δύο βασικούς συνδυασμούς:

α) Πυκνωτές σε παράλληλη σύνδεση:

$$\underline{V \equiv V_{ολ}}$$

Στην παράλληλη σύνδεση η τάση μεταξύ των οπλισμών

είναι για όλους τους πυκνωτές **εξ ορισμού** η ίδια: $V_1 = V_2 = V_3 = V_{ολ} \equiv V \quad \{1\}$

Επομένως το ολικό φορτίο θα μοιράζεται στους επιμέρους πυκνωτές ανάλογα με την χωρητικότητά τους. Άρα το ολικό φορτίο $q_{ολ} \equiv Q$ ισούται με το άθροισμα των φορτίων (π.χ. των θετικά φορτισμένων οπλισμών) των μεμονωμένων πυκνωτών: $Q \equiv q_{ολ} = q_1 + q_2 + q_3 \quad \{2\}$

Η **ισοδύναμη ή ολική χωρητικότητα C** ορίζεται ως η χωρητικότητα ενός μόνου πυκνωτή, ο οποίος έχει φορτίο ίσο με το ολικό φορτίο της συστοιχίας, όταν στα άκρα του εφαρμόζεται η ίδια τάση με εκείνη της συστοιχίας:

$$C = \frac{q_{ολ}}{V_{ολ}} \equiv \frac{Q}{V} = \frac{q_1 + q_2 + q_3}{V} = \frac{q_1}{V} + \frac{q_2}{V} + \frac{q_3}{V} \Rightarrow C = C_1 + C_2 + C_3.$$

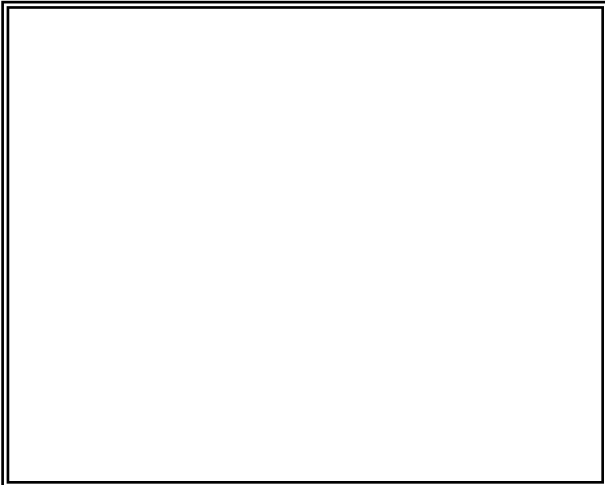
Στην γενική περίπτωση k παράλληλα συνδεμένων πυκνωτών έχουμε επομένως:

$$C = \sum_{i=1}^k C_i \quad \text{Ολική χωρητικότητα παράλληλης}$$

β) Πυκνωτές σε σύνδεση κατά σειρά:



Στην σύνδεση σε σειρά φορτίζονται απ' ευθείας από την πηγή μόνο οι δύο ακραίοι οπλισμοί της συστοιχίας. Τα φορτία των ενδιάμεσων οπλισμών είναι επαγωγικά: προκύπτουν δηλαδή υπό την επίδραση του πεδίου των δύο ακραίων οπλισμών, το οποίο απλώς διαχωρίζει τα θετικά από τα αρνητικά φορτία, ενώ το ολικό φορτίο κάθε ζεύγους μεταξύ τους συνδεομένων εσωτερικών οπλισμών παραμένει αμετάβλητο, ίσο δηλαδή με μηδέν.



Επειδή τα επαγόμενα φορτία είναι ίσα με τα επάγοντα (βλ. σχ. 2.4), συμπεραίνουμε ότι

στη σύνδεση κατά σειρά το φορτίο όλων των πυκνωτών είναι το ίδιο και ίσο με το ολικό φορτίο της συστοιχίας:

$$q_1 = q_2 = q_3 = q_{ολ} \equiv Q \quad \{ 3 \}$$

Επομένως η ολική τάση θα μοιράζεται στους επιμέρους πυκνωτές ανάλογα με την χωρητικότητά τους. Άρα η ολική τάση $V \equiv V_{ολ}$

ισούται με το άθροισμα των τάσεων μεμονωμένων πυκνωτών: $V \equiv V_{ολ} = V_1 + V_2 + V_3 \quad \{ 4 \}$

Η ολική χωρητικότητα C θα είναι: $C = \frac{q_{ολ}}{V_{ολ}} \equiv \frac{Q}{V} = \frac{Q}{V_1 + V_2 + V_3} \Rightarrow$

$$\frac{1}{C} = \frac{V_1 + V_2 + V_3}{Q} = \frac{V_1}{Q} + \frac{V_2}{Q} + \frac{V_3}{Q} \Rightarrow \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}.$$

Στην γενική περίπτωση k σε

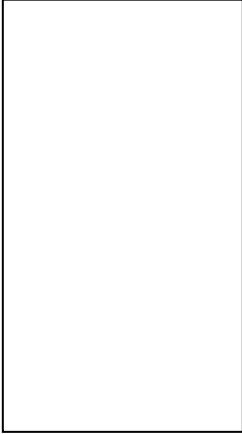
σειρά συνδεομένων πυκνωτών έχουμε επομένως:

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^k \frac{1}{C_i}$$

ολική χωρητικότητα
κατά σειρά συστοιχίας
k πυκνωτών

[2.8]

Παράδειγμα 2.5.1: Να υπολογιστεί η τάση στα άκρα κάθε πυκνωτή του διπλανού κυκλώματος, όταν οι πυκνωτές έχουν φορτισθεί πλήρως. Να γίνει εφαρμογή για την περίπτωση: $U=9V$ και $C_i = \alpha F$ ($i = 1, 2, \dots, 5$)



Λύση:

Το παραπάνω κύκλωμα μπορεί να σχεδιασθεί ως εξής:



$$V_i = Q_i / C_i \quad (i=1,2,\dots,5) \quad \{3\}$$

Από το σχήμα αυτό προκύπτει άμεσα:

$$U = V_1 + V_2 + V_5 \quad \{1\}$$

$$V_5 = V_3 + V_4 \quad \{2\}$$

Από την θεωρία γνωρίζουμε εξάλλου, ότι

Εφόσον οι χωρητικότητες C_i είναι γνωστές, απομένει να υπολογιστούν τα φορτία Q_i των πυκνωτών.

Από το σχήμα της συνδεσμολογίας προκύπτει άμεσα, ότι $Q_1 = Q_2 = Q^{345} = Q_{ολ} = C_{ολ} \cdot U$ {4}

Η ολική χωρητικότητα C της συστοιχίας υπολογίζεται κατά τα γνωστά:

$$\frac{1}{C^{34}} = \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4} \Rightarrow C^{34} = \frac{C_3 C_4}{C_3 + C_4} = \frac{\alpha \cdot \alpha}{\alpha + \alpha} \Rightarrow C^{34} = \frac{\alpha}{2} (F) \quad \{5\}$$

$$C^{345} = C_5 + C^{34} = \alpha + \frac{\alpha}{2} \Rightarrow C^{345} = \frac{3}{2} \alpha (F) \quad \{6\}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{C_{ολ}} &= \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C^{345}} \Rightarrow C_{ολ} = \frac{C_1 \cdot C_2 \cdot C^{345}}{C_2 \cdot C^{345} + C_1 \cdot C^{345} + C_1 \cdot C_2} \quad \{6\} \\ &= \frac{\alpha \cdot \alpha \cdot 3\alpha/2}{\alpha \cdot 3\alpha/2 + \alpha \cdot 3\alpha/2 + \alpha \cdot \alpha} \\ &= \frac{3\alpha^3/2}{4\alpha^2} \Rightarrow C_{ολ} = \frac{3}{8} \alpha (F) \quad \{7\} \end{aligned}$$

Αντικαθιστούμε την {7} στην {4} και υπολογίζουμε: $Q_{ολ} = C_{ολ} \cdot U = \frac{3}{8} \alpha \cdot 9 \Rightarrow$

$$Q_{ολ} = \frac{27}{8} \alpha (Cb) = Q_1 = Q_2 = Q^{345} \quad \{8\}$$

Η {8} με την {3} μας δίνει λοιπόν τις τάσεις: $V_1 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{27\alpha/8}{\alpha} \Rightarrow V_1 = \frac{27}{8} (V)$

$$V_2 = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q_1}{C_1} = V_1 = \frac{27}{8} (V)$$

(Εναλλακτικός τρόπος υπολογισμού της τάσης V_5 : Από την {1} προκύπτει, ότι $V_5 = U - V_1 - V_2$
Αντικαθιστούμε και υπολογίζουμε.)

Τα φορτία Q_3 και Q_4 των πυκνωτών C_3 και C_4 υπολογίζονται, τέλος, ως εξής: Όπως φαίνεται από το σχήμα της συνδεσμολογίας, ισχύει

$$Q^{345} = Q_5 + Q^{34} \Rightarrow Q^{34} = Q^{345} - Q_5 = Q^{345} - C_5 \cdot V_5 = \frac{27}{8} \alpha - \alpha \frac{9}{4} \Rightarrow Q^{34} = \frac{9}{8} \alpha (Cb) \stackrel{\text{σχήμα}}{=} Q_3 = Q_4$$

$$\text{Όποτε } V_3 = \frac{Q_3}{C_3} = \frac{9\alpha/8}{\alpha} \Rightarrow V_3 = \frac{9}{8} (V) \text{ και } V_4 = \frac{Q_4}{C_4} = \frac{9\alpha/8}{\alpha} \Rightarrow V_4 = \frac{9}{8} (V)$$

Το γεγονός ότι στην προκειμένη περίπτωση $V_3 = V_4 = V_5/2$, αντικατοπτρίζει την ισότητα των χωρητικότητων των πυκνωτών.

2.6 Ενέργεια μιας κατανομής φορτίου

Προκειμένου να επιτευχθεί μια τυχαία κατανομή φορτίου, όπως για παράδειγμα να φορτισθεί ένας αγωγός με φορτίο Q , δαπανάται προφανώς κάποια ενέργεια: Ήδη η απομάκρυνση ή πρόσδοση (ανάλογα με το αν το φορτίο Q είναι θετικό ή αρνητικό) του πρώτου ηλεκτρονίου συνεπάγεται την δημιουργία ενός ηλεκτρικού πεδίου, μέσα στο οποίο πρέπει να μετακινηθεί υπό κατανάλωση έργου το δεύτερο κ.ο.κ.

Ο υπολογισμός του συνολικά δαπανώμενου έργου W γίνεται, θεωρώντας ακριβώς ότι το ολικό φορτίο Q μετακινείται κατά απειροστά ποσά dq : Έστω ότι σε κάποια χρονική στιγμή έχει μετακινηθεί ήδη φορτίο q . Τότε ο αγωγός (για να μην μιλάμε αφηρημένα περί κατανομής) έχει το δυναμικό $u=q/C$, όπου C είναι ως γνωστόν η χωρητικότητα του. Η μετακίνηση του αμέσως επόμενου ποσού φορτίου dq απαιτεί, σύμφωνα με τον ορισμό του δυναμικού, το έργο $dW = u \cdot dq$. Το ολικό έργο W θα είναι λοιπόν:

$$dq = Cdu$$

$$dW = u \cdot dq \Rightarrow dW = C \cdot u \cdot du \Rightarrow \int_0^W dW = C \int_0^U u du \Rightarrow W = \frac{1}{2} C \cdot U^2 = \frac{1}{2} QU = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad [2.9]$$

Οι δύο τελευταίες ισότητες προέκυψαν από τον ορισμό της χωρητικότητας ενός αγωγού: $C=Q/U$.

Σημειώτεον ότι U είναι το επιπλέον δυναμικό, το οποίο απέκτησε, ο αγωγός λόγω της, μετακίνησης του φορτίου Q , από το σημείο αναφοράς του δυναμικού ως τον αγωγό. Στην περίπτωση λοιπόν που το ζητούμενο έργο είναι εκείνο της φόρτισης ενός πυκνωτή θα πρέπει να αντικαταστήσουμε το δυναμικό U με την τάση V μεταξύ των οπλισμών, η οποία δημιουργείται κατά την μετακίνηση του φορτίου Q από τον ένα οπλισμό στον άλλο. Το παραπάνω έργο «φόρτισης», το οποίο στην περίπτωση του πυκνωτή προσφέρεται συνήθως από κάποια ηλεκτρική πηγή, δεν χάνεται (μια και το ηλεκτροστατικό πεδίο είναι συντηρητικό), αλλά αποταμιεύεται στον αγωγό ή πυκνωτή με την μορφή ηλεκτρική δυναμικής ενέργειας, η οποία θα μας δώσει ισόποσο έργο κατά την εκφόρτισή του. Σύμφωνα λοιπόν με τα παραπάνω έχουμε:

$$\text{Ενέργεια φορτισμένου πυκνωτή} \quad W = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad [2.9a]$$

2.6.1 Το ηλεκτρικό πεδίο ως φορέας της ηλεκτρικής ενέργειας

Η ενέργεια ενός επίπεδου πυκνωτή χωρητικότητας $C (= \epsilon_0 S/l, \text{ βλ. [2.4] })$, θα είναι λοιπόν σύμφωνα με την σχέση [2.9a]:

$$W = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{S}{l} V^2 \stackrel{V = EI}{=} \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{S}{l} (EI)^2 \Rightarrow W = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 v$$

όπου $v = \text{όγκος του χώρου μεταξύ των οπλισμών}$, δηλαδή του χώρου μέσα στον οποίο εκτείνεται το πεδίο.

Σύμφωνα με την παραπάνω σχέση η ενέργεια του φορτισμένου πυκνωτή μπορεί να θεωρηθεί αποθηκευμένη μέσα στο ηλεκτρικό του πεδίο και μάλιστα με μια πυκνότητα ενέργειας $w=W/v= \epsilon_0 E^2 /2$. Η σχέση αυτή διατηρεί την ισχύ της ακόμη και στην γενική περίπτωση ενός *μη ομογενούς* πεδίου, αρκεί η πυκνότητα ενέργειας να ορισθεί σαν η ενέργεια, η οποία είναι αποταμιευμένη σ' έναν τόσο μικρό όγκο dv , ώστε η ένταση του πεδίου να μπορεί να θεωρηθεί σαν σταθερή σε όλη του την έκταση:

Πυκνότητα ενέργειας του ηλεκτρικού πεδίου: $w = \frac{dW}{dv} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$ [2.10]

Είναι βέβαια ευνόητο, ότι στην γενική αυτή περίπτωση η πυκνότητα ενέργειας μεταβάλλεται από σημείο σε σημείο.

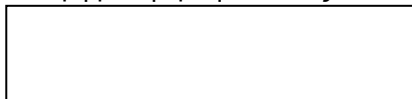
Σημειωτέον ότι η παραπάνω αντίληψη για την φύση του ηλεκτρικού πεδίου, ως φορέα της ηλεκτρικής ενέργειας, έχει τις αρχές της στους Maxwell και Faraday. Κατά την μελέτη δε της διάδοσης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων γίνεται φανερό, ότι δεν πρόκειται απλώς για μια δυνατότητα ερμηνείας της εξίσωσης [2.10], αλλά για μια από την Φύση επιβεβλημένη πραγματικότητα.

2.7 Δίπολα

Όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο, η συμπεριφορά των μονωτικών υλικών εντός του ηλεκτρικού πεδίου πηγάζει από εκείνη των λεγόμενων *ηλεκτρικών διπόλων*, τα οποία είτε υπάρχουν ευθύς εξ αρχής είτε εμφανίζονται, αφού το μονωτικό υλικό δεχθεί την επίδραση του ηλεκτρικού πεδίου. Είναι λοιπόν αναγκαίο να γνωρίσουμε τα χαρακτηριστικά αυτών των διπόλων πριν περάσουμε στην μελέτη της συμπεριφοράς των μονωτών.

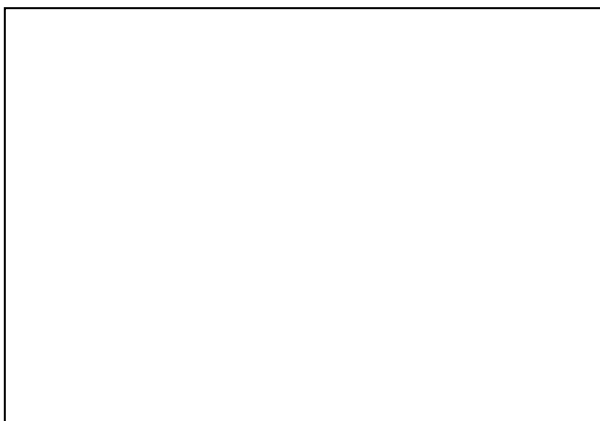
Ηλεκτρικό δίπολο καλείται κάθε ζεύγος δύο ίσων και αντίθετων σημειακών φορτίων ευρισκομένων πολύ κοντά το ένα στο άλλο. (Η μεταξύ τους απόσταση πρέπει να είναι πολύ μικρότερη από εκείνη του κέντρου του δίπολου από το σημείο που μας ενδιαφέρει).

Οι ηλεκτρικές ιδιότητες ενός δίπολου μπορούν να περιγραφούν πολύ κομψά από μαθηματική άποψη με την βοήθεια ενός διανύσματος, το οποίο καλείται



Διπολική ροή: $\vec{p} = q\vec{l}$ [2.11]

Ας υπολογίσουμε για παράδειγμα το ηλεκτρικό δυναμικό του δίπολου σε κάποιο σημείο Σ το οποίο απέχει απόσταση $r \gg l$ από το κέντρο του δίπολου (επειδή $r \gg l$ μπορούμε να πούμε απλώς "από το δίπολο"):



Το δυναμικό σε ένα τυχαίο σημείο Σ θα ισούται με το άθροισμα των δυναμικών των μεμονωμένων σημειακών φορτίων +q και -q (βλ. σχ. 2.5):

$$U = U_{+q} + U_{-q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_1} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-q}{r_2} \quad [1.15]$$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(r_2 - r_1)}{r_1 r_2}$$

Για $r \gg l$ οι γωνίες θ και θ' (βλ. σχ. 2.5) είναι σχεδόν ίσες, οπότε η διαφορά $r_2 - r_1 \approx l \cos\theta' \approx l \cos\theta$. Για $r \gg l$ έχουμε εξάλλου $r_1 \approx r_2 \approx r$ και γι' αυτό $r_1 r_2 \approx r^2$. Έτσι η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qI \cos\theta}{r^2} \stackrel{[2.11]}{=} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{r^2} \quad [2.12]$$

(Δυναμικό διπόλου διπολικής ροπής \vec{p})

όπου \hat{r} είναι το μοναδιαίο διάνυσμα με κατεύθυνση προς το σημείο που μας ενδιαφέρει (βλ. σχ. 2.5).

Από την παραπάνω σχέση φαίνεται, ότι τα σημεία της μεσοκαθέτου στον άξονα του διπόλου ($\theta = 90^\circ \Rightarrow \cos\theta = 0$) έχουν δυναμικό μηδέν, ενώ τα σημεία του άξονα του διπόλου ($\theta = 0^\circ \Rightarrow \cos\theta = 1$) έχουν το μέγιστο δυναμικό, το οποίο ελαττώνεται με το τετράγωνο της απόστασης (Το δυναμικό σημειακού φορτίου ελαττώνεται ανάλογα προς την απόσταση).

Το δίπολο μέσα σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο: Όταν το δίπολο βρεθεί μέσα σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο (π.χ. μεταξύ των οπλισμών επίπεδου πυκνωτή) έντασης \vec{E} , δέχεται την επίδραση ζεύγους δυνάμεων $\vec{F} = q\vec{E}$ και $-\vec{F}$, το οποίο ασκεί επί του διπόλου μηχανική ροπή

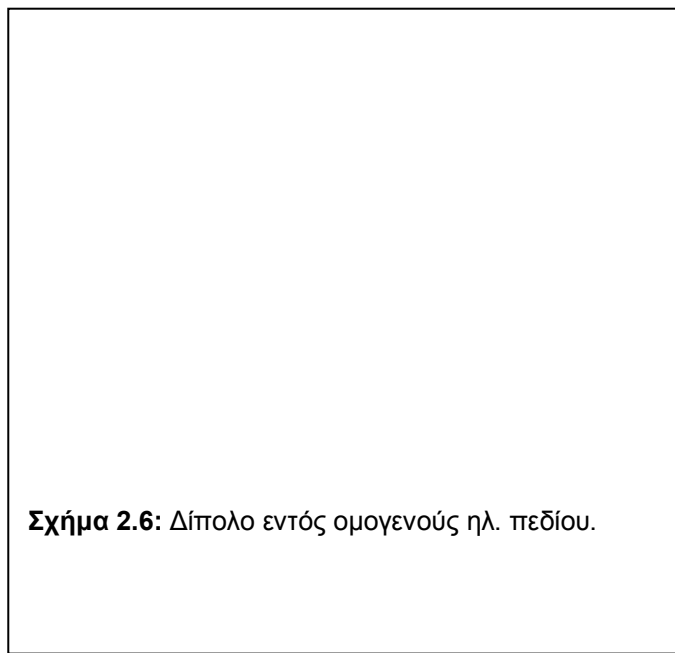
$$\vec{M} = [\vec{l} \times \vec{F}] = [\vec{l} \times q\vec{E}] = [q\vec{l} \times \vec{E}]$$

[2.11]

$$\Rightarrow \vec{M} = [\vec{p} \times \vec{E}]$$

[2.13]

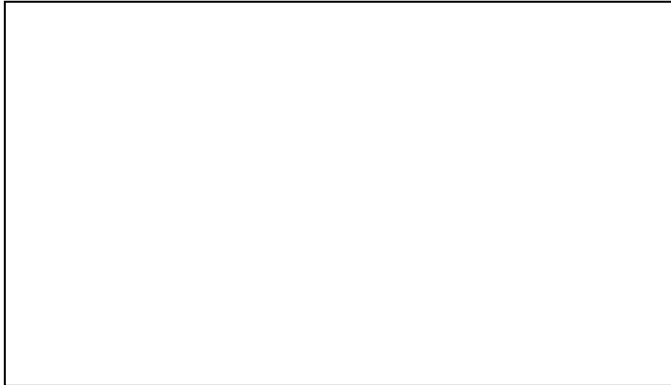
\vec{M} : μηχανική ροπή, εξασκούμενη επί διπόλου ηλεκτρικής ροπής \vec{p} εντός ομογενούς ηλ. πεδίου έντασης \vec{E} .



Σχήμα 2.6: Δίπολο εντός ομογενούς ηλ. πεδίου.

Το μέτρο M της μηχανικής ροπής είναι κατά τα γνωστά $M = pE \sin \theta$ [2.13α], και η φορά της φαίνεται από το σχήμα 2.7.

Από την σχέση [2.13α] φαίνεται, ότι η **μηχανική ροπή μηδενίζεται**, όταν η γωνία θ γίνει επίσης ίση με μηδέν, όταν δηλαδή η **ηλεκτρική ροπή p** (άρα και ο άξονας του διπόλου) γίνει παράλληλη προς την διεύθυνση του πεδίου.



Σημειωτέον ότι στην πράξη χαρακτηρίζουμε σαν δίπολο οποιοδήποτε σύστημα φορτίων, του οποίου το δυναμικό (σε απομακρυσμένα σημεία) δίδεται, από την σχέση [2.12].

Έτσι για παράδειγμα τα μόρια εκείνα, στα οποία δεν συμπίπτουν τα κέντρα κατανομής των θετικών και αρνητικών τους φορτίων (λόγω ασυμμετρίας της θέσεως των ηλεκτρονικών στοιβάδων και των πυρήνων του μορίου), έχουν (μόνιμη) διπολική ροπή και αποτελούν - τα πιο ενδιαφέροντα ίσως - δείγματα **φυσικών διπόλων**.

Υλικά, των οποίων τα μόρια έχουν μόνιμη διπολική ροπή ονομάζονται **πολικά** (π.χ. νερό/ H_2O , υδροχλώριο / HCl , αμμωνία / NH_3). Τα υπόλοιπα ονομάζονται **μη πολικά**.

2.8 Επίπεδος πυκνωτής με διηλεκτρικό – Διηλεκτρική σταθερά

Όπως παρατήρησε πρώτος ο Faraday, όταν μεταξύ των οπλισμών φορτισμένου και απομονωμένου επίπεδου πυκνωτή τοποθετηθεί ένα μονωτικό, η τάση μεταξύ των οπλισμών ελαττώνεται (χωρίς όμως να μηδενίζεται!). Αν αφαιρεθεί εξ άλλου το μονωτικό η τάση επανακτά την αρχική της τιμή, πράγμα το οποίο σημαίνει, ότι το φορτίο του πυκνωτή παρέμεινε αμετάβλητο.

Τα παραπάνω οδηγούν αναγκαστικά στο συμπέρασμα, ότι η αρχική χωρητικότητα $C_0 = Q/V_0$ αυξήθηκε σε $C = Q/V$, ενώ η ένταση του πεδίου μεταξύ των οπλισμών ελαττώθηκε από $E_0 = V_0 / l$ σε $E = V/l$, όπου l η απόσταση των οπλισμών.

Το πηλίκο της χωρητικότητας C ενός επίπεδου πυκνωτή, όταν ολόκληρος ο χώρος μεταξύ των οπλισμών του είναι γεμάτος με κάποιο διηλεκτρικό, προς την χωρητικότητα C_0 του ίδιου πυκνωτή στο κενό καλείται **διηλεκτρικός αριθμός ϵ_r** (δυστυχώς πολύ συχνά και **σχετική - ως προς το κενό - διηλεκτρική σταθερά**) του εν λόγω διηλεκτρικού και σύμφωνα με τα παραπάνω είναι:

Διηλεκτρικός αριθμός

(σχετική διηλεκτρική σταθερή)
$$\epsilon_r = \frac{C}{C_0} = \frac{V}{V_0} = \frac{E_0}{E} \quad [\quad 2.14 \quad]$$

Οι τιμές του διηλεκτρικού αριθμού ϵ_r ορισμένων μονωτικών περιέχονται στον Πίνακα 1.2.1. Σημειωτέον ότι πρόκειται για **ομογενή** (διαφορετικά ο ϵ_r μεταβάλλεται από σημείο σε σημείο) και

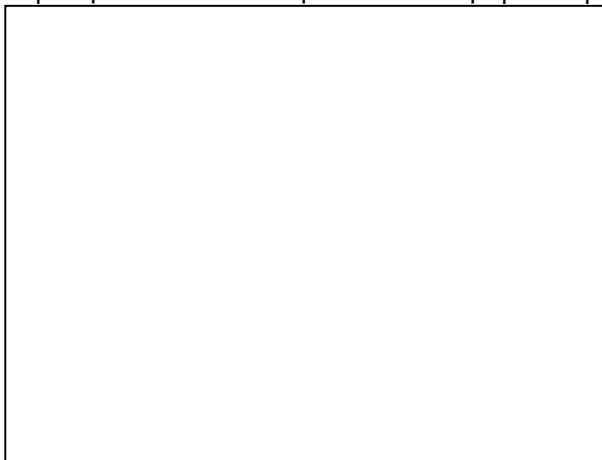
ισότροπα (διαφορετικά η τιμή του ϵ_r εξαρτάται από την κατεύθυνση) **διηλεκτρικά**, στα οποία και θα περιοριστούμε.

Το γεγονός ότι η τάση -άρα και η ένταση του πεδίου- απλώς ελαττώνεται χωρίς όμως να μηδενίζεται (όπως θα συνέβαινε αν ο μεταξύ των οπλισμών χώρος γέμιζε με κάποιον αγωγό) σημαίνει, ότι το ηλεκτρικό πεδίο διαπερνά τους μονωτές, εξ ου και ο χαρακτηρισμός τους ως « διηλεκτρικά».

Εφαρμογές: Διηλεκτρικά υψηλού διηλεκτρικού αριθμού επιτρέπουν την κατασκευή πυκνωτών σχετικά μεγάλης χωρητικότητας και μικρών διαστάσεων. Συνθετικά κεραμικά διηλεκτρικά, τα οποία περιέχουν οξειδίο του Βαρίου (BaO) και οξειδίο του Τιτανίου (TiO), έχουν για παράδειγμα διηλεκτρικούς αριθμούς της τάξεως $10^3 - 10^4$. Παρόμοια αύξηση της χωρητικότητας επιτυγχάνεται εξάλλου με την βοήθεια λεπτότατων στρωμάτων διηλεκτρικού, όπως στην περίπτωση των ηλεκτρολυτικών πυκνωτών. Η χρήση, τέλος, των διηλεκτρικών έχει επιπλέον και ένα άλλο «μηχανικό» πλεονέκτημα: εμποδίζει τους οπλισμούς του πυκνωτή να έρθουν σε επαφή αυξάνοντας έτσι την ανθεκτικότητα των πυκνωτών σε μηχανικές καταπονήσεις, όπως π.χ. είναι οι κραδασμοί.

Ας προσπαθήσουμε τώρα να κατανοήσουμε την συμπεριφορά των διηλεκτρικών εντός του ηλεκτρικού πεδίου, ξεκινώντας από τα πειραματικά δεδομένα για τον επίπεδο πυκνωτή με διηλεκτρικό. Σημειωτέον ότι όλα τα υπόλοιπα ισχύουν με την **προϋπόθεση** πως το πεδίο μεταξύ των οπλισμών είναι ομογενές, δεν παίρνουν δηλαδή υπόψη την περιοχή των άκρων.

Σύμφωνα με την εξίσωση {2} ($Q = \epsilon_0 E S$, $Q =$ φορτίο - $S =$ μετωπική επιφάνεια- έκαστου οπλισμού) του κεφαλαίου 2.4α, η ένταση E του πεδίου στον χώρο μεταξύ των οπλισμών είναι ανάλογη της επιφανειακής πυκνότητας φορτίου $\sigma = Q/S$ των οπλισμών του. Η εξασθένιση λοιπόν του πεδίου παρουσία διηλεκτρικού θα συνεπάγεται κατ' ανάγκη και την ελάττωση της γενεσιουργού του πεδίου επιφανειακής πυκνότητας και μάλιστα κατά τον ίδιο παράγοντα ϵ_r .

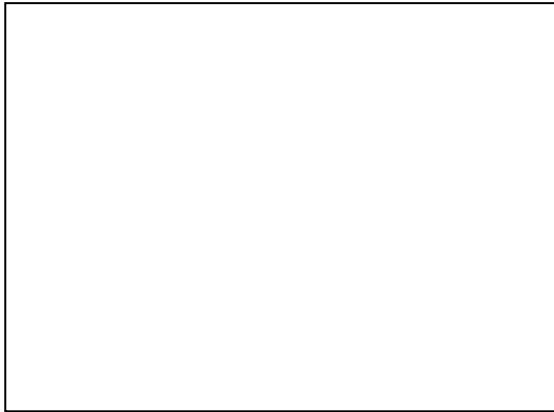


Επειδή δε η τοποθέτηση του διηλεκτρικού δεν μετέβαλλε το φορτίο Q_0 των οπλισμών, πρέπει η εν λόγω ελάττωση της γενεσιουργού επιφανειακής πυκνότητας φορτίου να οφείλεται στην εμφάνιση φορτίων στην επιφάνεια του διηλεκτρικού και μάλιστα αρνητικών ($-Q_p$) στην πλευρά που εφάπτεται τον θετικά φορτισμένο οπλισμό και θετικών (Q_p) στην απέναντι (βλ. σχ. 2.8). Το φαινόμενο αυτό καλείται **πόλωση του διηλεκτρικού**, όρος ο οποίος θα αποσαφηνιστεί στην συνέχεια.

Το φορτίο πολώσεως δημιουργεί ένα νέο πεδίο έντασης $E_p = Q_p / (\epsilon_0 S) \equiv \sigma_p / \epsilon_0$, όπου σ_p είναι η **επιφανειακή πυκνότητα του φορτίου πολώσεως**.

Σημειωτέον ότι η παραπάνω τιμή της E_p αναφέρεται στο *εσωτερικό* του διηλεκτρικού. Στον χώρο έξω από το διηλεκτρικό το πεδίο πολώσεως μηδενίζεται, μια και το πεδίο της μιας πλευράς του διηλεκτρικού εξουδετερώνει εκείνο της άλλης.

Πεδίο εντός ομογενούς και ισότροπου διηλεκτρικού ευρισκόμενου εντός του ομογενούς πεδίου επίπεδου πυκνωτή



$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_p : \text{συνολικό πεδίο}$$

$$\vec{E}_0 : \text{πεδίο του φορτίου του πυκνωτή}$$

$$\vec{E}_p \text{ πεδίο του φορτίου πολώσεως}$$

$$E_0 = \sigma_0 / \epsilon_0$$

Σχήμα 2.9: Πεδίο \vec{E}_0 : του φορτίου των οπλισμών,

$$E_p = \sigma_p / \epsilon_0$$

\vec{E}_p : του φορτίου πόλωσης και \vec{E} : συνολικό πεδίο εντός του διηλεκτρικού.

σ_0 : επιφανειακή πυκνότητα των οπλισμών

σ_p : επιφανειακή πυκνότητα του διηλεκτρικού

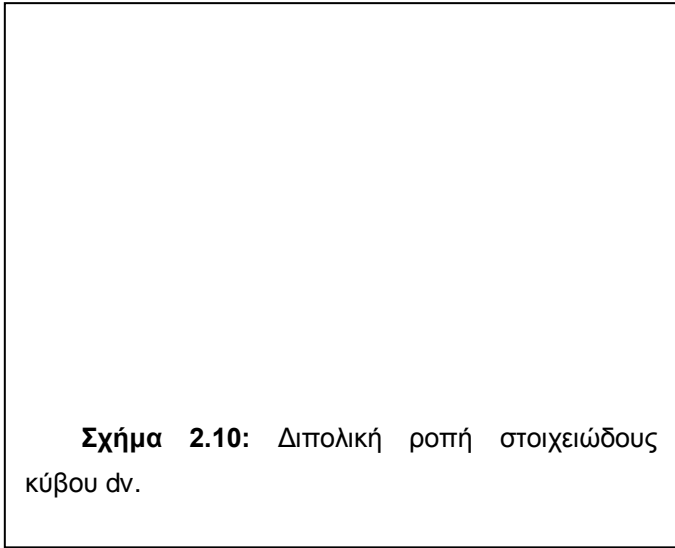
Όπως φαίνεται από το όχημα 2.9, το πεδίο πολώσεως \vec{E}_p είναι αντίθετο προς το πεδίο \vec{E}_0 , το οποίο οφείλεται στο φορτίο Q του πυκνωτή ($E_0 = Q_0 / (\epsilon_0 S) \equiv \sigma_0 / \epsilon_0$). Έτσι το συνολικό πεδίο $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_p$ είναι μειωμένο στο εσωτερικό του διηλεκτρικού και μάλιστα κατά τον παράγοντα $1/\epsilon_r$, όπως προκύπτει πειραματικά:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_p \quad \overset{\text{πείραμα}}{=} \quad \vec{E}_0 / \epsilon_r \quad [2.15]$$

(πεδίο στο εσωτερικό του ομογενούς και ισότροπου διηλεκτρικού επίπεδου πυκνωτή).

Θεωρώντας την φορά του πεδίου \vec{E}_0 ως θετική η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$E_0 - E_p = E_0 / \epsilon_r \Rightarrow E_p = (1 - 1/\epsilon_r)E_0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_p = \epsilon_0 \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \right) E_0 \quad \{1\}$$



Σχήμα 2.10: Διπολική ροπή στοιχειώδους κύβου dv .

Όπως βλέπουμε, η πυκνότητα σ_p δεν εξαρτάται από το πάχος του διηλεκτρικού. Ακόμη λοιπόν και αν αυτό είναι λεπτότερο από το χώρο μεταξύ των οπλισμών η επιφανειακή πυκνότητα σ_p του φορτίου πολώσεως θα είναι η ίδια, με την προϋπόθεση βέβαια πως το σχήμα και ο προσανατολισμός του διηλεκτρικού δεν μεταβάλλονται. Το γεγονός αυτό μας επιτρέπει να υποθέσουμε πως την ίδια επιφανειακή πυκνότητα σ_p θα έχουν και οι μετωπικές (παράλληλες δηλαδή προς τους οπλισμούς) έδρες (βλ. σχ. 2.10) ενός τυχαίου, « μακροσκοπικά στοιχειώδους » (μικρού δηλαδή ως προς τις διαστάσεις του διηλεκτρικού, μεγάλου όμως ως προς εκείνες των ατόμων του) κύβου $dv = dS dl$, μια και

μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το διηλεκτρικό αποτελείται από λεπτές φέτες αντίστοιχου πάχους dl .

Κάθε τέτοιος στοιχειώδης κύβος dv θα έχει κατά συνέπεια μια στοιχειώδη διπολική ροπή $d\vec{p}$, της οποίας η τιμή θα δίδεται από την σχέση [2.11]:

$$dp = dQ_p dl \quad \begin{matrix} = \\ \uparrow \\ dQ_p = \sigma_p dS \end{matrix} \quad \sigma_p dS dl \Rightarrow dp = \sigma_p dv \Leftrightarrow \sigma_p = \frac{dp}{dv} \quad \{ 2 \}$$

Σκεπτόμενοι τώρα, ότι το πεδίο στο εσωτερικό του διηλεκτρικού εξαρτάται (βλ. σχέσεις σχήματος 2.9) από την τιμή της επιφανειακής πυκνότητας σ_p , η οποία με την σειρά της ισούται (βλ. σχ. {2}) με την ανά μονάδα όγκου dv από το εξωτερικό πεδίο (με κάποιον διερευνητέο μηχανισμό) προκαλούμενη διπολική ροπή dp , εύκολα καταλαβαίνουμε την ανάγκη εισαγωγής του ακόλουθου φυσικού μεγέθους:

Διηλεκτρική πόλωση \vec{P} ενός διηλεκτρικού καλείται η (συνήθως υπό την επίδραση κάποιου εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου προκαλούμενη) συνολική ηλεκτρική ροπή της μονάδας όγκου του διηλεκτρικού: $\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dv}$, $P = \sigma_p$ [2.16]

Όπου σ_p : επιφανειακή πυκνότητα του φορτίου (πολώσεως), την οποία θα έπρεπε να έχει κάθε κάθετη προς την διηλεκτρική πόλωση \vec{P} (στο κέντρο του) έδρα ενός στοιχειώδους κύβου dv του διηλεκτρικού, ώστε να προκαλούσε διπολική ροπή $d\vec{p} = \vec{P} dv$.

Από τον συνδυασμό των σχέσεων [2.16] και {1} και αφού πάρουμε υπόψη και την φορά των

διανυσμάτων \vec{P} , \vec{E}_0 και \vec{E} παίρνουμε:

$$\left. \begin{array}{l} [2.16]: P = \sigma_p \\ \{1\}: \sigma_p = \varepsilon_0 \left(\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \right) E_0 \end{array} \right\} \vec{P} = \varepsilon_0 \left(\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \right) \vec{E}_0 \Rightarrow \vec{P} = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) \vec{E} \equiv \varepsilon_0 \chi \vec{E} \quad [2.17]$$

$$\text{όπου} \quad \chi = \varepsilon_r - 1 \quad \text{: διηλεκτρική επιδεκτικότητα} \quad [2.18]$$

Παρατηρήσεις : 1^η) Η σχέση [2.17] ισχύει για ομογενή και ισότροπα διηλεκτρικά ακόμη και

στην περίπτωση που το πεδίο \vec{E}_0 είναι μη ομογενές, μια και - σύμφωνα με την εξίσωση ([2.16])

ορισμού της - η διηλεκτρική πόλωση \vec{P} χαρακτηρίζει κατ' αρχήν μια τόσο μικρή περιοχή του διηλεκτρικού, ώστε το πεδίο \vec{E}_0 να μπορεί να εκληφθεί σαν ομογενές σε όλο της τον όγκο dv . Εξάλλου η σχέση [2.17] δεν μας λέει τίποτε άλλο, παρά πως **α)** η πόλωση σε κάποιο σημείο ενός διηλεκτρικού έχει την ίδια διεύθυνση και φορά με την ένταση του πεδίου στο εν λόγω σημείο -και πώς θα μπορούσε να μην έχει, την στιγμή που το διηλεκτρικό προϋποτίθεται ισότροπο;

β) το αποτέλεσμα (δηλ. η πόλωση) είναι ανάλογο προς το αίτιο (δηλ. την ένταση του ηλ. πεδίου), πράγμα το οποίο είναι αυτονόητο για όλα τα γραμμικά καλούμενα υλικά. Υλικά, τα οποία δεν ακολουθούν τον κανόνα αυτό δεν θεωρούνται διηλεκτρικά αλλά σιδηροηλεκτρικά (βλ. παρακάτω).

2^η) Στην περίπτωση μη ισότροπου διηλεκτρικού η διηλεκτρική πόλωση εξαρτάται από τον προσανατολισμό του. Έτσι η διηλεκτρική επιδεκτικότητα χ δεν είναι πλέον μονόμετρο μέγεθος αλλά τανυστής $2^{ου}$ μεγέθους (βλ. σχ. 2.11), με αποτέλεσμα τα διανύσματα \vec{P} και \vec{E} να μην έχουν πλέον την ίδια διεύθυνση.

Τανυστής διηλεκτρικής επιδεκτικότητας

Οι ηλεκτρικές (και όχι μόνο) ιδιότητες ενός *ανισότροπου* διηλεκτρικού εξαρτώνται από την κατεύθυνση. Για τον λόγο αυτό η διηλεκτρική επιδεκτικότητα είναι τανυστής 2^{ου} μεγέθους, πράγμα το οποίο υποδηλώνουν οι δύο γραμμές κάτω από το σύμβολο της: $\underline{\chi}$. Σαν τανυστής (2^{ου} μεγέθους εννοείται από $\underline{\omega}$ και στο εξής) η επιδεκτικότητα έχει εννέα συντελεστές, οι οποίοι αποδίδονται συνήθως με την βοήθεια του ακόλουθου μητρώου:

$$\underline{\chi} = \begin{pmatrix} \chi_{11} & \chi_{12} & \chi_{13} \\ \chi_{21} & \chi_{22} & \chi_{23} \\ \chi_{31} & \chi_{32} & \chi_{33} \end{pmatrix}$$

:τανυστής διηλεκτρικής επιδεκτικότητας

(Οι δείκτες 1,2,3, χρησιμοποιούνται συνήθως ανά των x, y, z.

Η φυσική σημασία των συντελεστών χ_{ij} της διηλεκτρικής επιδεκτικότητας είναι η ακόλουθη:

Ο συντελεστής χ_{ij} καθορίζει την διηλεκτρική πόλωση την οποία προκαλεί κατά την κατεύθυνση i από την συνιστώσα E_j του ηλεκτρικού πεδίου \vec{E} ($i,j=1,2,3=x,y,z$). Το γεγονός αυτό κάνει την παρακάτω σχέση υπολογισμού των συντελεστών \vec{P} , της διηλεκτρικής πόλωσης \vec{P} , η οποία προκύπτει από την σχέση [2.17] σε συνδυασμό με τους κανόνες πολλαπλασιασμού των μητρώων, αυτονόητη: $P_i = \varepsilon_0 \sum_j \chi_{ij} E_j$

Σημειωτέον ότι ο τανυστής της διηλ. Επιδεκτικότητας είναι πάντα συμμετρικός: $\chi_{ij} = \chi_{ji}$

Σχήμα 2.11: Γενικά περί του τανυστή της διηλεκτρικής επιδεκτικότητας.

3^η) Υπάρχει μια κατηγορία υλικών, τα λεγόμενα σιδηροηλεκτρικά (σε αντιστοιχία με τα σιδηρομαγνητικά), των οποίων η επιδεκτικότητα εξαρτάται τόσο από την ένταση του πεδίου όσο και από την προϊστορία τους. Αυτό σημαίνει, ότι η σχέση μεταξύ της διηλ. πόλωσης \vec{P} και της έντασης \vec{E} δεν είναι πλέον γραμμική (η σχέση [2.17] είναι δηλαδή ουσιαστικά άχρηστη). Η πόλωση των υλικών αυτών μπορεί να είναι διάφορη του μηδενός ακόμη και όταν δεν υπάρχει εξωτερικό πεδίο. Σε ορισμένες περιπτώσεις η πόλωση παραμένει αμετάβλητη ακόμη και υπό την επίδραση ισχυρών ηλεκτρικών πεδίων, μεταβάλλεται όμως εάν το υλικό θερμανθεί. Τέτοια υλικά χαρακτηρίζονται συνήθως σαν πυροηλεκτρικά προκειμένου να τα διακρίνουμε από τα υπόλοιπα, τα οποία και χαρακτηρίζονται σαν σιδηροηλεκτρικά.

Ο σιδηροηλεκτρισμός εξαφανίζεται συνήθως, όταν η θερμοκρασία ξεπεράσει μια χαρακτηριστική για το υλικό τιμή. Το μέχρι τότε σιδηροηλεκτρικό υλικό μεταβαίνει σε μια κατάσταση, η οποία χαρακτηρίζεται σαν παραηλεκτρική. Ο όρος αυτός χρησιμοποιείται και πάλι σε αντιστοιχία με τον παραμαγνητισμό, και υποδηλώνει κυρίως την γρήγορη πτώση της διηλεκτρικής σταθερής με αυξανόμενη θερμοκρασία. (

Περισσότερα περί σιδηροηλεκτρικών υλικών θα βρει ο αναγνώστης π.χ. στο βιβλίο του Charles Kittel: "Einführung in die Festkörperphysic", 5^η Έκδοση, R.Oldenbourg 1980, ή στο πρωτότυπο "Introduction to Solid State Physics", 5^η Έκδοση, John Wiley & Sons 1976)

Στο σημείο αυτό κρίνεται σκόπιμο να ανακεφαλαιώσουμε, όσα είπαμε μέχρι τώρα για τον επίπεδο πυκνωτή με διηλεκτρικό, πριν επιχειρήσουμε στο επόμενο κεφάλαιο να καταλήξουμε σε γενικά συμπεράσματα.

Όταν λοιπόν ο χώρος μεταξύ των οπλισμών επίπεδου πυκνωτή γεμίσει πλήρως με κάποιο διηλεκτρικό, η χωρητικότητα του πυκνωτή αυξάνει κατά έναν παράγοντα ϵ_r , ο οποίος καλείται διηλεκτρικός αριθμός και είναι χαρακτηριστικός για το συγκεκριμένο διηλεκτρικό.

Η παραπάνω αύξηση της χωρητικότητας του επίπεδου πυκνωτή είναι αποτέλεσμα της αντίστοιχης ελάττωσης του ηλεκτρικού πεδίου στο εσωτερικό του διηλεκτρικού, η οποία με την σειρά της οφείλεται στην εμφάνιση φορτίων πολώσεως στην επιφάνεια του διηλεκτρικού:

θετικών στην πλευρά που εφάπτεται τον αρνητικά φορτισμένο οπλισμό και αρνητικών στην απέναντι.

Η πόλωση αυτή του διηλεκτρικού έχει σαν αποτέλεσμα την δημιουργία ενός νέου ηλεκτρικού πεδίου, του πεδίου πολώσεως \vec{E}_p , το οποίο έχει αντίθετη φορά προς το πεδίο \vec{E}_0 , που πηγάζει από το φορτίο των οπλισμών. Αποτέλεσμα του γεγονότος αυτού είναι η ελάττωση του συνολικού πεδίου $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_p$ ακριβώς κατά τον παράγοντα ϵ_r : $\vec{E} = \vec{E}_0 / \epsilon_r$. Σημειωτέον ότι η τιμή αυτή του συνολικού πεδίου ισχύει για την συγκεκριμένη γεωμετρία του επίπεδου πυκνωτή, του οποίου όλος ο μεταξύ των οπλισμών του ευρισκόμενος χώρος καλύπτεται από διηλεκτρικό.

Η πόλωση του διηλεκτρικού περιγράφεται εξάλλου με την βοήθεια ενός νέου διανυσματικού μεγέθους, της διηλεκτρικής πόλωσης \vec{P} , η οποία ορίζεται σαν η συνολική ηλεκτρική ροπή της μονάδας όγκου του διηλεκτρικού: $\vec{P} = d\vec{p} / dV$. Στην περίπτωση ομογενών και ισότροπων διηλεκτρικών η διηλ. πόλωση δίδεται από την σχέση: $\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$, όπου χ είναι η χαρακτηριστική για το συγκεκριμένο διηλεκτρικό διηλεκτρική επιδεκτικότητα. Στην συγκεκριμένη περίπτωση του επίπεδου πυκνωτή η επιφανειακή πυκνότητα του φορτίου πολώσεως καθώς και το εξ αυτής πηγάζον πεδίο πολώσεως συνδέονται με την διηλεκτρική πόλωση μέσω των ακόλουθων εξισώσεων: $\sigma_p = P, \vec{E}_p = -\vec{P} / \epsilon_0$

2.9 Φορτίο πολώσεως. Ηλεκτρική διαταραχή (ή μετατόπιση)

[μόνο τύπους & συμπεράσματα]

Ας προσπαθήσουμε τώρα, όπως υποσχθήκαμε, να γενικεύσουμε τα παραπάνω συμπεράσματα, έτσι ώστε να ισχύουν για κατά το δυνατόν γενικότερες, πρακτικά ενδιαφέρουσες περιπτώσεις:

α) Επιφανειακή πυκνότητα του φορτίου πολώσεως επί της επιφάνειας

διηλεκτρικού, το οποίο περιβάλλεται από κενό: Όπως είδαμε (βλ. [2.16]), στην περίπτωση που η διηλ. πόλωση \vec{P} είναι κάθετη προς την επιφάνεια του διηλεκτρικού, το μέτρο της P ισούται (ουσιαστικά εξ ορισμού) με την επιφανειακή πυκνότητα του φορτίου πολώσεως ($\sigma_p = P$). Αντιθέτως αν η διηλ. πόλωση είναι *παράλληλη* προς την επιφάνεια του διηλεκτρικού, η επιφανειακή πυκνότητα του φορτίου πολώσεως ισούται με μηδέν.

Στην γενική περίπτωση τυχαίου προσανατολισμού της διηλεκτρικής πόλωσης (βλ. σχ. 2.12) μπορούμε να την αναλύσουμε σε μια κάθετη (\vec{P}_κ) και μια παράλληλη (\vec{P}_π) προς την επιφάνεια συνιστώσα. Η επιφανειακή πυκνότητα σ_p θα ισούται κατά τα γνωστά με το μέτρο P_κ της κάθετης προς την επιφάνεια συνιστώσας:

Σχήμα 2.12: Για τον υπολογισμό της επιφανειακής πυκνότητας του φορτίου πολώσεως, όταν το διηλεκτρικό περιβάλλεται από κενό. (\hat{n} είναι το κάθετο επί της επιφάνειας μοναδιαίο

$$\text{σχ.2.12} \\ \sigma_p = P_\kappa = P \cos \theta \equiv P \cos \mathcal{A}|\hat{n}| \Rightarrow \sigma_p = (\vec{P} \cdot \hat{n}) \quad [2.18]$$

(επιφανειακή πυκνότητα του φορτίου πολώσεως επί της επιφάνειας διηλεκτρικού, το οποίο περιβάλλεται από κενό.)

Στην παραπάνω σχέση \vec{P} = διηλεκτρική πόλωση αμέσως κάτω από την επιφάνεια

\hat{n} = μοναδιαίο διάνυσμα, κάθετο επί της επιφάνειας και με φορά προς το εξωτερικό του διηλεκτρικού.

Με αφετηρία την σχέση [2.18] μπορούμε να υπολογίσουμε το **ολικό φορτίο πολώσεως επί της εξωτερικής επιφάνειας οποιουδήποτε διηλεκτρικού, το οποίο περιβάλλεται, από κενό:**

$$[2.18] \quad \sigma_p = \frac{dQ_p}{dS} = (\vec{P} \cdot \hat{n}) \Rightarrow dQ_p = (\vec{P} \cdot \hat{n})dS \equiv \vec{P} \cdot d\vec{S} \Rightarrow Q_p = \oint \vec{P} \cdot d\vec{S} \quad [2.18\alpha]$$

β) Επιφανειακή πυκνότητα του φορτίου πολώσεως επί της διαχωριστικής επιφάνειας δύο διαφορετικών διηλεκτρικών: Στην περίπτωση αυτή (βλ. σχ. 2.13) θα πρέπει να πάρουμε υπ' όψη μας



την συνεισφορά των διηλεκτρικών πολώσεων \vec{P}_1 και \vec{P}_2 εκατέρωθεν της διαχωριστικής επιφάνειας.

Σύμφωνα λοιπόν με την σχέση [2.18] έχουμε:

$$\sigma_p = (\vec{P}_1 \cdot \hat{n}_1) + (\vec{P}_2 \cdot \hat{n}_2) \quad [2.19]$$

Σχήμα 2.13: Για τον υπολογισμό της επιφανειακής πυκνότητας του φορτίου πολώσεως επί της διαχωριστικής επιφάνειας δύο διαφορετικών διηλεκτρικών.

(επιφανειακή πυκνότητα του φορτίου πολώσεως επί της διαχωριστικής επιφάνειας δύο διαφορετικών διηλεκτρικών)

Στην παραπάνω σχέση $\vec{P}_i =$ διηλ. πόλωση του διηλεκτρικού i .

$\hat{n}_i =$ μοναδιαίο διάνυσμα. κάθετο επί της διαχωριστικής επιφάνειας και με φορά προς το εξωτερικό του διηλεκτρικού i .

Στην παραπάνω περίπτωση εντάσσεται και η **υποπερίπτωση β1**) κατά την οποία εκατέρωθεν της « διαχωριστικής » επιφάνειας βρίσκεται το ίδιο διηλεκτρικό. Πρόκειται δηλαδή για την **επιφανειακή πυκνότητα του φορτίου πολώσεως επί τυχαίας επιφάνειας στο εσωτερικό ενός (ομογενούς και**

[2.17]

ισότροπου εννοείται πάντα) **διηλεκτρικού:** Τότε θα έχουμε $\vec{P}_1 \equiv \vec{P}_2 = \epsilon_0 \chi \vec{E}$, όπου \vec{E} η ένταση

του ηλεκτρικού πεδίου επί της εν λόγω επιφάνειας.

Παίρνοντας επιπλέον υπ' όψη ότι $\hat{n}_1 = -\hat{n}_2$, η σχέση [2.19] μας δίνει απ' ευθείας: $\sigma_p = 0$.

Επομένως η επιφανειακή πυκνότητα του φορτίου πολώσεως επί μιας τυχαίας επιφάνειας στο εσωτερικό ενός ομογενούς και ισότροπου διηλεκτρικού ισούται με μηδέν.

γ) Στην περίπτωση μιας κλειστής επιφάνειας S (βλ. σχ.2.14) το γινόμενο $(\vec{P} \cdot d\vec{S})$ ισούται με το φορτίο πολώσεως, το οποίο μετακινήθηκε από το εντός της επιφάνειας ευρισκόμενο διηλεκτρικό προς το στοιχείο dS της εν λόγω επιφάνειας, αφήνοντας έτσι φορτίο $-(\vec{P} \cdot d\vec{S})$ στο εσωτερικό της. Άρα το ολικό φορτίο πολώσεως στο εσωτερικό της κλειστής επιφάνειας S θα είναι:



$$Q_p = -\oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} \quad [2.20]$$

(φορτίο πολώσεως εντός κλειστής επιφάνειας S στο εσωτερικό ενός διηλεκτρικού)

Ας θεωρήσουμε τώρα μια τυχαία κλειστή επιφάνεια S , σε έναν χώρο όπου επικρατεί ηλεκτροστατικό πεδίο εντάσεως \vec{E} , η οποία περικλείει διάφορους αγωγούς και διηλεκτρικά ή τμήματα αυτών. Όσο πολύπλοκη και αν είναι η μορφή του πεδίου, πάντα θα ισχύει με το νόμο του Gauss:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{Q_{ολ}}{\epsilon_0} = \frac{Q + Q_p}{\epsilon_0} \quad \{1\},$$

όπου $Q =$ ολικό «πραγματικό» φορτίο (π.χ. πλεόνασμα ηλεκτρονίων εντός ενός

ενός μετάλλου) εντός της επιφάνειας S.

$Q =$ ολικό «φαινομενικό» (δηλαδή μέσω πολώσεως « εμφανισμένο» φορτίο πολώσεως εντός της επιφάνειας S.

Αν στην σχέση {1} αντικαταστήσουμε το φορτίο πολώσεως από την σχέση [2.20], θα πάρουμε:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} - \frac{1}{\epsilon_0} \oint_S \vec{P} d\vec{S} \Rightarrow \oint_S \vec{E} d\vec{S} + \frac{1}{\epsilon_0} \oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \oint_S \left(\vec{E} + \frac{1}{\epsilon_0} \vec{P} \right) \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow \oint_S (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \cdot d\vec{S} = Q \Leftrightarrow$$

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q \quad \text{:Γενική διατύπωση του νόμου του Gauss}$$

(ισχύει παρουσία και μη ύλης)[2.21]

όπου $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad \text{: Ηλεκτρική διαταραχή ή μετατόπιση [2.22]}$

$Q =$ ολικό «πραγματικό» φορτίο (π.χ. πλεόνασμα ηλεκτρονίων εντός ενός

ενός μετάλλου) εντός της επιφάνειας S.

Αντικαθιστώντας στην [2.22] τις σχέσεις [2.17] $\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$ και [2.18] $\chi = \epsilon_r - 1$ παίρνουμε:

$$\vec{D} = \epsilon_0 (1 + \chi) \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \equiv \epsilon \vec{E} \quad [2.23]$$

όπου

$$\epsilon = : \epsilon_0 \epsilon_r \quad \text{:διηλεκτρική σταθερή} \quad [2.24]$$

Τιμές της διηλεκτρικής σταθερής ορισμένων διηλεκτρικών περιέχονται στον Πίνακα 1.1.1.

Όπως η διηλεκτρική επιδεκτικότητα (βλ. κεφ. 2.8) έτσι και η διηλεκτρική σταθερή, στην περίπτωση ανισότροπων διηλεκτρικών, δεν είναι μονόμετρο μέγεθος αλλά τανυστής 2^{ου} μεγέθους, με αποτέλεσμα τα διανύσματα \vec{D} και \vec{E} να έχουν διαφορετικές διευθύνσεις. Επιπλέον η διηλεκτρική σταθερή των σιδηροηλεκτρικών υλικών εξαρτάται και από την ένταση \vec{E} του ηλεκτρικού πεδίου.

Η ονομασία «διηλεκτρική διαταραχή» (ή «μετατόπιση») για το διάνυσμα \vec{D} έχει καθαρά ιστορική προέλευση και δεν συνδέεται με την πραγματική του υπόσταση, η οποία παραμένει ουσιαστικά ασαφής. Γεγονός είναι βέβαια, ότι η εισαγωγή του διανύσματος \vec{D} συμβάλλει αποφασιστικά στην συστηματική συντομογράφηση των αντιστοίχων εξισώσεων, πράγμα το οποίο και την καταξιώνει. Σαν απλό παράδειγμα αναφέρουμε την παραπάνω γενική διατύπωση του νόμου του Gauss ([2.21]).

μ.γ.ό.ε

δ) Στην

περίπτωση ενός ομογενώς πολωμένου διηλεκτρικού ($\vec{P} = \text{σταθ.}$) η ροή $\oint \vec{P} d\vec{S}$ της πόλωσης μέσω μιας τυχαίας κλειστής επιφάνειας S μηδενίζεται, όπως αποδεικνύεται στο σχήμα 2.15. Τότε σύμφωνα με την σχέση [2.20] μηδενίζεται και το εντός της επιφάνειας ευρισκόμενο φορτίο πολώσεως. Αυτό σημαίνει ότι

το φορτίο πολώσεως ενός ομογενώς πολωμένου διηλεκτρικού κατανέμεται εξ ολοκλήρου στην επιφάνειά του.

Επομένως

το πεδίο πολώσεως \vec{E}_p ενός ομογενώς πολωμένου διηλεκτρικού καθορίζεται εξ ολοκλήρου από την γεωμετρική μορφή της επιφάνειας του διηλεκτρικού.

Σημειωτέον ότι στην πράξη δεν είναι λίγες οι περιπτώσεις ομογενώς πολωμένων διηλεκτρικών. Συγκεκριμένα (βλ. π.χ. R.Becker "Theorie der Elektrizität", τόμος 1, Teubner 1972) διηλεκτρικά ελλειψοειδούς μορφής - οριακές περιπτώσεις της οποίας αποτελούν και οι σφαίρες, επιμήκεις κύλινδροι και λεπτές επίπεδες πλάκες - πολώνονται ομοιόμορφα, όταν βρεθούν εντός ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου. Η δε ομοιόμορφη τους πόλωση συνεπάγεται ένα επίσης ομοιόμορφο πεδίο πολώσεως στο εσωτερικό του διηλεκτρικού, του οποίου οι συντεταγμένες δίδονται από την σχέση:

Ροή ομογενούς πεδίου \vec{A} μέσω τυχαίας κλειστής επιφάνειας S



(Χάριν απλότητας στο διπλανό σχήμα αποδίδεται η τομή της κλειστής επιφάνειας S με το επίπεδο του χαρτιού.)

Θεωρούμε την επιφάνεια S χωρισμένη σε στοιχειώδεις κυλίνδρους (ή παραλληλεπίπεδα), των οποίων ο άξονας συμπίπτει με την διεύθυνση του πεδίου \vec{A} . Κάθε τέτοιος κύλινδρος τέμνει από την επιφάνεια S τα στοιχειώδη τμήματα $d\vec{S}_1$ και $d\vec{S}_2$.

Η ροή $d\Phi$ μέσω έκαστου στοιχειώδους κυλίνδρου ισούται με εκείνη μέσω των παραπάνω τμημάτων $d\vec{S}_1$ και $d\vec{S}_2$:

$$\vec{A} = A \cos \theta \hat{n}$$
$$d\Phi = d\Phi_1 + d\Phi_2 = \vec{A} \cdot d\vec{S}_1 + \vec{A} \cdot d\vec{S}_2 = A [\cos \vartheta_1 \cdot dS_1 + \cos \vartheta_2 \cdot dS_2] \quad \{1\}$$

(dS_{k1} , dS_{k2} = προβολές των τμημάτων dS_1 και dS_2 αντίστοιχα σ' ένα επίπεδο κάθετο προς τον άξονα του κυλίνδρου, και κατά συνέπεια ίσες με την γεωμετρική βάση dS_k του στοιχειώδους κυλίνδρου.)

Ο μηδενισμός της στοιχειώδους ροής $d\Phi$ μέσω έκαστου από τους στοιχειώδεις κυλίνδρου, στους οποίους έχουμε χωρίσει την κλειστή επιφάνεια S, συνεπάγεται αναγκαστικά και τον μηδενισμό της ολικής

ροής $\Phi = \int d\Phi$ μέσω της ίδιας της επιφάνειας S. Επομένως

η ολική ροή ενός ομογενούς διανυσματικού πεδίου \vec{A} μέσω μίας τυχαίας κλειστής

Σχήμα 2.15: Μηδενισμός της ροής ομογενούς διανυσματικού πεδίου μέσω τυχαίας κλειστής επιφάνειας.

**Συντεταγμένες του πεδίου
πολώσεως εντός ενός
ομογενώς πολωμένου**

($i = 1,2,3$: κύριοι άξονες του

$$E_{pi} = -\frac{N_i P_i}{\epsilon_0}$$

Οι τιμές των παραγόντων N_i , εξαρτώνται από τον λόγο των κυρίων αξόνων του ελλειψοειδούς, ο οποίος και καθορίζει την μορφή της επιφάνειας του διηλεκτρικού και κατά συνέπεια και την κατανομή του φορτίου πολώσεως, το οποίο με την σειρά του δημιουργεί το πεδίο πολώσεως \vec{E}_p . Οι συντελεστές N_i είναι εξάλλου θετικοί και εκπληρώνουν την σχέση: $N_1 + N_2 + N_3 = 1$

Αν η πόλωση \vec{P} έχει την διεύθυνση κάποιου από τους κύριους άξονες του ελλειψοειδούς μηδενίζονται οι συνιστώσες της ως προς τους υπόλοιπους και σύμφωνα με την παραπάνω σχέση [2.25] μηδενίζονται και οι αντίστοιχες συνιστώσες του πεδίου πολώσεως. Στην περίπτωση λοιπόν αυτή μας ενδιαφέρει προφανώς ένα μόνο N , εκείνο που χαρακτηρίζει τον συγκεκριμένο άξονα. Στον πίνακα Π2.9.1 περιέχονται οι τιμές της παραμέτρου N για μερικές, πρακτικά ενδιαφέρουσες, οριακές περιπτώσεις. (Για επιπλέον περιπτώσεις βλ. J.A. Osborn, Physical Review 67, 351 (1945) και E.C. Stoner, Philosophical Magazine 36, 803 (1945)).

ΜΟΡΦΗ ΤΟΥ ΔΙΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ	ΑΞΟΝΑΣ	N
Σφαίρα	τυχαίος	1/3
Λεπτή επίπεδη πλάκα	κάθετος στο επίπεδό της	1
Λεπτή επίπεδη πλάκα	παράλληλος στο επίπεδό της	0
Επιμήκης κύλινδρος	παράλληλος προς άξονα κυλίνδρου	0

Επιμήκης κύλινδρος	κάθετος προς άξονα κυλίνδρου	1/2
--------------------	------------------------------	-----

Πίνακας Π 2.9.1

Στην ειδική λοιπόν αυτή περίπτωση η σχέση [2.25] παίρνει τη μορφή:

πεδίο πολώσεως εντός ενός ομογενούς και κατά τη διεύθυνση κάποιου κύριου άξονα πολωμένου διηλεκτρικού ελλειψοειδούς μορφής

$$\vec{E}_p = -\frac{N}{\epsilon_0} \vec{P} \quad [2.26\alpha]$$

Η σχέση αυτή μας δείχνει, ότι το πεδίο πολώσεως έχει την ίδια διεύθυνση με την διηλ. πόλωση.

Για το συνολικό πεδίο παίρνουμε εξάλλου:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_p \quad [2.26\alpha] \Rightarrow \vec{E} = \vec{E}_0 - \frac{N}{\epsilon_0} \vec{P} \quad [2.26\beta]$$

Η διηλεκτρική πόλωση τέλος θα δίδεται από τη σχέση :

$$[2.17]: \vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E} \quad [2.26\beta] = \epsilon_0 \chi \left(\vec{E}_0 - \frac{N}{\epsilon_0} \vec{P} \right) \Rightarrow \vec{P}(1 + \chi N) = \epsilon_0 \chi \vec{E}_0 \Rightarrow \vec{P} = \frac{\epsilon_0 \chi}{1 + N\chi} \vec{E}_0 \quad [2.26\gamma]$$

Από την σχέση αυτή φαίνεται ότι τα διανύσματα \vec{P} και \vec{E}_0 έχουν την ίδια διεύθυνση. Επομένως

#####

οι σχέσεις [2.26α] έως και [2.26δ] – βλέπε παρακάτω – ισχύουν στην περίπτωση ενός ομογενούς και ισότροπου διηλεκτρικού ελλειψοειδούς μορφής, ευρισκόμενου εντός ομογενούς εξωτερικού πεδίου παράλληλου προς κάποιον από τους κύριους άξονές του.

#####

Αντικαθιστώντας την σχέση [2.26β] στην [2.26γ] παίρνουμε για το συνολικό πεδίο εντός του διηλεκτρικού :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 - \frac{N}{\epsilon_0} \left(\frac{\epsilon_0 \chi}{1 + N\chi} \vec{E}_0 \right) = \left(1 - \frac{N\chi}{1 + N\chi} \right) \vec{E}_0 \Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{1 + N\chi} \vec{E}_0 \quad [2.26\delta]$$

Σημειώνουμε τέλος, ότι οι γνωστές μας από τα προηγούμενα κεφάλαια σχέσεις για την περίπτωση του επίπεδου πυκνωτή προκύπτουν απ' ευθείας από τις γενικευμένες σχέσεις [2.26α] – [2.26δ], αν θέσουμε $N=1$ (βλέπε πίνακα Π 2.9.1)

ε) Συνολικό πεδίο εντός ενός ομογενούς και ισότροπου ρευστού διηλεκτρικού απείρων (\approx πολύ μεγάλων) διαστάσεων: Ας θεωρήσουμε ένα δοχείο (βλ. σχ. 2.16), το οποίο περιέχει κάποιο ηλεκτρικά ουδέτερο, ομογενές και ισότροπο, υγρό διηλεκτρικό. Μέσα σ' αυτό το υγρό βυθίζουμε ένα φορτισμένο σφαιρίδιο, οπότε το πρώτο πολώνεται. Αποτέλεσμα του γεγονότος αυτού είναι η εμφάνιση φορτίων πολώσεως στην επιφάνεια του υγρού, τόσο την εξωτερική όσο και την επιφάνεια επαφής μεταξύ υγρού και σφαιριδίου.

Το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο εντός (όπως βέβαια και εκτός) του υγρού ισούται με το άθροισμα των πεδίων, τα οποία δημιουργούνται από το πραγματικό φορτίο του σφαιριδίου και τα επιφανειακά και μη φορτία πολώσεως. Ο υπολογισμός του πεδίου αυτού είναι ουσιαστικά αδύνατος, λόγω της πολυπλοκότητας της κατανομής των φορτίων πολώσεως επί της εξωτερικής επιφάνειας του υγρού διηλεκτρικού. Η συμμετοχή όμως των φορτίων αυτών στην διαμόρφωση του συνολικού πεδίου σε κάποιο σημείο Σ στο εσωτερικό του διηλεκτρικού θα είναι τόσο ασθενέστερη, όσο μακρύτερα βρίσκεται το εν λόγω σημείο από την επιφάνεια του διηλεκτρικού. Θα μηδενίζεται δε εντελώς στην περίπτωση ενός διηλεκτρικού, το οποίο εκτείνεται απεριόριστα προς όλες τις κατευθύνσεις. Στην περίπτωση λοιπόν αυτή χρειάζεται να πάρουμε υπόψη την συμμετοχή μόνο εκείνων των φορτίων πολώσεως, τα οποία περιβάλλουν το φορτισμένο σφαιρίδιο.

Ο (γενικευμένος) νόμος του Gauss (βλ. [2.21]) για μια σφαιρική επιφάνεια Gauss (βλ. σχ. 2.17), με κέντρο το κέντρο του σφαιριδίου και ακτίνα την απόσταση του από το σημείο Σ , γράφεται:

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = Q, \text{ όπου } Q \text{ το φορτίο του σφαιριδίου.}$$

Η ηλεκτρική διαταραχή \vec{D} θα έχει λόγω συμμετρίας το ίδιο μέτρο σε όλα τα σημεία της επιφάνειας Gauss, ενώ η διεύθυνσή της θα συμπίπτει με την αντίστοιχη ακτίνα. Το γεγονός αυτό επιτρέπει την άμεση αξιολόγηση της παραπάνω σχέσης:

$$\begin{array}{c} \text{σφαιρική} \\ \text{συμμετρία} \\ \oint_S \vec{D} d\vec{S} = D \oint_S dS = \end{array}$$

$$D(4\pi r^2) = Q \Rightarrow D = \frac{Q}{4\pi r^2} =$$

$$\begin{array}{l} [2.23] \\ = \epsilon E \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi \epsilon r^2} = \frac{E_0}{\epsilon_r} \end{array} \quad \{1\}$$

(E_0 είναι η ένταση του πεδίου, το οποίο θα δημιουργούσε το φορτισμένο σφαιρίδιο στο κενό, αν δηλαδή δεν υπήρχε το διηλεκτρικό).

Στην εξίσωση {1} θα καταλήγαμε προφανώς και στην περίπτωση ενός όλο και μικρότερου σφαιριδίου, και κατά συνέπεια, και στην οριακή περίπτωση ενός *σημειακού* φορτίου. Μπορούμε λοιπόν να συμπεράνουμε, ότι το πεδίο ενός σημειακού φορτίου, το οποίο είναι βυθισμένο εντός ενός απεριόριστου, ομογενούς και ισότροπου ρευστού διηλεκτρικού, ελαττώνεται, κατά τον παράγοντα ϵ_r σε σχέση με την τιμή του στο κενό. Σύμφωνα τώρα με την αρχή της γραμμικής υπερθέσεως το ίδιο θα ισχύει και για το συνολικό πεδίο μιας τυχαίας κατανομής σημειακών φορτίων και κατά συνέπεια και ενός συστήματος αγωγών οιοδήποτε σχήματος:

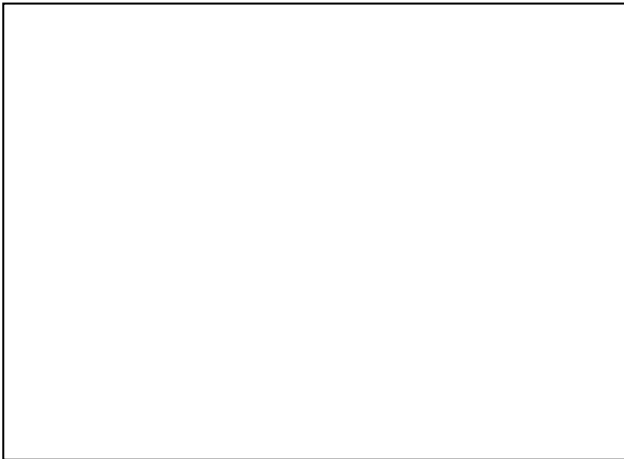
Το ηλεκτρικό πεδίο ενός συστήματος αγωγών τυχαίου σχήματος και γεωμετρίας, οι οποίοι βρίσκονται εντός ενός απεριόριστου, ομογενούς και ισότροπου ρευστού διηλεκτρικού, είναι μειωμένο σε σχέση με την τιμή του απουσία του διηλεκτρικού κατά τον διηλεκτρικό αριθμό ϵ_r του διηλεκτρικού.

Παρατήρηση: Για τους δύσπιστους, οι οποίοι θα αντιτάξουν το επιχείρημα, ότι η επίδραση του διηλεκτρικού επί του πεδίου ενός σημειακού φορτίου ενδέχεται να επηρεάζεται από την παρουσία ή μη άλλων σημειακών φορτίων με αποτέλεσμα να μην ισχύει η αρχή της γραμμικής υπερθέσεως, αντιπαραθέτουμε το εξής:

1°) (ποιοτικά για να μην κουρασθούν) : Η απάντηση του διηλεκτρικού στην παρουσία ενός σημειακού -και όχι μόνο- φορτίου καθορίζεται προφανώς από την μορφή του πεδίου του, στην συγκεκριμένη δηλαδή περίπτωση από την σφαιρική του συμμετρία. Είναι δε προφανές, ότι εφόσον η συμμετρία αυτή δεν επηρεάζεται από την παρουσία άλλων φορτίων στο κενό, δεν θα επηρεάζεται και παρουσία διηλεκτρικού. Επομένως είτε υπάρχουν άλλα φορτία είτε όχι, η απάντηση του διηλεκτρικού στο πεδίο ενός συγκεκριμένου σημειακού φορτίου θα είναι η ίδια.

2°) (μαθηματικά για να τελειώνουμε) : Έστω ότι έχουμε ένα τυχαίο σύστημα

αγωγών (βλ. σχ. 2.18) στο κενό. Τότε σύμφωνα με τον νόμο του Gauss θα ισχύει:



$$\oint_S \vec{E}_0 d\vec{S} = Q / \varepsilon_0 \quad \{ 2 \},$$

όπου S μια *τυχαία* κλειστή επιφάνεια και Q το εντός αυτής ευρισκόμενο ηλεκτρικό φορτίο.

Η συντηρητικότητα του πεδίου απαιτεί εξάλλου

$$\oint_L \vec{E}_0 d\vec{l} = 0 \quad \{ 3 \}$$

για μια τυχαία κλειστή καμπύλη L.

Στην περίπτωση τώρα που το σύστημα αγωγών περιβάλλεται από ένα ομογενές και ισότροπο υγρό διηλεκτρικό, το οποίο εκτείνεται απεριόριστα προς όλες τις κατευθύνσεις, οι δύο παραπάνω εξισώσεις παίρνουν την ακόλουθη μορφή:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad \varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r = \sigma \alpha \theta.$$

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = Q \Rightarrow \oint_S \varepsilon \vec{E} d\vec{S} \Rightarrow \oint_S (\varepsilon_r \vec{E}) d\vec{S} = Q / \varepsilon_0 \quad \{ 2\alpha \}$$

και

$$\varepsilon_r = \text{παντού σταθ.}$$

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0 \Rightarrow \oint_L (\varepsilon_r \vec{E}) d\vec{l} = 0 \quad \{ 3\alpha \}$$

Βλέπουμε λοιπόν, ότι έχουμε τις ίδιες ακριβώς εξισώσεις ($\{2\} \leftrightarrow \{2\alpha\}$, $\{3\} \leftrightarrow \{3\alpha\}$) για τα διανύσματα $(\varepsilon_r \vec{E})$ και \vec{E}_0 . Από το γεγονός αυτό προκύπτει η ισότητα $(\varepsilon_r \vec{E} = \vec{E}_0)$.

Σημειωτέον ότι στην περίπτωση διηλεκτρικού *πεπερασμένων* διαστάσεων οι παραπάνω εξισώσεις δεν είναι ταυτόσημες: οι μεν $\{2\}$ και $\{3\}$ ισχύουν για όλο τον χώρο, οι δε $\{2\alpha\}$ και $\{3\alpha\}$ *μόνο* εντός του διηλεκτρικού!

Η ελάττωση του πεδίου κατά τον διηλεκτρικό αριθμό ε_r του διηλεκτρικού συνεπάγεται φυσικά και την αντίστοιχη εξασθένηση των δυνάμεων Coulomb, οι οποίες εξασκούνται μεταξύ των εντός του

ρευστού διηλεκτρικού ευρισκομένων ηλεκτρικών φορτίων. Το γεγονός αυτό είχαμε επισημάνει ήδη στο κεφάλαιο 1.2 κατά την διατύπωση του νόμου του Coulomb. Στο

ΣΕΛΙΔΑ 69???

$\vec{E}_{it}, \vec{D}_{it}$: εφαπτομενική προς την διαχωριστική επιφάνεια συνιστώσα της ηλεκτρικής έντασης διαταραχής από την πλευρά του διηλεκτρικού i ($i = 1,2$)

$\vec{E}_{in}, \vec{D}_{in}$: κάθετη προς την διαχωριστική επιφάνεια συνιστώσα της ηλεκτρικής έντασης/ διαταραχής από την πλευρά του διηλεκτρικού i ($i = 1,2$)

$\vec{E}_{in}, \vec{D}_{in}$: μέτρο της κάθετης προς την διαχωριστική επιφάνεια συνιστώσας της ηλεκτρικής έντασης διαταραχής από την πλευρά του διηλεκτρικού i ($i = 1,2$), του οποίου το πρόσημο καθορίζεται με βάση την φορά του διανύσματος \vec{n} : θετικό αν τα διανύσματα $\vec{E}_{in} / \vec{D}_{in}$ και \vec{n} έχουν την ίδια φορά και αρνητικό στην αντίθετη περίπτωση.

(Συνοριακές συνθήκες της Ηλεκτροστατικής)

Οι συνοριακές συνθήκες [2.28] προκύπτουν από τις ακόλουθες δύο, θεμελιώδεις εξισώσεις (Maxwell) της Ηλεκτροστατικής:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0 \quad \{1\}: \text{συντηρητικότητα του ηλεκτροστατικού πεδίου (βλ. κεφ. 1.7)}$$

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = Q \quad \{2\}: \text{νόμος του Gauss παρουσία ύλης (βλ. [2.21])}$$

Για την αξιολόγηση του επικαμπύλιου ολοκληρώματος {1} επιλέγουμε την καμπύλη L σύμφωνα με το σχήμα 2.19α: Οι παράλληλες προς την διαχωριστική επιφάνεια πλευρές έχουν μήκος Δr , τέτοιο ώστε οι συνιστώσες \vec{E}_{it} να είναι σταθερές. Οι κάθετες εξάλλου πλευρές τείνουν προς το μηδέν, οπότε δεν συμβάλλουν στο παραπάνω ολοκλήρωμα. Η φορά τέλος της καμπύλης L συμπίπτει με εκείνη της \vec{E}_{2t} . Τότε έχουμε:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = (\vec{E}_{1t} \cdot \Delta \vec{r}_1) + (\vec{E}_{2t} \cdot \Delta \vec{r}_2) = (\vec{E}_{2t} - \vec{E}_{1t}) \Delta \vec{r} = 0 \Rightarrow \vec{E}_{2t} = \vec{E}_{1t} \quad \{1\}$$

Για την αξιολόγηση του επιφανειακού ολοκληρώματος { 2 } επιλέγουμε την κυλινδρική επιφάνεια του σχήματος [2.19β]: Οι παράλληλες προς την διαχωριστική επιφάνεια βάσεις έχουν εμβαδόν ΔS , τέτοιο ώστε οι συνιστώσες \vec{D}_{in} να είναι σταθερές καθ' όλη τους την έκταση. Το ύψος Δh εξάλλου του κυλίνδρου τείνει προς το μηδέν, οπότε η πλευρική επιφάνεια δεν συμβάλλει στο παραπάνω ολοκλήρωμα, τότε

έχουμε:

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = (\vec{D}_{1n} \cdot \Delta\vec{S}_1) + (\vec{D}_{2n} \cdot \Delta\vec{S}_2) = (\vec{D}_{2n} - \vec{D}_{1n}) \Delta\vec{S} \quad \Delta\vec{S} = \vec{n} \Delta S \quad \{2\}$$

$$= (\vec{D}_{2n} - \vec{D}_{1n}) \vec{n} \Delta S = \Delta Q$$

$$\Rightarrow (\vec{D}_{2n} - \vec{D}_{1n}) \vec{n} = \frac{\Delta Q}{\Delta S} \equiv \sigma \Rightarrow \vec{D}_{2n} - \vec{D}_{1n} = \sigma \vec{n}$$

Το πρόσημο του D_{in} με βάση \vec{n}

Αν $\sigma = 0$, έχουμε την ίδια περίπτωση με την { 1 }, οπότε $\vec{D}_{2n} = \vec{D}_{1n}$.



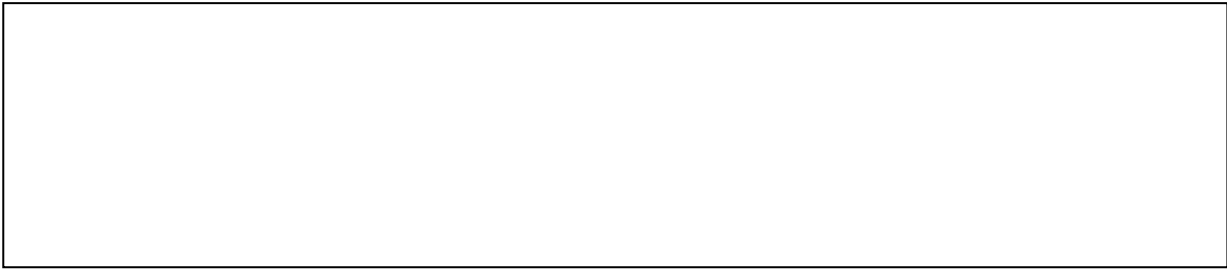
Σχήμα 2.19 : Για την απόδειξη των συνοριακών συνθηκών της Ηλεκτροστατικής.

Οι συνοριακές συνθήκες της Ηλεκτροστατικής συμβάλλουν σημαντικά στην επίλυση πολλών προβλημάτων, τα οποία σχετίζονται με τον προσδιορισμό του πεδίου ενός συστήματος αγωγών ή/και διηλεκτρικών.

2.11 Μηχανισμοί της διηλεκτρικής πόλωσης

Η πόλωση ενός διηλεκτρικού υπό την επίδραση ενός ηλεκτρικού πεδίου οφείλεται κυρίως στους ακόλουθους δύο μηχανισμούς:

1°) Πόλωση από μετατόπιση (ή εξ επαγωγής): Τα ηλεκτρικώς φορτισμένα σωματίδια - ηλεκτρόνια και πρωτόνια-, από τα οποία αποτελούνται τα άτομα και τα μόρια, δεν είναι στερεά συνδεδεμένα μεταξύ τους. Όταν λοιπόν δεχτούν την επίδραση ενός εξωτερικού πεδίου, μετακινούνται, τα μεν ηλεκτρόνια αντίθετα προς - , οι δε δετικοί πυρήνες κατά την φορά του πεδίου. Η μετατόπιση τους αυτή, αν και μικρή σε σχέση με τις ατομικές διαστάσεις, έχει σαν αποτέλεσμα, την εμφάνιση διπολικής ροπής στα μη πολικά άτομα και μόρια, και την *αύξηση* της ήδη υπάρχουσας στα πολικά μόρια (βλ. σχ. 2.20).



Σχήμα 2.20: Πόλωση από μετατόπιση α) μη πολικών, β) πολικών μορίων.

Η επαγόμενη διπολική ροπή \vec{p} ενός ατόμου είναι - για όχι πολύ ισχυρά πεδία – ανάλογη προς την ένταση τους:

$$\vec{p} = \epsilon_0 \alpha \vec{E} \quad [2.29]$$

Ο συντελεστής α ονομάζεται **ατομική πολωσιμότητα**, είναι ανεξάρτητος από την θερμοκρασία και χαρακτηριστικός για το συγκεκριμένο άτομο. Στον Πίνακα Π 2.11.1 περιέχονται οι πειραματικά προσδιορισμένες ατομικές πολωσιμότητες ορισμένων ατόμων.

Στοιχείο:	H	He	Li	B	C	Ne	Na	A	K
α (10^{-30} m ³)	8,24	2,60	146, 8	e 1 12,9	19,2	5,08	338, 8	20 ,3	429, 2

Πίνακας 2.11.1: Ατομικές πολωσιμότητες

Όποιος κάνει τον κόπο να ασχοληθεί με την θέση των παραπάνω στοιχείων στον Περιοδικό Πίνακα, θα βγάλει χρήσιμα συμπεράσματα. Εμείς επισημαίνουμε απλώς την «ακαμψία» των ευγενών αερίων. He και Ne.

Η επαγόμενη διπολική ροπή ενός μορίου είναι στην γενική περίπτωση τανυστής 2^{ου} μεγέθους, γεγονός το οποίο συνδέεται με τον μειωμένο βαθμό συμμετρίας των μορίων έναντι εκείνου των ατόμων (Το μόριο του CO₂ για παράδειγμα έχει σχήμα πούρου). Αυτό σημαίνει ότι τα διανύσματα \vec{p} και \vec{E} δεν έχουν πάντα την ίδια διεύθυνση. Σημειωτέον ότι ο τανυστής της πολωσιμότητας έχει τα ίδια μαθηματικά χαρακτηριστικά με εκείνον της διηλεκτρικής επιδεκτικότητας (βλ. σχήμα 2.11).

2°) Πόλωση από προσανατολισμό: Όπως εξηγήσαμε στο τέλος του κεφαλαίου 2.7, ορισμένα μόρια -τα λεγόμενα πολικά - έχουν μόνιμη διπολική ροπή, η οποία πηγάζει από την ασύμμετρη τους εσωτερική δομή (Το γεγονός αυτό επιτρέπει τους Χημικούς να εξάγουν πολύτιμα συμπεράσματα για την μοριακή δομή, μέσω σύγκρισης των πειραματικά μετρούμενων διπολικών ροπών με τις για υποθετικά μοντέλα υπολογισμένες!). Αυτό βέβαια δεν σημαίνει, ότι τα αντίστοιχα πολικά διηλεκτρικά έχουν - ελλείψει εξωτερικού πεδίου- μη μηδενική διηλεκτρική πόλωση: Λόγω της θερμικής κίνησης των μορίων οι διπολικές τους ροπές είναι προσανατολισμένες στατιστικά, με αποτέλεσμα η

συνολική διπολική ροπή κάθε μεγάλου αριθμού μορίων να ισούται με μηδέν. Υπό την δράση όμως ενός εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου ασκείται επί των μοριακών διπόλων μηχανική ροπή, η οποία τείνει να τα προσανατολίσει (βλ. κεφ. 2.7) κατά την διεύθυνση του. Ο προσανατολισμός δεν είναι τέλειος αλλά μερικός, αυξάνεται δε με αυξανόμενη ένταση του πεδίου και ελαττούμενη θερμοκρασία. Η κατ' αυτό τον τρόπο δημιουργούμενη διηλεκτρική πόλωση καλείται **πόλωση από προσανατολισμό**.

Ενώ η πόλωση από μετατόπιση παίρνει την τελική της τιμή πρακτικά αμέσως μετά την δράση του επάγοντος αυτήν πεδίου, ο προσανατολισμός των μοριακών διπόλων απαιτεί κάποιον μετρήσιμο χρόνο για να ολοκληρωθεί. Ο χρόνος αυτός αυξάνεται με τον συντελεστή ιξώδους του διηλεκτρικού, και απειρίζεται στην περίπτωση των στερεών. Με άλλα λόγια πόλωση από προσανατολισμό παρατηρείται μόνο στα ρευστά. Η παραπάνω καθυστέρηση στον προσανατολισμό των μορίων χαρακτηρίζεται ως **διηλεκτρική υστέρηση** και είναι η πηγή των πολύ σπουδαίων τεχνικά **διηλεκτρικών απωλειών**: Τα διηλεκτρικά πυκνωτών εναλλασσόμενου ρεύματος πρέπει να εμφανίζουν κατά το δυνατόν μικρή διηλεκτρική υστέρηση.

3°) Ιοντική πόλωση: Παρατηρείται στα κρυσταλλικά εκείνα διηλεκτρικά, τα οποία σχηματίζουν *ιοντικούς* κρυστάλλους, όπως π.χ. NaCl και CsCl. Είναι δε αποτέλεσμα της μετακίνησης των μεν θετικών ιόντων κατά την διεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου, των δε αρνητικών αντίθετα προς αυτήν.

2.11.1 Πόλωση χωρίς την επίδραση του εξωτερικού πεδίου. Πιεζοηλεκτρισμός

Τόσο η πόλωση από μετατόπιση όσο και εκείνη από προσανατολισμό προκαλούνται - όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο - από την επίδραση κάποιου εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου. Ορισμένοι τώρα *ιοντικοί* κρύσταλλοι, στους οποίους τα συμμετέχοντα ιόντα είναι ασύμμετρα διατεταγμένα, έτσι ώστε ο αριθμός ή/και οι αποστάσεις των ιόντων που περιβάλλουν κάποιο ιόν διαφορετικού είδους να διαφέρει από ιόν σε ιόν, εμφανίζουν **το φαινόμενο του πιεζοηλεκτρισμού**: Μηχανική παραμόρφωση (θλίψη, ελκυσμός ή στρέψη) των παραπάνω κρυστάλλων σε συγκεκριμένες κατευθύνσεις έχει σαν αποτέλεσμα την εμφάνιση ετερόνυμων, ηλεκτρικών, επιφανειακών φορτίων, εξ αιτίας της εμφάνισης -ή μεταβολής της ήδη υπάρχουσας - διπολικής ροπής. Ιδιαίτερα έντονο εμφανίζουν το φαινόμενο του πιεζοηλεκτρισμού ο **χαλαζίας** και η **τουρμαλίνη**.

Εφαρμογές: **1^η**) Πιεζοηλεκτρικοί κρύσταλλοι χρησιμοποιούνται ευρύτατα σαν **ηλεκτρομηχανικοί μεταποιητές** στην Τεχνολογία Μετρήσεων: Οι - μέσω πίεσης, ελκυσμού και στρέψης του κρυστάλλου αναπτυσσόμενες - πιεζοηλεκτρικές τάσεις είναι ευθέως ανάλογες προς το μέγεθος των παραπάνω αιτιών. Μέτρηση των *ηλεκτρικών* αυτών τάσεων επιτρέπει κατά συνέπεια τον προσδιορισμό των αντιστοίχων *μηχανικών* μεγεθών. Ιδιαίτερα χρήσιμη είναι η μέθοδος αυτή στην περίπτωση βραχύχρονων και ευμετάβλητων δυνάμεων και πιέσεων, όπως για παράδειγμα τέτοιων που οφείλονται σε εκρήξεις ή ταλαντώσεις. Ένα άλλο πλεονέκτημα της μεθόδου αυτής είναι η δυνατότητα τοποθέτησης του κρυστάλλου σε δυσπρόσιτες περιοχές (π.χ. κοντά στο σημείο έκρηξης) και μεταφοράς των ηλεκτρικών μετρήσεων (π.χ. μέσω καλωδίων) σε μεγάλες αποστάσεις (π.χ. σε κάποιο ασφαλές παρατηρητήριο).

2^η) Πιεζοηλεκτρικοί μηχανισμοί ανάφλεξης αερίων μειγμάτων δεν χρησιμοποιούνται μόνο στους *πιεζοηλεκτρικούς αναπτήρες*, αλλά και στις μηχανές εσωτερικής καύσεως πολλών πλοιαρίων, χλοοκοπτών κ.λ.π.

3^η) Κρυσταλλικά μικρόφωνα και βελόνες «πικ-απ»: Στα μεν πρώτα έχουμε μετατροπή

των ηχητικών κυμάτων (~ αυξομειώσεις πίεσης) , στις δε δεύτερες της πίεσης που ασκείται από την κίνηση της βελόνης - καθώς αυτή ανιχνεύει την επιφάνεια του δίσκου-, σε αντίστοιχα μεταβαλλόμενες πιεζοηλεκτρικές τάσεις.

Το αντίστροφο προς τον πιεζοηλεκτρισμό φαινόμενο έγκειται στην μεταβολή των διαστάσεων ενός πιεζοηλεκτρικού κρυστάλλου υπό την επίδραση ηλεκτρικής τάσεως, και καλείται **ηλεκτροσυστολή**.

Εφαρμογές: 1^η) Αν εφαρμόσουμε στα άκρα ενός πιεζοηλεκτρικού κρυστάλλου εναλλασσόμενη τάση, ο κρύσταλλος εκτελεί εξαναγκασμένη μηχανική ταλάντωση. Το φαινόμενο αυτό παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον στην περιοχή υψηλών συχνοτήτων μια και αποτελεί ουσιαστικά τον μοναδικό μηχανισμό δημιουργίας μηχανικών ταλαντώσεων. Πρακτική αξιοποίηση έχουμε στο **μεγάφωνα υψηλών συχνοτήτων** (10 ~ 16 kHz) και κυρίως στην **δημιουργία υπερήχων** ($\nu > 16$ kHz).

2^η) Από τα σπουδαιότερα πιεζοηλεκτρικά υλικά είναι ο **χαλαζίας (quartz)**. Χρησιμοποιείται στην πράξη με την μορφή παραλληλεπιπέδων ή κυλίνδρων, οι οποίοι έχουν κοπεί σε συγκεκριμένες γωνίες ως προς τους κρυσταλλογραφικούς άξονες του αρχικού κρυστάλλου. Με τον τρόπο αυτό πετυχαίνουμε πολύ μικρούς θερμικούς συντελεστές (μέχρι 10^{-8} K^{-1}) της συχνότητας των μηχανικών ταλαντώσεων, τις οποίες εκτελεί ο χαλαζίας εξ αιτίας του φαινομένου της ηλεκτροσυστολής, όταν διεγερθεί κατάλληλα. Το γεγονός αυτό σε συνδυασμό με την πολύ μικρή απόσβεση των παραπάνω ταλαντώσεων οδήγησε στην κατασκευή των μεγάλης ακρίβειας ωρολογίων χαλαζία.

Συμπληρωματικά Παραδείγματα

Παράδειγμα Σ 2.1: Να υπολογισθεί η διπολική ροπή της κατανομής φορτίου του σχήματος Π.Σ.2.1.1.

Λύση:

Στην εν λόγω κατανομή διακρίνουμε τα δύο δίπολα ($-q \rightarrow 2q$) και ($-q \rightarrow q$), τα οποία έχουν αντίστοιχα τις διπολικές ροπές \vec{p}_1 και \vec{p}_2 . Η φορά τους φαίνεται στο διπλανό σχήμα, ενώ τα μέτρα τους δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$p_1 = q(d\sqrt{2}) \quad \{ 1 \}$$

Σχήμα Π.Σ. 2.1.1:

$$p_2 = 2q(d\sqrt{2}) = 2p_1 \quad \{ 2 \}$$

($d\sqrt{2}$ είναι το μήκος της διαγωνίου του τετραγώνου, όπως προκύπτει από τον Πυθαγόρα).

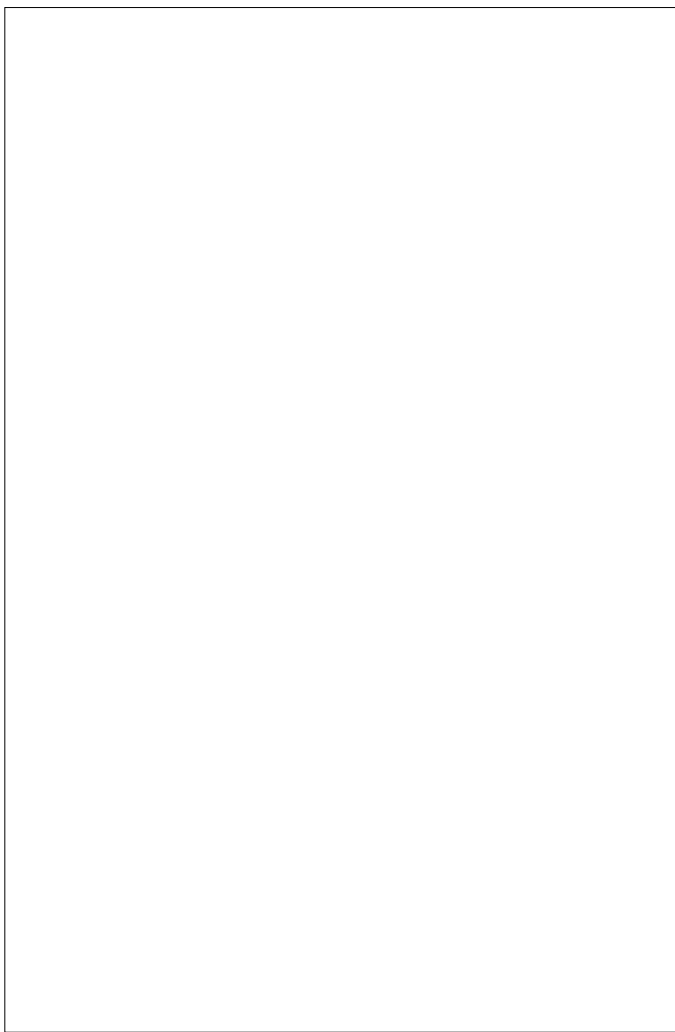
Η συνολική διπολική ροπή \vec{p} προσδιορίζεται - ως προς το μέτρο της και την διεύθυνσή της - από τις γνωστές μας σχέσεις:

$$p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2} = \sqrt{p_1^2 + (2p_1)^2} = \sqrt{5p_1^2} \Rightarrow p = \sqrt{5}p_1 = \sqrt{10}dq \quad \{1\}$$

$$\tan \theta = \frac{p_1}{p_2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 26,565^\circ \Rightarrow \theta_1 = (45 - \theta) = 18,435^\circ \quad \{2\}$$

σχήμα

Παράδειγμα Σ.2.2: Οι τρεις επίπεδοι πυκνωτές του σχήματος Π.Σ.2.2.1 έχουν την ίδια απόσταση και



επιφάνεια οπλισμών, ενώ οι χωρητικότητές τους είναι C_0, C_1 και C_2 αντίστοιχα. Ο πρώτος πυκνωτής έχει κενό μεταξύ των οπλισμών του, ενώ οι δύο άλλοι είναι μισογεμισμένοι με διηλεκτρικό διηλεκτρικού αριθμού ϵ_r . Αν είναι γνωστή η χωρητικότητα του πρώτου, να υπολογιστούν οι χωρητικότητες των δύο άλλων. (Η επίδραση των άκρων θεωρείται αμελητέα)

Λύση:

Υπολογισμός της χωρητικότητας C_1 :

Σύμφωνα με την εξίσωση ([2.2α]: $C=Q/V$) ορισμού, η χωρητικότητα ενός πυκνωτή

εξαρτάται από το φορτίο Q των οπλισμών του και την μεταξύ τους επικρατούσα τάση V . Είναι δε προφανές, ότι ούτε το φορτίο ούτε η τάση του πυκνωτή C_1 μεταβάλλεται, αν μεταξύ του κενού και του διηλεκτρικού του παρεμβληθεί τρίτος οπλισμός, όπως φαίνεται στο σχήμα Π.Σ.2.2.2:

Το φορτίο παραμένει αμετάβλητο, μια και ο τρίτος οπλισμός δεν συνδέεται με τους δύο αρχικούς οπλισμούς του πυκνωτή, ώστε να λάβει χώρα ανταλλαγή φορτίων.

Η τάση παραμένει αμετάβλητη μια και το πεδίο στο εσωτερικό του τρίτου οπλισμού είναι μηδέν (αγωγός σε κατάσταση ηλεκτροστατικής ισορροπίας!). Μηδενικό είναι εξάλλου και το πεδίο, το οποίο οφείλεται στα επαγωγικά, ίσα και αντίθετα, επιφανειακά φορτία του τρίτου οπλισμού, μια και το πεδίο της μιας του πλευράς εξουδετερώνεται από εκείνο της άλλης.

Η παρεμβολή του τρίτου οπλισμού δεν μεταβάλλει κατά συνέπεια την χωρητικότητα C_1 του δεύτερου πυκνωτή. Ο πυκνωτής όμως του σχήματος Π. Σ. 2.2.2 είναι ισοδύναμος με δύο επίπεδους πυκνωτές συνδεδεμένους σε σειρά, οι οποίοι έχουν την ίδια επιφάνεια, την *μισή* όμως απόσταση οπλισμών με τον πυκνωτή C_0 . Επιπλέον ο ένας περιέχει και *διηλεκτρικό*. Σύμφωνα λοιπόν με την σχέση [2.4], κατά την οποία η χωρητικότητα ενός επίπεδου πυκνωτή είναι ανάλογη προς την απόσταση των οπλισμών του. οι δύο πυκνωτές έχουν - κατ' αρχήν - χωρητικότητα $2C_0$. Εξ αιτίας όμως του διηλεκτρικού, η χωρητικότητα του δεύτερου εξ αυτών αυξημένη κατά τον παράγοντα ϵ_r . Επομένως

ο πυκνωτής C_1 είναι ισοδύναμος με δύο πυκνωτές, χωρητικότητας $2C_0$ και $2\epsilon_r C_0$, συνδεδεμένους σε σειρά.

Αυτό σημαίνει, ότι η χωρητικότητα του C_1 θα ισούται με την ολική χωρητικότητα των δύο παραπάνω πυκνωτών, η οποία υπολογίζεται από την σχέση [2.8]:

$$\frac{1}{C_1} = \frac{1}{2C_0} + \frac{1}{2\epsilon_r C_0} = \frac{\epsilon_r + 1}{2\epsilon_r C_0} \Rightarrow C_1 = \frac{2\epsilon_r C_0}{\epsilon_r + 1}$$

Υπολογισμός της χωρητικότητας C_2 : Σύμφωνα με το σχήμα Π.Σ.2.2.3 ο πυκνωτής C_2 είναι ισοδύναμος με δύο πυκνωτές συνδεδεμένους παράλληλα, οι οποίοι έχουν την ίδια απόσταση, την *μισή* όμως επιφάνεια οπλισμών με τον πυκνωτή C_0 .



Επιπλέον ο ένας περιέχει και *διηλεκτρικό*. Σύμφωνα και πάλι με την σχέση [2.4], κατά την οποία η χωρητικότητα ενός επίπεδου πυκνωτή είναι ανάλογη προς την επιφάνεια των οπλισμών του, οι δύο πυκνωτές έχουν - κατ' αρχήν - χωρητικότητα $C_0/2$. Εξ αιτίας όμως του διηλεκτρικού, η χωρητικότητα του δεύτερου εξ αυτών είναι αυξημένη κατά τον παράγοντα ϵ_r . Επομένως **ο πυκνωτής C_2 είναι, ισοδύναμος με δύο πυκνωτές, χωρητικότητας $C_0/2$ και $\epsilon_r C_0/2$ συνδεδεμένους σε παράλληλα.**

Η ολική χωρητικότητα C_2 των δύο αυτών πυκνωτών είναι (βλ.[2.27]):

$$C_2 = (C_0/2) + (\epsilon_r C_0/2) \Rightarrow C_2 = \frac{1 + \epsilon_r}{2} C_0$$

Παράδειγμα Π.Σ.2.2.3: Πυκνωτής χωρητικότητας $C_1 = 1000 \mu\text{F}$ φορτίζεται, έτσι ώστε η τάση μεταξύ των οπλισμών του να ισούται με 30 V . Στην συνέχεια απομονώνεται από το κύκλωμα φορτίσεως και συνδέεται παράλληλα με πυκνωτή άγνωστης χωρητικότητας C_2 , οπότε η τάση στους ακροδέκτες του πέφτει στα 20 V . Ζητείται η χωρητικότητα C_2 .

Λύση:

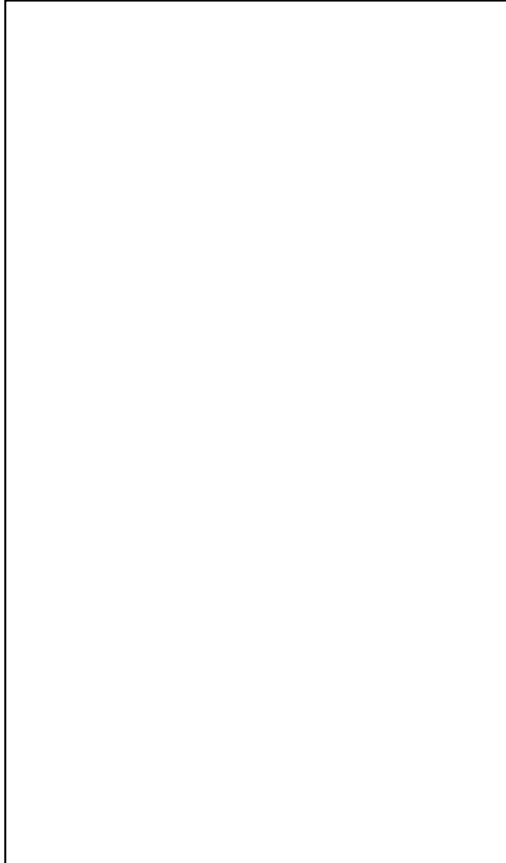
Η ολική χωρητικότητα C των δύο παράλληλα συνδεδεμένων πυκνωτών θα ισούται, ως γνωστόν, με το άθροισμα των δύο χωρητικοτήτων C_1 και C_2

$$C = Q/V$$
$$C = C_1 + C_2 \Rightarrow C_2 = C - C_1 \Rightarrow C_2 = \frac{Q}{V} - C_1 \quad \{1\}$$

Το ολικό φορτίο Q είναι ίσο με το αρχικό φορτίο Q_0 του πυκνωτή C_1 , το οποίο έχει απλώς ανακατανεμηθεί στους δύο πυκνωτές. Έτσι η {1} γράφεται:

$$C_2 = \frac{Q_0}{V} - C_1 \quad \overset{Q_0 = C_1 V_0}{\Rightarrow} \quad C_2 = \frac{C_1 V_0}{V} - C_1 \Rightarrow C_2 = C_1 \left(\frac{V_0}{V} - 1 \right) = C_1 \left(\frac{30}{20} - 1 \right) \Rightarrow C_2 = 0,5 C_1 = 500 \mu F$$

Παράδειγμα Σ.2.2.4: Να υπολογισθεί η χωρητικότητα του επίπεδου πυκνωτή του σχήματος Π.Σ.2.2.4.



Λύση:

Σύμφωνα με όσα αναπτύξαμε στο παράδειγμα Σ.2.2.2, ο πυκνωτής του διπλανού σχήματος ισοδυναμεί με τρεις επιμέρους πυκνωτές συνδεδεμένους σε σειρά, οι οποίοι έχουν την ίδια επιφάνεια (A), διαφορετικές όμως αποστάσεις οπλισμών: b, l και b αντίστοιχα. Επιπλέον ο ένας εξ αυτών περιέχει και διηλεκτρικό. Αν λοιπόν συμβολίσουμε με C_b, C_l και C_b τις χωρητικότητές τους θα ισχύει:

$$C_B = \varepsilon_0 \frac{A}{b}, \quad C_l = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{A}{l} \quad \{1\}$$

(Οι παραπάνω σχέσεις προέκυψαν από την [2.4], η οποία προσδιορίζει την χωρητικότητα επίπεδου πυκνωτή χωρίς διηλεκτρικό. Στην δεύτερη πήραμε επιπλέον υπόψη την [2.14], σύμφωνα με την οποία η παρεμβολή διηλεκτρικού αυξάνει την χωρητικότητα ενός επίπεδου πυκνωτή κατά τον διηλεκτρικό αριθμό ε_r).

Η χωρητικότητα C του αρχικού πυκνωτή ισούται κατά συνέπεια με την ολική χωρητικότητα των τριών παραπάνω πυκνωτών:

$$C = C_{ολ} \rightarrow \frac{1}{C} = \frac{1}{C_b} + \frac{1}{C_l} + \frac{1}{C_b} = \frac{2}{C_b} + \frac{1}{C_l} \stackrel{\{1\}}{=} \frac{2b}{\varepsilon_0 A} + \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r A} = \frac{2b\varepsilon_r + 1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r A} \Rightarrow C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r A}{2b\varepsilon_r + 1} \Rightarrow C = \frac{\varepsilon_0 A}{2b + \frac{1}{\varepsilon_r}}$$

ΣΕΛΙΔΑ 78???

ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΣ

Ηλεκτρικό ρεύμα -με την γενική έννοια του όρου- καλείται κάθε κατευθυνόμενη κίνηση ηλεκτρικών φορτίων. Η *άτακτη* θερμική κίνηση π.χ. των «ελευθέρων» ηλεκτρονίων ενός αγωγού δεν αποτελεί ηλεκτρικό ρεύμα, επειδή ακριβώς δεν είναι κατευθυνόμενη.

Από όλες τις περιπτώσεις ηλεκτρικού ρεύματος ιδιαίτερο πρακτικό ενδιαφέρον παρουσιάζει το προκαλούμενο *υπό την επίδραση ενός εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου*. Στην κατηγορία αυτή ανήκει το ηλεκτρικό ρεύμα, με το οποίο τροφοδοτούνται όλα ανεξαιρέτως τα ηλεκτρικά κυκλώματα τα οποία χρησιμοποιεί ο άνθρωπος: από τα δίκτυα υψηλής τάσεως των μονάδων παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας μέχρι τα μικροκυκλώματα των ηλεκτρονικών υπολογιστών. Αυτή την «ειδική» κατηγορία ηλεκτρικού ρεύματος θα έχουμε υπόψη σε όλα τα επόμενα. Αυτό βέβαια δεν σημαίνει, ότι η Επιστήμη δεν ενδιαφέρεται και για τα από άλλες αιτίες προκαλούμενα ηλεκτρικά ρεύματα, όπως για παράδειγμα τα λεγόμενα ρεύματα από μεταφορά ηλεκτρικώς φορτισμένης ύλης λόγω διαφοράς θερμοκρασίας ή πίεσης μεταξύ δύο περιοχών ενός ρευστού. (Σημειωτέον ότι στην ύπαρξη τέτοιων ρευμάτων στα εξωτερικά στρώματα του πυρήνα της Γης πιθανολογείται η αιτία της ύπαρξης του γήινου μαγνητικού πεδίου. Τα ρεύματα δε αυτά καθ' εαυτά προκαλούνται είτε μέσω ραδιενεργώς εκλυόμενης θερμότητας, είτε μέσω διαρκούς καθίζησης των βαρύτερων και ανάδυσης των ελαφρότερων συστατικών του πυρήνα.).

3. Συνεχή ηλεκτρικά ρεύματα

3.1 Ένταση και πυκνότητα ρεύματος

Όπως είδαμε στο κεφάλαιο 1.11, όταν ένας αγωγός βρεθεί μέσα σε ηλεκτροστατικό πεδίο λαμβάνει χώρα μια ανακατανομή των εντός αυτού ευρισκομένων ελευθέρων φορτίων, με αποτέλεσμα το μηδενισμό του πεδίου στο εσωτερικό του αγωγού, οπότε και επιτυγχάνεται μια νέα κατάσταση ηλεκτροστατικής ισορροπίας. Η παραπάνω μετακίνηση φορτίων αποτελεί βέβαια μια μορφή ηλεκτρικού ρεύματος, το οποίο όμως λόγω της εξαιρετικής τους βραχυβιότητας δεν παρουσιάζει κάποιο πρακτικό ενδιαφέρον. Εάν λοιπόν θέλουμε διαρκές ρεύμα, θα πρέπει να φροντίσουμε για την *συνεχή* ύπαρξη ενός ηλεκτρικού πεδίου ή μιας βαθμίδας δυναμικού στο εσωτερικό του αγωγού. Αυτό το πετυχαίνουμε με την βοήθεια καταλλήλων συσκευών (όπως π.χ. μπαταρίες, γεννήτριες κ.λ.π.), την λειτουργία των οποίων θα γνωρίσουμε εν καιρώ. Στο σημείο αυτό σημειώνουμε απλώς, ότι αν συνδέσουμε τους ακροδέκτες μιας τέτοιας συσκευής με τα άκρα ενός αγωγού (π.χ. ενός καλωδίου), τότε δημιουργείται μεταξύ τους μια διαρκή διαφορά δυναμικού, οπότε μέσα στον αγωγό έχουμε ηλεκτρικό ρεύμα. Τότε σαν

ένταση I του ηλεκτρικού ρεύματος ορίζεται το πηλίκο του φορτίου dq , το οποίο διέρχεται από μία καθετή προς την διεύθυνση ροής των φορτίων τομή του αγωγού μέσα σε χρόνο dt , προς τον (απειρωστό) χρόνο dt :

$$\text{ένταση του ηλ. ρεύματος } I = \frac{dq}{dt} \quad [3.1]$$

Η ένταση λοιπόν του ηλεκτρικού ρεύματος ισούται με τον ρυθμό ροής των φορτίων μέσω μιας κάθετης τομής του αγωγού.

Μονάδα έντασης στο

SI : $[I] = A(\text{mpere})$: θεμελιώδη μονάδα:

Ένα **Ampere** είναι η ένταση του (συνεχούς - βλ. παρακάτω) ρεύματος, το οποίο, όταν διαρρέει δύο ευθύγραμμους, παράλληλους αγωγούς πολύ μεγάλου μήκους, ευρισκόμενους σε απόσταση ενός μέτρου, προκαλεί δύναμη αλληλεπίδρασης ίση με $2 \cdot 10^{-7} N$ ανά μονάδα μήκους των αγωγών.

Σαν **φορά του ηλεκτρικού ρεύματος** (όχι της έντασης, η οποία είναι *μονόμετρο* μέγεθος!) ορίζεται συμβατικά, η φορά κινήσεως των - σε κάθε περίπτωση θετικών υποτιθέμενων - φορέων του φορτίου. Αν δηλαδή οι πραγματικοί φορείς είναι αρνητικοί, η πραγματική φορά της κίνησης τους είναι αντίθετη προς την παραπάνω συμβατική, η οποία αποτελεί καθαρά ιστορικό κατάλοιπο.

Όταν τόσο η ένταση όσο και η φορά του ηλεκτρικού ρεύματος παραμένουν χρονικά αμετάβλητες, το ρεύμα καλείται συνεχές (D.C. –Direct Current), διαφορετικά μεταβαλλόμενο. Από όλα τα είδη μεταβαλλόμενου ρεύματος ιδιαίτερο τεχνικό ενδιαφέρον παρουσιάζει εκείνο, στο οποίο τόσο η ένταση όσο και η φορά μεταβάλλονται ημιτονοειδώς με τον χρόνο. Το ρεύμα αυτό καλείται εναλλασσόμενο (A.C. –Alternating Current).

Στην περίπτωση του συνεχούς ρεύματος η σχέση [3.1] παίρνει την απλούστερη δυνατή μορφή:

$$\text{ένταση συνεχούς ρεύματος:} \quad I = \frac{Q}{t} \quad [3.2]$$

Όπου Q είναι το φορτίο το οποίο διέρχεται μέσα σε χρόνο t μέσω μιας κάθετης προς την διεύθυνση ροής των φορτίων διατομής του αγωγού.

Σημειωτέον ότι

η ένταση του συνεχούς ρεύματος είναι η ίδια σε όλες τις κάθετες διατομές ενός (μη διακλαδιζόμενου) αγωγού,

σαν συνέπεια της διατήρησης του ηλεκτρικού φορτίου. Συγκεκριμένα, αν η ένταση σε δύο τυχαίες διατομές ενός τέτοιου αγωγού ήταν διαφορετική, τότε στο μεταξύ αυτών ευρισκόμενο τμήμα του αγωγού θα είχαμε διαρκή συσσώρευση ή απομάκρυνση φορτίων. Αυτό θα είχε σαν αποτέλεσμα την δημιουργία ενός επιπλέον ηλεκτρικού πεδίου, του οποίου μάλιστα η ένταση θα μεταβάλλετο διαρκώς, με αποτέλεσμα την μεταβολή της ίδιας της έντασης. Η μόνη δυνατότητα να μη συνέβαινε αυτό θα ήταν η καταστροφή ή γένεση φορτίου, πράγμα όμως το οποίο αντίκειται στην αρχή διατηρήσεως του ηλεκτρικού φορτίου.

Παρατήρηση: Ακόμη και στην περίπτωση χρονικά μεταβαλλόμενων ρευμάτων είναι δυνατό να έχουμε *γεωμετρικά* σταθερή (για όλες δηλαδή τις διατομές ίδια) ένταση. Πιο συγκεκριμένα χρονικά μεταβαλλόμενα ρεύματα δημιουργούνται υπό την επίδραση χρονικά μεταβαλλόμενων πεδίων. Κάθε μεταβολή της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου διαδίδεται όμως με την μορφή *ηλεκτρομαγνητικού κύματος*, με την χαρακτηριστική γι' αυτά ταχύτητα στο συγκεκριμένο μέσο.

Η ταχύτητα αυτή (γνωστή και ως *ταχύτητα του φωτός*) στην περίπτωση του κενού ισούται ως γνωστόν με $3 \cdot 10^8 m/s$.

Μεταξύ της *ταχύτητας διαδόσεως* c, της συχνότητας ν και του *μήκους κύματος* λ ενός κύματος ισχύει η *θεμελιώδη εξίσωση των κυμάτων*: $c = \lambda \nu$. Η συχνότητα των με την βοήθεια γεννητριών παραγομένων εναλλασσομένων ρευμάτων δεν ξεπερνάει τις μερικές εκατοντάδες Hertz. Αυτό σημαίνει ότι το αντίστοιχο μήκος κύματος είναι της τάξεως των $10^6 m$, δηλαδή πολύ μεγαλύτερο από τις διαστάσεις των συνήθων ηλεκτρικών συσκευών. Στην περίπτωση αυτή δεν υπάρχει διαφορά φάσεως (με άλλα λόγια διαφορά στην τιμή του πεδίου)

μεταξύ διαφορετικών τμημάτων μιας συσκευής και ειδικότερα μεταξύ δύο διαφορετικών σημείων ενός αγωγού. Ίδιο πεδίο σημαίνει όμως και ίδια ένταση ρεύματος σε όλες τις διατομές ενός μη διακλαδιζόμενου αγωγού.

Ρεύματα αυτής της μορφής, των οποίων η ένταση - ενώ μεταβάλλεται χρονικά- είναι σε μία δεδομένη χρονική στιγμή για όλες τις διατομές ενός μη διακλαδιζόμενου η ίδια ονομάζονται στατικότροπα ή μόνιμα.

Εμείς θα ασχοληθούμε μόνο με τέτοιου είδους ρεύματα, θα πρέπει όμως να σημειώσουμε, ότι η συχνότητα ταλάντωσης ορισμένων σύγχρονων ηλεκτρονικών κυκλωμάτων ξεπερνάει και τα 10^9Hz , δηλαδή το αντίστοιχο μήκος κύματος υπολείπεται των 10^{-1}m . Στην περίπτωση αυτή (π.χ. ραδιοφωνικές κεραίες) δεν έχουμε στατικότροπη συμπεριφορά. Επιπλέον θα πρέπει να λάβουμε υπόψη μας την πεπερασμένη αδράνεια των φορέων, την οποία μέχρι τώρα προϋποθέσαμε σιωπηλά ως μηδενική (μια και συνήθως πρόκειται για τα πολύ ελαφριά ηλεκτρόνια!).

Σύμφωνα με τον ορισμό της (3.13), η ένταση i του ηλεκτρικού ρεύματος, χαρακτηρίζει την κίνηση των ηλεκτρικών φορτίων *μακροσκοπικά*: περιγράφει τον ρυθμό ροής των φορτίων σαν σύνολο και μάλιστα μέσω μιας μακροσκοπικής κάθετης διατομής του αγωγού. Για τις συνήθεις πρακτικές εφαρμογές των στατικότροπων ρευμάτων τα παραπάνω είναι αρκετά και η ένταση i του ρεύματος είναι ένα εξαιρετικά χρήσιμο μέγεθος. Δεν ισχύει όμως το ίδιο και για προβλήματα, τα οποία σχετίζονται π.χ. με την μελέτη της ροής των φορτίων μέσω ενός *τμήματος μιας* τυχαίας διατομής ενός αγωγού, ο οποίος διαρρέεται από ρεύμα: Ακόμη και στην περίπτωση ενός *ομογενούς* αγωγού η ροή των φορτίων δεν κατανέμεται πάντα ομοιόμορφα καθ' όλη την έκταση μιας κάθετης ή μη διατομής του, όπως εξηγείται στο σχήμα 3.1.

Φαινόμενο 'επιδερμίδας' (skin effect)

Στην περίπτωση κατά την οποία ένας *ομογενής*, κυλινδρικός αγωγός (κν. καλώδιο) διαρρέεται από *συνεχές* ρεύμα, έχουμε ομοιόμορφη κατανομή του ρεύματος σε όλα τα σημεία της διατομής του. Αυτό οφείλεται στο γεγονός, ότι στο εσωτερικό του αγωγού είναι παντού σταθερή τόσο η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου, όσο και η πυκνότητα των ευκίνητων φορέων φορτίου. (Η ροή των φορτίων στο εσωτερικό ενός ρευματοφόρου αγωγού δεν έχει καμιά σχέση με την ηλεκτροστατική κατανομή του πλεονάζοντος φορτίου ενός *φορτισμένου* αγωγού, το οποίο ως γνωστόν (κεφ. 1.11) κατανέμεται εξ ολοκλήρου επί της επιφάνειας του αγωγού. Ένας ρευματοφόρος αγωγός -παραμένει ηλεκτρικά ουδέτερος, στην μονάδα όγκου περιέχεται δηλαδή το ίδιο ποσό θετικού και αρνητικού ηλεκτρισμού.)

Διαφορετικά είναι όμως τα πράγματα, όταν ο ίδιος αγωγός διαρρέεται από *εναλλασσόμενο* ρεύμα. Συγκεκριμένα (και όπως θα δούμε στα επόμενα κεφάλαια) κάθε ηλεκτρικό ρεύμα δημιουργεί γύρω του ένα μαγνητικό πεδίο. Οι αντίστοιχες μαγνητικές δυναμικές γραμμές είναι κλειστές και η φορά τους καθορίζεται από εκείνη του ρεύματος. Το μαγνητικό αυτό πεδίο είναι σταθερό, όταν το γενεσιουργό του ρεύμα είναι συνεχές, ενώ διαφορετικά μεταβάλλεται χρονικά. Κάθε χρονικά μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο δημιουργεί (« επάγει») με την σειρά του ένα ηλεκτρικό πεδίο έντασης $\vec{E}_{επ}$, του οποίου οι δυναμικές γραμμές είναι επίσης κλειστές (βλ. "Ηλεκτρομαγνητική Επαγωγή"). Όπως δε φαίνεται στο διπλανό σχήμα, η φορά του στροβιλού αυτού πεδίου, \vec{E} , στο προς το εσωτερικό του ρευματοφόρου αγωγού ευρισκόμενο τμήμα των δυναμικών γραμμών είναι αντίθετη προς την φορά του πεδίου \vec{E} , το οποίο προκαλεί το ρεύμα, ενώ συμπίπτει στο προς το εξωτερικό του αγωγού ευρισκόμενο τμήμα. Το συνολικό λοιπόν ηλεκτρικό πεδίο $(\vec{E} + \vec{E}_{επ})$ πρέπει να αυξάνεται από τον άξονα του αγωγού προς τα έξω με αποτέλεσμα την αντίστοιχη αύξηση του απ' αυτό προκαλούμενου ρεύματος:

Όταν ένας αγωγός διαρρέεται από εναλλασσόμενο ρεύμα, αυτό δεν κατανέμεται ομοιόμορφα καθ' όλη την έκταση της διατομής του, αλλά (εξ αιτίας του φαινομένου της «εσωτερικής αυτεπαγωγής») αυξάνεται από τον πυρήνα του αγωγού προς την επιφάνειά του, στην οποία και περιορίζεται ουσιαστικά σε υψηλές συχνότητες. Η παραπάνω «άπωση» του ρεύματος προς τα εξωτερικά στρώματα του αγωγού χαρακτηρίζεται σαν «φαινόμενο επιδερμίδας».

Η ποσοτική μελέτη του παραπάνω φαινομένου, η οποία σημειωτέον είναι κάπως δύσκολη (βλ. π.χ. Jackson J.D., Klassische Elektrodynamik), αποδεικνύει ότι σε βάθος $d = \sqrt{2\rho/(\mu\omega)}$ (ρ = ειδική αντίσταση, μ = μαγνητική διαπερατότητα του αγωγού, ω = κυκλική συχνότητα του ρεύματος) από την επιφάνεια ενός ομογενούς κυλινδρικού αγωγού το ρεύμα έχει ελαττωθεί ήδη στο e^{-1} της επιδερμικής του τιμής.

Το επιδερμικό φαινόμενο έχει σαν αποτέλεσμα ένας συγκεκριμένος αγωγός να παρουσιάζει **μεγαλύτερη αντίσταση** (βλ. επόμενες παραγράφους) **στο εναλλασσόμενο απ' ότι στο συνεχές ρεύμα**. Συγκεκριμένα για έναν ομογενή κυλινδρικό αγωγό ισχύουν προσεγγιστικά οι ακόλουθες σχέσεις :

$$\frac{R_{\omega}}{R_0} = \begin{cases} 1 + k^4 / 3 \\ 0,997k + 0,277 \\ k + 3/(64k) + 0,25 \end{cases} \quad \text{για } k < 1$$

όπου $k = r / (2d)$, r = ακτίνα του κυλινδρικού αγωγού

R_0 = αντίσταση του αγωγού σε συνεχές ρεύμα

R_{ω} = ενεργή αντίσταση του αγωγού σε εναλλασσόμενο ρεύμα κυκλικής συχνότητας ω .

Παράδειγμα: Στην περίπτωση ενός χάλκινου ($\rho = 0,0178 \text{ } \Omega\text{mm}^2/\text{m}$, $\mu = 1,257 \cdot 10^{-6} \text{ Vs / (Am)}$) καλωδίου, το οποίο διαρρέεται από εναλλασσόμενο ρεύμα κυκλικής συχνότητας $\omega = 314 \text{ s}^{-1}$ (ή συχνότητας $\nu = 50\text{Hz}$) και έχει ακτίνα $r = 5 \text{ mm}$, παίρνουμε διαδοχικά: $d = 9,5 \text{ mm}$, $k = 0,263 < 1$ και $R_{\omega} / R_0 = 1,0016$. Η αντίσταση του καλωδίου είναι δηλαδή αυξημένη (μόνο κατά 0,16%). Για το ίδιο καλώδιο και ρεύμα κυκλικής συχνότητας $\omega = 6,28 \text{ MHz}$ προκύπτει: $d = 0,067 \text{ mm}$, $k = 409,5$ και $R_{\omega} / R_0 = 409,75$!

Εφαρμογές: Για την μεταφορά υψηλόσυχνων ρευμάτων χρησιμοποιούνται **πολύκλινα καλώδια** (π.χ. ηχητικές εγκαταστάσεις) και **κοίλοι αγωγοί με λεπτά τοιχώματα** (π.χ. ραδιοφωνικές και τηλεοπτικές κεραίες), ώστε το φαινόμενο της επιδερμίδας να περιορίζεται στο ελάχιστο.

Προκειμένου λοιπόν να έχουμε (κατ' αρχήν) την δυνατότητα περιγραφής της ακριβούς κατανομής του ρεύματος στα διάφορα σημεία μιας τυχαίας επιφάνειας (π.χ. της διατομής ενός αγωγού ο οποίος διαρρέεται από εναλλασσόμενο ρεύμα) εισάγουμε ένα νέο διανυσματικό μέγεθος, την πυκνότητα ρεύματος \vec{j} , το οποίο ορίζουμε έτσι ώστε να εκπληρώνει αυτόν ακριβώς το σκοπό:

ορισμός της πυκνότητας ρεύματος \vec{j} : $di = \vec{j} \cdot d\vec{S} = j \cos \theta dS \Leftrightarrow i = \int_S \vec{j} d\vec{S}$ [3.3]

όπου $d\vec{i}$ = ένταση του ρεύματος μέσω μιας στοιχειώδους επιφάνειας $d\vec{S}$.

Σύμφωνα λοιπόν με την παραπάνω εξίσωση

η ένταση I του ρεύματος μέσω μιας τυχαίας επιφάνειας S ισούται με την « ροή » της πυκνότητας \vec{j} του ρεύματος μέσω της εν λόγω επιφάνειας.

Όπως εξηγήσαμε κατά την μελέτη του φαινομένου της επιδερμίδας, στην περίπτωση του συνεχούς ρεύματος η ροή των φορτίων είναι ομοιόμορφη σε όλα τα σημεία της διατομής ενός αγωγού. Με άλλα λόγια, η πυκνότητα του συνεχούς ρεύματος είναι η ίδια σε όλα τα σημεία της διατομής S ενός αγωγού:

$$j = \frac{I}{S} \quad [3.4]$$

Από την σταθερότητα επομένως της έντασης του συνεχούς ρεύματος σε όλες τις διατομές ενός αγωγού προκύπτει, ότι η πυκνότητα του συνεχούς ρεύματος σε δύο διαφορετικές διατομές ενός αγωγού είναι αντιστρόφως ανάλογη προς το εμβαδόν τους:

$$\frac{j_1}{j_2} = \frac{S_2}{S_1} \quad [3.5]$$

μ.γ.ό.ε

3.1.1 Σχέση μεταξύ πυκνότητας ρεύματος και ταχύτητας των φορέων φορτίου

Η πυκνότητα (και κατ' επέκταση και η ένταση του) ρεύματος εξαρτάται προφανώς από την ταχύτητα των φορέων φορτίου. Μπαίνει λοιπόν το ερώτημα, ποια είναι η ακριβής σχέση, η οποία περιγράφει την παραπάνω εξάρτηση. Προκειμένου να βρούμε την απάντηση, θεωρούμε ένα στοιχειώδες (και επομένως επίπεδο) τμήμα $d\vec{S}$ μιας τυχαίας επιφάνειας S , ευρισκόμενης εντός ρευματοφόρου αγωγού (βλ. σχ.3.2). Αρχικά υποθέτουμε , ότι όλοι οι φορείς έχουν το ίδιο φορτίο και την ίδια ταχύτητα \vec{u} η οποία μπορεί να μεταβάλλεται χρονικά. Η ένταση $d\vec{i}$ του ρεύματος μέσω του στοιχείου $d\vec{S}$ ισούται εξ ορισμού με τον ρυθμό ροής dq/dt του φορτίου μέσω του εν λόγω στοιχείου, ο οποίος μπορεί να υπολογιστεί ως εξής:

Ο αριθμός των φορέων φορτίου, οι οποίοι διέρχονται μέσα σε χρόνο dt (απειρωστό ώστε η ταχύτητα να διατηρείται σταθερή) μέσω του στοιχείου $d\vec{S}$, ισούται με τον αριθμό των φορέων, οι οποίοι βρίσκονται μέσα στο πλάγιο παραλληλεπίπεδο του σχήματος 3.2:

Όσοι απ' αυτούς βρίσκονται στην προέκταση του παραλληλεπιπέδου δεν θα προλάβουν μέσα σε χρόνο dt να διέλθουν μέσω του στοιχείου $d\vec{S}$, ενώ οι υπόλοιποι δεν θα το συναντήσουν ποτέ.

Όπως τώρα φαίνεται από το σχήμα, ο όγκος dV του παραλληλεπιπέδου είναι

$$dV = u dt \cos \theta dS \Rightarrow dV = \vec{u} d\vec{S} dt \quad \{1\}.$$

Το φορτίο dq εξάλλου, το οποίο περιέχεται εντός αυτού, θα είναι: $dq = \rho dV$, όπου ρ είναι η γνωστή μας κυβική πυκνότητα φορτίου. Αντικαθιστώντας την σχέση {1} παίρνουμε:

$$\{1\} \quad [3.3] \quad dq = \rho dV = \rho \vec{u} d\vec{S} dt \Leftrightarrow \frac{dq}{dt} \equiv dl =: \vec{j} d\vec{S} = \rho \vec{u} d\vec{S} \Rightarrow \vec{j} = \rho \vec{u} \quad \{2\}$$

Προχωρούμε τώρα ένα βήμα παραπέρα, ΥΠΟΘΕΤΟΝΤΑΣ ότι όλοι οι φορείς έχουν το ίδιο μεν φορτίο Q διαφορετικές όμως ταχύτητες \vec{u}_k . Τότε ολική πυκνότητα ρεύματος \vec{j} θα ισούται προφανώς με το διανυσματικό άθροισμα των επιμέρους πυκνοτήτων \vec{j}_k :

$$\{2\} \quad \vec{j} = \sum_k \vec{j}_k = \sum_k \rho_k \vec{u}_k \quad \{3\}$$

Στην παραπάνω σχέση αντικαθιστούμε την πυκνότητα φορτίου ρ_k των φορέων ταχύτητας \vec{u}_k , μέσω του γινομένου ($Q \cdot n_k$) του φορτίου Q έκαστου φορέα επί την **αριθμητική πυκνότητα n_k** (δηλ. φορείς ανά μονάδα όγκου) των φορέων ταχύτητας \vec{u}_k , οπότε παίρνουμε:

$$\text{δαιρούμε και πολλαπλασιάζουμε} \\ j = Q \sum_k n_k \vec{u}_k : \text{ με τον αριθμό } N_Q \text{ των φορέων όλων} \rightarrow \vec{j} = Q N_Q \frac{1}{N_Q} \sum_k n_k \vec{u}_k \\ \text{των ταχυτήτων ανά μονάδα όγκου}$$

όπου $\rho_k =$ πυκνότητα φορτίου (λόγω φορέων φορτίου Q)

$n_k =$ αριθμητική πυκνότητα φορέων ταχύτητας \vec{u}_k

$N_Q =$ αριθμητική πυκνότητα φορέων φορτίου Q ανεξαρτήτως ταχύτητας

Σύμφωνα λοιπόν με τις παραπάνω σχέσεις

η πυκνότητα (και κατ' επέκταση και η ένταση του) ρεύματος εξαρτάται **μόνον από την μέση ταχύτητα των φορέων φορτίου, την καλούμενη και ταχύτητα μεταθέσεως**. Σημειωτέον ότι

η φορά του διανύσματος της πυκνότητας καθορίζεται **συμβατικά με βάση την φορά μετάθεσης των θετικών φορέων.**

Εφαρμογές: Υπολογισμός της ταχύτητας μεταθέσεως: Από την σχέση [3.6] παίρνουμε για την ταχύτητα μεταθέσεως των κινουμένων φορτίων $\vec{u} = \vec{j} / \rho_Q = \vec{j} (Q \cdot N_Q)$ { 4 }. Στην περίπτωση ενός μεταλλικού αγωγού οι φορείς είναι (τα ελεύθερα) ηλεκτρόνια, δηλαδή αρνητικώς φορτισμένα σωματίδια, οπότε η ταχύτητα μεταθέσεως έχει αντίθετη φορά προς την πυκνότητα ρεύματος. Σύμφωνα εξάλλου με την σχέση {4} το μέτρο της είναι:

$u = j / (eN_e)$ { 5 }, όπου e το στοιχειώδες ηλεκτρικό φορτίο και N_Q ο αριθμός των ελεύθερων ηλεκτρονίων ανά μονάδα όγκου, ο οποίος υπολογίζεται ως εξής:

$$N_e = \frac{\text{ελευθέρα ηλεκτρόνια}}{\text{όγκος}} = \frac{\text{άτομα} \cdot K}{\text{όγκος}} = \frac{(\text{moles} \cdot N_A)K}{\text{όγκος}} = \frac{(\text{μάζα} / \text{ατομική} \text{μάζα})N_A K}{\text{όγκος}}$$

$$= \frac{\text{πυκνότητα} \text{αγωγού} \cdot N_A \cdot K}{\text{ατομική} \text{μάζα}} \Leftrightarrow N_e = \frac{dN_A K}{M} : \begin{matrix} \text{αριθμητική} & \text{πυκνότητα} \\ \text{ελευθέρων} & \text{ηλεκτρονίων} \\ \text{εντός} & \text{μεταλλικού} \text{αγωγού} \end{matrix} \quad [3.8]$$

όπου d = πυκνότητα αγωγού (kg / m^3)

$N_A = 6,023 \cdot 10^{28}$ άτομα/ kmol: αριθμός του Avogadro

K = αριθμός ελευθέρων ηλεκτρονίων ανά άτομο

M = ατομική μάζα του αγωγού

Παράδειγμα: Για χάλκινο καλώδιο ($d = 8,96 \cdot 10^3 \text{ kg} / \text{m}^3$, $M = 63,55$) και με την προϋπόθεση ότι αντιστοιχεί ένα ελεύθερο ηλεκτρόνιο ανά άτομο παίρνουμε:

$$N_e^{Cu} = \frac{8,96 \cdot 10^3 \cdot 6,023 \cdot 10^{26}}{63,55} \Rightarrow N_e^{Cu} = 8,49 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3} = 8,49 \cdot 10^{22} \text{ cm}^{-3} \quad \{ 6 \}$$

Για μια λογική πυκνότητα ρεύματος $j = 100 \text{ A} / \text{cm}^2$, η σχέση {5} μας δίνει για την ταχύτητα μεταθέσεως των ελευθέρων ηλεκτρονίων εντός ενός χάλκινου καλωδίου:

$$u = 100 / (1,6021 \cdot 10^{-19} \cdot 8,49 \cdot 10^{22}) = 0,007 \text{ cm} / \text{s} . \text{ Βλέπουμε λοιπόν, ότι}$$

η μεγάλη ταχύτητα διάδοσης του ηλεκτρικού ρεύματος δεν οφείλεται στην μετακίνηση των ηλεκτρονίων, αλλά στην (μεγάλη) ταχύτητα διάδοσης του ηλεκτρικού πεδίου, η οποία ισούται με την ταχύτητα διάδοσης του φωτός.

3.2 Αποτελέσματα του ηλεκτρικού ρεύματος

Θερμικά: Ένας ρευματοφόρος αγωγός θερμαίνεται

Εφαρμογές: Αντιστάσεις ηλεκτρικών θερμαστρών και εστιών, λαμπτήρες πυρακτώσεως κ.λ.π.

Μαγνητικά: Γύρω από έναν ρευματοφόρο αγωγό δημιουργείται μαγνητικό πεδίο.

Εφαρμογές: Ηλεκτρομαγνήτες, ηλεκτρικές γεννήτριες, ηλεκτροκινητήρες κ.λ.π.

Χημικά : Η διέλευση του ηλεκτρικού ρεύματος μέσω των καλουμένων **αγωγών δευτέρας τάξεως** συνοδεύεται, από το **φαινόμενο της ηλεκτρόλυσης** (βλ. αντίστοιχο κεφάλαιο).

Εφαρμογές: Ηλεκτρομεταλλουργία, επιμετάλλωση κ.λ.π.

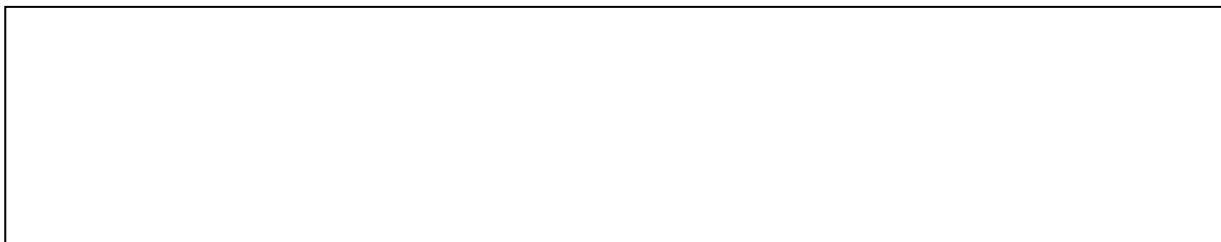
(**Αγωγοί πρώτης τάξεως:** η διέλευση του ηλεκτρικού ρεύματος δεν συνοδεύεται από μεταφορά μάζας. Π.χ. μεταλλικοί αγωγοί. **Αγωγοί δευτέρας τάξεως:** η διέλευση του ηλ. ρεύματος συνοδεύεται από μεταφορά μάζας. Π.χ. Ηλεκτρολύτες.)

3.3 Όργανα μέτρησης του ηλ. ρεύματος

Η μέτρηση του ρεύματος στηρίζεται στα παραπάνω αποτελέσματά του.

Τα όργανα μέτρησης της έντασης του ηλεκτρικού ρεύματος καλούνται γενικά **αμπερόμετρα**, εκείνα δε που μετρούν πολύ μικρές εντάσεις ($\approx \mu\text{A}$) **γαλβανόμετρα**. Οι πλέον διαδεδομένες στην πράξη μορφές είναι οι ακόλουθες:

a) Αμπερόμετρα (γαλβανόμετρα) περιστρεφόμενου σωληνοειδούς (σχ. 3.3a): Εξ αιτίας του μαγνητικού πεδίου, το οποίο δημιουργείται, όταν το σωληνοειδές (1) διαρρέεται από ρεύμα, ασκείται επ' αυτού μηχανική ροπή, εξ αιτίας του μαγνητικού πεδίου ενός μόνιμου μαγνήτη (2). Το σωληνοειδές και μαζί του και ο δείκτης (3) περιστρέφονται, έως ότου η ροπή επαναφοράς του σπειροειδούς ελατηρίου (4) γίνει ίση με την από το ρεύμα εγειρόμενη ροπή.



Σχήμα 3.3: Διάφοροι τύποι αμπερομέτρων.

b) Αμπερόμετρα περιστρεφόμενου πυρήνα σιδήρου (σχ. 3.3b): Τόσο το περιστρεφόμενο (1) όσο και το σταθερό (2) κομμάτι σιδήρου μαγνητίζονται, όταν το αυτά περιβάλλον σωληνοειδές (3) διαρρέεται από ρεύμα. Λόγω δε της ομοειδούς τους μαγνήτισης απωθούνται.

c) Θερμικά αμπερόμετρα: Όταν το σύρμα (1) διαρρέεται από ρεύμα, θερμαίνεται και διαστέλλεται. Η αύξηση αυτή του μήκους του μετατρέπεται με την βοήθεια του ελατηρίου (2) σε περιστροφή του δείκτη (3).

Τόσο τα θερμικά όσο και τα αμπερόμετρα περιστρεφόμενου πυρήνα μπορούν να χρησιμοποιηθούν τόσο για συνεχές όσο και για εναλλασσόμενο ρεύμα, μια και η ένδειξη τους δεν επηρεάζεται από την φορά του ρεύματος.

3.4 Ηλεκτρική αντίσταση

Ηλεκτρική αντίσταση R ενός αγωγού (με την ευρύτερη σημασία της λέξης) ή τμήματος αγωγού καλείται το πηλίκο της διαφοράς δυναμικού U μεταξύ των άκρων του αγωγού ή του τμήματός του προς την ένταση του ρεύματος I , το οποίο τον ή το διαρρέει:

ηλεκτρική αντίσταση

$$R = \frac{U}{I}$$

[3 . 9]

Το αντίστροφο της ηλεκτρικής αντίστασης καλείται ηλεκτρική αγωγιμότητα:

ηλεκτρική αγωγιμότητα

$$G = 1/R$$

[3 . 10]

Σημειωτέον ότι ο λόγος $R=U/I$ (και κατά συνέπεια και η ηλ. αγωγιμότητα G) **εξαρτάται γενικώς από την τιμή της τάσης U και της έντασης I** . Η σχέση μεταξύ έντασης I και τάσης U αποδίδεται γραφικά με τις λεγόμενες χαρακτηριστικές καμπύλες έντασης – τάσης:

Μονάδες (SI)

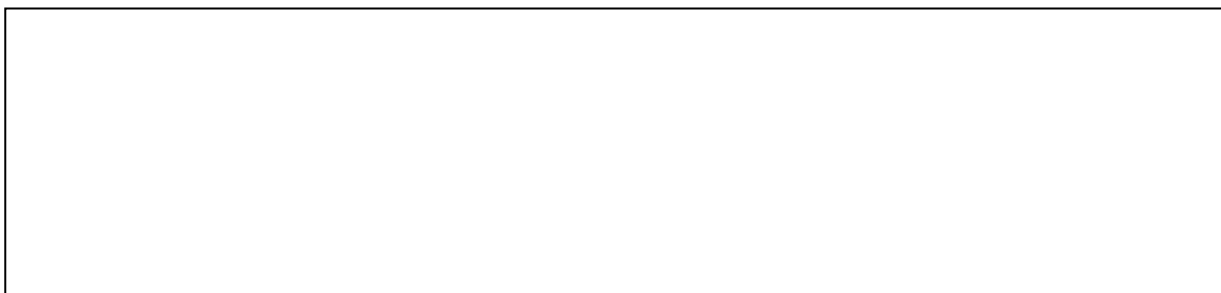
$$[R] = \frac{V}{A} \equiv \Omega (Ohm)$$

$$[G] = \Omega^{-1} \equiv S (iemens)$$

α) Ωμικοί αγωγοί: Μέταλλα, ηλεκτρολύτες, ημιαγωγοί, όταν η θερμοκρασία είναι σταθερή:

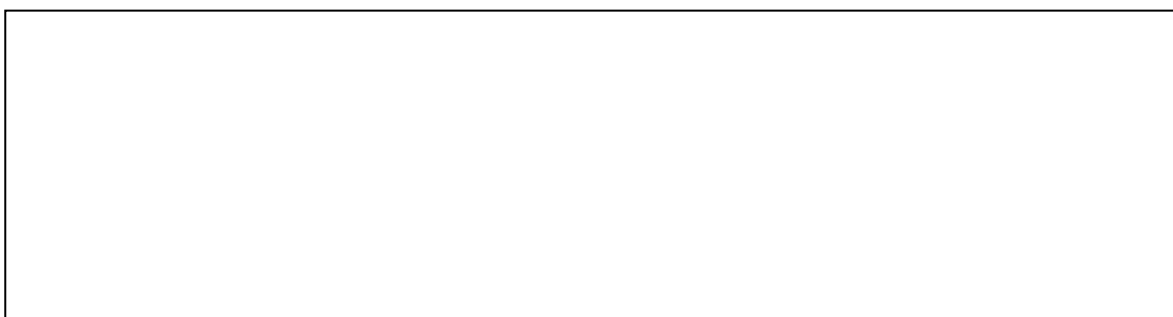
β) Ανορθωτική δίοδος:

γ) Δίοδος ηλεκτρονική λυχνία με κάθοδο πυρακτώσεως



Σχήμα 3.6: Χαρακτηριστική καμπύλη έντασης- τάσης μιας διόδου ηλεκτρονικής λυχνίας και κύκλωμα μέτρησης.

δ) Φωτοβολταϊκό τόξο:



Σχήμα 3.7: Χαρακτηριστική καμπύλη έντασης- τάσης ενός φωτοβολταϊκού τόξου και κύκλωμα μέτρησης.

3.4.1 Νόμος του Ohm

Ο Ohm διαπίστωσε πειραματιζόμενος με *μεταλλικά, ομογενή καλώδια* συνδεδεμένα με τους πόλους μιας πηγής συνεχούς ρεύματος, ότι για *σταθερή θερμοκρασία* και

α) για ένα *συγκεκριμένο καλώδιο* η ένταση I του ρεύματος είναι ανάλογη προς την τάση U στα άκρα του καλωδίου, όταν όλες οι υπόλοιπες παράμετροι παραμένουν αμετάβλητες.

β) για *σταθερή τάση U* στα άκρα ενός καλωδίου από *συγκεκριμένο μέταλλο* η ένταση I του ρεύματος είναι ανάλογη προς την διατομή S και αντιστρόφως ανάλογη προς το μήκος l του καλωδίου.

γ) για *σταθερή τάση U* στα άκρα ενός συγκεκριμένου καλωδίου η διαφορά δυναμικού U' μεταξύ των άκρων ενός τμήματος, μήκους l' του καλωδίου, είναι ανάλογη προς το μήκος l' του εν λόγω τμήματος.

Από τα α) και β) έπεται, ότι η ένταση του ρεύματος, το οποίο διαρρέει έναν μεταλλικό αγωγό, διατομής S και μήκους l , όταν στα άκρα του εφαρμόζεται τάση U , δίδεται από την σχέση:

$$I = \frac{1}{\rho} \frac{S}{l} U \quad \{ 1 \}$$

Η παραπάνω σχέση σε συνδυασμό με την εξίσωση ορισμού [3.9] της ηλεκτρικής αντίστασης μας οδηγεί στην ακόλουθη **διατύπωση του νόμου του Ohm:**

Η ηλεκτρική αντίσταση ενός **μεταλλικού** αγωγού είναι για **σταθερή θερμοκρασία** ανεξάρτητη από την τάση, η οποία εφαρμόζεται στα άκρα του:

$$\text{νόμος του Ohm: } R = \frac{U}{I} \quad \begin{array}{l} \text{για σταθερή} \\ \text{θερμοκρασία} \end{array} \quad \text{σταθ} \quad [3.11]$$

Αγωγοί, οι οποίοι υπακούουν στον νόμο του Ohm καλούνται **ωμικές αντιστάσεις**. Όπως δε αποδεικνύεται πειραματικά, στην κατηγορία αυτή ανήκουν πλην των **μετάλλων, οι ηλεκτρολύτες και οι ημιαγωγοί**.

Αν στην παραπάνω σχέση αντικαταστήσουμε την ένταση I σύμφωνα με την σχέση {1}, προκύπτει για την αντίσταση ενός μεταλλικού αγωγού η εξίσωση:

$$R = \rho \frac{l}{S} \quad [3.12]$$

αντίσταση μεταλλικού αγωγού:

όπου l = μήκος του αγωγού
 S = διατομή του αγωγού

Η συνήθως ισχυρώς από την θερμοκρασία εξαρτώμενη παράμετρος ρ καλείται **ειδική αντίσταση** και ισούται με την αντίσταση ενός αγωγού, κατασκευασμένου από το αντίστοιχο υλικό, μήκους ίσου με την μονάδα μήκους και διατομής ίσης με την μονάδα εμβαδού. Στον Πίνακα **3.4.1.1** περιέχονται οι τιμές της ειδικής αντίστασης για μια κατηγορία υλικών, τα οποία χρησιμοποιούνται συνήθως στις πρακτικές εφαρμογές. Το αντίστροφο της ειδικής αντίστασης καλείται **ειδική αγωγιμότητα γ $\gamma = \rho^{-1}$**

Πίνακας 3.4.1.1: Ειδική αντίσταση ορισμένων μετάλλων και μονωτών σε 20 °C

Αλουμίνιο	0,027 mm ² /m	Βενζόλιο	10 ¹⁵ ~ 10 ¹⁶ Ωm
-----------	--------------------------	----------	--

Άργυρος	0,016	Βακελίτης	10^{14}
Βολφράμιο	0,055	Γυαλί	$>10^{11}$
Κονσταντίνη	0,500	Καουτσούκ	$6 \cdot 10^{14}$
Μόλυβδος	0,208	Νερό αποσταγμ.	$(1\sim 4) \cdot 10^4$
Νάτριο	0,046	» ποταμών	$10 \sim 100$
Νικέλιο	0,087	» θαλασσών	0,3
Πλατίνα	0,107	Παραφίνη	$10^{14} \sim 10^{16}$
Σίδηρος	0,100	Πορσελάνη	$5 \cdot 10^{12}$
Χαλκός	0.017	Πυρίτιο	$1.2 \cdot 10^7$

Όπως είδαμε στο σημείο γ) του παρόντος κεφαλαίου, η πτώση τάσεως U σε ένα τμήμα μήκους l ενός ομογενούς καλωδίου είναι ανάλογη προς το εν λόγω μήκος: $U = \int E dl = \sigma \alpha \theta \cdot l$. Από τα παραπάνω προκύπτει, ότι

όταν στα άκρα ενός ομογενούς καλωδίου μήκους l εφαρμόζεται σταθερή τάση U , τότε στο εσωτερικό του επικρατεί ένα ομογενές ηλεκτρικό πεδίο έντασης $E=U/l$.

Αν τώρα στην σχέση αυτή αντικαταστήσουμε διαδοχικά τις εξισώσεις [3.11] και [3.12] παίρνουμε:

$$E = \frac{U}{l} \stackrel{[3.11]}{=} \frac{I \cdot R}{l} \stackrel{[3.12]}{=} \frac{I \cdot (\rho l / S)}{l} \Rightarrow E = \rho \frac{I}{S} = \rho j \stackrel{[3.4]}{=}$$

$$: \vec{E} = \rho \vec{j} \Leftrightarrow \vec{j} = \gamma \vec{E}$$

νόμος του Ohm μικροσκοπικά, αν ρ
και $\gamma = \sigma$ σταθ. για σταθερή θερμοκρασία

όπου \vec{j} = πυκνότητα ρεύματος

ρ = ειδική αντίσταση, γ = ειδική αγωγιμότητα.

Η ουσιαστική διαφορά μεταξύ της μικροσκοπικής ([3.13]) και της αντίστοιχης μακροσκοπικής ([3.11]) διατύπωσης του νόμου του Ohm είναι, ότι η μεν πρώτη αναφέρεται σε ένα συγκεκριμένο σημείο ενός αγωγού από κάποιο συγκεκριμένο υλικό, η δε δεύτερη χαρακτηρίζει ένα συγκεκριμένο τμήμα ενός συγκεκριμένου αγωγού.

3.4.2. Εξάρτηση της ειδικής αντίστασης από την θερμοκρασία

Όπως εύκολα μπορεί να διαπιστώσει κάποιος και μόνος του,

η ειδική αντίσταση των μετάλλων αυξάνεται, ενώ των ημιαγωγών ελαττώνεται με αυξανόμενη θερμοκρασία.

Πιο συγκεκριμένα και όπως προκύπτει από τα πειραματικά δεδομένα, για

α)τα μέταλλα και μικρές σχετικά θερμοκρασιακές περιοχές η αύξηση της ειδικής τους αντίστασης ρ με την θερμοκρασία t (σε °C) μπορεί να θεωρηθεί γραμμική: $\rho = \rho_0 (1 + \alpha t)$ [3.14]

ρ_0 είναι ειδική αντίσταση στους 0 °C. (Προκειμένου να χρησιμοποιηθούν οι τιμές της ειδικής αντίστασης, οι οποίες περιέχονται στον Πίνακα 3.4.1.1, πρέπει να αντικαταστήσουμε την θερμοκρασία t στην εξίσωση [3.14] με την θερμοκρασία ($t - 20$ °C)).

α = θερμικός συντελεστής αντιστάσεως (Τιμές περιέχονται στον Πίνακα 3.4.2.1), **ο οποίος περιγράφει** ([3.14] -> $\alpha = (\rho - \rho_0) / (\rho_0 t)$) **την σχετική μεταβολή της ειδικής αντίστασης ανά βαθμό μεταβολής της θερμοκρασίας.** Ο θερμικός συντελεστής α ορισμένων κραμάτων είναι τόσο μικρός, ώστε η ηλεκτρική τους αντίσταση είναι πρακτικά ανεξάρτητη από την θερμοκρασία. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η Κονσταντάνη (**Konstantan**: 60% Cu + 40% Ni, ' **konstant**' = σταθερός!). Τέτοια κράματα χρησιμοποιούνται για την κατασκευή πολύ σταθερών αντιστάσεων.

Πίνακας 3.4.2.1: Θερμικός συντελεστής α της ειδικής αντίστασης ορισμένων μετάλλων μεταξύ 0 και 100°C			
Αλουμίνιο	$4,7 \cdot 10^{-3} \text{K}^{-1}$	Νάτριο	$5,5 \cdot 10^{-3} \text{K}^{-1}$
Άργυρος	$3,8 \cdot 10^{-3} \text{K}^{-1}$	Νικέλιο	$6,5 \cdot 10^{-3} \text{K}^{-1}$
Βολφράμιο	$4,5 \cdot 10^{-3} \text{K}^{-1}$	Πλατίνα	$3,9 \cdot 10^{-3} \text{K}^{-1}$
Κονσταντάνη	$0,03 \cdot 10^{-3} \text{K}^{-1}$	Σίδηρος	$6,1 \cdot 10^{-3} \text{K}^{-1}$
Μόλυβδος	$4,2 \cdot 10^{-3} \text{K}^{-1}$	Χαλκός	$3,9 \cdot 10^{-3} \text{K}^{-1}$

Σημειώτεον ότι η πραγματική εξάρτηση της ειδικής αντίστασης των μετάλλων από την θερμοκρασία είναι - σε όχι πολύ χαμηλές θερμοκρασίες - (συνήθως) της μορφής $\rho \sim T^{3/2}$.Σε θερμοκρασίες που πλησιάζουν το απόλυτο μηδέν η ειδική αντίσταση είτε είναι σταθερή, είτε μηδενίζεται: **φαινόμενο υπεραγωγιμότητας** (βλ. 3.6.2).

β) τους ημιαγωγούς, έχουμε (συνήθως εκθετική $\rho \sim e^{T/A}$, A = παράμετρος εξαρτώμενη και από την φύση του ημιαγωγού, T = απόλυτη θερμοκρασία) ελάττωση της ειδικής αντίστασης με αυξανόμενη θερμοκρασία.

Η παραπάνω συμπεριφορά της ειδικής αντίστασης των μετάλλων και των ημιαγωγών θα γίνει κατανοητή στο κεφάλαιο 3.6, όπου θα ασχοληθούμε με τους μηχανισμούς της ηλεκτρικής αγωγιμότητας.

Εφαρμογές: $1^{\text{η}}$) Η εξάρτηση της ηλεκτρικής αντίστασης από την θερμοκρασία χρησιμοποιείται για την **μέτρηση θερμοκρασιών:** Στα λεγόμενα **θερμόμετρα αντιστάσεως** χρησιμοποιούνται συνήθως λεπτά καλώδια από Pt ή Ni. Πλεονεκτήματα των θερμομέτρων αντιστάσεως είναι α) η δυνατότητα χρησιμοποίησής

τους σε πολύ χαμηλές και υψηλές θερμοκρασίες και β) η μικρή τους θερμοχωρητικότητα και κατά συνέπεια μικρή αδράνεια ενδείξεως της μετρούμενης θερμοκρασίας.

2^η) Ορισμένα ημιαγώγιμα οξειδία, σουλφίδια και σελενίδια βαρέων μετάλλων, με θερμικούς συντελεστές $-3 \sim -6 \cdot 10^{-2} \text{ K}^{-1}$, χρησιμοποιούνται για την κατασκευή των λεγόμενων **NTC - αντιστάσεων** (Negative Temperature Coefficient = αρνητικός θερμικός συντελεστής) ή **καυτών αγωγών**, των οποίων η ηλεκτρική αντίσταση ελαττώνεται με αυξανόμενη θερμοκρασία. Τέτοιες αντιστάσεις χρησιμοποιούνται για την **μέτρηση και αυτόματη ρύθμιση θερμοκρασιών**, την **εξουδετέρωση της αύξησης της τιμής μεταλλικών αντιστάσεων** και τέλος εξασφαλίζουν την «ομαλή» **εκκίνηση ηλεκτροκινητήρων**. Το τελευταίο οφείλεται στο γεγονός, ότι δεν επιτρέπουν την απότομη αύξηση του ρεύματος αλλά μόνο την σταδιακή, στο βαθμό δηλαδή που η αντίσταση τους ελαττώνεται καθώς οι ίδιοι θερμαίνονται λόγω του φαινομένου Joule (βλ. κεφ.3.5).

3.4.3. Εξάρτηση της ειδικής αντίστασης από άλλους παράγοντες - Εφαρμογές

α) **Επίδραση μαγνητικού πεδίου** έχει ως αποτέλεσμα (συνήθως) την αύξηση της ειδικής αντίστασης. Το φαινόμενο είναι ιδιαίτερα έντονο στην περίπτωση του Βισμούθιου (Bi), το οποίο και χρησιμοποιείται (συνήθως με την μορφή μικρών σωληνοειδών) για την **μέτρηση μαγνητικών πεδίων**.

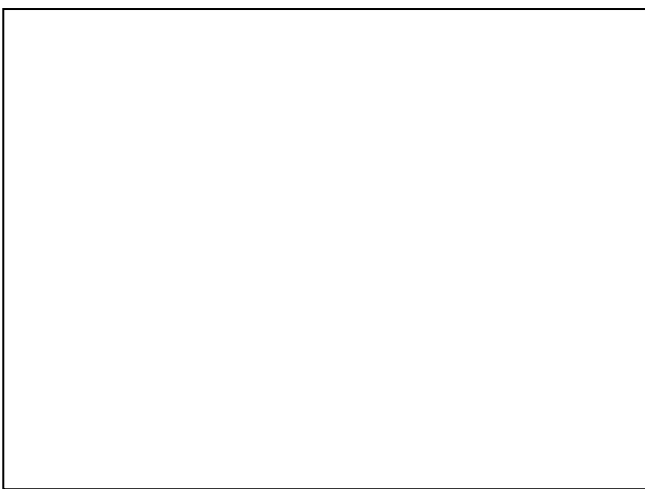
β) **Επίδραση ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας** καταλλήλου μήκους κύματος (συνήθως πρόκειται για ορατή, υπέρυθη και υπεριώδη ακτινοβολία) έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση ή αύξηση της ήδη υπάρχουσας αγωγιμότητας ορισμένων μονωτών και ημιαγωγών, όπως είναι το διαμάντι, το Σουλφίδιο του Ψευδαργύρου (ZnS), το αλάτι (NaCl) κ.ά. Η αύξηση αυτή της αγωγιμότητας οφείλεται στην «δημιουργία» ελευθέρων ηλεκτρονίων μέσω απορρόφησης της παραπάνω ακτινοβολίας, γεγονός το οποίο χαρακτηρίζεται ως **εσωτερικό φωτοηλεκτρικό φαινόμενο** (ως εξωτερικό θα χαρακτηριζότο, αν τα εν λόγω ηλεκτρόνια απομακρύνοντο εντελώς από το υλικό). Το εσωτερικό φωτοηλεκτρικό φαινόμενο βρίσκει εφαρμογή στην **μέτρηση της φωτεινής έντασης**, σε **διατάξεις αυτόματης λειτουργίας και ελέγχου μέσω «φωτοαντιστάσεων»** και τελευταία (όλο και εντονότερα) στα **φωτοστοιχεία** όπου έχουμε άμεση μετατροπή της ηλιακής ακτινοβολίας σε ηλεκτρικό ρεύμα.

γ) **Επίδραση μηχανικών παραμορφώσεων**, τέλος, έχει επίσης ως αποτέλεσμα την μεταβολή της ειδικής αντίστασης ορισμένων αγωγών, γεγονός το οποίο εκμεταλλευόμαστε για την μέτρηση μικρών μεταβολών μήκους.

3.5 Κυκλώματα συνεχούς ρεύματος

Σαν **ηλεκτρικό κύκλωμα** χαρακτηρίζεται γενικά κάθε διαδρομή την οποία μπορεί να ακολουθήσει ένα ηλεκτρικό ρεύμα, επειδή πρέπει συνήθως να είναι **κλειστή** (Περίπτωση ρευμάτων σε **ανοιχτά** κυκλώματα αποτελούν τα υψηλόσυχνα εναλλασσόμενα ρεύματα των κεραιών, τα οποία όμως δεν αποτελούν αντικείμενο του παρόντος συγγράμματος).

3.5.1 Ηλεκτρικές πηγές



Τα στοιχεία από τα οποία αποτελείται ένα κύκλωμα διακρίνονται σε **πηγές** και **καταναλωτές**. Οι **ηλεκτρικές πηγές** είναι συσκευές, οι οποίες δημιουργούν μεταξύ

των ακροδεκτών τους την απαραίτητη για την μετακίνηση των ηλεκτρικών φορτίων διαφορά δυναμικού, έτσι ώστε να διαρρέονται από ρεύμα οι με την πηγή συνδεδεμένοι **καταναλωτές** (π.χ. λαμπτήρες, ηλεκτροκινητήρες κ.λ.π.). Στο σχήμα 3.8 βλέπουμε την πιο απλή περίπτωση κυκλώματος, μια μπαταρία (πηγή) και έναν λαμπτήρα πυρακτώσεως (καταναλωτής).

Όπως γνωρίζουμε, η μετακίνηση ηλεκτρικού φορτίου μεταξύ δύο σημείων διαφορετικού δυναμικού (π.χ. των ακροδεκτών μιας πηγής) μεταβάλλει την δυναμική του ενέργειας. Στο εξωτερικό κύκλωμα της πηγής έχουμε μετακίνηση των ηλεκτρονίων από τον αρνητικό προς τον θετικό της -πόλο, στο εσωτερικό αντίστροφα. Η μετακίνηση των ηλεκτρονίων στο *εξωτερικό* κύκλωμα συνεπάγεται ελάττωση της ηλεκτρικής δυναμικής τους ενέργειας και παραγωγή ισόποσης ενέργειας άλλης μορφής (ή άλλων μορφών, π.χ. μηχανικής, θερμικής, χημικής κ.λ.π.) στους διάφορους καταναλωτές. Στο *εσωτερικό* της πηγής έχουμε ισόποση αύξηση της ηλεκτρικής δυναμικής ενέργειας των ηλεκτρονίων, η οποία γίνεται σε βάρος άλλων μορφών ενέργειας, οι οποίες εξαρτώνται από το είδος της πηγής: χημικής στα **ηλεκτρικά στοιχεία** (κν. μπαταρίες) και τους **συσσωρευτές** (π.χ. μπαταρίες αυτοκινήτων), θερμότητας στις **γεωθερμικές και θερμοηλεκτρικές μονάδες**, ατομικής στους **πυρηνικούς αντιδραστήρες**, αιολικής στις **ανεμογεννήτριες**, ηλιακής στους **ηλιακούς συλλέκτες** κ.λ.π. Με άλλα λόγια

η λειτουργία μιας πηγής συνίσταται στην αναπλήρωση της ηλεκτρικής ενέργειας, την οποία χάνουν τα φορτία κατά την ροή τους μέσω των καταναλωτών, οι οποίοι τροφοδοτούνται από την πηγή, προκειμένου να διατηρείται η ροή των φορτίων.

Μια πηγή δεν «γεννάει» φορτία απλώς τα μετακινεί. Παίζει δηλαδή τον ρόλο μιας αντλίας και όχι μιας δεξαμενής.

Χαρακτηριστικό γνώρισμα κάθε πηγής αποτελεί η λεγόμενη (πολύ παραπλανατικά!) **ηλεκτρεγερτική δύναμη (ΗΕΔ)**: καλείται το πηλίκο της ενέργειας dW , η οποία πρέπει να προσφερθεί από την πηγή για την μετακίνηση του φορτίου dQ , προς το φορτίο αυτό:

$$\text{ηλεκτρεγερτική δύναμη (ΗΕΔ):} \quad E = \frac{dW}{dQ} \quad [3.15]$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει άμεσα, ότι **μονάδα μέτρησης της ΗΕΔ είναι το Volt** το οποίο αποτελεί και την μονάδα μέτρησης της τάσης $U=IR$, η οποία επικρατεί στα άκρα αγωγού αντίστασης R , ο οποίος διαρρέεται από (συνεχές εννοείται πάντα) ρεύμα εντάσεως I . Μεταξύ όμως των εννοιών «τάση» και «**ΗΕΔ**» υπάρχει η εξής σημαντικότερη διαφορά: η τάση (= διαφορά δυναμικού μεταξύ των άκρων ενός αγωγού) εξαρτάται αποφασιστικά από το τμήμα του κυκλώματος, στο οποίο βρίσκεται ο εν λόγω αγωγός, ενώ η ΗΕΔ μιας πηγής ή όχι.

Στα επόμενα κεφάλαια θα ασχοληθούμε με την μελέτη (υπολογισμός των ρευμάτων, τα οποία διαρρέουν τους διάφορους αγωγούς, και των τάσεων, οι οποίες επικρατούν στα άκρα τους) κυκλωμάτων, στα οποία οι καταναλωτές είναι *ωμικές* αντιστάσεις, θα χρησιμοποιήσουμε δε τους ακόλουθους συμβολισμούς:

3.5.2 Συνδεσμολογίες αντιστάσεων

Στην πράξη των ηλεκτρονικών κυκλωμάτων είμαστε πολλές φορές αναγκασμένοι να «κατασκευάζουμε» τις επιθυμητές αντιστάσεις συνδυάζοντας τις τυποποιημένες τιμές του εμπορίου. Οι χρησιμοποιούμενες προς τον σκοπό αυτό συνδεσμολογίες στηρίζονται συνήθως στις ακόλουθες δύο βασικές συνδέσεις:



α) Σύνδεση αντιστάσεων σε σειρά:

Στην σύνδεση σε σειρά η ένταση του ρεύματος είναι για όλες τις αντιστάσεις η ίδια, ενώ η ολική τάση ισούται με το άθροισμα των επιμέρους τάσεων. Επομένως η ολική ή ισοδύναμη αντίσταση της συστοιχίας (η οποία ορίζεται σαν την μοναδική εκείνη αντίσταση R, η οποία διαρρέεται από το ίδιο με την συστοιχία ρεύμα I, όταν στα άκρα της εφαρμόζεται η ολική τάση της συστοιχίας) θα είναι σύμφωνα με τον νόμο του Ohm:

$$R \equiv R_{ολ} = \frac{U_{ολ}}{I_{ολ}} = \frac{U_1 + U_2 + U_3}{I} = \frac{U_1}{I} + \frac{U_2}{I} + \frac{U_3}{I} \Rightarrow R = R_1 + R_2 + R_3$$

Επομένως η ολική αντίσταση R μιας συστοιχίας k αντιστάσεων συνδεδεμένων σε σειρά ισούται με το άθροισμα των επιμέρους αντιστάσεων R_i της συστοιχίας:

$$R = \sum_{i=1}^k R_i \quad \text{ολική} \quad \text{αντίσταση} \quad [3.16]$$



β) Παράλληλη σύνδεση αντιστάσεων:

Στην παράλληλη σύνδεση η τάση U_i στα άκρα έκαστης αντίστασης R_i είναι η ίδια με την ολική τάση $U \equiv U_{ολ}$ της συστοιχίας, ενώ το ρεύμα $I \equiv I_{ολ}$, το οποίο διαρρέει την συστοιχία, ισούται με το άθροισμα (αρχή διατηρήσεως του ηλ. φορτίου, βλ. και § 3.5.4, 1^{ος} κανόνας του Kirchhoff) των ρευμάτων I_i , τα οποία διαρρέουν τις επιμέρους αντιστάσεις της συστοιχίας.

Η ολική αντίσταση R της συστοιχίας δίδεται και πάλι

από τον νόμο του Ohm:

$$R \equiv R_{ολ} = \frac{U_{ολ}}{I_{ολ}} = \frac{U}{I_1 + I_2 + I_3} \Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{I_1 + I_2 + I_3}{U} = \frac{I_1}{U} + \frac{I_2}{U} + \frac{I_3}{U} \Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Επομένως το αντίστροφο της ολικής αντίστασης μιας συστοιχίας αντιστάσεων συνδεδεμένων παράλληλα ισούται, με το άθροισμα των αντιστρόφων επιμέρους αντιστάσεων:

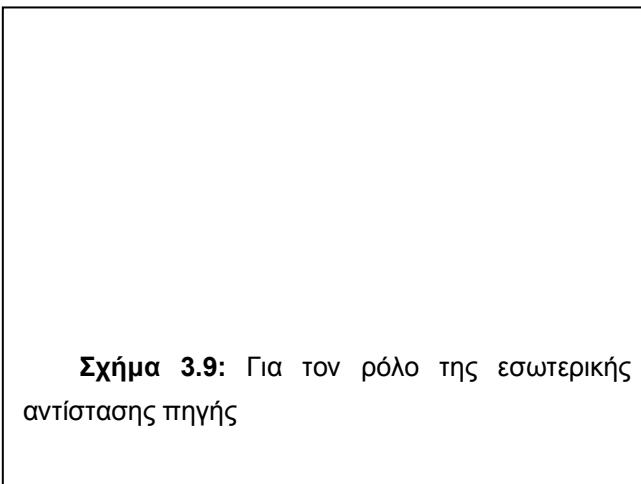
$$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^k \frac{1}{R_i} \quad \text{ολική αντίσταση συστοιχίας} \quad [3.17]$$

Σκεπτόμενοι ότι το αντίστροφο της αντίστασης ισούται εξ ορισμού (βλ. [3.10]) με την αγωγιμότητα, μπορούμε να συνοψίσουμε τα παραπάνω ως εξής:

στην σύνδεση σε σειρά προστίθενται οι αντιστάσεις, ενώ στην παράλληλη σύνδεση οι αγωγιμότητες.

3.5.3 Ο ρόλος της εσωτερικής αντίστασης

Στο σχήμα 3.9 έχουμε και πάλι την απλούστερη δυνατή περίπτωση ενός κυκλώματος, το οποίο αποτελείται από μία μόνο πηγή και μια ωμική αντίσταση. Ένα τέτοιο κύκλωμα χαρακτηρίζεται συνήθως ως **απλό κύκλωμα**.



Σχήμα 3.9: Για τον ρόλο της εσωτερικής αντίστασης πηγής

Όταν το παραπάνω απλό κύκλωμα είναι κλειστό, διαρρέεται από ρεύμα τόσο η αντίσταση R (το *εξωτερικό* δηλ. τμήμα του κυκλώματος), όσο όμως και η ίδια η πηγή. Το ρεύμα επομένως, το οποίο διαρρέει το κύκλωμα, δεν θα εξαρτάται μόνο από την τιμή της εξωτερικής αντίστασης R , αλλά και από εκείνη της ίδιας της πηγής, της λεγόμενης **εσωτερικής αντίστασης r** . Επειδή δε οι δύο αυτές αντιστάσεις είναι συνδεδεμένες σε σειρά, η ολική αντίσταση του κυκλώματος ισούται με το άθροισμα τους. Επομένως η ένταση του ρεύματος θα είναι σύμφωνα με τον νόμο του Ohm:

$$I = \frac{E}{R + r} \quad \text{ένταση του ρεύματος σε απλό κύκλωμα} \quad [3.18]$$

όπου $E = \text{ΗΕΔ της πηγής}$

r = εσωτερική αντίσταση της πηγής

R = εξωτερική αντίσταση του κυκλώματος.

Σύμφωνα με την παραπάνω σχέση, η ένταση του ρεύματος γίνεται μέγιστη και ίση με $I = E / r$ (**ρεύμα βραχυκυκλώσεως**), όταν βραχυκυκλώσουμε ($R = 0$) τους πόλους της πηγής.

Η **πολική**, όπως χαρακτηρίζεται, **τάση U** ή **τάση ακροδεκτών** θα είναι (νόμος του Ohm):

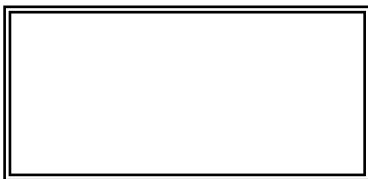
$$[3.18] \quad U = I \cdot R = \frac{E}{R + r} R = \frac{E}{1 + \frac{r}{R}} \Rightarrow \lim_{R \rightarrow \infty} U = E$$

Επομένως η τάση ακροδεκτών μιας πηγής είναι πάντα μικρότερη από την ΗΕΔ της πηγής, πλησιάζει όμως τόσο περισσότερο προς αυτήν όσο μικρότερη είναι η εσωτερική από την εξωτερική αντίσταση.

3.5.4 Συνδεσμολογία πηγών

Προκειμένου να επιτύχουμε ηλεκτρεγερτικές δυνάμεις μεγαλύτερες από την ΗΕΔ μιας μόνης πηγής ή ρεύματα μεγαλύτερα από εκείνα που μας δίνει μια πηγή είμαστε αναγκασμένοι να χρησιμοποιήσουμε περισσότερες πηγές, τις οποίες συνδέουμε κατά τους ακόλουθους τρεις τρόπους:

α) Σύνδεση σε σειρά:



Όπως φαίνεται από το διπλανό σχήμα έχουμε:

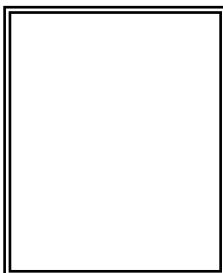
πηγών σε σειρά

$$E_{ολ} = \sum_i E_i \quad \text{: ολική ΗΕΔ}$$

$$r_{ολ} = \sum_i r_i \quad \text{: ολική εσ. αντίσταση}$$

Επομένως η σύνδεση σε σειρά χρησιμοποιείται, όταν επιδιώκουμε μεγάλες ΗΕΔ

β) Σύνδεση παράλληλα: Οι ΗΕΔ και οι εσωτερικές αντιστάσεις όλων των πηγών πρέπει να είναι ίδιες. Διαφορετικά η πηγή με την μεγαλύτερη ΗΕΔ προκαλεί ηλ. ρεύμα μέσα από τις υπόλοιπες και τις εκφορτίζει. Επομένως



$$E_{ολ} = E \quad \text{: ολική ΗΕΔ}$$

πηγών παράλληλα

$$r_{ολ} = \frac{r}{\kappa} \quad \text{: ολική εσ. αντίσταση}$$

Η παράλληλη σύνδεση χρησιμοποιείται, όταν θέλουμε μεγάλα ρεύματα.

γ) Μεικτή σύνδεση: Και κατά την μεικτή σύνδεση πρέπει όλες οι πηγές να είναι ίδιες, προκειμένου να αποφευχθεί η αυτοεκφόρτισή τους. (Θα αρκούσε, αν η ολική ΗΕΔ και r όλων των σειρών ήταν οι ίδιες. Για καθαρά πρακτικούς λόγους επιλέγουμε ίδιες πηγές).



Συνδυάζοντας τις σχέσεις των δύο παραπάνω τρόπων σύνδεσης παίρνουμε:

$$E_{ολ} = \lambda E \quad \text{: ολική ΗΕΔ}$$

$$r_{ολ} = \frac{\lambda r}{\kappa} \quad \text{: ολική εσ. αντίσταση}$$

μεικτή συνδεσμολογία

(κ = αριθμός σειρών, λ = αριθμός πηγών ανά σειρά)

Το ολικό ρεύμα $I_{ολ}$ και η τάση ακροδεκτών U_{+-} όλων των παραπάνω συστοιχιών, όταν αυτές τροφοδοτούν ένα απλό κύκλωμα, δίδεται από τις σχέσεις της παραγράφου 3.5.3, αν αντικαταστήσουμε την αντίστοιχη $E_{ολ}$ και $r_{ολ}$ της συστοιχίας:

$$I_{ολ} = \frac{E_{ολ}}{R_{ολ} + r_{ολ}} = \frac{U_{+-}}{R_{ολ}}$$

ένταση του ρεύματος και
τάση ακροδεκτών [3.22]

όπου **«απλό»** = κύκλωμα του οποίου όλες οι πηγές και όλες οι αντιστάσεις μπορούν να αντικατασταθούν από μια ισοδύναμη πηγή ή αντίσταση, αντίστοιχα, έτσι ώστε το κύκλωμα να μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελείται από μία μόνο πηγή (HEΔ= $E_{ολ}$ και ολικής εσωτερικής αντίστασης= $r_{ολ}$) και μια μόνο εξωτερική αντίσταση ίση με $R_{ολ}$.

$E_{ολ}$ = ολική **HEΔ** των πηγών του κυκλώματος

$r_{ολ}$ = ολική εσωτερική αντίσταση των πηγών του κυκλώματος

$R_{ολ}$ = ολική εξωτερική αντίσταση του κυκλώματος.

Παράδειγμα 3.5.4.1: Να υπολογισθεί η τιμή της αντίστασης R_X , την οποία πρέπει να συνδέσουμε παράλληλα προς την πηγή του παρακάτω κυκλώματος, έτσι ώστε η ένταση του ολικού ρεύματος να αυξηθεί κατά 1,5 φορά. Πώς κατανέμεται το ρεύμα αυτό στις διάφορες αντιστάσεις του κυκλώματος;



Λύση:

Το ολικό ρεύμα πριν συνδεθεί η R_X είναι ([3.22]):

$$I_{ολ}^π = \frac{E_{ολ}}{R_{ολ}^π + r_{ολ}} \quad \{ 1 \}$$

Όπου:

$$E_{ολ} = 4,5 + 4,5 \Rightarrow E_{ολ} = 9V \quad (\text{πηγές σε σειρά})$$

$$r_{ολ} = 0,5 + 0,5 \Rightarrow r_{ολ} = 1\Omega$$

$$1/R_{ολ}^π = 1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3 \Rightarrow$$

$$R_{ολ}^π = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_2 R_3 + R_3 R_1 + R_1 R_2} \Rightarrow$$

(ισχύει πάντα για τρεις αντιστάσεις σε παράλληλη

σύνδεση!)

$$R_{o\lambda}^{\pi} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 2}{4 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4} \Rightarrow R_{o\lambda}^{\pi} = 0,8\Omega$$

Αντικαθιστούμε στην { 1 } και παίρνουμε: $I_{o\lambda}^{\pi} = \frac{9}{0,8+1} \Rightarrow I_{o\lambda}^{\pi} = 5A$

Μετά την σύνδεση της R_{χ} το ρεύμα γίνεται $I_{o\lambda}^{\mu} = 1,5I_{o\lambda}^{\pi} \Rightarrow I_{o\lambda}^{\mu} = 7,5A$, και δίδεται επίσης από την [3.22]:

$$I_{o\lambda}^{\mu} = \frac{E_{o\lambda}}{R_{o\lambda}^{\mu} + r_{o\lambda}} \Rightarrow R_{o\lambda}^{\mu} = \frac{E_{o\lambda}}{I_{o\lambda}^{\mu}} - r_{o\lambda} = \frac{9}{7,5} - 1 \Rightarrow R_{o\lambda}^{\mu} = 0,2\Omega$$

Η ολική εξωτερική αντίσταση $R_{o\lambda}^{\mu}$ προκύπτει εξάλλου από την παράλληλη σύνδεση των αντιστάσεων $R_{o\lambda}^{\pi}$ και R_{χ} . Επομένως θα έχουμε

$$R_{o\lambda}^{\mu} = \frac{R_{\chi} R_{o\lambda}^{\pi}}{R_{\chi} + R_{o\lambda}^{\pi}} \Rightarrow R_{\chi} = \frac{R_{o\lambda}^{\pi} R_{o\lambda}^{\mu}}{R_{o\lambda}^{\pi} - R_{o\lambda}^{\mu}} = \frac{0,8 \cdot 0,2}{0,8 - 0,2} = \frac{0,16}{0,6} = \frac{16}{60} \stackrel{\text{δια } 4}{\Rightarrow} R_{\chi} = \frac{4}{15}\Omega$$

Η κατανομή του ρεύματος στις διάφορες αντιστάσεις του κυκλώματος μπορεί να υπολογιστεί από τον νόμο του Ohm (πράγμα το οποίο ισχύει για κάθε απλό κύκλωμα):

Σύμφωνα με τον νόμο του Ohm ([3.11]) το ρεύμα, το οποίο διαρρέει μια (ωμική) αντίσταση, ισούται με το πηλίκο της τάσης U , η οποία εφαρμόζεται στα άκρα της, προς την τιμή της αντίστασης. Για όλες τις αντιστάσεις του παραπάνω κυκλώματος η εν λόγω τάση δεν είναι άλλη από την τάση ακροδεκτών της συστοιχίας, U_{+-} , η οποία δίδεται από την σχέση [3.22]:

$$U_{+-} = I_{o\lambda} R_{o\lambda} = 7,5 \cdot 0,2 \Rightarrow U_{+-} = 1,5V$$

Εφαρμόζουμε διαδοχικά τον νόμο του Ohm και παίρνουμε: $I_1 = \frac{U_{+-}}{R_1} = \frac{1,5}{2} \Rightarrow I_1 = 0,75A$

$$I_2 = \frac{U_{+-}}{R_2} = \frac{1,5}{4} \Rightarrow I_2 = 0,375A, \quad I_3 = \frac{U_{+-}}{R_3} = \frac{1,5}{2} \Rightarrow I_3 = 0,75A$$

(Παρατηρούμε ότι τα ρεύματα $I_1 = 2 I_2 = I_3$, τα οποία διαρρέουν τις παράλληλες αντιστάσεις $R_1 = 0,5 R_2 = R_3$ συμπεριφέρονται αντιστρόφως ανάλογα προς αυτές)

και τέλος $I_{\chi} = \frac{U_{+-}}{R_{\chi}} = \frac{1,5}{4/15} \Rightarrow I_{\chi} = 5,625A$

(Παρατηρούμε ότι $I_{o\lambda}^{\mu} = I_1 + I_2 + I_3 + I_{\chi}$: 1^{ος} κανόνας του Kirchhoff, βλ. επόμενο κεφάλαιο).

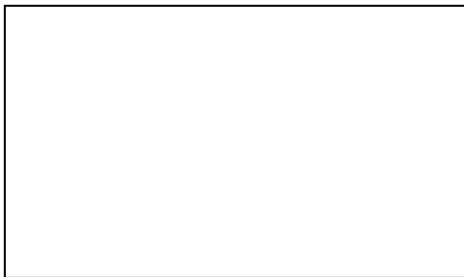
3.5.5 Κανόνες του Kirchhoff

Η μελέτη ενός σύνθετου (μη απλού) κυκλώματος γίνεται με την βοήθεια των δύο κανόνων του Kirchhoff, τους οποίους θα γνωρίσουμε παρακάτω, αφού προηγουμένως εισάγουμε τις ακόλουθες, απλές τοπολογικές έννοιες:

Κόμβος: Σημείο στο οποίο συνδέονται δύο ή περισσότεροι αγωγοί, ή διαφορετικά, σημείο στο οποίο διακλαδίζεται το κύκλωμα. (Π.χ. στο κύκλωμα του σχήματος 3.10 διακρίνουμε τους κόμβους Β και Ε).

Κλάδος: τμήμα κυκλώματος μεταξύ δύο κόμβων. Χαρακτηριστικό γνώρισμα ενός κλάδου: η ένταση του ρεύματος είναι καθ' όλο του το μήκος η ίδια.

Βρόγχος: Κάθε δυνατή κλειστή διαδρομή, αποτελούμενη από συνεχιζόμενους κλάδους. (Στο σχ. 3.10 διακρίνουμε π.χ. τους βρόγχους ΑΒΓΔ-ΕΖΑ, ΑΒΕΖΑ και ΒΓΔΕΒ).



$$1^{\text{ος}} \text{ κ.Κ.: (κόμβος Β): } -I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

2^{ος} κ.Κ.:

$$\text{βρόγχος ΑΒΕΖΑ: } E_1 - E_3 = I_1 R_1 - I_2 R_2$$

$$\gg \text{ ΒΓΔΕΒ: } -E_2 + E_4 = I_2 R_2 - I_3 R_3$$

$$\gg \text{ ΑΓΔΖΑ: } E_1 - E_3 + E_4 - E_2 = I_1 R_1 - I_3 R_3$$

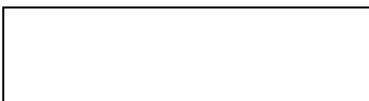
Σχήμα 3.10: Κύκλωμα με πηγές και αντιστάσεις, 1^{ος} και 2^{ος} κανόνες του Kirchhoff.

Οι δύο κανόνες του Kirchhoff είναι οι ακόλουθοι:

1^{ος} κανόνας του Kirchhoff: Το άθροισμα των ρευμάτων, τα οποία φτάνουν σε έναν κόμβο, ισούται με το άθροισμα των ρευμάτων, τα οποία φεύγουν από τον κόμβο αυτό. Αν συμβατικά θεωρήσουμε ως θετικά τα ρεύματα που φθάνουν και αρνητικά αυτά που φεύγουν, ο πρώτος κανόνας γράφεται:

1^{ος} κανόνας του Kirchhoff:
$$\sum_j I_j = 0 \quad [3.23]$$

Παράδειγμα: Για τον παραπάνω κόμβο ο 1^{ος} κανόνας του Kirchhoff γράφεται:



$$I_1 + I_2 - I_3 - I_4 = 0$$

Ο 1^{ος} κανόνας αποτελεί εφαρμογή της αρχής διατηρήσεως του ηλεκτρικού φορτίου: όσο φορτίο φθάνει στην μονάδα του χρόνου σ' έναν κόμβο, τόσο και τον εγκαταλείπει, μια και ένας κόμβος δεν μπορεί εξ ορισμού να από- ή εκταμιεύσει φορτίο.

2^{ος} κανόνας του Kirchhoff: Το άθροισμα των ΗΕΔ κατά μήκος ενός βρόγχου ισούται με το άθροισμα των πτώσεων τάσης στις αντιστάσεις του βρόγχου:

2^{ος} κανόνας του Kirchhoff:
$$\sum_k E_k = \sum_j R_j I_j \quad [3.24]$$

Καθορισμός προσήμου στον 2^ο κανόνα του Kirchhoff: Για κάθε βρόγχο επιλέγεται εντελώς αυθαίρετα μια φορά ως θετική («**φορά βρόγχου**»). Όσες ΗΕΔ θέλουν να δημιουργήσουν ρεύμα (συμβατικής!) φοράς ίδιας με την φορά βρόγχου θεωρούνται θετικές, οι υπόλοιπες αρνητικές. Τέλος όσα ρεύματα έχουν (συμβατική!) φορά ίδια με την φορά βρόγχου θεωρούνται θετικά, τα υπόλοιπα αρνητικά.

Παράδειγμα: Για τον αριστερό βρόγχο (ΑΒΕΖΑ) του κυκλώματος του σχήματος 3.10 και για την συγκεκριμένη φορά βρόγχου ο 2^{ος} κανόνας του Kirchhoff γράφεται:

$$E_1 - E_3 = I_1 R_1 - I_2 R_2$$

Ο δεύτερος κανόνας του Kirchhoff αποτελεί εφαρμογή της αρχής διατηρήσεως της ενέργειας: Η αριστερή πλευρά της εξίσωσης [3.24] ισούται με την ανά μονάδα φορτίου προσφερόμενη ηλεκτρική ενέργεια από τις πηγές του βρόγχου, η δεξιά πλευρά παριστάνει την τάση στα άκρα των αντιστάσεων του βρόγχου, δηλαδή την ανά μονάδα φορτίου σε θερμότητα μετατρεπόμενη ηλ. ενέργεια.

3.5.6 Μελέτη κυκλώματος με την βοήθεια των κανόνων του Kirchhoff

Οι δύο κανόνες του Kirchhoff αποτελούν την βάση για την επίλυση όλων των προβλημάτων, τα οποία σχετίζονται με κυκλώματα πηγών και αντιστάσεων. Ένα τέτοιο πρόβλημα είναι για παράδειγμα ο υπολογισμός των ρευμάτων, τα οποία διαρρέουν όλους τους κλάδους ενός κυκλώματος, όταν είναι γνωστές οι ΗΕΔ και οι αντιστάσεις. Για την αντιμετώπιση του προβλήματος αυτού προτείνουμε την ακόλουθη γενική μεθοδολογία:

α) Φροντίζουμε να σημειώσουμε τόσα ρεύματα, ώστε όλοι οι κλάδοι του κυκλώματος να διαρρέονται από κάποιο ρεύμα. Την φορά των ρευμάτων την επιλέγουμε εντελώς αυθαίρετα, έχοντας υπόψη ότι θα πρέπει να την αντιστρέψουμε, αν η τιμή του εν λόγω ρεύματος προκύψει αρνητική. Φυσικά το βήμα αυτό δεν χρειάζεται στην περίπτωση που τα ρεύματα είναι προσημειωμένα.

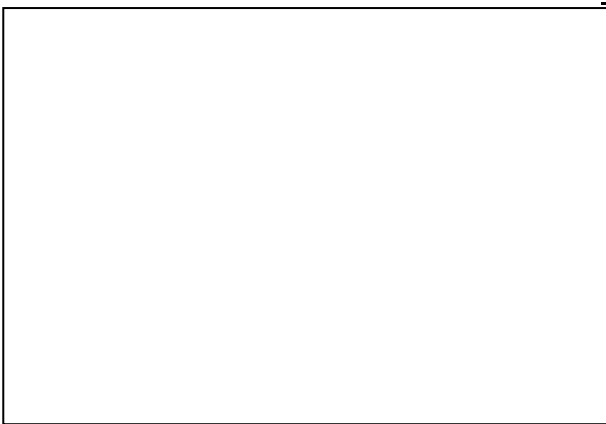
β) Γράφουμε τον 1^ο κανόνα του Kirchhoff τόσες φορές (για τόσους κόμβους), ώστε κάθε φορά να έχουμε στην εξίσωση μας ένα τουλάχιστον νέο ρεύμα.

γ) Γράφουμε τον 2^ο κανόνα του Kirchhoff για τόσους διαφορετικούς βρόγχους, ώστε να πάρουμε συνολικά (μαζί με τον 1^ο κανόνα) τόσες εξισώσεις, όσοι είναι και οι άγνωστοι του προβλήματος.

Στην συνέχεια παραθέτουμε μερικά παραδείγματα προκειμένου τα παραπάνω να γίνουν πιο κατανοητά.

Παράδειγμα 3.5.6.1: Να υπολογισθούν τα ρεύματα, τα οποία διαρρέουν όλους τους κλάδους του παρακάτω κυκλώματος, όταν $R_1=1\Omega$, $R_2=2\Omega$, $E_1=1V$, και $E_2=E_3=4V$.

Λύση:



Αφού σημειώσουμε (επειδή δεν μας τις έδωσαν) εντελώς αυθαίρετα τις φορές των τριών ρευμάτων, γράφουμε τον 1^ο κανόνα του Kirchhoff για τον κόμβο

A:

$$-I_1 - I_2 + I_3 = 0 \quad \{1\}$$

Στην παραπάνω εξίσωση περιέχονται ήδη όλα τα άγνωστα ρεύματα, οπότε δεν έχει νόημα να ξαναγράψουμε τον 1^ο κανόνα και για άλλον κόμβο. Τις δύο ακόμη εξισώσεις που χρειαζόμαστε θα τις πάρουμε επομένως από τον 2^ο κανόνα του Kirchhoff. Αφού διαλέξουμε (αυθαίρετα!) τις παραπάνω φορές βρόγχου, παίρνουμε:

$$2^{\text{ος}} \text{ κανόνας του Kirchhoff:} \quad \text{αριστερός βρόγχος:} \quad E_1 - E_2 = -I_1 R_1 + I_2 R_2 - I_1 R_1 \quad \{2\}$$

$$\text{δεξιός βρόγχος:} \quad E_2 - E_3 = -I_2 R_2 - I_3 R_1 - I_3 R_1 \quad \{3\}$$

Οι εξισώσεις {1} ως {3} αποτελούν γραμμικό σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους. Όλα τα συστήματα Kirchhoff είναι γραμμικά και η επίλυση τους μπορεί να γίνει με την λεγόμενη Μέθοδο Gramer, η οποία περιγράφεται στο τέλος του παρόντος κεφαλαίου.

Προκειμένου να εφαρμόσουμε την μέθοδο Gramer αντικαθιστούμε τους συντελεστές στις παραπάνω εξισώσεις και τις ξαναγράφουμε ως εξής:

$$-I_1 - I_2 + I_3 = 0 \quad \{1\alpha\}$$

$$2 - 4 = -I_1 + 2I_2 - I_1 \Rightarrow -2I_1 + 2I_2 = -2 \Rightarrow -I_1 + I_2 = -1 \quad \{2\alpha\}$$

$$2 - 2 = -2I_2 - I_3 - I_3 \Rightarrow 0 = -2I_2 - 2I_3 \Rightarrow I_2 + I_3 = 0 \quad \{3\alpha\}$$

Η διακρίνουσα του συστήματος και των αγνώστων είναι:

$$D = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3, \quad D_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad D_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \quad \text{Οπότε (Gramer):}$$

$$I_1 = \frac{D_1}{D} \Rightarrow I_1 = 2/3A, \quad I_2 = \frac{D_2}{D} \Rightarrow I_2 = -1/3A, \quad I_3 = \frac{D_3}{D} \Rightarrow I_3 = 1/3A$$

Το αρνητικό πρόσημο του I_2 σημαίνει ότι η (συμβατική !) φορά του είναι αντίθετη με αυτήν που αυθαίρετα επιλέξαμε.

Παράδειγμα 3.5.6.2: Να υπολογισθούν τα ρεύματα, τα οποία διαρρέουν όλους τους κλάδους του παρακάτω κυκλώματος, όταν $E = 6V$, $R_1=R_3=10\Omega$, $R_2 = R_4 = 5\Omega$ και

Λύση:

Οι αντιστάσεις R_2 , R_3 και R_4 είναι συνδεδεμένες παράλληλα και μπορούν να αντικατασταθούν από την ισοδύναμή τους αντίσταση (βλ. Παράδειγμα 3.5.4.1):

$$R_{234} = \frac{R_2 R_3 R_4}{R_3 R_4 + R_4 R_2 + R_2 R_3} = \frac{5 \cdot 10 \cdot 5}{10 \cdot 5 + 5 \cdot 5 + 5 \cdot 10} \Rightarrow R_{234} = 2\Omega$$

Με την παραπάνω αντικατάσταση προκύπτει το κύκλωμα b, στο οποίο οι αντιστάσεις R_1 και R_{234} είναι συνδεδεμένες σε σειρά, οπότε μπορούν να αντικατασταθούν από την ισοδύναμη τους αντίσταση

$$R_{1234} = R_1 + R_{234} = 10 + 2 \Rightarrow R_{1234} = 12\Omega$$

Το κύκλωμα c, το οποίο προέκυψε τελικά είναι ένα απλό κύκλωμα. Σύμφωνα λοιπόν με την [3.18]:παίρνουμε:

$$I_{ολ} = \frac{E}{R+r} = \frac{E}{R_{1234}} = \frac{6}{12} \Rightarrow I_{ολ} \equiv I_1 = 0,5A$$

$$V_{234} = I_{ολ} \cdot R_{234} = 1V$$

$$I_2 = \frac{V_{234}}{R_2} = \frac{1}{5} = 0,2A, \quad I_3 = \frac{V_{234}}{R_3} = \frac{1}{10} = 0,1A, \quad I_4 = \frac{V_{234}}{R_4} = \frac{1}{5} = 0,2A$$

$$\text{Ο } 1^{\text{ος}} \text{ κανόνας του Kirchhoff για τον κόμβο A μας δίνει: } I_1 = I_2 + I_3 + I_4 \quad \{1\}$$

Από τις τιμές των παράλληλα συνδεδεμένων αντιστάσεων $R_2 = R_4 = 0,5R_3$ και τον νόμο του Ohm προκύπτει εξάλλου:

$$I_2 = I_4 = 2I_3 \quad \{2\}$$

$$\text{Αντικαθιστούμε την } \{2\} \text{ στην } \{1\} \text{ και παίρνουμε: } I_1 = I_2 + 0,5I_2 + I_2 \Rightarrow 2,5I_2 \Rightarrow 0,5 = 2,5I_2$$

$$\Rightarrow \underline{I_2 = I_4 = 0,2A} \quad \text{και} \quad \underline{I_3 = 0,1A}$$

Παράδειγμα 3.5.6.3: Να υπολογιστούν τα ρεύματα, τα οποία διαρρέουν όλους τους κλάδους του παρακάτω κυκλώματος. Δίδεται: $E_1 = E_2 = 220V$, $R_1 = R_3 = 10\Omega$, $R_2 = 5\Omega$, $R_4 = 400\Omega$, $R_5 = 500\Omega$ και $R_6 = 1k\Omega$.

Λύση:



Για τον υπολογισμό των έξι αγνώστων χρειαζόμαστε έξι εξισώσεις, τις οποίες παίρνουμε ως εξής:

$1^{\text{ος}}$ κανόνας του Kirchhoff:

$$\text{κόμβος B: } -I_1 + I_4 + I_6 = 0 \quad \{1\}$$

$$\gg \Theta: -I_2 - I_4 + I_5 = 0 \quad \{2\}$$

$$\text{» E: } I_3 - I_5 - I_6 = 0 \quad \{3\}$$

Στο σημείο αυτό σημειώνουμε, ότι ο 1^{ος} κανόνας του Kirchhoff δεν μπορεί να μας δώσει άλλη, ανεξάρτητη από τις παραπάνω εξίσωση. Αυτό το καταλαβαίνουμε πρακτικά από το γεγονός ότι η εξίσωση που μας δίνει ο 1^{ος} κ. Κ. για τον κόμβο Η ($I_1 + I_2 - I_3 = 0$) δεν περιέχει κάποιο ρεύμα, το οποίο δεν περιέχεται ήδη στις παραπάνω τρεις εξισώσεις. Η εξίσωση αυτή προκύπτει εξάλλου αν προσθέσουμε τις τρεις παραπάνω εξισώσεις και πολλαπλασιάσουμε το αποτέλεσμα με το (-1), πράγμα το οποίο αποτελεί και την μαθηματική απόδειξη της εξάρτησης της τέταρτης αυτής εξίσωσης από τις προηγούμενες. Τις υπόλοιπες τρεις εξισώσεις, οι οποίες απαιτούνται, θα τις πάρουμε επομένως από τον 2^ο κανόνα του Kirchhoff:

$$\text{άνω αριστερά βρόγχος: } -E_1 = -I_1 R_1 - I_4 R_4 + I_2 R_2 \Rightarrow -10I_1 + 5I_2 - 400I_4 = -220 \quad \{4\}$$

$$\text{κάτω » » } -E_2 = -I_2 R_2 - I_5 R_5 - I_3 R_3 \Rightarrow -5I_2 - 10I_3 - 500I_5 = -220 \quad \{5\}$$

$$\text{δεξιός » » } 0 = -I_6 R_6 + I_5 R_5 + I_4 R_4 \Rightarrow 400I_4 + 500I_5 - 1000I_6 = 0 \quad \{6\}$$

Για την επίλυση του συστήματος {1} ως {6} επιλέγουμε την μέθοδο Gauss (η μέθοδος Gramer απαιτεί τον χρονοβόρο υπολογισμό επτά διακρινουσών έκτης τάξεως, οπότε και δεν ενδείκνυται), την οποία και ξαναθυμίζουμε στοιχειωδώς:

Προκειμένου να επιλύσουμε το παραπάνω (και γενικότερα ένα τυχαίο) σύστημα με την **μέθοδο Gauss**, στηρίζομαστε στο γεγονός, ότι κάθε εξίσωση ενός συστήματος μπορεί να αντικατασταθεί από μια άλλη, η οποία έχει προκύψει μέσω προσθαφαίρεσης κάποιων από τις εξισώσεις του συστήματος, οι οποίες μπορεί και να έχουν πολλαπλασιασθεί με κάποιον τυχαίο αριθμό. Στην πράξη τώρα γράφουμε τους συντελεστές των εξισώσεων του συστήματος κατά τον τρόπο που φαίνεται στο επάνω μέρος του παρακάτω σχήματος. Τα **σταθερά μέλη** είναι γραμμένα μετά την **κατακόρυφη απλή γραμμή**. Πολλαπλασιασμός κάποιων από τις εξισώσεις με έναν αριθμό αντιστοιχεί στον πολλαπλασιασμό της αντίστοιχης σειράς του εν λόγω σχήματος με τον συγκεκριμένο αριθμό. Το ίδιο ισχύει και για την προσθαφαίρεση των εξισώσεων του συστήματος. Το **βέλος** μας δείχνει την εξίσωση, την οποία αφού πολλαπλασιάσουμε με τον αριθμό (ή τους αριθμούς), ο οποίος αναγράφεται μετά την **κατακόρυφη διπλή γραμμή** προσθέτουμε σε κάποια (ή κάποιες) από τις υπόλοιπες εξισώσεις, τις οποίες έχουμε ήδη πολλαπλασιάσει με τους αντίστοιχους, μετά την κατακόρυφη διπλή γραμμή αναγραφόμενους αριθμούς. Τους αριθμούς αυτούς τους επιλέγουμε έτσι ώστε να μηδενίσουμε κατά το δυνατόν όλους τους συντελεστές, οι οποίοι αναγράφονται κάτω από την διαγώνιο του πίνακα των συντελεστών, οδηγούμενοι έτσι σε ένα κατά το δυνατόν απλούστερο σύστημα:

$$\{5\alpha\} \Rightarrow I_5 = \frac{-3696 + 168I_6}{-8549} \Rightarrow I_5 = 0,424A \quad \{V\}$$

$$\{4\alpha\} I_4 = \frac{-44 + 2I_6 - I_5}{-83} \Rightarrow I_4 = 0,525A \quad \{IV\}$$

$$\{3\alpha\} I_3 = I_5 + I_6 \Rightarrow I_3 = 0,844A \quad \{III\}$$

$$\{2\alpha\} I_2 = -I_4 + I_5 \Rightarrow I_2 = -0,101A \quad \{II\}: \text{Το αρνητικό πρόσημο σημαίνει, ότι}$$

πρέπει να αντιστρέψουμε τη φορά

$$\{IV\}$$

$$\{1\alpha\} \quad I_1 = I_4 + I_6 \Rightarrow I_1 = 0,945A$$

$$\{VI\}$$

Επίλυση συστήματος με τη μέθοδο Gramer

Τα συστήματα, τα οποία έχουμε να επιλύσουμε κατά την μελέτη κυκλωμάτων συνεχούς ρεύματος μέσω των κανόνων του Kirchhoff, είναι γραμμικά και έχουν την εξής γενική μορφή:

$$\begin{aligned} \alpha_{11}\chi_1 + \alpha_{12}\chi_2 + \dots + \alpha_{1n}\chi_n &= \sigma_1 \\ \alpha_{21}\chi_1 + \alpha_{22}\chi_2 + \dots + \alpha_{2n}\chi_n &= \sigma_2 \\ \dots & \dots \\ \alpha_{n1}\chi_1 + \alpha_{n2}\chi_2 + \dots + \alpha_{nn}\chi_n &= \sigma_n \end{aligned}$$

Γενική μορφή γραμμικού συστήματος
 $\left. \begin{aligned} & \{ \alpha_{ij}: \text{συντελεστές των αγνώστων} \\ & \sigma_i: \text{σταθερά μέλη} \} \end{aligned} \right\}$

Ορίζουμε:

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{: Διακρίνουσα του συστήματος}$$

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \sigma_1 & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \dots & \sigma_2 & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \dots & \sigma_n & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{: Διακρίνουσα του αγνώστου } i \text{ (} i = 1, 2, \dots, n \text{)}$$

Η λύση του συστήματος δίδεται από τον κανόνα του Gramer:

$$\chi_1 = \frac{D_1}{D}, \quad \chi_2 = \frac{D_2}{D}, \quad \dots, \quad \chi_n = \frac{D_n}{D} \quad [3.25]$$

Σε όσους δεν είναι εξοικειωμένοι με τον υπολογισμό διακρινουσών προτείνουμε να χρησιμοποιούν την μέθοδο Gramer, μόνο όταν οι αγνώστοι είναι το πολύ τρεις ($n \leq 3$). Τότε ο υπολογισμός τους είναι σίγουρα σύντομος:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}$$

ξαναγράφουμε τις δύο πρώτες στήλες

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31-} & \alpha_{32-} & \alpha_{33+} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31+} & \alpha_{32+} \end{vmatrix} = \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} + \alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} + \alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32} - \alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{33} - \alpha_{11}\alpha_{23}\alpha_{32} - \alpha_{13}\alpha_{22}\alpha_{31}$$

3.5.7 Γέφυρα Wheatstone

Μια σπουδαία εφαρμογή των κανόνων του Kirchhoff είναι η μελέτη των λεγόμενων «γεφυρών», ειδικών κυκλωμάτων τα οποία χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό αντιστάσεων. Η πιο γνωστή **γέφυρα** είναι εκείνη του **Wheatstone** (σχ. 3.11): Μετακινώντας τον δρομέα Δ επί της χορδής («**γέφυρα Wheatstone με χορδή**») πετυχαίνουμε την λεγόμενη ισορροπία της γέφυρας, κατά την οποία το γαλβανόμετρο Γ δεν διαρρέεται από ρεύμα. Τότε έχουμε σύμφωνα με το 2^ο κανόνα του Kirchhoff:

$$\text{αριστερά: } 0 = I_1 R_1 - I_2 R_3 \Rightarrow I_1 R_1 = I_2 R_3$$

$$\text{δεξιά: } 0 = I_1 R_2 - I_2 R_4 \Rightarrow I_1 R_2 = I_2 R_4$$

Διαιρούμε τις δύο παραπάνω σχέσεις και παίρνουμε:

$$\text{χορδή = ομογενής} \quad [3.12] \quad \rightarrow \quad R_3 = \rho \frac{I_1}{S} \quad \frac{I_1 R_1}{I_1 R_2} = \frac{I_2 R_3}{I_2 R_4} \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} = \frac{I_1}{I_2} \quad \{*\}$$

$$R_4 = \rho \frac{I_2}{S} \quad \{*\} \quad \Rightarrow R_1 = R_2 \frac{I_1}{I_2} \quad [3.26]$$

(ρ = ειδική αντ., S = διατομή χορδής)

Σχήμα 3.11: Γέφυρα Wheatstone με χορδή

Μετρώντας τα μήκη l_1 και l_2 μπορούμε να υπολογίσουμε την άγνωστη αντίσταση R_1 με την

βοήθεια της R_2 .

Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης

Διαφορική εξίσωση (Δ. Ε.) = εξίσωση η οποία εκτός από την εξαρτημένη και ανεξάρτητη μεταβλητή περιέχει και παραγώγους της πρώτης ως προς την δεύτερη.

Συνήθης Δ.Ε. : δεν περιέχει μερικές παραγώγους.

Τάξη Δ.Ε.: δείκτης της υψηλότερης παραγώγου, η οποία περιέχεται στην συγκεκριμένη Δ.Ε.

Βαθμός Δ.Ε.: υψηλότερη δύναμη της εξαρτημένης μεταβλητής ή/και των παραγώγων αυτής, όταν η Δ.Ε. δίδεται σε πολυωνυμική μορφή (= βαθμός του πολυωνύμου).

Ομογενής Δ.Ε.: δεν περιέχει σταθερή διάφορη του μηδενός, διαφορετικά **μη ομογενής**.

Παραδείγματα: $x^2 y'''' + 2y^2 y' y'' = 0$:συνήθης, ομογενής, 3^{ης} τάξεως και 4^{ου} βαθμού

$y'' + e^x y = x$:συνήθης, μη ομογενής, 1^{ης} τάξεως και 2^{ου} βαθμού

Γενική μορφή μιας γραμμικής (1^{ου} βαθμού) Δ.Ε. 1^{ης} τάξεως: $y' + Ay = B$ {I}

όπου A και B συναρτήσεις του x: $A = A(x)$ και $B = B(x)$.

Γενική λύση της {I}: $y = e^{-\int A dx} \left[\Gamma + \int B e^{\int A dx} dx \right]$ {II}

όπου Γ = σταθερή, η οποία υπολογίζεται από τις αρχικές συνθήκες

Επιστρέφουμε τώρα στην εξίσωση μας {1} και την ξαναγράφουμε στην μορφή που συνηθίζεται στον χώρο της Φυσικής, όπου η παραγωγή ως προς τον χρόνο συμβολίζεται συμβατικά με μια τελεία:

$$\dot{u} + \frac{1}{RC} u = \frac{E}{RC} \quad \{2\}$$

Συγκρίνοντας την {2} με την {1} βλέπουμε, ότι $A = \frac{1}{RC}$ και $B = \frac{E}{RC}$.

Οπότε $\int A dx \rightarrow \int \frac{1}{RC} dt = \frac{t}{RC}$ και

$$\int B e^{\int A dx} dx \rightarrow \int \frac{E}{RC} e^{t/(RC)} dt = \frac{E}{RC} \frac{1}{\frac{1}{RC}} e^{t/(RC)} = E e^{t/(RC)}$$

Σύμφωνα λοιπόν με την {II} έχουμε: $u = e^{-t/(RC)} \left[\Gamma + E e^{t/(RC)} \right] \Rightarrow u = \Gamma e^{-t/(RC)} + E$

Η σταθερή Γ υπολογίζεται από την **αρχική συνθήκη**: $u(t=0) = 0 = \Gamma + E \Rightarrow \Gamma = -E$

Κατά την φόρτιση λοιπόν του πυκνωτή η τάση του μεταβάλλεται σύμφωνα με την εξίσωση:

$$u = E[1 - e^{-t/(RC)}] \quad [3.27]$$

Με την βοήθεια της σχέσης αυτής καθώς και εκείνων του σχήματος 3.12 υπολογίζεται και η χρονική εξάρτηση του φορτίου q του πυκνωτή και της έντασης I του ρεύματος:

$$q = Cu \Rightarrow q = CE[1 - e^{-t/(RC)}] \quad [3.27\alpha]$$

$$i = \frac{u}{R} = \frac{E-u}{R} \Rightarrow I = \frac{E}{R} e^{-t/(RC)} \quad [3.27\beta]$$

Η γραφική παράσταση των παραπάνω εξισώσεων δίδεται στο σχήμα 3.13.

β) εκφόρτιση του πυκνωτή (ο διακόπτης στην θέση Β, βλ. σχ. 3.12): Ο 2^{ος} κανόνας του Kirchhoff μας δίνει: $0 < t < \infty \rightarrow \dot{u} + \frac{1}{RC}u = 0 \quad \{3\}$

Η εξίσωση μας είναι πλέον ομογενής με (βλ. {II}) $A = \frac{1}{RC}$ και $B = 0$.

Σύμφωνα με την {II} έχουμε: $u = \Gamma e^{-t/(RC)}$. Η σταθερή Γ προσδιορίζεται και πάλι από τις **αρχικές**

συνθήκες: $u = (t = 0) = E = \Gamma$

Κατά την εκφόρτιση λοιπόν του πυκνωτή έχουμε $u = E e^{-t/(RC)} \quad [3.28]$

$$q = Cu \Rightarrow q = C E e^{-t/(RC)} \quad [3.28\alpha]$$

$$i = \frac{u}{R} \Rightarrow i = \frac{E}{R} e^{-t/(RC)} \quad [3.28\beta]$$

Ο χρόνος $t=RC$ είναι χαρακτηριστικός για το κύκλωμα και καλείται **σταθερή χρόνου**. Σύμφωνα με τις σχέσεις [3.27] ως [3.28β] η σταθερή χρόνου ισούται με τον χρόνο, μέσα στον οποίο

- το ρεύμα έχει πέσει κατά 63% ($e^{-1} = 0,37$) σε σχέση με την αρχική του τιμή $i_0 = E/R$,
- ο πυκνωτής έχει φορτισθεί ή εκφορτισθεί κατά 63%.

Σχήμα 3.13: Μεταβολή του ρεύματος i , της τάσης u και του φορτίου q σε κύκλωμα RC (a= φόρτιση, b=εκφόρτιση).

3.5.9 Ενέργεια και ισχύς του ηλ. ρεύματος

Όπως γνωρίζουμε, όταν μεταξύ δύο σημείων, τα οποία έχουν διαφορά δυναμικού u , μετακινηθεί φορτίο dq (απειροστό έτσι ώστε να μην μεταβάλλεται η παραπάνω διαφορά δυναμικού) παράγεται (ή δαπανάται) έργο

$$I = dq / dt$$

$$dW = udq = u \cdot i \cdot dt \Rightarrow W = \int_{t_1}^{t_2} u \cdot i \cdot dt \quad [3.29]$$

Αν το ρεύμα είναι συνεχές, τότε η ένταση του θα είναι σταθερή ($i \equiv I = \text{σταθ.}$), το ίδιο θα ισχύει και για την τάση μεταξύ δύο συγκεκριμένων σημείων ($u \equiv U = \text{σταθ.}$). Στην περίπτωση αυτή η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$W = U \cdot I \cdot t \quad [3.30]$$

όπου **W = ηλεκτρική ενέργεια** η οποία δαπανάται σε τμήμα κυκλώματος, στα άκρα του οποίου (τμήματος) εφαρμόζεται διαφορά δυναμικού U και το οποίο διαρρέεται από ρεύμα έντασης I.

Η αντίστοιχη **ηλεκτρική ισχύς** προκύπτει από την γενική εξίσωση ορισμού ($P = dW / dt$):

$$P = UI \quad [3.30\alpha]$$

Η παραπάνω ηλεκτρική ενέργεια (ή ισχύς) μετατρέπεται σε ισόποση ενέργεια (ή ισχύς) άλλης μορφής, η οποία εξαρτάται από το είδος των καταναλωτών, οι οποίοι παρεμβάλλονται στο συγκεκριμένο τμήμα του κυκλώματος. Στην περίπτωση που πρόκειται για απλούς **αντιστάτες** (\equiv ωμικές αντιστάσεις), η ηλ. ενέργεια (ή ισχύς) μετατρέπεται σε θερμότητα. Σύμφωνα δε με τον νόμο του Ohm θα ισχύει:

$$P = U \cdot I = \frac{U^2}{R} = I^2 R \quad [3.31]$$

(**Νόμος του Joule**)

3.6 Μηχανισμοί αγωγιμότητας

Ένα υλικό επιτρέπει προφανώς την διέλευση του ηλεκτρικού ρεύματος, μόνο όταν υπάρχουν ευκίνητοι φορείς φορτίου στο εσωτερικό του. Το είδος των φορέων εξαρτάται από την δομή του συγκεκριμένου υλικού, όπως δε αποδεικνύουν τα πειραματικά δεδομένα, πρόκειται συνήθως για ηλεκτρόνια, «οπές», θετικά ή αρνητικά ιόντα.

Στις επόμενες παραγράφους θα προσπαθήσουμε να δώσουμε μια κατά το δυνατόν πληρέστερη, καθαρά ποιοτική όμως, εικόνα των διαφόρων μηχανισμών αγωγής του ηλεκτρικού ρεύματος.

3.6.1 Αγωγιμότητα στερεών σωμάτων: αγωγοί, μονωτές, ημιαγωγοί.

Με βάση την ηλεκτρική τους αγωγιμότητα τα στερεά σώματα διακρίνονται σε

Αγωγούς (μέταλλα): είναι ωμικοί αγωγοί, έχουν υψηλή ηλεκτρική αγωγιμότητα, η οποία ελαττώνεται με αυξανόμενη θερμοκρασία, η ροή του ηλεκτρικού ρεύματος δεν συνοδεύεται από μεταφορά μάζας.

Μονωτές : έχουν μηδενική πρακτικά αγωγιμότητα, η οποία δεν εξαρτάται ουσιαστικά από την θερμοκρασία.

Ημιαγωγούς : είναι συνήθως (όχι όμως πάντα!) ωμικοί αγωγοί, έχουν μικρή έως μέση ηλεκτρική αγωγιμότητα, η οποία αυξάνεται αισθητά με αυξανόμενη θερμοκρασία, η ροή του ηλεκτρικού ρεύματος

δεν συνοδεύεται από μεταφορά μάζας.

Οι παραπάνω, πειραματικά κατοχυρωμένες, ιδιότητες εξηγούνται με την βοήθεια των ακολούθων μοντέλων:

Μοντέλο των ελευθέρων ηλεκτρονίων:

Ο P.Drude και ο H.A. Lorentz, στην προσπάθειά τους να εξηγήσουν την ηλεκτρική αγωγιμότητα των μετάλλων, υπέθεσαν ότι τα ηλεκτρόνια σθένους δεν ανήκουν σε κάποιο συγκεκριμένο άτομο, αλλά μπορούν και κινούνται ελεύθερα μέσα σε όλο τον όγκο του κρυσταλλικού πλέγματος σχηματίζοντας ένα «**νέφος ελευθέρων ηλεκτρονίων**». Η κίνηση αυτή των ελευθέρων ηλεκτρονίων είναι καθαρά στατιστική και δεν αποτελεί ηλεκτρικό ρεύμα. Γίνεται όμως κατευθυνόμενη, όταν τα **ελεύθερα ηλεκτρόνια** δεχθούν την επίδραση ενός εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου. Το ρεύμα λοιπόν μέσω ενός μεταλλικού αγωγού είναι **ηλεκτρονικό**, γεγονός το οποίο εξηγεί και την έλλειψη μεταφοράς μάζας, μια και η μάζα των ηλεκτρονίων είναι αμελητέα.

Η συμπεριφορά του νέφους των ελευθέρων ηλεκτρονίων διαφέρει από εκείνη ενός ιδανικού αερίου εξ αιτίας του γεγονότος, ότι τα ηλεκτρόνια συμπεριφέρονται σύμφωνα με τους νόμους της Κβαντομηχανικής. Πιο συγκεκριμένα τα ηλεκτρόνια υπακούουν στην **απαγορευτική αρχή του Pauli**, σύμφωνα με την οποία είναι αδύνατο δύο ηλεκτρόνια να βρίσκονται στην ίδια ακριβώς (κβαντική) κατάσταση, να έχουν δηλαδή όλους τους κβαντικούς αριθμούς κοινούς. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα κάθε ενεργειακή στάθμη (κάθε επιτρεπόμενη τιμή της κινητικής ενέργειας των ελευθέρων ηλεκτρονίων) να μπορεί να παραλάβει δύο μόνο ηλεκτρόνια: έχοντα αντίθετο spin. Αυτός είναι και ο λόγος για τον οποίο η κινητική ενέργεια των ηλεκτρονίων είναι πολύ μεγάλη (όση εκείνη των μορίων ενός ιδανικού αερίου σε θερμοκρασία 50000 K περίπου), ακόμη και σε θερμοκρασίες που αγγίζουν το απόλυτο μηδέν, θέρμανση ενός μετάλλου σε φυσιολογικές θερμοκρασίες ελάχιστα μόνο αυξάνει την κινητική ενέργεια των ελευθέρων του ηλεκτρονίων, πράγμα το οποίο επεξηγεί και την πολύ μικρή συνεισφορά του ηλεκτρονικού νέφους στην ειδική θερμοχωρητικότητα του μετάλλου.

Η **αύξηση της ηλεκτρικής αντίστασης των μετάλλων με αυξανόμενη θερμοκρασία** εξηγείται ως εξής:

Η ηλεκτρική αντίσταση οφείλεται προφανώς σε συγκρούσεις των ελευθέρων ηλεκτρονίων μεταξύ τους καθώς και με το κρυσταλλικό πλέγμα. Όπως όμως αποδεικνύει η Κβαντομηχανική, τόσο οι συγκρούσεις μεταξύ των ελευθέρων ηλεκτρονίων, όσο και εκείνες μεταξύ των ελευθέρων ηλεκτρονίων και των ιόντων κρυσταλλικού πλέγματος είναι εξαιρετικά σπάνιες, με την προϋπόθεση ότι το κρυσταλλικό πλέγμα έχει τέλεια περιοδικότητα (Πειραματικές μετρήσεις, οι οποίες πραγματοποιήθηκαν σε χαμηλές θερμοκρασίες και πολύ καθαρούς κρυστάλλους, αποδεικνύουν, ότι ένα ελεύθερο ηλεκτρόνιο διανύει κατά μέσο όρο 1 cm χωρίς να συγκρουσθεί. Η απόσταση αυτή είναι φανταστική μια και κατά μήκος της είναι τοποθετημένα περίπου 10^8 ιόντα του κρυσταλλικού πλέγματος!). Επομένως

καθοριστικό

ρόλο για το μέγεθος της ειδικής αντίστασης ενός μεταλλικού αγωγού παίζουν οι συγκρούσεις μεταξύ των ελευθέρων ηλεκτρονίων και διαταραχών (ανωμαλιών) της κρυσταλλικής δομής.

Τέτοιες διαταραχές οφείλονται σε

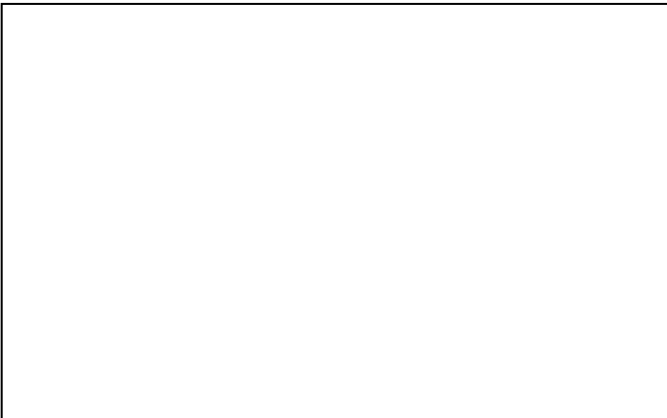
- α) ξένα άτομα, ενσωματωμένα στο κρυσταλλικό πλέγμα
- β) εξωτερικές επιφάνειες (όρια) του κρυστάλλου, ανωμαλίες της περιοδικότητας λόγω μηχανικής παραμόρφωσης κ.λ.π.

γ) **θερμικές ταλαντώσεις του κρυσταλλικού πλέγματος**, οι οποίες αποτελούν εκ των πραγμάτων στιγμιαίες διαταραχές της περιοδικότητας. Οι θερμικές ταλαντώσεις αυξάνονται με αυξανόμενη θερμοκρασία, γεγονός το οποίο εξηγεί και την αντίστοιχη αύξηση της ειδικής αντίστασης.

Παρά τις σημαντικές του επιτυχίες το μοντέλο των ελευθέρων ηλεκτρονίων δεν μπορεί να εξηγήσει την διαφορά μεταξύ μετάλλων, μονωτών και ημιαγωγών. Τούτο επιτυγχάνεται μόνο αν ληφθεί υπόψη η αλληλεπίδραση του ηλεκτρονικού νέφους με τα ιόντα του κρυσταλλικού πλέγματος, οπότε τα «ελεύθερα» μέχρι τώρα ηλεκτρόνια αποκτούν πέραν της κινητικής και δυναμική ενέργεια, δεν είναι επομένως και τόσο ελεύθερα και γι' αυτό θα τα χαρακτηρίσουμε πλέον σαν **ηλεκτρόνια αγωγιμότητας**. Η ποσοτική μελέτη της ως άνω αλληλεπίδρασης ξεφεύγει σαφώς των στόχων του παρόντος συγγράμματος, μια και απαιτεί ικανές γνώσεις της Κβαντομηχανικής. Για τον λόγο αυτό περιοριζόμαστε στην επισήμανση των σπουδαιότερων συμπερασμάτων της ποσοτικής αυτής μελέτης, τα οποία διαμορφώνουν το λεγόμενο

Μοντέλο των ενεργειακών ταινιών:

Η (κινητική) ενέργεια ενός ελευθέρου ηλεκτρονίου μπορεί να έχει οποιαδήποτε τιμή. Το ίδιο ισχύει και για τα ηλεκτρόνια αγωγιμότητας των μετάλλων στα πλαίσια του μοντέλου των ελευθέρων ηλεκτρονίων. Αντιθέτως η (ολική) ενέργεια ενός *μη ελευθέρου* ηλεκτρονίου μπορεί να έχει ορισμένες μόνο τιμές, όπως προκύπτει από τους νόμους της Κβαντομηχανικής. Ιδιαίτερα για **τα ηλεκτρόνια ενός στερεού σώματος** προκύπτει, ότι



είναι διατεταγμένα (ενεργειακά εννοείται) **σε ενεργειακές ταινίες**, οι οποίες χωρίζονται, μεταξύ τους μέσω περιοχών στις οποίες απαγορεύεται να βρίσκεται η ενέργεια ενός ηλεκτρονίου («**απαγορευμένες ζώνες**» ή «**ενεργειακά χάσματα**») (βλ. σχ. 3.14). Σημειωτέον ότι οι επιτρεπόμενες ταινίες γίνονται τόσο ευρύτερες όσο υψηλότερα βρίσκονται ενεργειακά, είναι δε δυνατόν να αλληλεπικαλύπτονται, ενώ οι απαγορευμένες ζώνες) στενεύουν όσο αυξάνεται το ενεργειακό τους επίπεδο.

Η τοποθέτηση των ηλεκτρονίων στο ως άνω ενεργειακό σχήμα γίνεται από κάτω προς τα πάνω, κάθε δε ενεργειακή στάθμη μπορεί να παραλάβει δύο το πολύ ηλεκτρόνια με αντιπαράλληλο spin (στα πλαίσια της απαγορευτικής αρχής του Pauli). Η ανώτερη **εντελώς** πλήρης ταινία καλείται **ταινία** (ή και **ζώνη**) **σθένους**, ενώ η αμέσως από πάνω ευρισκόμενη **ταινία/ζώνη αγωγιμότητας** (βλ. σχ. 3.15).

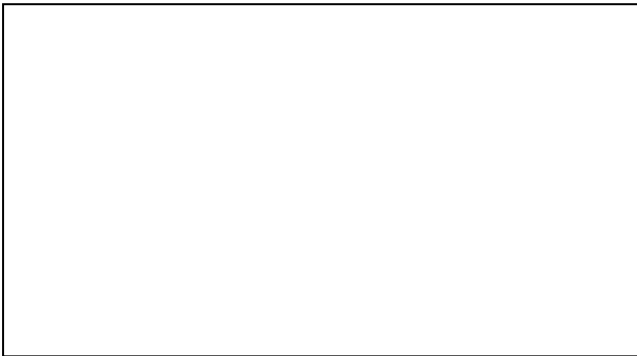


Όταν η ταινία αγωγιμότητας είναι άδεια, το υλικό συμπεριφέρεται σαν μονωτής: προκειμένου να έχουμε ηλεκτρικό ρεύμα, πρέπει τα ηλεκτρόνια να αποκτήσουν μια (προς το εξωτερικό πεδίο) παράλληλη συνιστώσα ταχύτητας. Αυτό σημαίνει, ότι η κινητική και κατά συνέπεια και η ολική τους ενέργεια πρέπει να μεταβληθεί. Τούτο όμως είναι αδύνατο, μια και όλες οι στάθμες ενέργειας της συγκεκριμένης ταινίας ενέργειας είναι κατειλημμένες, οπότε το εξω-

τερικό πεδίο δεν προκαλεί ρεύμα. Ένα ηλεκτρόνιο θα μπορούσε βέβαια να παραλάβει από το πεδίο τόση κινητική ενέργεια, όσο είναι το ενεργειακό χάσμα μεταξύ της ταινίας σθένους και αγωγιμότητας (**φαινόμενο Zener**). Η εν λόγω ανύψωση απαιτεί όμως εντάσεις πεδίου υψηλότερες από τις επικρατούσες στις συνήθεις εφαρμογές.

Στα πλαίσια τώρα του μοντέλου των ενεργειακών ταινιών και με κριτήριο την ηλεκτρική αγωγιμότητα, διακρίνουμε τις ακόλουθες τρεις κατηγορίες στερεών:

1) Μεταλλικοί αγωγοί: Η αγωγιμότητα των μετάλλων οφείλεται στο γεγονός, ότι η ανώτατη κατειλημμένη ταινία είτε δεν είναι πλήρης - οπότε λειτουργεί ως ταινία αγωγιμότητας - (βλ. σχ. 3.16α), είτε αλληλεπικαλύπτεται με την αμέσως ανώτερη, οπότε αποτελούν από κοινού ταινία αγωγιμότητας (βλ. σχ. 3.16β).



Τα εντός της ταινίας αγωγιμότητας ευρισκόμενα ηλεκτρόνια είναι τα γνωστά ελεύθερα και άγουν το ηλεκτρικό ρεύμα.

2) Μονωτές: Στους μονωτές (βλ. σχ. 3.15) η ανώτατη κατειλημμένη ταινία είναι πλήρης το δε ενεργειακό χάσμα που την χωρίζει από την αμέσως ανώτερη είναι μεγαλύτερο από την δυνατή αύξηση της κινητικής ενέργειας των ηλεκτρονίων μέσω θέρμανσης. Μόνο πολύ ισχυρά πεδία μπορούν να προσδώσουν στα δέσμια ηλεκτρόνια την απαραίτητη για την υπερπήδηση του ενεργειακού χάσματος ενέργεια, οπότε έχουμε βίαιη αγωγή του ηλεκτρισμού μέσω ηλεκτρικού σπινθήρα.

3) Ημιαγωγοί: Όπως προαναφέραμε ήδη σε προηγούμενα κεφάλαια, ως ημιαγωγοί χαρακτηρίζονται τα υλικά εκείνα, τα οποία σε πολύ χαμηλές θερμοκρασίες είναι μονωτές, η αγωγιμότητα τους αυξάνεται όμως σημαντικά με αυξανόμενη θερμοκρασία. Στους τεχνικώς πλέον ενδιαφέροντες ημιαγωγούς κατατάσσονται το πυρίτιο (Si), το γερμάνιο (Ge), το αντιμονίδιο του ινδίου (InSb), το αρσενίδιο του γαλλίου (GaAs), το οξειδίο του χαλκού (Cu_2O), το σελήνιο(Se), κ.λ.π.

Η επανάσταση των ηλεκτρονικών υπολογιστών και όχι μόνο (transistors, ολοκληρωμένα κυκλώματα, ανορθωτές, ανιχνευτές, φωτοκύτταρα κ.λ.π.) στηρίχθηκε στις ιδιότητες των ημιαγωγών, γεγονός το οποίο επιβάλλει την κάπως εκτενέστερη τους μελέτη. Χάριν δε απλότητας και συντομίας θα περιοριστούμε στην περίπτωση των σπουδαιότερων ίσως αντιπροσώπων της κατηγορίας αυτής, γερμανίου και πυριτίου, υποδεικνύοντας απλώς ότι ο μηχανισμός αγωγιμότητας είναι ουσιαστικά για όλους τους ημιαγωγούς ο ίδιος.

3.6.1.1 Αυτοτελείς ημιαγωγοί - ιδιοαγωγιμότητα

Σαν «**αυτοτελείς**» χαρακτηρίζονται οι πολύ καθαροί **ημιαγωγοί**, σε αντιπαράθεση προς τους ημιαγωγούς *προσμίξεων*, για λόγους οι οποίοι θα γίνουν απόλυτα κατανοητοί στην συνέχεια.

Το γερμάνιο και το πυρίτιο έχουν - σαν στοιχεία της τέταρτης ομάδας του Περιοδικού Συστήματος - τέσσερα εξωτερικά ηλεκτρόνια. Κρυσταλλούνται λοιπόν κατά το λεγόμενο κρυσταλλικό πλέγμα του διαμαντιού, όπου κάθε άτομο περιβάλλεται από τέσσερα γειτονικά, ευρισκόμενα στις κορυφές ενός κανονικού τετραέδρου με κέντρο το εν λόγω άτομο. Με τον τρόπο αυτό κάθε άτομο έχει τέσσερις ισάπεχοντες γείτονες, με τους οποίους και σχηματίζει *ομοιοπολικό* δεσμό, συμπληρώνοντας έτσι την επιθυμητή οκτάδα ηλεκτρονίων, όπως φαίνεται -χάριν απλότητας δισδιάστατα- και στο σχήμα 3.17.

Σχήμα 3.17: Δισδιάστατο μοντέλο του πλέγματος του διαμαντιού.

Ο ζυγός αριθμός ηλεκτρονίων, τα οποία διαθέτει κάθε άτομο, έχει σαν αποτέλεσμα την πληρότητα των αντιστοιχών ενεργειακών ταινιών. (Κάθε ταινία μπορεί να παραλάβει $2N$ ηλεκτρόνια, όπου N ο αριθμός ατόμων του κρυστάλλου. Δηλαδή κάθε ατομική *στάθμη* ενός μεμονωμένου ατόμου, η οποία μπορεί να παραλάβει δύο ηλεκτρόνια αντιθέτου spin, σχηματίζει με τις αντίστοιχες στάθμες των $(N - 1)$ υπολοίπων ατόμων του πλέγματος μια ενεργειακή *ταινία*. Η ταινία αυτή διαθέτει N στάθμες - έκαστη των οποίων μπορεί να παραλάβει δύο ηλεκτρόνια

αντιθέτου spin -, οι οποίες έχουν προκύψει από την μετατόπιση των N ατομικών σταθμών λόγω αμοιβαίας αλληλεπίδρασης των ατόμων.)

Λόγω της πληρότητας των ενεργειακών ταινιών θα έπρεπε τα υλικά αυτά να είναι μονωτές, πράγμα το οποίο και αληθεύει σε πολύ χαμηλές θερμοκρασίες. Ενώ όμως το διαμάντι (C) παραμένει μονωτής ακόμη και σε θερμοκρασία δωματίου, το γερμάνιο και το πυρίτιο εμφανίζουν πλέον μια έστω και μικρή αγωγιμότητα, συμπεριφέρονται δηλαδή ως ημιαγωγοί. Η διαφορά αυτή έγκειται στο γεγονός, ότι τα ηλεκτρόνια σθένους συγκρατούνται ισχυρά από τα μικρά άτομα άνθρακα ($4^{\text{η}}$ ομάδα, $2^{\text{η}}$ όμως περίοδος του Περιοδικού Συστήματος) του διαμαντιού, ενώ δεν συμβαίνει το ίδιο και με τα μεγαλύτερα άτομα του πυριτίου και του γερμανίου ($3^{\text{η}}$ και $4^{\text{η}}$ περίοδος αντίστοιχα). Έτσι στην περίπτωση των δύο τελευταίων αρκεί η θερμική κίνηση του πλέγματος για να ελευθερώσει κάποια ηλεκτρόνια, πράγμα το οποίο δεν ισχύει για το πρώτο.

Πολύ παραστατικότερα φαίνονται τα παραπάνω με την βοήθεια του μοντέλου των ενεργειακών ταινιών: Στην περίπτωση του διαμαντιού το ενεργειακό χάσμα μεταξύ της ταινίας σθένους και αγωγιμότητας είναι τόσο μεγάλο, ώστε δεν μπορεί να υπερπηδηθεί θερμικά. Αντιθέτως το πολύ μικρότερο χάσμα στους κρυστάλλους του πυριτίου, γερμανίου και του κασιτέρου (Sn $4^{\text{η}}$ ομάδα $5^{\text{η}}$ περίοδος) επιτρέπει την θερμική ανόρθωση αρκετών ηλεκτρονίων από την ταινία σθένους στην ταινία αγωγιμότητας. Μάλιστα στην περίπτωση του κασιτέρου ο αριθμός αυτός είναι τόσο μεγάλος, ώστε να έχουμε σχεδόν μεταλλική αγωγιμότητα.

Σχήμα 3.18: Ενεργειακά χάσματα μεταξύ ταινίας σθένους και αγωγιμότητας διαφόρων κρυστάλλων (στους $T=OK$).

Ένα ηλεκτρόνιο, το οποίο εγκαταλείπει τον συγκεκριμένο του δεσμό, αφήνει εκεί ένα πλεονάζον **θετικό φορτίο** λόγω της απουσίας του, το οποίο χαρακτηρίζεται σαν **ηλεκτρονιακή κενή θέση** ή (σύντομα και παραστατικά) **(θετική) οπή** (βλ. σχ. 3.19). Όπως τα ελεύθερα ηλεκτρόνια της ταινίας αγωγιμότητας, έτσι και οι θετικές οπές της ταινίας σθένους μπορούν να «κινούνται» μέσα στον όγκο του κρυστάλλου:

Μια οπή αποτελεί πόλο έλξεως για τα δέσμια ηλεκτρόνια των γειτονικών της ομοιοπολικών δεσμών και δεν αργεί να συμπληρωθεί με ένα απ' αυτά. Η συμπλήρωση της όμως ισοδυναμεί ουσιαστικά με την μετακίνηση της στην θέση του εν λόγω ηλεκτρονίου.

Μέσω λοιπόν διαδοχικής συμπλήρωσης μιας οπής με (δέσμια) ηλεκτρόνια, έχουμε την μετακίνηση της, η οποία ελλείψει εξωτερικού πεδίου είναι, στατιστική, γίνεται όμως κατευθυνόμενη, όταν στα άκρα του κρυστάλλου εφαρμόσουμε ηλεκτρική τάση. Τότε τα μεν ελεύθερα ηλεκτρόνια κινούνται προς τον θετικό, οι δε οπές προς τον αρνητικό πόλο (βλ. σχ. 3.19). (Θα μπορούσε

βέβαια να ισχυριστεί κανείς -πράγμα το οποίο και αληθεύει-, ότι η μετακίνηση μιας θετικής οπής είναι στην ουσία μετακίνηση πολλών αρνητικών ηλεκτρονίων προς την αντίθετη κατεύθυνση. Είναι όμως πολύ πιο άνετο να πάρουμε υπόψη μας την κίνηση των λίγων σχετικά οπών, παρά εκείνη των δυσανάλογα πολλών ηλεκτρονίων.) Επομένως

η ιδιοαγωγιμότητα (ή αυτοτελής αγωγιμότητα) των ημιαγωγών οφείλεται, στην μετακίνηση ελευθέρων ηλεκτρονίων (στην ζώνη αγωγιμότητας) και, (ίσου αριθμού) θετικών οπών (στην ζώνη σθένους).

Σχήμα 3.19: Δημιουργία ζευγών ελευθέρων ηλεκτρονίων-οπών (αριστερά) και «μετακίνηση» οπής μέσω διαδοχικής της πλήρωσης από δέσμια ηλεκτρόνια (δεξιά).

Κλείνοντας σημειώνουμε, ότι ο αριθμός των ελευθέρων ηλεκτρονίων (άρα και των οπών, μια και δημιουργούνται κατά ζεύγη) αυξάνεται εκθετικά με την θερμοκρασία, γεγονός το οποίο εξηγεί και την αντίστοιχη ελάττωση της ειδικής τους αντίστασης (βλ. κεφ.3.4.2) με αυξανόμενη θερμοκρασία.

Εξάλλου μέσω ακτινοβολίας με φωτόνια κατάλληλης ενέργειας (που σημαίνει -βλ. Ατομική Φυσική- με ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία κατάλληλης συχνότητας) μπορούμε να ανυψώσουμε ηλεκτρόνια από την ταινία σθένους στην ταινία αγωγιμότητας. Με τον τρόπο αυτό δημιουργούμε ζεύγη ηλεκτρονίων-οπών, τα οποία αυξάνουν την αγωγιμότητα του κρυστάλλου. Το φαινόμενο αυτό είναι γνωστό ως εσωτερικό φωτοηλεκτρικό φαινόμενο (βλ. και κεφ. 3.4.3). Οι φωτοηλεκτρικές λεγόμενες αντιστάσεις επιτρέπουν μέσω του εν λόγω φαινομένου τον έλεγχο ηλεκτρικών ρευμάτων.

3.6.1.2 Ημιαγωγοί προσμίξεων τύπου n και p

Κάθε διαταραχή της κρυσταλλικής δομής ενός καθαρού (ιδιοαγωγιμου) ημιαγωγού μεταβάλλει την (ίδιο-) αγωγιμότητα του, η οποία χαρακτηρίζεται πλέον ως διαταραγμένη αγωγιμότητα. Από όλες τις δυνατές διαταραχές (π.χ. όρια κρυσταλλιτών, όρια του μακροκρυστάλλου, μηχανικές - πλαστικές ή μη – παραμορφώσεις, μεσοπλεγματικά -ξένα ή μη- άτομα, κενές θέσεις του πλέγματος) ιδιαίτερο τεχνικό ενδιαφέρον παρουσιάζει η ελεγχόμενη ενσωμάτωση («πρόσμιξη») ξένων ατόμων σε κανονικές θέσεις του κρυσταλλικού πλέγματος. Πιο συγκεκριμένα στην περίπτωση του πυριτίου και του γερμανίου ενδιαφέρει η ενσωμάτωση στοιχείων της τρίτης και πέμπτης ομάδας του Περιοδικού Συστήματος.

Η μέσω ελεγχόμενης ενσωμάτωσης διαταραγμένοι ημιαγωγοί χαρακτηρίζονται ως **ημιαγωγοί προσμίξεων (τύπου n ή p)**:

Άτομα της *πέμπτης* ομάδας του Περιοδικού Συστήματος (φωσφόρος /P, αρσενικό/As, αντιμόνιο/Sb) έχουν ως γνωστόν πέντε εξωτερικά ηλεκτρόνια. Όταν λοιπόν ενσωματωθούν σε κανονικές θέσεις του κρυσταλλικού πλέγματος του γερμανίου ή του πυριτίου, εμφανίζουν ένα «πλεονασματικό» ηλεκτρόνιο, μια και η επιθυμητή οκτάδα σχηματίζεται με την βοήθεια τεσσάρων γειτόνων, έκαστος των οποίων συνεισφέρει από ένα ηλεκτρόνιο (βλ. σχ. 3.20). Το πλεονάζον αυτό ηλεκτρόνιο συνδέεται πλέον τόσο χαλαρά στο αρχικό του άτομο, ώστε αρκεί η θερμική ενέργεια του πλέγματος για να ελευθερωθεί. Κάθε ενσωματωμένο άτομο της πέμπτης ομάδας προσφέρει πρακτικά ένα ελεύθερο ηλεκτρόνιο και καλείται ως εκ τούτου **δότης**. Τα ελεύθερα ηλεκτρόνια των δοτών αυξάνουν σημαντικά την αγωγιμότητα των ημιαγωγών. Στην πράξη η ενσωμάτωση γίνεται συνήθως σε αναλογία 1 (άτομο δότη) προς 10^5 ως 10^6 (άτομα του κρυσταλλικού πλέγματος) και αυξάνει τόσο την αγωγιμότητα, ώστε η ιδιοαγωγιμότητα του καθαρού κρυστάλλου να θεωρείται σχεδόν αμελητέα. Για τον λόγο αυτό η αγωγιμότητα ενός ημιαγωγού με προσμίξεις τύπου n (δηλαδή με ενσωματωμένους δότες) χαρακτηρίζεται ως **αγωγιμότητα τύπου n**, μια και οφείλεται πρακτικά σε *ελεύθερα ηλεκτρόνια*, δηλαδή αρνητικώς (negative) φορτισμένα σωματίδια.

Σχήμα 3.20: Πλεονάζον ηλεκτρόνιο (πεντασθενούς) δότη ("o") ενσωματωμένου σε κρύσταλλο πυριτίου ή γερμανίου και (δεξιά) ενεργειακή του στάθμη στο μοντέλλο των ενεργειακών ταινιών.

Στο σχήμα 3.20 (δεξιά) βλέπουμε την κατάσταση στα πλαίσια του μοντέλου των ενεργειακών ταινιών: η ενεργειακή στάθμη (των «πλεοναζόντων» ηλεκτρονίων) των δοτών βρίσκεται τόσο κοντά στην ταινία αγωγιμότητας, ώστε όλα της σχεδόν τα ηλεκτρόνια να έχουν πηδήσει - μέσω θερμικής διέγερσης - στην ταινία αγωγιμότητας.

Ακριβώς αντίστροφη είναι η κατάσταση κατά την ενσωμάτωση ατόμων της *τρίτης* ομάδας του Περιοδικού Συστήματος (βόριο / B, αλουμίνιο / Al, γάλλιο / Ga και ίνδιο / In), τα οποία διαθέτουν *τρία* μόνον εξωτερικά ηλεκτρόνια. Τα άτομα λοιπόν αυτά έχουν ένα «ελλιπές» ηλεκτρόνιο, μια και μπορούν να σχηματίσουν δεσμούς μόνο με τα τρία εκ των τεσσάρων γειτονικών τους ατόμων (βλ. σχ.3.21). Η θέση του «ελλιπούς» αυτού ηλεκτρονίου είναι αρκετά ελκυστική για τα ηλεκτρόνια της γύρω περιοχής, μια και οδηγεί στην συμπλήρωση της επιθυμητής οκτάδας ηλεκτρονίων. Έτσι η θερμική ενέργεια είναι -ήδη σε θερμοκρασία περιβάλλοντος - αρκετή, ώστε να αποσπασθεί κάποιο από τα γειτονικά ηλεκτρόνια, το οποίο καταλαμβάνει την εν λόγω θέση. Το ηλεκτρόνιο αυτό αφήνει στο μητρικό του άτομο μια (θετική) οπή. Κάθε ενσωματωμένο άτομο γίνεται πρακτικά **αποδέκτης** ενός γειτονικού ηλεκτρονίου και κατά συνέπεια «δημιουργός» μιας θετικής οπής, αυξάνοντας έτσι την αγωγιμότητα του κρυστάλλου. Στην πράξη επιλέγονται συνήθως τέτοιες αναλογίες ενσωμάτωσης (1 προς 10^5 ~ 10^6), ώστε η αυτοτελής αγωγιμότητα του κρυστάλλου να είναι σχεδόν αμελητέα. Για τον λόγο αυτό η αγωγιμότητα ενός ημιαγωγού με προσμίξεις τύπου p (δηλαδή ενσωματωμένους αποδέκτες) χαρακτηρίζεται ως **αγωγιμότητα τύπου p**, μια και οφείλεται πρακτικά σε θετικές (positive) οπές.

Στο σχήμα 3.21 (δεξιά) βλέπουμε την κατάσταση στα πλαίσια του μοντέλου των ενεργειακών ταινιών: η ενεργειακή στάθμη (των «πλεοναζόντων» ηλεκτρονίων) των δοτών βρίσκεται τόσο κοντά στην ταινία σθένους, ώστε να έχει καταληφθεί σχεδόν εξ ολοκλήρου από θερμικώς διεγερμένα ηλεκτρόνια της ταινίας αυτής. Με τον τρόπο αυτό η ταινία σθένους παύει να είναι πλήρης και λειτουργεί ως ταινία αγωγιμότητας.

Σχήμα 3.21 : Ελλειπές ηλεκτρόνιο (τρισθενούς) αποδέκτη ("o") ενσωματωμένου σε κρύσταλλο πυριτίου ή γερμανίου και (δεξιά) ενεργειακή του στάθμη στο μοντέλλο των ενεργειακών ταινιών.

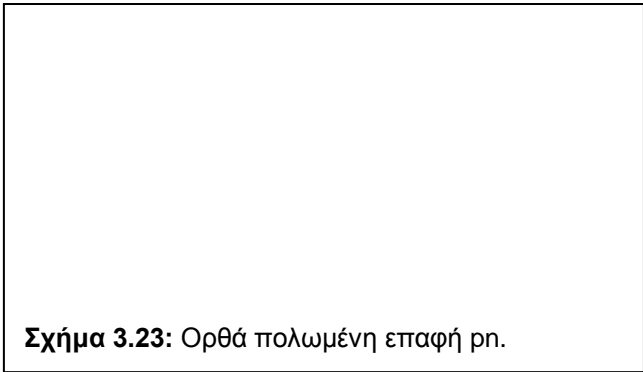
Παρατήρηση: Αγωγιμότητα προσμίξεων έχουμε και σε ιοντικούς κρυστάλλους: Αν επί παραδείγματι ενσωματώσουμε τρισθενή άτομα αλουμινίου σαν δότες στην θέση μεμονωμένων δισθενών ατόμων ψευδαργύρου (Zn) ενός κρυστάλλου οξειδίου του ψευδαργύρου (ZnO), προκύπτει αγωγιμότητα τύπου n. Αντιθέτως, ενσωμάτωση μονοσθενών ατόμων λιθίου (Li) σαν αποδέκτες οδηγεί σε αγωγιμότητα τύπου p. (Σημειωτέον ότι λεπτά στρώματα ZnO είναι διαφανή και χρησιμοποιούνται για την μετατροπή γυαλιού σε «αγώγιμο Γυαλί».)

3.6.1.3 Εφαρμογές της μη αυτοτελούς (διαταραγμένης) αγωγιμότητας

Ανορθωτικές δίοδοι με επαφή pn: Όταν σε έναν μονοκρύσταλλο συνορεύουν μια περιοχή τύπου p και μια τύπου n, έτσι ώστε η μετάβαση από την μια στην άλλη να πραγματοποιείται μέσα σε μια ζώνη πάχους μερικών μόνο σταθερών πλέγματος (σταθερά *πλέγματος* = απόσταση δύο γειτονικών ατόμων του κρυστάλλου), τότε έχουμε **επαφή τύπου pn.**

Εξ αιτίας της διαφορετικής τους περιεκτικότητας (και με κινητήριο μηχανισμό την θερμική τους κίνηση) έχουμε διάχυση ηλεκτρονίων από την ζώνη n προς την ζώνη p και οπών κατά την αντίστροφη κατεύθυνση (βλ. σχ. 3.22). Το εν λόγω **ρεύμα διαχύσεως** έχει σαν αποτέλεσμα την ελάττωση των ηλεκτρονίων στην (αρχικά ουδέτερη) ζώνη n και τον εμπλουτισμό της σε θετικά φορτία, οφειλόμενα σε θετικά ιόντα του πλέγματος. Ακριβώς ανάλογα έχουμε πλεόνασμα αρνητικών φορτίων στην ζώνη p λόγω ελάττωσης των θετικών οπών. Ο διαχωρισμός αυτός των φορτίων έχει σαν αποτέλεσμα την δημιουργία της λεγόμενης **τάσης διαχύσεως U_d** και κατ' επέκταση ενός πεδίου, το οποίο προκαλεί το λεγόμενο **ρεύμα πεδίου**, φοράς αντίθετης προς εκείνη του ρεύματος διαχύσεως. Το ρεύμα πεδίου αυξάνεται όσο μεγαλώνει η τάση διαχύσεως, όταν

δε γίνει ίσο με το ρεύμα διαχύσεως, σταματάει ο παραπέρα διαχωρισμός των φορτίων και αποκαθίσταται κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας.



Σχήμα 3.23: Ορθά πολωμένη επαφή pn.

Τα παραπάνω ισχύουν προφανώς για την μη πολωμένη επαφή pn. Ιδιαίτερο πρακτικό ενδιαφέρον παρουσιάζει όμως η συμπεριφορά της επαφής, όταν μεταξύ των άκρων της εφαρμοσθεί ηλεκτρική τάση. Διακρίνουμε δε δύο περιπτώσεις: **ορθά πολωμένη επαφή pn:** ο θετικός πόλος συνδέεται με την περιοχή p και ο αρνητικός με την n. Η εξωτερική τάση έχει επομένως αντίθετη πόλωση από την τάση διαχύσεως (βλ. σχ. 3.23). οπότε και την εξουδετερώνει (ή τουλάχιστον την εξασθενίζει). Έτσι οι οπές και τα ηλεκτρόνια μπορούν και διέρχονται πλέον ευκολότερα την επαφή, έχουμε

δηλαδή ηλεκτρικό ρεύμα (το οποίο μάλιστα αυξάνεται εκθετικά με την εξωτερική τάση U).

Αντιθέτως, αν το άκρο p της επαφής συνδέεται με τον αρνητικό και το άκρο n με τον θετικό (**ανάστροφα πολωμένη επαφή p n**) πόλο, η

εξωτερική τάση ενισχύει την τάση διαχύσεως (βλ. σχ. 3.24). Κατά μήκος της επαφής έχουμε ελάττωση των ελευθέρων φορέων φορτίου και την δημιουργία μιας πλατιάς **ζώνης απογύμνωσης**. Η επαφή διαρρέεται μόνον από το λεγόμενο **ρεύμα μειονότητας**, το οποίο οφείλεται σε ελεύθερα ηλεκτρόνια της περιοχής p και οπές της περιοχής n, σε φορείς δηλαδή οι οποίοι αποτελούν **μειονότητες** στις εν λόγω περιοχές και

Σχήμα 3.24: Ανάστροφα πολωμένη επαφή pn

δημιουργούνται στα πλαίσια της αυτοτελούς αγωγιμότητας (βλ. 3.6.1.1). Το ρεύμα μειονότητας είναι λοιπόν πολύ μικρό και ισχυρά εξαρτώμενο από την θερμοκρασία.

Βλέπουμε λοιπόν, ότι **μια** - εντός ενός ημιαγωγίμου κρυστάλλου ευρισκόμενη – **επαφή pn** λειτουργεί σαν μια βαλβίδα, η οποία **επιτρέπει την διέλευση του ρεύματος μόνο κατά την μία φορά**. Ένας τέτοιος κρύσταλλος λειτουργεί επομένως **ανορθωτικά** και καλείται **κρυσταλλοδίοδος** (βλ. και σχ. 3.25)



Σχήμα 3.25: Συμβολισμός επαφής pn ως (ανορθωτικής) διόδου και συνδεσμολογία κατά την (επιτρέπουσα την ροή ρεύματος) ορθή φορά.

Φωτοδίοδοι – φωτοστοιχεία: Όπως είδαμε παραπάνω, μια ανάστροφα πολωμένη pn - επαφή διαρρέεται μόνο από το ανεπαίσθητο ρεύμα μειονότητας, φορείς του οποίου είναι ηλεκτρόνια της περιοχής p και οπές της περιοχής n. Οι φορείς αυτοί δημιουργούνται στα πλαίσια της αυτοτελούς αγωγιμότητας μέσω θερμικής ανύψωσης ηλεκτρονίων από την ταινία σθένους στην ταινία αγωγιμότητας. Η εν λόγω ανύψωση μπορεί να πραγματοποιηθεί και μέσω απορρόφησης ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας («φωτός») καταλλήλου μήκους κύματος, γεγονός το οποίο χαρακτηρίζεται (βλ. κεφ. 3.4.3) και ως εσωτερικό φωτοηλεκτρικό φαινόμενο. Η ένταση του ρεύματος, το οποίο διαρρέει τότε την επαφή, είναι ανάλογη προς την **ένταση του φωτός** (= ισχύς την οποία παραλαμβάνει η κάθετη προς την διεύθυνση του φωτός μοναδιαία επιφάνεια).

Το παραπάνω φαινόμενο είναι στις συνθήκες

Σχήμα 3.25: Σχηματική παράσταση φωτοστοιχείου

διόδους τύπου pn ανεπιθύμητο (θα μπορούσε π.χ. να επηρεάσει τις ανορθωτικές ικανότητές τους), λόγος για τον οποίο και περιβάλλονται με αδιαφανές περίβλημα. Υπάρχουν όμως και οι λεγόμενες **φωτοδιόδοι**, οι οποίες είναι ειδικά σχεδιασμένες προκειμένου να το αξιοποιούν. Τέτοιες διόδοι χρησιμοποιούνται κυρίως ως **φωτοδιακόπτες** και ως **φωτοστοιχεία**: Αν βραχυκυκλώσουμε τα άκρα μιας φωτοδιόδου μέσω ενός σύρματος δεν θα έχουμε χωρίς την επίδραση φωτός ρεύμα, όσο και αν αυτό φαίνεται παράξενο: κατά μήκος της επαφής επικρατεί ως γνωστόν (βλ. παραπάνω) η τάση διαχύσεως, η οποία εκτός του ρεύματος πεδίου μέσω της επαφής, θα έπρεπε να προκαλέσει και ένα ρεύμα μέσω του σύρματος. Ο λόγος για τον οποίο δεν συμβαίνει αυτό είναι ο ακόλουθος:

Το σύρμα αποτελεί - όπως προαναφέραμε - βραχυκύκλωμα. Μέσω αυτού έρχονται λοιπόν σε «επαφή» και τα εξωτερικά άκρα των περιοχών p και n. Με άλλα λόγια το σύρμα αποτελεί ένα είδος «εξωτερικής επαφής» τύπου pn, μέσω της οποίας πραγματοποιείται διάχυση ηλεκτρονίων από την ζώνη n προς την ζώνη p. Έτσι δημιουργείται και μεταξύ των εξωτερικών άκρων μια τάση διαχύσεως $U_{\Delta}^{εξ}$, η οποία εξουδετερώνει την ίση προς αυτήν «εσωτερική» τάση διαχύσεως $U_{\Delta}^{εσ}$ (Σημειωτέον ότι στον χώρο μεταξύ των δύο «επαφών», δηλαδή στο εσωτερικό της ζώνης p και της ζώνης n, οι δύο τάσεις τείνουν να προκαλέσουν ρεύμα προς την αντίθετη κατεύθυνση.).

Τα πράγματα όμως αλλάζουν, όταν επιδρά φως επί της εσωτερικής επαφής, οπότε έχουμε ανύψωση ηλεκτρονίων στην ζώνη αγωγιμότητας και επομένως δημιουργία οπών στην ζώνη σθένους. Τα μεν ηλεκτρόνια κατευθύνονται (κάτω από την επίδραση της $U_{\Delta}^{εσ}$) προς την ζώνη n, οι δε οπές προς την ζώνη p. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα την (εν μέρει ή και εξ ολοκλήρου) εξουδετέρωση των δημιουργούντων την $U_{\Delta}^{εσ}$ φορτίων και επομένως την εξασθένηση της. Έτσι υπερισχύει η $U_{\Delta}^{εξ}$, η οποία παραμένει σταθερή, και το κύκλωμα του σχήματος 3.25 διαρρέεται από ρεύμα.

Η ΗΕΔ ενός φωτοστοιχείου μπορεί λοιπόν να φθάσει και την τιμή της τάσης διαχύσεως, η οποία εξαρτάται από το είδος του κρυστάλλου, καθώς και τον βαθμό ενσωμάτωσης. Φωτοστοιχεία χρησιμοποιούνται ως **φωτομετρητές** και φυσικά ως **ηλεκτρικές πηγές**. Για τις τελευταίες χρησιμοποιούνται συνήθως φωτοστοιχεία πυριτίου, με τα οποία επιτυγχάνονται βαθμοί απόδοσης μέχρι 10% περίπου. Σημειωτέον ότι στην πράξη (π.χ. δορυφόροι) χρησιμοποιούνται συνήθως συστοιχίες αποτελούμενες από πολλά φωτοστοιχεία συνδεδεμένα μεταξύ τους.

Κρυσταλλοτρίοδοι (transistors) επαφής: Η κρυσταλλοτρίοδος επαφής είναι ένα από τα σπουδαιότερα δομικά στοιχεία της Ηλεκτρονικής. Αποτελείται από έναν ημιαγωγίμο μονοκρύσταλλο, στον οποίο γειτονεύουν (απόσταση $\approx 1 \mu\text{m}$) δύο επαφές pn. Ανάλογα δε με την διάταξη των ζωνών διακρίνουμε **NPN** - και **PNP** - **κρυσταλλοτρίοδους (τρανζίστορς)** (βλ. σχ. 3.26). Εμείς θα περιορισθούμε στην περίπτωση μιας NPN - κρυσταλλοτρίοδου επισημαίνοντας, ότι ακριβώς αντίστοιχη είναι και η λειτουργία μιας PNP - κρυσταλλοτρίοδου.

Έστω ότι η επαφή 2 (βλ. σχ. 3.27a) είναι πολωμένη ανάστροφα. Τότε η εν λόγω επαφή διαρρέεται από το σχεδόν μηδενικό ρεύμα μειονότητας (βλ. παραπάνω).

Αν τώρα πολωθεί και η επαφή 1 και μάλιστα ορθά, τότε συμβαίνει το εξής: κατ' αρχήν διαρρέεται από ρεύμα η επαφή 1, φορείς του οποίου είναι οπές, οι οποίες εισέρχονται στην περιοχή n και ηλεκτρόνια, οποία εισέρχονται στην περιοχή p. Επειδή όμως η ζώνη p είναι πολύ λεπτή (πάχος $\approx 1 \mu\text{m}$, όπως προαναφέραμε), τα περισσότερα από τα εισερχόμενα εις αυτήν ηλεκτρόνια φθάνουν - λόγω κεκτημένης ταχύτητας - μέχρι την επαφή 2,

Σχήμα 3.26: Σχηματική παράσταση και συμβολισμός μιας NPN - και μιας PNP - κρυσταλλοτρίοδου.

την οποία και διαρρέουν εξ αιτίας της επ' αυτής εφαρμοζόμενης τάσης.

Βλέπουμε λοιπόν, ότι κατά την ως άνω συνδεσμολογία η επαφή 1 εκπέμπει ηλεκτρόνια, τα οποία συλλέγει η επαφή 2. Ένεκα τούτου

η ορθά πολωμένη επαφή ρη καλείται εκπομπός E.

η ανάστροφα πολωμένη επαφή ρη καλείται συλλέκτης C,

η περιοχή μεταξύ των δύο επαφών καλείται (για ιστορικούς - κατασκευαστικούς λόγους βάση B.

(Την ίδια ονομασία έχουν και οι αντίστοιχοι ακροδέκτες).

Σχήμα 3.27: Εξήγηση της λειτουργίας μιας (NPN-) κρυσταλλοτριόδου.

Βλέπουμε λοιπόν, ότι το διαρρέον του συλλέκτη ρεύμα I_C εξαρτάται (πρακτικά) εξ ολοκλήρου από το διαρρέον τον εκπομπό ρεύμα I_E . Άρα

το διαρρέον το κύκλωμα εκπομπού - (βάσης ρεύμα ελέγχει εκείνο του κυκλώματος συλλέκτη - βάσης.

Σημειωτέον ότι τα διερχόμενα μέσω του εκπομπού ηλεκτρόνια φθάνουν σχεδόν εξ ολοκλήρου (ποσοστό 90 ~ 99,5%) στον συλλέκτη. Ένεκα τούτου το ρεύμα συλλέκτη I_C είναι σχεδόν ίσο με εκείνο (I_E) του εκπομπού. Μόνο ένα 0,5 έως 10% του ρεύματος εκπομπού ρέει μέσω του ακροδέκτη της βάσης ως ρεύμα βάσεως I_B . (Η ζώνη ρ είναι τόσο φτωχή σε προσμίξεις, ώστε η αγωγιμότητα των οπών να παίζει δευτερεύοντα ρόλο). Έχουμε λοιπόν $I_C \approx 0,9 \dots 0,995 I_E$.

Η «ανάστροφη» τάση U_{CB} μεταξύ συλλέκτη και βάσης μπορεί να επιλεγεί πολύ μεγαλύτερη από εκείνη (U_{EB}) μεταξύ εκπομπού και βάσης (Στην πράξη: $U_{EB} < 1V$, $U_{CB} \approx 2V \dots 400V$, ανάλογα με το είδος της κρυσταλλοτριόδου). Επομένως η ισχύς $U_{EB} I_E$ του κυκλώματος εκπομπού - βάσης ελέγχει την πολύ μεγαλύτερη ισχύ $U_{CB} I_C \approx U_{CB} I_E$. Ή διαφορετικά, μεταβολές της μικρής ισχύος στο κύκλωμα εισόδου *ενισχύονται* σε μεγάλες μεταβολές του κυκλώματος εξόδου:

Η κρυσταλλοδίοδος (transistor) επαφής μπορεί να λειτουργήσει ως ενισχυτής ισχύος.

Η παραπάνω συνδεσμολογία (σχ. 3.27), κατά την οποία η βάση αποτελεί τον κοινό ακροδέκτη, είναι γνωστή ως συνδεσμολογία κοινής βάσης.

Η συνδεσμολογία αυτή προτιμάται συνήθως, όταν θέλουμε να εξηγήσουμε την λειτουργία μιας κρυσταλλοτριόδου, ενώ στην πράξη επιλέγεται συνήθως η συνδεσμολογία κοινού εκπομπού (σχ. 3.28). Στην εν λόγω συνδεσμολογία μέσω του κυκλώματος εισόδου (= κύκλωμα βάσης - εκπομπού) ρέει το πολύ μικρό ρεύμα βάσεως $I_B = I_E - I_C$. Αυτό σημαίνει, ότι η συνδεσμολογία κοινού εκπομπού επιτρέπει τον έλεγχο του μεγάλου ρεύματος συλλέκτη I_C μέσω του μικρού ρεύματος βάσεως I_B . Ή διαφορετικά, μεταβολές

Σχήμα 3.28: Συνδεσμολογία κοινού εκπομπού.

του ρεύματος I_B ενισχύονται σε πολύ μεγαλύτερες μεταβολές του ρεύματος εξόδου I_C :

Κατά την συνδεσμολογία κοινού εκπομπού η κρυσταλλοτρίοδος λειτουργεί ως ενισχυτής ρεύματος.

Και κατά την συνδεσμολογία κοινού εκπομπού μπορούμε να επιλέξουμε την τάση εξόδου U_{CE} πολύ μεγαλύτερη της τάσης εισόδου U_{BE} . Με τον τρόπο αυτό πετυχαίνουμε **ενίσχυση της ισχύος εισόδου** $P_{BE} = I_{BE}U_{BE}$ σε $P_{CE} = I_{CE}U_{CE}$. Η ενίσχυση αυτή είναι μάλιστα – λόγω της προαναφερθείσης ενίσχυσης ρεύματος - σημαντικά μεγαλύτερη από εκείνη της συνδεσμολογίας κοινής βάσης.

Ο κατάλογος με τα ηλεκτρονικά στοιχεία, τα οποία είναι κατασκευασμένα από ημιαγωγίμους κρυστάλλους μέσω ελεγχόμενης ενσωμάτωσης, είναι φυσικά μακρύς. Εμείς όμως - λόγω ελλείψεως χώρου - θα αρκεσθούμε στα λίγα παραπάνω παραδείγματα. Κλείνοντας όμως θα θέλαμε να υποδείξουμε το ουσιαστικό πλεονέκτημα των ημιαγωγίμων υλικών: **τα ολοκληρωμένα κυκλώματα**. Πρόκειται για κυκλώματα, τα οποία αποτελούνται από χιλιάδες ηλεκτρονικά στοιχεία (transistors, διόδους, πυκνωτές κ.λ.π.), κατασκευασμένα μέσω ελεγχόμενης ενσωμάτωσης από ένα και μοναδικό πλακίδιο πυριτίου (πρόκειται για τα περιβόητα chips) εμβαδού της τάξεως του τετραγωνικού χιλιοστού (mm^2).

3.6.2 Υπεραγωγιμότητα

Η ηλεκτρική αντίσταση ορισμένων μετάλλων, κραμάτων και ημιαγωγών (σχεδόν) μηδενίζεται, όταν αυτά ψυχθούν κάτωθεν μιας, χαρακτηριστικής για το συγκεκριμένο υλικό, **κρίσιμης θερμοκρασίας**. Το φαινόμενο αυτό, γνωστό ως **υπεραγωγιμότητα**, ανακαλύφθηκε το 1911 από τον Kammerling Onnes, τρία χρόνια μετά την υγροποίηση του ηλίου (He) από τον ίδιο.

Πιο συγκεκριμένα, σε υπεραγώγιμη κατάσταση η αντίσταση στην διέλευση **συνεχούς** ηλεκτρικού ρεύματος πλησιάζει τόσο πολύ το μηδέν, ώστε να έχουν παρατηρηθεί σε υπεραγώγιμους δακτυλίους ρεύματα, τα οποία παρέμεναν αμετάβλητα για διάστημα μεγαλύτερο του ενός έτους από την δημιουργία τους, οπότε και διεκόπτοντο τα αντίστοιχα πειράματα.

(Sn) _x	0,26	MoN	12
In	3,4	NbN	16
Sn	3,7	V ₃ Si	17,1
Pb	7,3	Nb ₃ Al	17,5
Nb	9,2	Nb ₃ Sn	18,5
NbC	10	Nb ₃ Ge	23,2
La ₃ Li	10,4		

Η κρίσιμη θερμοκρασία των μέχρι σήμερα γνωστών υπεραγωγών κυμαίνεται μεταξύ των 0,01 K – τιμή η οποία ισχύει για ορισμένους ημιαγωγούς – και 23,2 K (Nb₃Ge). Οι τιμές της κρίσιμης θερμοκρασίας ορισμένων από τους σπουδαιότερους ημιαγωγούς περιέχονται στον Πίνακα 3.6.2.1. Σημειωτέον ότι η κρίσιμη θερμοκρασία ενός υλικού επηρεάζεται σημαντικότερα από την ύπαρξη παραμαγνητικών ατόμων ως προσμίξεων στο εν λόγω υλικό. Για παράδειγμα ήδη ίχνη σιδήρου (Fe) ή καδμίου (Gd) της τάξεως

μερικών ppm (σωματιδίων ανά εκατομμύριο) καταστρέφουν την υπεραγωγιμότητα του μολυβδαινίου (Mo), το οποίο σε καθαρή κατάσταση έχει κρίσιμη θερμοκρασία ίση με 0,92K.

3.6.2.1 Μαγνητική συμπεριφορά των υπεραγωγών

Οι υπεραγωγοί κατατάσσονται, ανάλογα με την μαγνητική τους συμπεριφορά, στις ακόλουθες δύο κατηγορίες:

α) Υπεραγωγοί 1^{ου} είδους («μαλακοί» υπεραγωγοί): Εάν θέσουμε έναν υπεραγωγό 1^{ου} είδους (του οποίου η θερμοκρασία είναι φυσικά μικρότερη της κρίσιμης θερμοκρασίας του, έτσι ώστε να έχουμε πράγματι υπεραγωγό) εντός ενός εξωτερικού μαγνητικού πεδίου και αυξάνουμε σιγά-σιγά την ένταση του B, θα παρατηρήσουμε ότι σε μία συγκεκριμένη **κρίσιμη ένταση** (κατ' άλλους **«κρίσιμο πεδίο»**) B_K έχουμε ακαριαία μετάβαση στην κανονικά αγώγιμη κατάσταση. Η τιμή της B_K εξαρτάται τόσο από το υλικό όσο και από την θερμοκρασία. Το τελευταίο ισχύει και αντίστροφα: Η κρίσιμη θερμοκρασία T_K εξαρτάται από την ένταση B του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου. Έχει την μέγιστη της τιμή (αυτή περιέχεται στον Πίνακα 3.6.2.1!) για $B=0$, ενώ ελαττώνεται με αυξανόμενη ένταση.

Ο Meissner και ο Ochsenfeld βρήκαν εξάλλου, ότι κατά την ψύξη ενός υπεραγωγού 1^{ου} είδους, ευρισκόμενου εντός μαγνητικού πεδίου, κάτωθεν της κρίσιμης θερμοκρασίας η οποία αντιστοιχεί στην συγκεκριμένη τιμή του πεδίου, έχουμε εκτοπισμό του πεδίου από το εσωτερικό του αγωγού (βλ. σχ. 3.29). Το φαινόμενο αυτό είναι γνωστό ως **φαινόμενο Meissner - Ochsenfeld**. Επομένως ένας υπεραγωγός 1^{ου} είδους συμπεριφέρεται εντός μαγνητικών πεδίων έντασης μικρότερης της κρίσιμης έντασης B_K , ως ένα ιδανικό διαμαγνητικό (βλ. κεφ. Μαγνητισμού) υλικό, μαγνητικής διαπερατότητας $\mu=0$ και μαγνητικής επιδεκτικότητας $\chi = -1$.

Σχήμα 3.29: Φαινόμενο Meißner - Ochsenfeld. Κατά την ψύξη ενός υπεραγωγού 1^{ου} είδους εντός σταθερού εξωτερικού πεδίου έχουμε εκτοπισμό του πεδίου από το εσωτερικό του αγωγού, μόλις υποσκελισθεί η κρίσιμη θερμοκρασία.

Ο μηδενισμός του μαγνητικού πεδίου οφείλεται στην εμφάνιση επιφανειακών ρευμάτων, το μαγνητικό πεδίο των οποίων εξουδετερώνει το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό του αγωγού.

β) Υπεραγωγοί 2^{ου} είδους («σκληροί» υπεραγωγοί): Στους εν λόγω υπεραγωγούς δεν έχουμε ακαριαία μετάβαση στην κανονικά αγώγιμη κατάσταση, όταν το εξωτερικό πεδίο πάρει μια κρίσιμη ένταση, όπως συμβαίνει στην περίπτωση ενός υπεραγωγού πρώτου είδους. Αλλά όταν η ένταση του μαγνητικού πεδίου ξεπεράσει μια κρίσιμη τιμή B_{K2} , αρχίζει το πεδίο να διεισδύει σιγά-σιγά στο εσωτερικό του αγωγού, τον οποίο όμως διαρρέει εντελώς, μόνον όταν η ένταση του ξεπεράσει μια (σε μερικές περιπτώσεις σημαντικά μεγαλύτερη) κρίσιμη τιμή B_{K2} , οπότε και εξαφανίζεται η υπεραγωγιμότητα (βλ. σχ. 3.30).

Σχήμα 3.30: Ένταση του μαγνητικού πεδίου στο εσωτερικό ενός υπεραγωγού 1^{ου} (αριστερά) και 2^{ου} (δεξιά) είδους σε συνάρτηση από την τιμή του εξωτερικού πεδίου. 35

Το γεγονός δε, ότι η κρίσιμη ένταση $B_{κ2}$ μερικών υπεραγωγών 2^{ου} είδους είναι πολύ μεγαλύτερη από την αντίστοιχη τιμή $B_κ$ των υπεραγωγών 1^{ου} είδους έχει ιδιαίτερο τεχνικό ενδιαφέρον, μια και επιτρέπει την κατασκευή **υπεραγωγίων μαγνητών**. Τέτοιοι υπερμαγνήτες χρησιμοποιούνται επί παραδείγματι στα πειράματα για την επίτευξη της θερμοπυρηνικής σύντηξης.

Σημειωτέον ότι εξαφάνιση της υπεραγωγιμότητας έχουμε και όταν η πυκνότητα ρεύματος, που διαρρέει έναν υπεραγωγό, ξεπεράσει μια κρίσιμη τιμή, γεγονός το οποίο οφείλεται στο αντίστοιχο μαγνητικό πεδίο.

3.6.2.2 Η θεωρία BCS της υπεραγωγιμότητας

Η θεωρητική εξήγηση του φαινομένου της υπεραγωγιμότητας είναι σημαντικά δύσκολη και εντάσσεται στο γενικό πλαίσιο της Κβαντομηχανικής. Στηρίζεται ουσιαστικά στην (από τους Bardeen, Cooper και Schrieffer (J. Bardeen , L.N. Cooper και J.R. Schrieffer , Phys. Rev. 106, 162, (1957) και 108, 1175(1957)) διατυπωμένη **BCS - θεωρία**. Εμείς θα αρκεστούμε στην σημαντικά απλοποιημένη περιγραφή του μοντέλου, επί του στηρίζεται η θεωρία αυτή:

Σε θερμοκρασίες χαμηλότερες της κρίσιμης θερμοκρασίας τα ηλεκτρόνια αγωγιμότητας σχηματίζουν ανά δύο τα λεγόμενα **ζεύγη Cooper**, μέσω έμμεσης αλληλεπίδρασης η οποία πραγματοποιείται ως εξής: Το ένα εκ των δύο ηλεκτρονίων αλληλεπιδρά με το θετικά φορτισμένο κρυσταλλικό πλέγμα και το «παραμορφώνει». Το δεύτερο ηλεκτρόνιο «αισθάνεται» την εν λόγω παραμόρφωση του πλέγματος ως έλξη Coulomb, οπότε η κίνηση του καθορίζεται έμμεσα από εκείνη του πρώτου ηλεκτρονίου. Τα δύο ηλεκτρόνια συμπεριφέρονται πλέον ως ένα σωματίδιο, παρά το γεγονός ότι η απόσταση τους μπορεί να ανέρχεται σε μερικές εκατοντάδες (!) σταθερές πλέγματος. Επειδή δε τα συμμετέχοντα ηλεκτρόνια πρέπει να έχουν (ίσα και) αντίθετα spins, τα ζεύγη Cooper είναι σωματίδια με spin ίσο με μηδέν. Σωματίδια με ακέραιο spin («**Μποζόνια**») δεν υπακούουν στην απαγορευτική αρχή του Pauli (βλ. 3.6.1), η οποία ισχύει μόνο για σωματίδια με ημιακέραιο ($\pm 1/2, \pm 3/2, \dots$) spin («**Φερμιόνια**»). Τα ζεύγη Cooper, σαν μποζόνια που είναι, δεν κατανέμονται σε ενεργειακές ταινίες, όπως τα ελεύθερα ηλεκτρόνια τα οποία είναι φερμιόνια, αλλά μπορούν να βρίσκονται όλα ταυτόχρονα στην κατάσταση ελάχιστης ενέργειας. Στην κατάσταση αυτή, όπως αποδεικνύει η ακριβής θεωρητική μελέτη, επέρχεται σύζευξη όλων των ζευγών, η οποία έχει ως αποτέλεσμα την κίνηση του κέντρου φορτίου τους μέσω του θετικού κρυσταλλικού πλέγματος, ως ενός μοναδικού, μεγάλου, αρνητικού φορτίου. Είναι δε προφανές, ότι οι όποιες ανωμαλίες του πλέγματος -ενώ επηρεάζουν αποφασιστικά την κίνηση ενός μεμονωμένου ηλεκτρονίου - ελάχιστα μπορούν να επηρεάσουν εκείνη του κέντρου φορτίου αυτού του τεράστιου αριθμού συζευγμένων ηλεκτρονίων. (Σημειωτέον ότι οι θερμικές ταλαντώσεις του πλέγματος έχουν περιορισμένο πλάτος λόγω της χαμηλής θερμοκρασίας, στην οποία και εμφανίζεται η υπεραγωγιμότητα.)

3.6.2.3 Εφαρμογές

Αν βραχυκυκλώσουμε τα άκρα ενός υπεραγωγίου σωληνοειδούς και επάγουμε ηλεκτρομαγνητικά (δηλ. μέσω μεταβολής της μαγνητικής ροής που το διαρρέει) ένα ρεύμα, τότε το ρεύμα αυτό θα ρέει χωρίς ενεργειακές απώλειες θεωρητικά επ' άπειρον. Φυσικά θα πρέπει να διαθέτουμε την απαραίτητη ψυκτική ισχύ προκειμένου να διατηρούμε χαμηλή την θερμοκρασία. Εάν όμως εκμεταλλευτούμε όλες τις σύγχρονες μορφές θερμομόνωσης, η εν λόγω ψυκτική ισχύς είναι πολύ μικρότερη από τις απώλειες ισχύος μέσω του φαινομένου Joule σε ένα κανονικά αγωγίμο σωληνοειδές. Ένα τέτοιο υπεραγωγίμο σωληνοειδές μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την δημιουργία πανίσχυρων μαγνητικών πεδίων (Στο εμπόριο κυκλοφορούν ήδη υπεραγωγίμα σωληνοειδή, με τα οποία μπορούν να επιτευχθούν μαγνητικά πεδία έντασης μεγαλύτερης των 10 Tesla, ενώ σε εργαστηριακές συνθήκες έχουν δημιουργηθεί πεδία μέχρι και 51 T. Σημειωτέον ότι η ένταση του γήινου μαγνητικού πεδίου δεν ξεπερνάει τα 0,000031 T στον μαγνητικό ισημερινό και τα 0,000062 T στους πόλους.).

Υπεραγώγιμα σωληνοειδή χρησιμοποιούνται ως υπερμαγνήτες σε **επιταχυντές σωματιδίων**, για την **μαγνητική θωράκιση διαστημοπλοίων** καθώς και για την συγκράτηση του πλάσματος σε πειράματα που επιδιώκουν την **ελεγχόμενη θερμοπυρηνική σύντηξη**. Τέλος η κατάρρευση της υπεραγωγιμότητας μέσω ενός μαγνητικού πεδίου έντασης μεγαλύτερης από την κρίσιμη ένταση χρησιμοποιείται για την κατασκευή διακοπών και στοιχείων μνήμης (πρόκειται για τα ονομαζόμενα **«κρύοτρα»**) σε υπερυπολογιστές.

3.6.3 Αγωγιμότητα υγρών

Υγροί αγωγοί του ηλεκτρικού ρεύματος είναι τα (**υδατικά κυρίως**) **διαλύματα των οξέων, βάσεων και αλάτων** καθώς και τα **τήγματα βάσεων, αλάτων** και μετάλλων.

Φορείς του ηλεκτρικού ρεύματος στα υγρά είναι συνήθως θετικά και αρνητικά ιόντα· εξαίρεση αποτελούν τα **τήγματα μετάλλων**, των οποίων η αγωγιμότητα οφείλεται στο γνωστό μας ηλεκτρονικό νέφος και δεν παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Για τον λόγο αυτό δεν θα την μελετήσουμε παραπέρα, οπότε όλα τα υπόλοιπα δεν αφορούν τα **τήγματα μετάλλων**.

Για την μελέτη της αγωγιμότητας των υγρών θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί η διάταξη του σχήματος 3.31, η οποία αποτελεί και την πιο απλή μορφή **βολταμέτρου**. Ένα γυάλινο δοχείο περιέχει το υπό μελέτη υγρό. Το ηλεκτρικό πεδίο, το οποίο προκαλεί την κίνηση των ιόντων, δημιουργείται με την βοήθεια των **ηλεκτροδίων**, δύο μεταλλικών αγωγών συνδεδεμένων με τους πόλους πηγής συνεχούς ρεύματος και βυθισμένων εντός του υγρού.

Το θετικό ηλεκτρόδιο καλείται **άνοδος**.

Το αρνητικό ηλεκτρόδιο καλείται **κάθοδος**.

(Οι ονομασίες αυτές βρίσκουν την φυσική τους εξήγηση, αν παρατηρήσουμε την φορά κίνησης των ηλεκτρονίων εντός των ηλεκτροδίων του σχήματος 3.31).

Σχήμα 3.31: Για την μελέτη της ηλεκτρολυτικής αγωγιμότητας.

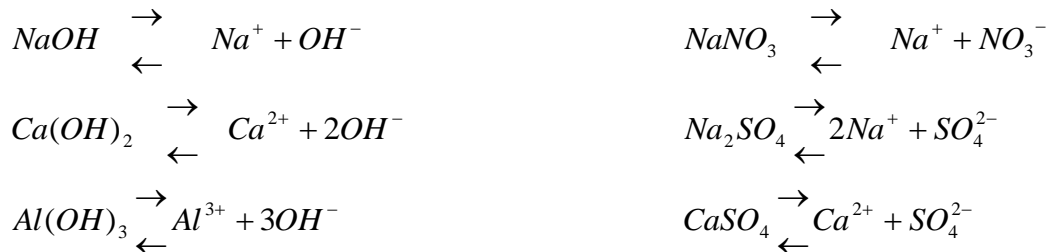
Οι φορείς του ηλεκτρικού ρεύματος προκύπτουν μέσω της διάσπασης των μορίων σε ιόντα, η οποία χαρακτηρίζεται ως **ηλεκτρολυτική διάσπαση**. Η ηλεκτρολυτική διάσπαση είναι αποτέλεσμα:

στα **τήγματα των βάσεων και των αλάτων** της διάσπασης του κρυσταλλικού πλέγματος στα αυτό αποτελούντα ιόντα μέσω αύξησης της θερμικής τους κίνησης. Έτσι για παράδειγμα το γνωστό μας κοινώς ως «αλάτι» χλωριούχο νάτριο (NaCl) διασπάται μέσω τήξης) στα ιόντα Na^+ και Cl^- .

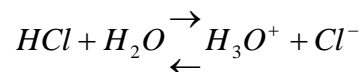
στα **υδατικά διαλύματα** (στα οποία και περιοριζόμαστε) **των βάσεων και των αλάτων** της παρεμβολής των ισχυρώς πολικών μορίων του νερού μεταξύ των ιόντων του κρυσταλλικού πλέγματος, η οποία έχει σαν αποτέλεσμα την εξασθένηση των δυνάμεων Coulomb μεταξύ των ιόντων του πλέγματος. Η εξασθένηση αυτή είναι ίση προς τον διηλεκτρικό αριθμό του διαλύτη, δηλαδή στην περίπτωση ενός **υδατικού** διαλύματος ίση προς τον παράγοντα 81. Η εξασθένηση αυτή είναι λοιπόν τόσο μεγάλη, ώστε η θερμική κίνηση των ιόντων του πλέγματος είναι, ακόμη και σε θερμοκρασίες περιβάλλοντος, ικανή να το καταστρέψει. Φυσικά με αυξανόμενη θερμοκρασία έχουμε αύξηση του **βαθμού διάσπασης**, δηλαδή του λόγου των moles που δίστανται προς τα moles που έχουν συνολικά διαλυθεί. Έτσι για παράδειγμα σε

υδατικά διαλύματα των βάσεων NaOH (υδροξείδιο του νατρίου),

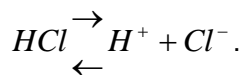
Ca(OH)₂ - (υδροξείδιο του ασβεστίου) και Al(OH)₃ (υδροξείδιο του αργιλίου) και των αλάτων NaNO₃ (νιτρικό νάτριο), Na₂SO₄ (θειικό νάτριο) και CaSO₄ (θειικό ασβέστιο) έχουμε ηλεκτρολυτική διάσπαση σύμφωνα με τις ακόλουθες αμφίδρομες εξισώσεις:



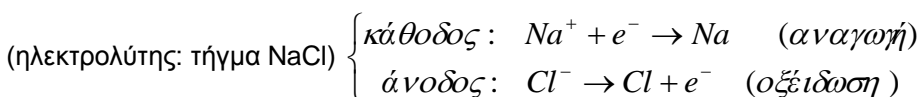
στα υδατικά διαλύματα των οξέων (σημειωτέον ότι τα οξέα είναι ομοιοπολικές ενώσεις) της απόσπασης πρωτονίων (H⁺) από τα μόρια του νερού, οπότε σχηματίζονται οξόνια (H₃O⁺) (πρόκειται ουσιαστικά για ενυδατωμένα πρωτόνια). Έτσι για παράδειγμα κατά την διάλυση υδροχλωρίου (HCl) σε νερό έχουμε διάσπαση των μορίων σύμφωνα με την ακόλουθη χημική εξίσωση:



Συνήθως, χάριν συντομίας, παραλείπεται το νερό και η διάσπαση περιγράφεται ως



Κάτω από την επίδραση του μεταξύ των ηλεκτροδίων επικρατούντος ηλεκτρικού πεδίου έχουμε μετακίνηση των ιόντων και συγκεκριμένα των μεν θετικών (ιόντα μετάλλων και υδρογόνου) προς την αρνητική κάθοδο (εξ ου και κατιόντα) των δε αρνητικών (υπολείμματα οξέων ή ομάδες υδροξυλίου) προς την θετική άνοδο (εξ ου και ανιόντα). Αν επί παραδείγματι στο βολτάμετρο του σχήματος 3.31 περιέχεται τήγμα χλωριούχου νατρίου, τα μεν κατιόντα Na⁺ οδεύουν προς την κάθοδο, όπου (με την προϋπόθεση ότι τα χρησιμοποιούμενα ηλεκτρόδια είναι χημικώς αδρανή, π.χ. ηλεκτρόδια από λευκόχρυσο / Pt) παραλαμβάνουν ηλεκτρόνια και μετατρέπονται σε ουδέτερα άτομα, τα δε ανιόντα Cl⁻ οδεύουν προς την άνοδο, όπου και αποφορτίζονται αποδίδοντας τα πλεονάζοντα ηλεκτρόνια τους:



Βλέπουμε λοιπόν ότι στο μεν εξωτερικό κύκλωμα του βολταμέτρου, έχουμε ροή ηλεκτρονίων (πράγμα λογικό αφού έχουμε μεταλλικό αγωγό) στο δε αγωγίμο υγρό ροή ιόντων. Επιπλέον, η ροή του ρεύματος συνοδεύεται από το φαινόμενο της ηλεκτρόλυσης: της έκλυσης ή εναπόθεσης συστατικών του υγρού ή προϊόντων δευτερευουσών αντιδράσεων (βλ. παρακάτω) παρά των ηλεκτροδίων. Για τον λόγο αυτό και οι ουσίες (οξέα, βάσεις και άλατα), των οποίων τα διαλύματα ή τήγματα άγουν τον ηλεκτρισμό, χαρακτηρίζονται ως ηλεκτρολύτες: μέσω ηλεκτρικού ρεύματος λυόμενες (διασπόμενες) ουσίες.

Σημειωτέον ότι τα προϊόντα της ηλεκτρόλυσης δεν είναι πάντα τα αναμενόμενα από την ηλεκτρολυτική διάσπαση. Πολλές φορές παρά των ηλεκτροδίων έχουμε δευτερεύουσες αντιδράσεις

μεταξύ των ιόντων, των ηλεκτροδίων ή/και του διαλύτη. Οι αντιδράσεις αυτές καθορίζονται από την συγκέντρωση των επιμέρους ιόντων, την φύση των ηλεκτροδίων καθώς και του διαλύτη, αποτελούν δε αντικείμενο μελέτης ενός ξεχωριστού επιστημονικού κλάδου, της *Ηλεκτροχημείας*, στα εξειδικευμένα εγχειρίδια της οποίας και παραπέμπουμε κάθε ενδιαφερόμενο αναγνώστη.

3.6.3.1 Νόμοι της ηλεκτρόλυσης (Faraday)

Ο Faraday ανακάλυψε, πειραματικά, πρώτος τους ακόλουθους νόμους της ηλεκτρόλυσης:

1^{ος} νόμος του Faraday: η μάζα m της παρά των ηλεκτροδίων ηλεκτρολυτικά ελευθερούμενης ουσίας είναι ανάλογη του φορτίου Q , το οποίο μετακινείται μέσω του ηλεκτρολύτου:

$$m = AQ = AIt \quad [3.32]$$

όπου I = ένταση του (συνεχούς εννοείται) ρεύματος

t = χρόνος ροής του ρεύματος

Η σταθερή αναλογίας A καλείται **ηλεκτροχημικό ισοδύναμο** της αντίστοιχης ουσίας και ισούται (όπως προκύπτει άμεσα από την σχέση [3.32]) με την ανά μονάδα φορτίου ελευθερούμενη μάζα. Προκειμένου να εκφράσουμε το ηλεκτροχημικό ισοδύναμο συναρτήσει θεμελιωδέστερων παραμέτρων επαναυπενθυμίζουμε τους ακόλουθους ορισμούς:

Γραμμοάτομο/μόριο (mol) = ποσότητα σε γραμμάρια ίση αριθμητικά προς το ατομικό/μοριακό βάρος.

Γραμμοίσοδύναμο = ποσότητα σε γραμμάρια ίση αριθμητικά προς το πηλίκο του ατομικού/μοριακού βάρους δια του σθένους.

Από τους δύο αυτούς ορισμούς συνάγεται, ότι σε ένα γραμμοίσοδύναμο ενός Σ – σθένους ιόντος περιέχονται N_A/Σ ιόντα, έκαστο των οποίων μεταφέρει Σ στοιχειώδη ηλεκτρικά φορτία e (N_A - αριθμός του Avogadro= αριθμός σωματιδίων σε ένα mol σωματιδίων). Άρα σε γραμμοίσοδύναμο ενός ιόντος περιέχονται πάντα $(N_A/\Sigma) \cdot \Sigma$ στοιχειώδη ηλεκτρικά φορτία e . Οπότε

η ελευθέρωση ηλεκτρολυτικής ποσότητας ίσης με ένα γραμμοίσοδύναμο συνεπάγεται πάντα την μετακίνηση φορτίου

$$F = N_A e = 96485 C / mol \quad (:σταθερή Faraday)$$

ανεξάρτητα από το είδος της ουσίας. (2^{ος} νόμος του Faraday)

Εάν λοιπόν στην σχέση [3.32] θέσουμε την μάζα m ίση προς ένα γραμμοίσοδύναμο τότε το φορτίο θα ισούται με την σταθερή F του Faraday, οπότε για το ηλεκτροχημικό ισοδύναμο θα προκύψει:

$$[3.32] \rightarrow \frac{\text{ατομική μάζα}}{\Sigma} = A \cdot F \Rightarrow A = \frac{\text{ατομική μάζα}}{\Sigma \cdot F} \quad [3.33]$$

(A = ηλεκτροχημικό ισοδύναμο)

Αντικαθιστώντας την σχέση αυτή (η οποία -σημειωτέον- έχει προκύψει από τον συνδυασμό των δυο νόμων του Faraday) στην εξίσωση [3.32] παίρνουμε την ακόλουθη σχέση, η οποία αποτελεί την ποσοτική διατύπωση του **γενικευμένου νόμου του Faraday:**

$$m = \frac{\text{ατομική μάζα}}{\Sigma \cdot F} Q = \frac{\text{ατομική μάζα}}{\Sigma \cdot F} I \cdot t \quad [3.34]$$

όπου m = μάζα της παρά των ηλεκτροδίων ηλεκτρολυτικά ελευθερούμενης ουσίας

Σ = σθένος του ιόντος της ουσίας πριν την αποφόρτιση του παρά των ηλεκτροδίων

F = σταθερή του Faraday

Κλείνοντας την ενότητα των νόμων της ηλεκτρόλυσης σημειώνουμε, ότι από τον πρώτο νόμο ([3.32]) του Faraday προκύπτει άμεσα η ακόλουθη πρόταση, η οποία αναφέρεται πολλαπλώς (και στην διεθνή βιβλιογραφία) ως ξεχωριστός νόμος:

Οι μάζες m_1 και m_2 των ουσιών, οι οποίες ελευθερώνονται κατά την ηλεκτρόλυση δύο διαφορετικών ηλεκτρολυτών μέσω της διέλευσης του ίδιου ηλεκτρικού φορτίου συμπεριφέρονται όπως τα ηλεκτροχημικά τους ισοδύναμα:

$$m_1 / m_2 = A_1 / A_2 \quad [3.35]$$

3.6.3.2 Ηλεκτρολυτική αγωγιμότητα

Χωρίς να υπεισέλθουμε σε αυστηρές ποσοτικές σχέσεις, οι οποίες θα μας απομάκρυναν αποφασιστικά από τους στόχους του παρόντος συγγράμματος, θα θέλαμε να κάνουμε κάποιες ποιοτικές επισημάνσεις, όσον αφορά στην εξάρτηση της ηλεκτρολυτικής αγωγιμότητας από διάφορους παράγοντες.

Προς τον σκοπό αυτό υποθέτουμε, ότι μέσα σε ένα ηλεκτρολυτικό διάλυμα επικρατεί ένα ομογενές ηλεκτροστατικό πεδίο. (Ένα τέτοιο πεδίο θα μπορούσε να δημιουργηθεί μεταξύ – και μακριά από τα άκρα τους- δύο αρκούντως εκτεταμένων, επιπέδων και παραλλήλων ηλεκτροδίων). Τότε κάθε ιόν δέχεται την επίδραση μιας σταθερής δύναμης $F = Q_{\text{ion}} E$, όπου E είναι η ένταση του πεδίου και Q_{ion} το φορτίο του ιόντος. Κάτω από την επίδραση της σταθερής αυτής δύναμης το ιόν δεν διαγράφει επιταχυνόμενη κίνηση, αλλά αποκτά μια σταθερή οριακή ταχύτητα u . Το γεγονός αυτό οφείλεται στην δύναμη τριβής, η οποία αναπτύσσεται μεταξύ ιόντος και υγρού και η οποία είναι (Stokes) ανάλογη προς την ταχύτητα του ιόντος. Έτσι η δύναμη τριβής αυξάνει αρχικά με αυξανόμενη ταχύτητα, έως ότου γίνει ίση και αντίθετη προς την υπό του πεδίου ασκούμενη δύναμη F , οπότε επέρχεται κατάσταση δυναμικής ισορροπίας και η ταχύτητα του ιόντος αποκτά την οριακή της τιμή. Επειδή τώρα η δύναμη F είναι ανάλογη προς την ένταση E του πεδίου (βλ. παραπάνω), ανάλογη προς αυτήν θα είναι και η **οριακή ταχύτητα u** :

$$u = \kappa E \quad [3.36]$$

όπου $\kappa = \eta$ ευκινησία του ιόντος.

Βέβαια στην περίπτωση ενός ηλεκτρολύτου έχουμε δύο είδη ιόντων, τα οποία συμμετέχουν στην μεταφορά φορτίου, οπότε στην θέση της [3.36] θα έχουμε τις ακόλουθες δύο εξισώσεις:

$$u_+ = \kappa_+ E \quad [3.36\alpha]$$

$$u_- = \kappa_- E \quad [3.36\beta]$$

Σημειωτέον ότι οι ευκινησίες κ_+ και κ_- είναι γενικά διαφορετικές μεταξύ τους. Εξάλλου στις παραπάνω σχέσεις αναφερόμαστε στις *μέσες* τιμές των οριακών ταχυτήτων, οι οποίες δεν συμπίπτουν κατ' ανάγκη με τις στιγμιαίες ταχύτητες των ιόντων.

Εάν τώρα συμβολίσουμε με n_+ και n_- τις αριθμητικές πυκνότητες, και με Σ_+ και Σ_- τα σθένη των κατιόντων και ανιόντων αντίστοιχα, τότε παίρνουμε τις ακόλουθες πυκνότητες ρεύματος (βλ. κεφ. 3.1.1).

[3.36α]

$$j_+ = e \sum_+ n_+ u_+ = e \sum_+ n_+ \kappa_+ E =: \gamma_+ E$$

[3.37]

[3.36β]

$$j_- = -e \sum_- n_- u_- = -e \sum_- n_- \kappa_- E =: \gamma_- E$$

όπου γ_+ και γ_- οι ειδικές αγωγιμότητες των κατιόντων και ανιόντων, αντίστοιχα.

Για την ολική επομένως πυκνότητα ρεύματος παίρνουμε:

$$j = j_+ + j_- = e(\sum_+ n_+ \kappa_+ - \sum_- n_- \kappa_-) E =: \gamma E \quad [3.38]$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι η (ειδική) αγωγιμότητα ενός ηλεκτρολύτου είναι ανάλογη προς τα σθένη, τις αριθμητικές πυκνότητες και τις ευκινήσεις των κατιόντων και ανιόντων.

Για τον λόγο αυτό η αγωγιμότητα των ηλεκτρολυτών εξαρτάται επιπλέον από την συγκέντρωση του συγκεκριμένου ηλεκτρολυτικού διαλύματος καθώς και τον βαθμό διάστασης, μια και οι δύο αυτοί παράγοντες επωάζουν τόσο τις αριθμητικές πυκνότητες n_+ και n_- , όσο και τις ευκινήσεις κ_+ και κ_- . Μάλιστα η ακριβής εξάρτηση είναι αρκετά πολύπλοκη. Εκείνο, το οποίο ισχύει γενικά, είναι, ότι

η ηλεκτρική

αγωγιμότητα των ηλεκτρολυτών αυξάνει με αυξανόμενη θερμοκρασία.

Το γεγονός αυτό οφείλεται κυρίως στην αύξηση της ευκινήσις των ιόντων λόγω αύξησης της κινητικότητάς τους (μια και η θερμική κίνηση γίνεται εντονότερη) καθώς και λόγω ελάττωσης του συντελεστού ιξώδους του διαλύτη.

3.6.3.3 Εφαρμογές της ηλεκτρόλυσης

α) Βιομηχανική παραγωγή διαφόρων ουσιών, όπως **μετάλλων** (π.χ. Αλουμίνιο/Al, μαγνήσιο/Mg, νάτριο / Na), **αμετάλλων** (π.χ. υδρογόνο/H₂, οξυγόνο/O₂, χλώριο/Cl₂), ακόμη και διαφόρων **ανόργανων και οργανικών ενώσεων** (π.χ. υδροξείδιο του νατρίου/NaOH, υδροξείδιο του καλίου / KOH).

β) Βιομηχανικός καθαρισμός διαφόρων **μετάλλων από προσμίξεις**. Έτσι για παράδειγμα μέσω ηλεκτρόλυσης διαλύματος θειικού χαλκού ($CuSO_4 \leftrightarrow Cu^{2+} + SO_4^{2-}$) με άνοδο ηλεκτρόδιο από χημικώς παρασκευασμένο «μαύρο χαλκό», καθαρότητας 94-97%, και κάθοδο από λεπτή χάλκινη λαμαρίνα, παρασκευάζεται «καθαρός χαλκός» με ποσοστό καθαρότητας 99,95%. Συγκεκριμένα στην άνοδο τα άτομα του χαλκού αποβάλλουν δύο ηλεκτρόνια και εισέρχονται στο διάλυμα με την μορφή ιόντων Cu²⁺. Στην κάθοδο ιόντα Cu²⁺ παραλαμβάνουν δύο ηλεκτρόνια και καθιζάνουν ως κόκκινο, πυκνό ίζημα.

γ) Επιμετάλλωση αντικειμένων με σκοπό την προστασία τους ή την καλαισθητοποίηση τους. Το προς επικάλυψη αντικείμενο παίζει τον ρόλο της καθόδου του βολταμέτρου. Η άνοδος αποτελείται από το επικαλύπτων μέταλλο, ενώ ο ηλεκτρολύτης από διάλυμα άλατος του μετάλλου. Ως υλικά ανόδου χρησιμοποιούνται συνήθως τα μέταλλα νικέλιο / Ni, χαλκός / Cu, χρώμιο / Cr, ψευδάργυρος / Zn, χρυσός / Au και άργυρος / Ag, οπότε η διαδικασία επιμετάλλωσης χαρακτηρίζεται αντίστοιχα ως *επινικέλωση, επιχάλκωση, επιχρωμίωση, επιψευδαργύρωση, επιχρύσωση και επαργύρωση*.

γ) Γαλβανοπλαστική (από τον L. Galvani) ονομάζεται η αναπαραγωγή αντιγράφων διαφόρων αντικειμένων, όπως μεταλλίων, νομισμάτων, τυπογραφικών πλακών, δίσκων γραμμοφώνου, με τον

ακόλουθο τρόπο: το κέρινο ομοίωμα του προς αντιγραφή αντικειμένου, αφού επικαλυφθεί με λεπτό στρώμα γραφίτη προκειμένου να καταστεί αγωγίμο, χρησιμοποιείται ως κάθοδος ενός βολταμέτρου. Η άνοδος αποτελείται από κάποιο μέταλλο (π.χ. χαλκό) και ο ηλεκτρολύτης από το διάλυμα του αντιστοίχου άλατος, όπως και κατά την επιμετάλλωση. Αφού ηλεκτρολύσουμε, έως ότου το ομοίωμα (κάθοδος) επικαλυφθεί με στρώμα επιθυμητού πάχους, απομακρύνουμε το ομοίωμα μέσω θέρμανσης και παίρνουμε το αντίγραφο.

δ) Ηλεκτρολυτική στίλβωση επιφανειών εγγυάται πολύ λείες επιφάνειες. Το προς λείανση μεταλλικό αντικείμενο χρησιμοποιείται ως άνοδος γαλβανομέτρου. Οι ανωμαλίες της επιφάνειας απομακρύνονται (με την μορφή κατιόντων τα οποία διαλύονται στον ηλεκτρολύτη) κατά προτίμηση, λόγω του αυξημένου πεδίου, το οποίο συνεπάγονται. Σημειωτέον, ότι με τον τρόπο αυτό καθαρίζονται και οι **δυσπρόσιτες** **οπές μεταλλικών** εξαρτημάτων από τα υπολείμματα διάνοιξής τους.

ε) Ανοδική οξειδωση ονομάζεται η επικάλυψη της επιφάνειας ενός μεταλλικού αντικειμένου, το οποίο παίζει τον ρόλο της ανόδου του βολταμέτρου, μέσω στρώματος οξειδίου, με την βοήθεια του παρά της ανόδου εκλυόμενου οξυγόνου. Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται, επί παραδείγματι, στην περίπτωση του αλουμινίου, το οποίο, αφού επικαλυφθεί με στρώμα οξειδίου πάχους 0,02 mm, καθίσταται άκρως ανθεκτικό έναντι των καιρικών συνθηκών, του θαλασσινού ύδατος, πολλών οξέων και βάσεων. Μέσω ανοδικής οξειδωσης επιτυγχάνεται εξάλλου η ηλεκτρική μόνωση καλωδίων εξ αλουμινίου.

3.6.3.4 Ηλεκτροχημικά στοιχεία – τάση επαφής μεταξύ μετάλλου και ηλεκτρολύτη

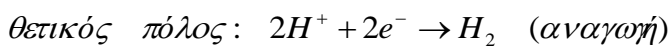
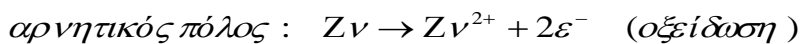
Όταν βυθίσουμε ένα μέταλλο μέσα σ' έναν ηλεκτρολύτη, τότε ορισμένα από τα θετικά ιόντα του κρυσταλλικού πλέγματος του μετάλλου μεταβαίνουν (π.χ. λόγω θερμικής κίνησης) στο διάλυμα, αφήνοντας πίσω τους τόσα ελεύθερα ηλεκτρόνια, όσα και το σθένος τους. Το γεγονός αυτό έχει σαν αποτέλεσμα ο μεν ηλεκτρολύτης να φορτίζεται θετικά το δε μέταλλο αρνητικά. Έτσι μεταξύ μετάλλου και διαλύματος αρχίζει να δημιουργείται μια τάση, η οποία αντιτίθεται στην παραπέρα μετάβαση θετικών ιόντων από το μέταλλο στο διάλυμα. Το μέγεθος της (**ηλεκτρολυτικής**, όπως - ανεπιτυχώς κατά την γνώμη μας - συνήθως ονομάζεται στην ελληνική βιβλιογραφία) **τάσεως** αυτής εξαρτάται από το είδος του μετάλλου και του ηλεκτρολύτη, την συγκέντρωση ιόντων (λόγω ηλεκτρολυτικής διάστασης) στον ηλεκτρολύτη και την θερμοκρασία. Σε όσες περιπτώσεις δεν έχουμε αποφόρτιση του μετάλλου μέσω κάποιας αναγωγικής αντίδρασης, η τάση αυτή λαμβάνει πολύ σύντομα μια μέγιστη τιμή, η οποία επιφέρει κατάσταση δυναμικής ισορροπίας: ο αριθμός των εισερχομένων στο διάλυμα ιόντων ισούται με τον αριθμό των ιόντων, τα οποία επιστρέφουν εις αυτό, οπότε η παραπέρα διάλυση σταματάει. Αυτός είναι π.χ. ο λόγος, για τον οποίο τα μεν μέταλλα είναι ουσιαστικά αδιάλυτα στο νερό τα δε άλατα τους διαλυτά: στην περίπτωση των αλάτων, τα οποία είναι ιοντικές ενώσεις, διαλύονται ταυτόχρονα τόσο τα θετικά όσο και τα αρνητικά ιόντα, εκ των οποίων αποτελούνται, οπότε δεν δημιουργείται η παραπάνω **τάση επαφής**.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, αν βυθίσουμε δύο διαφορετικά μεταλλικά ηλεκτρόδια σ' ένα ηλεκτρολυτικό διάλυμα, τότε μεταξύ έκαστου ηλεκτροδίου και του ηλεκτρολύτη αναπτύσσεται η αντίστοιχη τάση επαφής. Συνδέοντας τα δύο ηλεκτρόδια με ένα βολτάμετρο μπορούμε να μετρήσουμε την διαφορά των δύο τάσεων επαφής. Η τάση αυτή μεταξύ των δύο ηλεκτροδίων έχει σαν αποτέλεσμα την διέλευση ηλεκτρικού ρεύματος μέσω ενός αγωγού, ο οποίος συνδέει τα δύο ηλεκτρόδια μεταξύ τους. Επομένως

μια **διάταξη**
αποτελούμενη από δύο διαφορετικά μέταλλα («μεταλλικά ηλεκτρόδια») βυθισμένα εντός ενός ηλεκτρολύτη λειτουργεί ως ηλεκτρική πηγή και ονομάζεται **βολταϊκό στοιχείο** (κοινώς **μπαταρία**).

Η παραπάνω ονομασία καθιερώθηκε προς τιμήν του ιταλού φυσικού Volta, ο οποίος κατασκεύασε περί το 1800 τις πρώτες ισχυρές ηλεκτρικές πηγές, χρησιμοποιώντας πλάκες χαλκού/Cu και ψευδαργύρου/Zn βυθισμένες εντός αραιού διαλύματος θειικού οξέος/H₂SO₄. Πρόκειται για το λεγόμενο **στοιχείο Volta** : Ο ψευδάργυρος είναι ευδιαλυτότερος του χαλκού με αποτέλεσμα την δημιουργία τάσεως μεταξύ των δύο ηλεκτροδίων, οποία ανέρχεται σε ένα περίπου Volt. Όταν συνδέσουμε μέσω ενός αγωγού τα δύο ηλεκτρόδια η τάση αυτή οδηγεί τα επί της πλακός του ψευδαργύρου συγκεντρωμένα ηλεκτρόνια προς εκείνη του χαλκού. Έχουμε λοιπόν τότε μια ηλεκτρική πηγή ηλεκτρεγερτικής δύναμης ενός περίπου Volt, αρνητικός πόλος της οποίας είναι ο ψευδάργυρος και θετικός ο χαλκός.

Η κατά τη λειτουργία του στοιχείου αποδιδόμενη ηλεκτρική ενέργεια, προέρχεται από τη χημική αντίσταση, η οποία ελευθερώνεται κατά τις παρά των ηλεκτροδίων εξελισσόμενες χημικές (οξειδοαναγωγικές ακριβέστερα) αντιδράσεις:



Στα βολταϊκά λοιπόν **στοιχεία έχουμε μετατροπή χημικής σε ηλεκτρική ενέργεια** εξού και ο χαρακτηρισμός τους και ως **ηλεκτροχημικά στοιχεία**

Η ανωτέρω επιδράσεις έχουν σαν αποτέλεσμα την σταδιακή φθορά του ηλεκτροδίου εκ ψευδαργύρου και τη μετατροπή του αρχικού διαλύματος του θειικού οξέως (2H⁺, SO₄²⁻) σε διάλυμα θειικού ψευδαργύρου (Zn²⁺, SO₄²⁻).

3.6.3.5 Πόλωση των ηλεκτροδίων

Στο στοιχείο του Volta μέρος του ελευθερουμένου υδρογόνου προσφυάται επί του χάλκινου ηλεκτροδίου, το οποίο επικαλύπτεται κατ' αυτό τον τρόπο με ένα πολύ λεπτό στρώμα αερίου υδρογόνου. Το *μονωτικό* αυτό στρώμα εμποδίζει την αποφόρτιση των ιόντων υδρογόνου τα οποία συσσωρευόμενα ελαττώνουν την ΗΕΔ του στοιχείου, μια και δημιουργούν εντός του ηλεκτρολύτου ένα πεδίο, φοράς αντίθετης προς την αρχικώς επικρατούσα. Το γεγονός αυτό έχει ως αποτέλεσμα την σταδιακή μείωση του ρεύματος, το οποίο και μηδενίζεται μέσα σε λίγο χρόνο. Σημειωτέον ότι το ρεύμα επανέρχεται στην αρχική του τιμή, αν αναταράξουμε καλά το στοιχείο, για να ξαναμειωθεί στην συνέχεια, οπότε το φαινόμενο επαναλαμβάνεται εκ νέου.

Η παραπάνω αλλοίωση της φύσεως της επιφάνειας επαφής μεταξύ ηλεκτροδίων και ηλεκτρολύτη καλείται **πόλωση των ηλεκτροδίων** (και δεν πρέπει να συγχέεται επ' ουδενί με την *πόλωση των διηλεκτρικών*).

Η πόλωση των ηλεκτροδίων έχει ως αποτέλεσμα την μεταβολή της αρχικώς μεταξύ των ηλεκτροδίων επικρατούσας τάσης. Στην περίπτωση δε ενός βολταϊκού στοιχείου μέσω της πολώσεως των ηλεκτροδίων δημιουργείται αντιηλεκτρεγερτική δύναμη, η οποία τείνει να μηδενίσει την αρχικώς μεταξύ των ηλεκτροδίων επικρατούσα τάση. Ως εκ τούτου η πόλωση των ηλεκτροδίων ενός βολταϊκού στοιχείου είναι ανεπιθύμητη και εμποδίζεται με **αντιπολωτικά μέσα**: Επειδή συνήθως έχουμε έκλυση υδρογόνου παρά της ανόδου, εμποδίζουμε την πόλωση περιβάλλοντας την άνοδο με κάποιο ισχυρό οξειδωτικό μέσο (π.χ. MnO₂), το οποίο δεσμεύει το υδρογόνο. Με τον τρόπο αυτό μεταβάλλουμε ένα αρχικά **ασταθές**

ηλεκτροχημικό στοιχείο σε σταθερό.

Πόλωση των ηλεκτροδίων έχουμε και **κατά την ηλεκτρόλυση**, όπου τα αρχικώς συνήθως όμοια ηλεκτρόδια πολώνονται μετά από λίγο, οπότε καθίστανται ανόμοια. Δημιουργείται έτσι ένα ηλεκτροχημικό στοιχείο, του οποίου η **ΗΕΔ** έχει φορά αντίθετη προς την **ΗΕΔ** της πηγής, η οποία παρέχει την για την ηλεκτρόλυση απαιτούμενη ηλεκτρική ισχύ. Η εν λόγω πόλωση των ηλεκτροδίων του βολταμέτρου έχει ως αποτέλεσμα την μείωση του ρεύματος και είναι ως εκ τούτου επίσης ανεπιθύμητη.

Το ανεπιθύμητο - στην περίπτωση ενός βολταϊκού στοιχείου ή ενός βολταμέτρου- φαινόμενο της πόλωσης των ηλεκτροδίων, επιτρέπει από την άλλη την δημιουργία πολύ χρήσιμων, επαναφορτιζομένων ηλεκτρικών πηγών, οι οποίες χαρακτηρίζονται ως **συσσωρευτές**: Δύο αρχικώς όμοια ηλεκτρόδια καθίστανται εκ των υστέρων ανόμοια, μέσω του φαινομένου της πολώσεως το οποίο προκαλείται από προϊόντα της ηλεκτρόλυσης του ηλεκτρολύτη, μέσα στον οποίο είναι βυθισμένα τα δύο ηλεκτρόδια. Η εν λόγω ηλεκτρόλυση πραγματοποιείται κατά την φόρτιση του συσσωρευτή μέσω σύνδεσής του με εξωτερική ηλεκτρική πηγή, οπότε μέσω των συγκεκριμένων (οξειδοαναγωγικών) χημικών αντιδράσεων, οι οποίες προκαλούν την πόλωση, έχουμε μετατροπή ηλεκτρικής ενέργειας σε χημική. Η παραπάνω πόλωση των ηλεκτροδίων έχει ως αποτέλεσμα την δημιουργία ενός συστήματος δύο ανομοίων ηλεκτροδίων βυθισμένων εντός του ίδιου ηλεκτρολύτη, δηλαδή μιας ηλεκτροχημικής πηγής. Κατά την εκφόρτιση του συσσωρευτή μέσω σύνδεσης με εξωτερικό κύκλωμα έχουμε μετατροπή της αποταμειευθείσας χημικής ενέργειας σε ηλεκτρική, μέσω αντίστροφων χημικών αντιδράσεων, οι οποίες τείνουν να εξομοιώσουν εκ νέου τα ηλεκτρόδια. Η αναστρεψιμότητα αυτή των (ηλεκτρο-)χημικών αντιδράσεων είναι και η κύρια διαφορά μεταξύ ενός ηλεκτροχημικού στοιχείου και ενός συσσωρευτή.

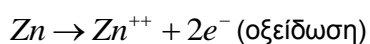
Τα παραπάνω θα γίνουν περισσότερο κατανοητά στην επόμενη παράγραφο, όπου παραθέτουμε μερικά αντιπροσωπευτικά

Παραδείγματα ηλεκτροχημικών στοιχείων και συσσωρευτών:

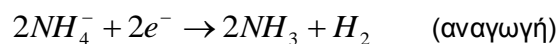
α) Το ξηρό στοιχείο του εμπορίου αποτελεί παραλλαγή του στοιχείου του Leclanche. Ως ηλεκτρολύτης χρησιμοποιείται υδατικό διάλυμα χλωριούχου αμμωνίου (NH_4Cl), το οποίο αναμιγνύεται με ρινίσματα ξύλου προκειμένου να καταστεί παχύρρευστο («ξηρό»), ώστε η χρήση του στοιχείου να μην συνοδεύεται από διαρροές. Μέσα στον ηλεκτρολύτη είναι βυθισμένο το θετικό ηλεκτρόδιο (βλ. σχ. 3.33), το οποίο αποτελείται από άνθρακα (C), και περιβάλλεται από αντιπολωτικό υπεροξείδιο του μαγγανίου (MnO_2). Το αρνητικό ηλεκτρόδιο αποτελείται από ψευδάργυρο (Zn) και είναι διαμορφωμένο έτσι, ώστε να αποτελεί συγχρόνως και το περίβλημα του στοιχείου.

Παρά των ηλεκτροδίων λαμβάνουν χώρα οι ακόλουθες χημικές αντιδράσεις:

αρνητικό ηλεκτρόδιο:



θετικό ηλεκτρόδιο:



Οι παραπάνω αντιδράσεις έχουν ως αποτέλεσμα την σταδιακή μετατροπή του διαλύματος του χλωριούχου αμμωνίου (NH_4^{+} , Cl^{-}) σε διάλυμα χλωριούχου ψευδαργύρου (Zn^{++} , 2Cl^{-}).

Η ΗΕΔ του στοιχείου ανέρχεται σε 1,5 Volts.

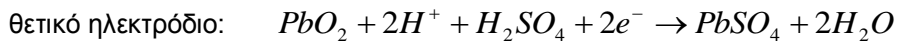
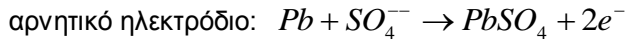
β) Ο συσσωρευτής μολύβδου αποτελεί την πιο διαδεδομένη μορφή συσσωρευτή. Αποτελείται από κατάλληλο δοχείο, το οποίο περιέχει διάλυμα θειικού οξέος (H_2SO_4), εντός του οποίου είναι βυθισμένα δύο συστήματα πλακών, από μόλυβδο (Pb) και διοξείδιο του μολύβδου (PbO_2), τα οποία αποτελούν το αρνητικό και θετικό ηλεκτρόδιο αντίστοιχα.



Σχήμα 3.34: Εκφόρτιση και φόρτιση συσσωρευτού μολύβδου σχηματικά. Το στρώμα του θειικού μολύβδου (PbSO_4) σχηματίζεται κατά την εκφόρτιση και απομακρύνεται κατά την φόρτιση.

Όταν τα δύο ανόμοια ηλεκτρόδια (πόλοι) του συσσωρευτή συνδεθούν με εξωτερικό κύκλωμα (βλ. σχ.3.34), ο συσσωρευτής λειτουργεί ως πηγή ηλεκτρικού ρεύματος, κατά την διάρκεια του οποίου πραγματοποιούνται οι ακόλουθες χημικές αντιδράσεις παρά των ηλεκτροδίων:

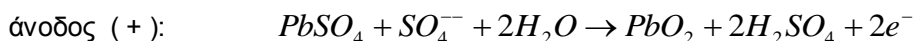
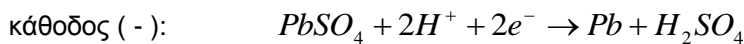
εκφόρτιση:



Βλέπουμε λοιπόν, ότι τα δύο αρχικώς ανόμοια ηλεκτρόδια τείνουν να εξομοιωθούν κατά την εκφόρτιση, ενώ συγχρόνως δαπανάται θεϊκό οξύ με αποτέλεσμα την αραιώση του διαλύματος.

Αν συνδέσουμε τον συσσωρευτή με εξωτερική πηγή (βλ. σχ. 3.34), οι παραπάνω χημικές αντιδράσεις αντιστρέφονται, με αποτέλεσμα την αποθήκευση μέρους της προσφερόμενης από την πηγή ηλεκτρικής ενέργειας υπό μορφή χημικής:

φόρτιση:



Λόγω των παραπάνω αντιδράσεων, τα ηλεκτρόδια καθίστανται εκ νέου ανόμοια, ενώ παράγεται θεϊκό οξύ, οπότε το διάλυμα ξαναπυκνώνει.

Ένα από τα βασικότερα χαρακτηριστικά ενός συσσωρευτή είναι η **χωρητικότητα** του, το συνολικό δηλαδή ηλεκτρικό φορτίο το οποίο μπορεί να αποδώσει ένας πλήρως φορτισμένος συσσωρευτής. Η χωρητικότητα μετράται σε **αμπερώρια** ($1Ah=1A \cdot 3600s = 3600c$). Προκειμένου να αποφεύγονται βλάβες, οι οποίες μειώνουν την διάρκεια ζωής ενός συσσωρευτή, δεν πρέπει να εκμεταλλευόμαστε πέραν του 10 ~ 12% της χωρητικότητας του.

3.6.4 Θερμοηλεκτρικό φαινόμενο

Προκειμένου να απομακρύνουμε ένα «ελεύθερο» ηλεκτρόνιο από ένα μέταλλο πρέπει να του προσφέρουμε το λεγόμενο **έργο εξόδου**

Το έργο εξόδου εξαρτάται από την φύση του μετάλλου (βλ. Πίνακα 3.6.4) και μπορεί να προσφερθεί με διάφορους τρόπους:

α) με μορφή ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας, οπότε το φαινόμενο της εξόδου χαρακτηρίζεται ως **φωτοεκπομπή**.

β) με θέρμανση → **θερμιονική εκπομπή**.

γ) με επίδραση ηλεκτρικού πεδίου → εκπομπή πεδίου

δ) με βομβαρδισμό σωματιδίων → εκπομπή κρούσεως.

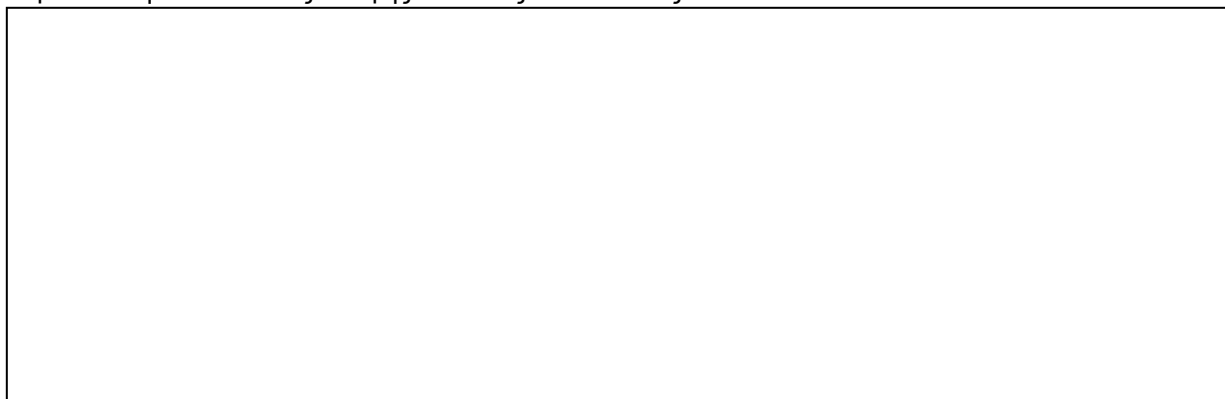
Εκτός από τους παραπάνω «άμεσους» υπάρχει και ένας «έμμεσος» τρόπος να απομακρύνουμε

Πίνακας 3.6.4: Έργο εξόδου διαφόρων μετάλλων

Αργυρος (Ag) 4,05 eV

ελεύθερα ηλεκτρόνια από ένα μέταλλο ή μεταλλικό κράμα: να το φέρουμε σε επαφή με ένα άλλο μέταλλο ή μεταλλικό κράμα. Συγκεκριμένα όταν δύο μέταλλα ή μεταλλικά κράματα έλθουν σε επαφή, τότε πολλά από ελεύθερα ηλεκτρόνια, τα οποία μεταπηδούν - λόγω στατιστικώς αυξημένης θερμικής

ενέργειας από το μέταλλο με το μικρότερο σ' εκείνο με το μεγαλύτερο έργο εξόδου, «παγιδεύονται σ' αυτό: πολύ πιο δύσκολα αποκτούν τόση κινητική ενέργεια, όση απαιτείται για την υπερνίκηση του αυξημένου έργου εξόδου. Εξαιτίας του γεγονότος τούτου, το μέταλλο φορτίζεται θετικά και το άλλο αρνητικά. Έτσι μεταξύ των δύο μετάλλων εμφανίζεται διαφορά δυναμικού, η λεγόμενη τάση επαφής. Παρ' όλα ταύτα, αν συνδέσουμε τα δύο μέταλλα σε ένα κλειστό κύκλωμα (→ δύο επαφές / βλ. σχ.3.35) δεν έχουμε ηλεκτρικό ρεύμα επειδή οι δύο τάσεις επαφής είναι ίσες και αντίθετες.



Σχήμα 3.35: Όταν οι δύο επαφές έχουν την ίδια θερμοκρασία (αριστερά) δεν έχουμε ρεύμα, αν όμως οι δύο επαφές έχουν διαφορετική θερμοκρασία (δεξιά), τότε έχουμε ρεύμα εξαιτίας της θερμοηλεκτρικής τάσης.

Γενικεύοντας παίρνουμε το νόμο του Volta:

Σε κάθε κλειστό κύκλωμα αποτελούμενο από διάφορα μέταλλα ή κράματα μετάλλων το άθροισμα των τάσεων επαφής ισούται με μηδέν, όταν όλες οι επαφές έχουν την ίδια θερμοκρασία.

Σημειωτέον, ότι η παραπάνω πρόταση συμφωνεί και με την αρχή διατηρήσεως της ενέργειας μια και το κύκλωμα δεν περιλαμβάνει πηγή ενέργειας οποιασδήποτε μορφής, οπότε - αν διαρρέετο από ρεύμα-θα αποτελούσε αεικίνητο πρώτου είδους.

Αν οι επαφές έχουν διαφορετικές θερμοκρασίες (βλ. σχ.3.35), τότε η τάση της θερμότερης επαφής είναι μεγαλύτερη: στην εν λόγω περιοχή τα ελεύθερα ηλεκτρόνια έχουν αυξημένη κινητική ενέργεια, έτσι αυξάνει ο αριθμός των ελεύθερων ηλεκτρονίων, τα οποία μεταπηδούν και παγιδεύονται στο μέταλλο με το μεγαλύτερο έργο εξόδου. Μεταξύ των δύο επαφών επικρατεί διαφορά δυναμικού, η οποία καλείται θερμοηλεκτρική τάση και ισούται με την διαφορά των δύο τάσεων επαφής. Λόγω της θερμοηλεκτρικής αυτής τάσης το κύκλωμα των δύο μετάλλων διαρρέεται από ρεύμα και καλείται θερμοστοιχείο.

Το φαινόμενο της εμφάνισης της θερμοηλεκτρικής τάσης μεταξύ των επαφών δύο διαφορετικών μετάλλων, όταν οι επαφές έχουν διαφορετική θερμοκρασία, καλείται **θερμοηλεκτρικό φαινόμενο** ή **φαινόμενο Seebeck**.

Η θερμοηλεκτρική τάση U_g εξαρτάται μόνο από την θερμοκρασία των δύο επαφών και το ζεύγος των μετάλλων. Για πολλά δε πρακτικά ενδιαφέροντα ζεύγη μετάλλων και θερμοκρασιακές περιοχές (βλ. Πίνακα 3.6.4.β) η εξάρτηση της θερμοηλεκτρικής τάσης από την θερμοκρασία είναι (σχεδόν) γραμμική

$$U_g = \kappa \Delta T \quad [3.39]$$

Ο συντελεστής κ (το πηλίκο δηλαδή της θερμοηλεκτρικής τάσης προς την διαφορά θερμοκρασίας ΔT μεταξύ των δύο επαφών) καλείται **θερμοδύναμη**.

Πίνακας 3.6.4.β: Τιμές θερμοδύναμης διαφόρων θερμοστοιχείων

Θερμοστοιχείο	κ ($\mu\text{V}/\text{K}$)	ΔT (°C)	μέγιστη θερμοκρασία επαφής
Χαλκός/Κονσταντάνη	42,5	0 ~ 100	+400 °C
Σίδηρος/Κονσταντάνη	53,7	0 ~ 200	+700 °C
Νίκελιο/Χρωμιονικέλιο	41,3	0 ~ 1000	+1000 °C
Πλάτινα/Πλατίνα-Ρόδιο	9,6	0 ~ 1000	+1300 °C
Ιρίδιο/Ιρίδιο - Ρήνιο	17	0 ~ 2000	+2000 °C

Εφαρμογές: Τα θερμοστοιχεία χρησιμοποιούνται για την μέτρηση θερμοκρασιών μεταξύ - 200 °C και +2000 °C (Για υψηλότερες θερμοκρασίες χρησιμοποιούνται θερμοστοιχεία από Ιρίδιο, Βολφράμιο και Ρήνιο). Προς τον σκοπό αυτό χρησιμοποιούνται θερμοστοιχεία με την μορφή δύο λεπτών, κολλημένων στα άκρα τους συρμάτων. Το ένα άκρο κρατείται σε σταθερή, γνωστή θερμοκρασία (π.χ. εντός τηκομένου πάγου), ενώ το άλλο φέρεται σε επαφή με το αντικείμενο, του οποίου την θερμοκρασία θέλουμε να μετρήσουμε. Πλεονέκτημα τέτοιων θερμομέτρων είναι η μεγάλη τους ευαισθησία και η μικρή αδράνεια ένδειξης, η οποία οφείλεται στην μικρή τους θερμοχωρητικότητα. Ιδιαίτερα υψηλή θερμοδύναμη παρουσιάζουν *ημιαγώγιμα* θερμοστοιχεία. Επί παραδείγματι θερμοστοιχεία από τελλουρίδιο του μολύβδου και αντιμονίδιο του ψευδαργύρου έχουν θερμοδύναμη 180 $\mu\text{V}/\text{K}$ και μπορούν να χρησιμοποιηθούν μέχρι και τους 600 °C. Τα θερμοστοιχεία αυτά χρησιμοποιούνται και ως **πηγές τάσης** σε δορυφόρους και καλούνται **θερμογεννήτριες**. Ο βαθμός απόδοσής τους είναι περίπου 8%.

3.6.4.1 Φαινόμενο Peltier

Το φαινόμενο Peltier είναι η αντιστροφή του θερμοηλεκτρικού φαινομένου: Όταν το κύκλωμα του σχήματος 3.36 («**στοιχείο Peltier**») διαρρέεται από ρεύμα, τότε μεταξύ των δύο επαφών των μετάλλων Α και Β αναπτύσσεται διαφορά θερμοκρασίας. Ποια εκ των δύο επαφών θερμαίνεται και ποια ψύχεται, εξαρτάται από την φορά του ρεύματος. Συγκεκριμένα ψύχεται, εκείνη η επαφή, η οποία θα έπρεπε να θερμαίνεται, προκειμένου να έχουμε ρεύμα ίδιας φοράς, αν απομακρύνουμε την πηγή και χρησιμοποιούσαμε την διάταξη ως θερμοστοιχείο.



Σχήμα 3.36: Στοιχείο Peltier

Η θεωρητική ερμηνεία του φαινομένου είναι εξαιρετικά πολύπλοκη και ως εκ τούτου έξω από όρια του παρόντος συγγράμματος. Όπως όμως προκύπτει από το πείραμα, η απαγόμενη στην ψυχόμενη και (πέραν της θερμότητας Joule) εκλυόμενη στην θερμαινόμενη επαφή θερμότητα Q δίδεται από την σχέση:

$$Q = \Pi \cdot I \cdot t \quad [3.40]$$

όπου Π = «**συντελεστής Peltier**». Η τιμή του κυμαίνεται μεταξύ 0,5 και 5 mJ/(As), είναι δε μια χαρακτηριστική για τα δύο μέταλλα συνάρτηση της θερμοκρασίας.

I = ένταση του ρεύματος,

t = χρόνος.

Εφαρμογές: Κατάλληλα διαμορφωμένα στοιχεία Peltier χρησιμοποιούνται για την ψύξη μικρών αντικειμένων μέχρι και τους 50 K. Η ψυκτική τους ισχύς μπορεί να ρυθμίζεται αδιαβάθμιτα, δεν χρειάζονται συντήρηση, έχουν μακρά διάρκεια ζωής και δεν χρησιμοποιούν ψυκτικό ρευστό.

ΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ

Το μαγνητικό πεδίο αποτελεί την δεύτερη μορφή εμφάνισης του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου (Η πρώτη είναι το ηλεκτρικό πεδίο).

Η δημιουργία του μαγνητικού πεδίου είναι αποτέλεσμα της κίνησης ηλεκτρικών φορτίων, ενώ το ηλεκτρικό απλώς της παρουσίας τους.

Το γεγονός αυτό εξηγεί την ιδιότητα του μαγνητικού πεδίου να επηρεάζει την κινητική κατάσταση φορτισμένων και κινουμένων σωματιδίων ή σωμάτων, ακριβώς μέσω αλληλεπίδρασης με το γύρω απ' αυτά υπάρχον μαγνητικό πεδίο. Στην περίπτωση των μονίμων μαγνητών ή γενικότερα μαγνητισμένων σωμάτων τα ρεύματα, τα οποία δημιουργούν το πεδίο, είναι αποτέλεσμα της κίνησης των ηλεκτρονίων γύρω από τους θετικά φορτισμένους πυρήνες, όπως θα δούμε στο κεφάλαιο 5.

4.1 Ένταση του μαγνητικού πεδίου. Δύναμη Lorentz

Η δύναμη, η οποία ασκείται σε κινούμενο φορτίο q , το οποίο βρίσκεται εντός μαγνητικού πεδίου, καλείται δύναμη Lorentz (στην ελληνική βιβλιογραφία συνήθως δύναμη Laplace) και προσδιορίζεται από την σχέση:

$$\vec{F} = q[\vec{v} \times \vec{B}] \quad \sim \rightarrow \quad F = qvB \sin(\vec{v}, \vec{B}) \quad [4.1]$$

όπου \vec{F} = **δύναμη Lorentz** (Laplace)

\vec{v} = ταχύτητα του φορτίου q

\vec{B} = ένταση του μαγνητικού πεδίου (παλαιότερα μαγνητική επαγωγή)

Από την σχέση [4.1], η οποία ευρέθη κατόπιν πειραματικών μετρήσεων, προκύπτει:

α) Η δύναμη Lorentz είναι κάθετη και προς την ταχύτητα του φορτίου και προς την ένταση του πεδίου.

β) Όταν το φορτίο κινείται παράλληλα προς το μαγνητικό πεδίο δεν ασκείται δύναμη Lorentz επ' αυτού. (αν $\vec{v} \parallel \vec{B} \Leftrightarrow \sin(\vec{v}, \vec{B}) = 0$)

γ) Η δύναμη Lorentz γίνεται μέγιστη ($F = F_{\max} = qvB$), όταν το φορτίο κινείται κάθετα προς την διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου.

Η φορά της δύναμης Lorentz προκύπτει άμεσα από τον ορισμό του διανυσματικού γινομένου: αν τοποθετήσουμε δεξιόστροφο κοχλία κάθετα στο επίπεδο των διανυσμάτων \vec{v} και \vec{B} και τον στρέψουμε από το πρώτο προς το δεύτερο, τότε ο κοχλίας θα προχωρήσει κατά την φορά της \vec{F} , εφόσον το φορτίο q είναι θετικό, διαφορετικά κατά την αντίθετη. Επειδή λοιπόν η μαγνητική δύναμη (Lorentz) είναι πάντα κάθετη στην ταχύτητα, το έργο της είναι μηδέν. Άρα

το στατικό μαγνητικό πεδίο

δεν μπορεί να μεταβάλλει, την κινητική ενέργεια ενός κινουμένου φορτίου.

Η μονάδα της μαγνητικής έντασης προσδιορίζεται από την σχέση [4.1] και στο σύστημα SI καλείται T(esla).

Όταν ένα φορτίο q κινείται συγχρόνως μέσα σε χώρο ηλεκτρικού πεδίου εντάσεως \vec{E} και μαγνητικού πεδίου εντάσεως \vec{B} , δέχεται την επίδραση συνισταμένης δύναμης

$$\vec{F} = q(\vec{E} + [\vec{v} \times \vec{B}]) \quad [4.2]$$

4.2 Οι μαγνητικές δυναμικές γραμμές και η ροή τους

Όσον αφορά στην σημασία και στον τρόπο σχεδιασμού των δυναμικών γραμμών του μαγνητικού πεδίου ισχύουν όσα αναφέραμε για τις δυναμικές γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου στο κεφάλαιο 1.4 με την εξής διαφορά: Στην περίπτωση ενός ηλεκτρικού πεδίου μπορούμε να απομονώσουμε περιοχές του χώρου, από τις οποίες πηγάζουν (π.χ. την περιοχή στην οποία βρίσκεται ένα πρωτόνιο) ή στις οποίες καταλήγουν δυναμικές γραμμές. Στις περιοχές αυτές βρίσκονται τα θετικά και αρνητικά φορτία αντίστοιχα. Αντιθέτως

οι μαγνητικές δυναμικές γραμμές δεν έχουν αρχή και τέλος: είναι κλειστές.

Ακόμη και στην περίπτωση των μονίμων μαγνητών, τα άκρα των οποίων χαρακτηρίζονται από μια πυκνωση των μαγνητικών δυναμικών γραμμών και ονομάζονται πόλοι, δεν έχουμε κάτι αντίστοιχο προς τα ηλεκτρικά φορτία. Άλλωστε οι πόλοι εμφανίζονται πάντα κατά ζεύγη:

δεν υπάρχουν «μαγνητικά φορτία» αλλά μαγνητικά δίπολα.

Οι πόλοι ενός μαγνήτη χαρακτηρίζονται αυθαίρετα σαν **βόρειος** και **νότιος**. Οι ονομασίες αυτές προέκυψαν από το γεγονός, ότι οι πόλοι μιας μαγνητικής βελόνης, όταν αυτή ισορροπεί από μόνη της, βρίσκονται επί ευθείας, η οποία δείχνει περίπου σε κατεύθυνση Βορρά - Νότου.

Η μαγνητική ροή Φ μέσω μιας προσανατολισμένης επιφάνειας \vec{S} ορίζεται σε πλήρη αντιστοιχία προς την ηλεκτρική ροή (βλ. §1.5):

$$d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{S} = B \cdot \cos(\vec{B}, d\vec{S}) \cdot dS \rightarrow \Phi = \int_s \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_s B \cos(\vec{B}, d\vec{S}) dS \quad [4.3]$$

Μονάδα μέτρησης της μαγνητικής ροής στο SI είναι το **Weber**: $[\Phi] = [B][S] = T \cdot m^2 \equiv Wb$

Λόγω της ανυπαρξίας μαγνητικών μονοπόλων, κάθε κλειστή επιφάνεια θα περιλαμβάνει τον ίδιο αριθμό βορείων και νοτίων πόλων, με αποτέλεσμα τον μηδενισμό της συνολικής μαγνητικής ροής μέσω οιασδήποτε κλειστής επιφάνειας:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad [4.4]$$

Η παραπάνω σχέση αποτελεί ουσιαστικά το αντίστοιχο του νόμου του Gauss για τον ηλεκτρισμό (βλ. §2.9γ) και είναι μια από τις τέσσερις θεμελιώδεις εξισώσεις του Maxwell. Αντικατοπτρίζει δε την ανυπαρξία μαγνητικών φορτίων (μονοπόλων). Σημειωτέον ότι η σύγχρονη Φυσική ερευνά (ανεπιτυχώς βέβαια μέχρι στιγμής) για την ύπαρξη μαγνητικών μονοπόλων, η οποία θα εξηγούσε π.χ. την κβάντωση του ηλεκτρικού φορτίου και θα διευκόλυνε την ενοποίηση των υπαρχόντων στην φύση δυνάμεων.

Η μορφή των μαγνητικών γραμμών μπορεί να αισθητοποιηθεί με την βοήθεια ρινισμάτων σιδήρου, τοποθετημένων επί επίπεδης πλάκας από μη αγωγίμο υλικό (π.χ. χαρτόνι), τοποθετημένης εντός του υπό μελέτη μαγνητικό πεδίο. Με τον τρόπο αυτό θα βλέπαμε (βλ. σχ. 4.1), ότι

οι μαγνητικές γραμμές ενός ευθυγράμμου, ρευματοφόρου αγωγού (καλωδίου) είναι ομόκεντροι κύκλοι, κάθετοι προς τον άξονα του αγωγού και με κέντρο τον αγωγό,

οι μαγνητικές γραμμές ενός κυκλικού αγωγού είναι όμοιες με εκείνες ενός μικρού, ευθυγράμμου μαγνήτη, ο οποίος είναι τοποθετημένος στο κέντρο του κυκλικού αγωγού και κατά μήκος του άξονα του,

οι μαγνητικές γραμμές ενός μακρού σωληνοειδούς είναι ίδιες με εκείνες ενός ευθύγραμμου μαγνήτη.

Σχήμα 4.1: Μαγνητικές δυναμικές γραμμές α) ενός ευθυγράμμου, ρευματοφόρου αγωγού, β) ενός κυκλικού αγωγού και γ) ενός σωληνοειδούς.

4.3 Δύναμη μαγνητικού πεδίου επί ρευματοφόρου αγωγού

Όταν ένας ρευματοφόρος αγωγός βρεθεί εντός μαγνητικού πεδίου, δέχεται την επίδραση μαγνητικής δύναμης, η οποία είναι η συνισταμένη όλων των δυνάμεων Lorentz, οι οποίες ασκούνται επί των κινουμένων φορτίων. Στην συνέχεια θα υπολογίσουμε την δύναμη για την περίπτωση ενός ευθυγράμμου αγωγού μήκους l , ο οποίος διαρρέεται από συνεχές ρεύμα έντασης I και βρίσκεται εντός ομογενούς μαγνητικού πεδίου έντασης \vec{B} :

Σε κάθε ελεύθερο ηλεκτρόνιο ασκείται η δύναμη Lorentz

$$F_L = e \cdot c \cdot B \cdot \eta \mu \theta \quad \{1\}$$

όπου c = ταχύτητα μεταθέσεως των ελευθέρων ηλεκτρονίων.

Η δύναμη αυτή είναι κατά τα γνωστά κάθετη προς την διεύθυνση μετάθεσης των ελευθέρων ηλεκτρονίων, η οποία συμπίπτει με εκείνη του άξονα του αγωγού. Επειδή όμως τα ελεύθερα ηλεκτρόνια δεν μπορούν να εγκαταλείψουν τα τοιχώματα του αγωγού, μεταβιβάζουν την δύναμη αυτή επί των τοιχωμάτων.

Αν $v = SI$ είναι ο όγκος του αγωγού (όπου $S =$ διατομή και $l =$ μήκος του αγωγού) και n η αριθμητική πυκνότητα των ελευθέρων ηλεκτρονίων (= ελεύθερα ηλεκτρόνια ανά μονάδα όγκου), τότε εντός του αγωγού περιέχονται $n \cdot v$ ηλεκτρόνια, οπότε επί των τοιχωμάτων ασκείται η συνισταμένη δύναμη

$$F = F_L(nv) = ecB\eta\mu\theta' \quad \{1\}$$

$$= e \cdot n \cdot c \cdot v \cdot B\eta\mu\theta' \quad \begin{aligned} &= \frac{dq}{dv} \frac{dl}{dt} v B\eta\mu\theta' \\ &en = dq/dv \quad c = dl/dt \end{aligned}$$

$$= \frac{dq}{dv} \frac{dl}{dt} SIB\eta\mu\theta' \quad \begin{aligned} &= \frac{dq}{dv} \frac{dv}{dt} IB\eta\mu\theta' = \frac{dq}{dt} IB\eta\mu\theta' \Rightarrow \\ v = SI \quad dl \cdot S = dv \quad &dq/dt = I \\ &\eta\mu' = \eta\mu\theta' \end{aligned}$$

$$F = IlB\eta\mu\theta' \rightarrow \vec{F} = I[\vec{l} \times \vec{B}] \quad [4.5]$$

Δύναμη επί ευθυγράμμου αγωγού μήκους l , ο οποίος διαρρέεται από συνεχές ρεύμα έντασης I και βρίσκεται εντός ομογενούς μαγνητικού πεδίου έντασης \vec{B} . (Η Διεύθυνση του διανύσματος l συμπίπτει με εκείνη του άξονα του αγωγού, ενώ η φορά του με την συμβατική φορά του ρεύματος).

Σε περίπτωση μη ευθυγράμμου αγωγού η σχέση [4.5] ισχύει κατ' αρχήν για κάθε στοιχειώδες τμήμα $d\vec{l}$ του αγωγού, οπότε με ολοκλήρωση υπολογίζεται η συνολική επί του αγωγού ασκούμενη δύναμη. Σημειωτέον ότι στην περίπτωση αυτή δεν είναι απαραίτητο να πρόκειται για ομογενές μαγνητικό πεδίο.

4.4 Υπολογισμός της έντασης του μαγνητικού πεδίου ρευματοφόρων αγωγών

4.4.1 Ο νόμος του Ampere και οι εφαρμογές του

Η σχέση μεταξύ του ρεύματος, το οποίο διαρρέει έναν ρευματοφόρο αγωγό, και της έντασης του γύρω από τον αγωγό δημιουργούμενου μαγνητικού πεδίου δίδεται από τον ακόλουθο «νόμο του Ampere», ο οποίος αποτελεί προϊόν του πειράματος και της επιστημονικής διαίσθησης:

νόμος του Ampere:
$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} \equiv \oint B \cos(B, dl) dl = \mu_0 I_{ολ} \quad [4.6]$$

όπου $\mu_0 = \text{μαγνητική διαπερατότητα του κενού} = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{WbA}^{-1}\text{m}^{-1}$

$I_{ολ}$ είναι το **συνολικό ρεύμα**, το οποίο περικλείεται από την **τυχαία κλειστή διαδρομή L**. Συγκεκριμένα στην περίπτωση που η διαδρομή περικλείει περισσότερα του ενός ρεύματα, το $I_{ολ}$ ισούται με το αλγεβρικό τους άθροισμα, το οποίο υπολογίζεται θεωρώντας θετικά τα ρεύματα εκείνα, των οποίων το μαγνητικό πεδίο έχει την ίδια φορά, με την φορά κατά την οποία διατρέχουμε την κλειστή καμπύλη L. Ένα απλό παράδειγμα δείχνει το σχήμα 4.3.

Σχήμα 4.3: Παράδειγμα υπολογισμού του ολικού ρεύματος $I_{ολ}$ στον νόμο του Ampere.

Όσον αφορά στην **φορά του μαγνητικού πεδίου ενός ρευματοφόρου αγωγού**, αυτή υπολογίζεται πρακτικά ως εξής: Όταν «πιάσουμε» τον αγωγό με το δεξί μας χέρι, έτσι ώστε ο αντίχειρας να δείχνει την (συμβατική) φορά του ρεύματος, τότε τα δάκτυλα τυλίγονται γύρω από τον αγωγό κατά την φορά των κλειστών μαγνητικών δυναμικών γραμμών.

Ο νόμος του Ampere αντιστοιχεί στον νόμο του Gauss (βλ. 1.6) και έχει αντίστοιχες **εφαρμογές:**

α) Υπολογισμός της έντασης του μαγνητικού πεδίου (ιδανικού) σωληνοειδούς: Σαν **σωληνοειδές** ορίζεται κάθε σπειροειδώς διαμορφωμένος αγωγός, του οποίου οι **ισαπέχουσες** σπείρες έχουν **κοινό άξονα** και **ίδια ακτίνα**.

Το μαγνητικό πεδίο του σωληνοειδούς ισούται με το διανυσματικό άθροισμα των πεδίων, τα οποία δημιουργούνται από τις σπείρες του. Όπως - πολύ απλοποιημένα - φαίνεται στο σχήμα 4.4, τα μαγνητικά πεδία των μεμονωμένων σπειρών τείνουν να εξουδετερωθούν στον χώρο μεταξύ και εκτός των σπειρών, ενώ ενισχύονται στο εσωτερικό του σωληνοειδούς. Η τάση αυτή γίνεται εντονότερη όσο αυξάνεται το μήκος του σωληνοειδούς και ελαττώνεται η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών σπειρών. Στην περίπτωση ενός **ιδανικού σωληνοειδούς** (άπειρο μήκος και τετραγωνική διατομή κυκλικών σπειρών, επαπτόμενων μεταξύ τους - ένα τέτοιο σωληνοειδές ισοδυναμεί με λεπτό κυλινδρικό φύλλο απείρου μήκους) η ένταση του πεδίου στο εξωτερικό του σωληνοειδούς είναι αμελητέα (μηδενική αν θέλουμε να είμαστε απόλυτα ακριβείς, βλ. παρακάτω) σε σχέση με εκείνη στο εσωτερικό του, όπου (λόγω συμμετρίας) επικρατεί ένα ομογενές και παράλληλο προς τον άξονα του σωληνοειδούς μαγνητικό πεδίο (βλ. σχ.4.5). Το **μαγνητικό πεδίο ενός πραγματικού σωληνοειδούς** πλησιάζει τόσο περισσότερο εκείνο ενός ιδανικού σωληνοειδούς, όσο μεγαλύτερο είναι το μήκος του σε σχέση με την διάμετρο του, και όσο περισσότερο περιορίζουμε στην κεντρική περιοχή του σωληνοειδούς, μακριά από τα άκρα του. Στα πλαίσια αυτής της προσέγγισης ο παρακάτω υπολογισμός της έντασης του μαγνητικού πεδίου ιδανικού σωληνοειδούς ισχύει και για την κεντρική περιοχή ενός πραγματικού σωληνοειδούς «μεγάλου» μήκους.

Ο νόμος του Ampere για την διαδρομή $L \equiv [1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1]$ του σχήματος 4.5 μας δίνει:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \int_1^2 \vec{B} d\vec{l} + \int_2^3 \vec{B} d\vec{l} + \int_3^4 \vec{B} d\vec{l} + \int_4^1 \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 i_{ολ} \quad \{1\}$$

Το πρώτο και τρίτο ολοκλήρωμα μηδενίζονται, επειδή κατά τις διαδρομές 1->2 και 3 -> 4 η ένταση \vec{B} είναι πάντα κάθετη προς το στοιχείο μετατόπισης $d\vec{l}$.

Το τέταρτο ολοκλήρωμα μηδενίζεται, επειδή καθ' όλο το μήκος της διαδρομής 4 -> 1 η ένταση του πεδίου είναι μηδενική. (Αν η ένταση ήταν μη μηδενική, τότε η τιμή του τέταρτου ολοκληρώματος -θα έπρεπε να είναι ίση και αντίθετη με εκείνη του αντιστοίχου ολοκληρώματος κατά μήκος οιασδήποτε διαδρομής παράλληλης προς την 4 -> 1, όπως π.χ. η 5 -> 6 στο σχήμα 4.5. Αυτό θα ήταν απαραίτητο επειδή για μια διαδρομή, ευρισκομένη εξ ολοκλήρου εκτός του σωληνοειδούς - όπως π.χ. η [1 -> 4 -> 5 -> 6], το $i_{ολ}$, είναι μηδέν, οπότε μηδέν θα πρέπει να μας δίνει και το άθροισμα των τεσσάρων ολοκληρωμάτων.)

Μετά τον μηδενισμό των τριών αυτών ολοκληρωμάτων η {1} γράφεται:

$$\int_2^3 \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 i_{ολ} \Rightarrow \int_0^h B \cos 0 dl = \mu_0 i_{ολ} \Rightarrow Bh = \mu_0 i_{ολ} \quad \{2\}$$

Το ολικό ρεύμα ισούται προφανώς με τον αριθμό των σπειρών, τις οποίες περικλείει η επιλεγείσα διαδρομή, επί το ρεύμα i , το οποίο διαρρέει το σωληνοειδές: $i_{ολ} = [\text{αριθμός σπειρών}] i = (nh) i$, όπου $n = \text{αριθμός σπειρών ανά μονάδα μήκους}$.

Αντικαθιστούμε στην {2} και παίρνουμε για την

$$B = \mu_0 ni \quad [4.7]$$

Η παραπάνω σχέση αντικατοπτρίζει το γεγονός, ότι το μαγνητικό πεδίο ιδανικού σωληνοειδούς στον εντός των σπειρών ευρισκόμενο χώρο είναι ομογενές και μάλιστα ανεξάρτητο από την διάμετρο των σπειρών.

β) Υπολογισμός της έντασης του μαγνητικού πεδίου ευθυγράμμου, ρευματοφόρου αγωγού, πολύ μεγάλου (απείρου) μήκους: Λόγω συμμετρίας, οι δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου ευθυγράμμου, ρευματοφόρου αγωγού απείρου μήκους είναι κυκλικές με κέντρο τον αγωγό, καθ' όλο δε το μήκος μιας δυναμικής γραμμής (βλ. σχ. 4.6) η ένταση του πεδίου έχει σταθερή τιμή. Τα παραπάνω ισχύουν προσεγγιστικά και για έναν ευθύγραμμο αγωγό πεπερασμένου μήκους, σε σημεία τα οποία βρίσκονται κοντά στον άξονα του αγωγού και μακριά από τα άκρα του.

Εφαρμόζουμε τον νόμο του Amperε επιλέγοντας ως κλειστή διαδρομή L μια δυναμική γραμμή ακτίνας r , οπότε έχουμε:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \int B \cos \theta dl = B = \sigma \alpha \vartheta.$$

$$= B \int dl = B(2\pi r) = \mu_0 i \Rightarrow B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \quad [4.8]$$

4.4.2 Ο νόμος των Biot και Savart και οι εφαρμογές τους

Ο νόμος του Ampere [4.6] μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της έντασης \vec{B} του μαγνητικού πεδίου μόνο σε περιπτώσεις συμμετρικής κατανομής ρεύματος, οπότε ο υπολογισμός του επικαμπύλιου ολοκληρώματος είναι εύκολος.

Σε περιπτώσεις τυχαιάς κατανομής ρεύματος ο υπολογισμός της έντασης \vec{B} μπορεί να γίνει με την βοήθεια του νόμου των Biot - Savart, ο οποίος είναι καταστάλαγμα πειραματικών μετρήσεων και διατυπώνεται ως εξής:

Κάθε στοιχειώδες τμήμα $d\vec{l}$ (βλ. σχ. 4.7) ενός γραμμικού ρευματοφόρου αγωγού τυχαιάς μορφής δημιουργεί σε θέση \vec{r} ένα στοιχειώδες μαγνητικό πεδίο έντασης $d\vec{B}$, η οποία δίδεται από τη σχέση:

$$\text{νόμος των Biot - Savart: } d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{[d\vec{l} \times \vec{r}]}{r^3} \rightarrow dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{\sin \vartheta}{r^2} dl \quad [4.9]$$

Η ολική ένταση \vec{B} στο σημείο P υπολογίζεται με ολοκλήρωση ($\vec{B} = \int d\vec{B}$), η οποία εκτείνεται σε όλη την κατανομή ρεύματος.

Παράδειγμα: Υπολογισμός της έντασης του μαγνητικού πεδίου στο κέντρο κυκλικού αγωγού ακτίνας r (βλ. σχ. 4.8.):

$$r = \sigma \alpha \vartheta.$$

$$B = \int dB = \int \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{\sin \vartheta}{r^2} dl$$

Biot - Savart: $\sin \vartheta = 1 = \sigma \alpha \vartheta.$

$$\frac{\mu_0 i}{4\pi} - \frac{1}{r^2} \int_0^{2\pi} dI \Rightarrow B = \frac{\mu_0 i}{2r} \quad [4.10]$$

(Η φορά του πεδίου προκύπτει κατά τα γνωστά με την βοήθεια του εμπειρικού κανόνα των δακτύλων του δεξιού χεριού, βλ. §4.4.1).

4.5 Περιπτώσεις δυνάμεων ασκούμενων από μαγνητικά πεδία. Εφαρμογές

α) Δυνάμεις μεταξύ παράλληλων ρευματοφόρων αγωγών (πολύ μεγάλου μήκους/το μήκος τους πρέπει, να είναι πολύ μεγαλύτερο από την μεταξύ τους απόσταση).

Έστω δύο παράλληλοι αγωγοί a και b, ευρισκόμενοι σε απόσταση r (βλ. σχ. 4.9) μεταξύ τους, η οποία είναι πολύ μικρότερη από το μήκος l των δύο αγωγών, και διαρρεόμενοι από ρεύμα έντασης I_a και I_b αντίστοιχα. Έκαστος των δύο αγωγών δέχεται την επίδραση του μαγνητικού πεδίου του άλλου, η οποία συνεπάγεται την δράση δύναμης επ αυτού. Σύμφωνα με το αξίωμα δράσης - αντίδρασης οι δύο ασκούμενες επί των αγωγών (εξ αιτίας των ίδιων τους μαγνητικών πεδίων) δυνάμεις θα είναι ίσες και αντίθετες. Για τον λόγο αυτό θα υπολογίσουμε την μια εκ των δύο έστω την \vec{F}_a , την ασκούμενη επί του αγωγού a εξ αιτίας του πεδίου του αγωγού b:

$$\text{Σύμφωνα με την σχέση [4.5] το μέτρο της δύναμης αυτής θα είναι} \quad F_a = I_a l B_b \quad \{1\}$$

όπου B_b είναι η ένταση του μαγνητικού πεδίου του αγωγού b στην θέση του αγωγού a. Σύμφωνα με την σχέση [4.8] θα είναι:

$$B_b = \frac{\mu_0 I_b}{2\pi r} \quad \{2\}$$

$$\text{Αντικαθιστούμε την \{2\} στην \{1\} και παίρνουμε : } F = \frac{\mu_0 l I_a I_b}{2\pi r} \quad \begin{array}{l} \text{δύναμη μεταξύ} \\ \text{:παράλληλων} \end{array}$$

[4.11]

Σημειώτεον ότι η παραπάνω σχέση χρησιμοποιείται για τον ορισμό του Ampere, μιας εκ των θεμελιωδών μονάδων του Διεθνούς Συστήματος.

Η φορά των δυνάμεων και των εντάσεων (βλ. σχ. 4.9) προσδιορίζεται κατά τα γνωστά με την βοήθεια των εμπειρικών κανόνων του δεξιόστροφου κοχλία (βλ. 4.1) και του δεξιού χεριού (βλ. 4.4.1) αντίστοιχα. Εύκολα δε διαπιστώνουμε ότι

δύο παράλληλοι, ρευματοφόροι αγωγοί με αντίρροπα ρεύματα απωθούνται, ενώ με ομόρροπα έλκονται.

β) Ροπή επί ρευματοφόρου πλαισίου εντός ομογενούς μαγνητικού πεδίου: Όταν ρευματοφόρο

επίπεδο πλαίσιο βρεθεί εντός (ομογενούς) μαγνητικού πεδίου, τότε επί των τεσσάρων πλευρών του αναπτύσσονται οι γνωστές μας πλέον μαγνητικές δυνάμεις. Εάν (χάριν απλότητας) ο άξονας του πλαισίου είναι κατακόρυφος και το πεδίο οριζόντιο (βλ. σχ. 4.10), τότε οι δύο επί των οριζοντίων πλευρών του πλαισίου δρώσες δυνάμεις είναι ίσες και αντίθετες (με μέτρο $F_0 = I_0 B \sin \alpha$) οπότε αλληλοεξουδετερώνονται, αντιθέτως οι επί των κατακόρυφων πλευρών του πλαισίου δρώσες δυνάμεις (μέτρου $F_\kappa = I_\kappa B$) αποτελούν ζεύγος δυνάμεων, με αποτέλεσμα την δράση μηχανικής ροπής \vec{M} επί του εν λόγω ροπής είναι:

πλαisiou. Το μέτρο της αντικαθιστούμε

$$M = F_\kappa (l_0 \sin \beta) = I_\kappa B (l_0 \sin \beta) = I B l_\kappa l_0 \sin \beta \Rightarrow M = I B S \sin \phi$$

$$\beta + \phi = 180^\circ \Rightarrow \eta \mu \beta = \eta \mu \phi$$

ή διανυσματικά
$$\vec{M} = I [\vec{S} \times \vec{B}] \quad [4.12]$$

όπου \vec{S} είναι το γνωστό μας «επιφανειακό διάνυσμα», κάθετο επί του πλαισίου και με φορά προσδιοριζόμενη από εκείνη του ρεύματος με την βοήθεια δεξιόστροφου κοχλίου.

Όπως φαίνεται από την σχέση [4.12], η μηχανική ροπή \vec{M} μηδενίζεται, όταν το διάνυσμα \vec{S} γίνει παράλληλο, άρα το πλαίσιο κάθετο προς το πεδίο. Ένα ρευματοφόρο πλαίσιο συμπεριφέρεται δηλαδή σαν ένα **μαγνητικό δίπολο**. Επειδή δε η μηχανική ροπή \vec{M} (και επομένως και τάση προς προσανατολισμό) καθορίζονται από το διανυσματικό μέγεθος: $\vec{M}^* \equiv I \vec{S}$, το οποίο σύμφωνα με την σχέση [4.12] ισούται με την ανά μονάδα πεδίου αναπτυσσόμενη μηχανική ροπή, εισάγουμε το εν λόγω μέγεθος και το ονομάζουμε **μαγνητική διπολική ροπή**.

Συνοψίζοντας γράφουμε:

μαγνητική διπολική ροπή επιπέδου βρόγχου τυχαίου¹ σχήματος:
$$\vec{M}^* = I \vec{S} \quad [4.13]$$

μηχανική ροπή επί επιπέδου βρόγχου εντός ομογενούς μαγν. πεδίου:
$$\vec{M} = [\vec{M}^* \times \vec{B}]$$

Το φαινόμενο του προσανατολισμού ρευματοφόρου πλαισίου εντός μαγνητικού πεδίου βρίσκει εφαρμογή σε πολλά όργανα μέτρησης, όπως αμπερόμετρα (βλ. κεφ. 3.3) και βολτόμετρα.

Επιπλέον αποτελεί την αρχή λειτουργίας των ηλεκτροκινητήρων.

γ) Φαινόμενο Hall καλείται το φαινόμενο της εμφάνισης ηλεκτρικής τάσεως U_H , (**τάση Hall**) κάθετα προς την διεύθυνση της ροής του ρεύματος εντός μεταλλικής ταινίας, όταν αυτή βρίσκεται μέσα σε μαγνητικό πεδίο (βλ. σχ. 4.11) Η εν λόγω τάση αναπτύσσεται εξ αιτίας του διαχωρισμού των φορέων φορτίου, ο οποίος είναι αποτέλεσμα της μετακίνησης των ελευθέρων ηλεκτρονίων κάτω από την επίδραση της δύναμης Lorentz - προς την μια πλευρά του αγωγού, οπότε προκαλείται περίσσεια θετικών ιόντων στην απέναντι.

Σχήμα 4.11: Φαινόμενο Hall

1) Η κάπως απαιτητική μαθηματικώς γενίκευση περιέχεται στο βιβλίο “Μαθήματα Φυσικής Πανεπιστημίου Burkley”, 2^{ος} τόμος, Εργαστήρια Φυσικής Ε.Μ.Π. 1984.

Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός, ότι η δύναμη Lorentz θα έχει την ίδια φορά (στην περίπτωση του σχήματος 4.11 προς τα επάνω), είτε οι φορείς του ρεύματος είναι θετικοί, οπότε κινούνται κατά την συμβατική φορά του ρεύματος, είτε αρνητικοί, οπότε κινούνται αντίθετα. Έτσι το φαινόμενο Hall μας επιτρέπει, να διαπιστώσουμε το είδος των φορέων και όχι μόνο, όπως θα δούμε αμέσως παρακάτω.

Ο διαχωρισμός των φορτίων έχει ως αποτέλεσμα την δημιουργία ενός νέου ηλεκτρικού πεδίου στο εσωτερικό της μεταλλικής πλάκας, έντασης $E_H = U_H / b$, όπου b το «ύψος» (βλ. σχ. 4.11) της ορθογωνικής (υποτίθεται από δω και στο εξής) πλάκας (Υποθέτουμε σιωπηλά, ότι το εν λόγω ηλεκτρικό πεδίο είναι ομογενές, πράγμα το οποίο ισχύει για μικρό ύψος b μακριά από τα άκρα της πλάκας). Εξ αιτίας του πεδίου αυτού ασκείται επί των ηλεκτρονίων ηλεκτρική δύναμη $\vec{F}_H = -e\vec{E}_H$. Έτσι ο διαχωρισμός των φορτίων εξ αιτίας της δύναμης Lorentz, $\vec{F}_L = -e[\vec{c} \times \vec{B}]$, συνεχίζεται μόνον έως ότου οι δύο αυτές δυνάμεις γίνουν ίσες και αντίθετες, οπότε αποκαθίσταται δυναμική ισορροπία:

!

$$eE_H = ecB \quad \{1\} \quad (\text{Πήραμε υπόψη, ότι η ταχύτητα μεταθέσεως } c \text{ είναι, κάθετη προς την ένταση του}$$

μαγνητικού πεδίου.)

Στο κεφάλαιο 4.3 είχαμε χρησιμοποιήσει τις σχέσεις $en = dq / dv$ και $c = sl / dt$, όπου n=αριθμός φορέων ανά μονάδα όγκου $dv = S dl = (bd) dl$, η γνωστή μας αριθμητική πυκνότητα των φορέων φορτίου. (d =«βάθος» της ορθογωνικής μεταλλικής πλάκας, βλ. σχ.4.11). Από τις δύο αυτές σχέσεις προκύπτει:

$$enc = \frac{dq dl}{dv dt} = I \frac{dl}{dv} = I \frac{dl}{(bd)dl} = \frac{I}{bd} \Rightarrow c = \frac{I}{bdne} \quad \{2\}. \quad \text{Αντικατάσταση στην } \{1\}$$

$$\text{δίδει: } E_H = cB = \frac{I}{bdne} B \Leftrightarrow \frac{U_H}{b} = \frac{I}{bdne} B \Rightarrow U_H = R_H \frac{IB}{d} \quad [4.14]$$

όπου $R_H = \frac{1}{ne}$:**σταθερά Hall**, ένα χαρακτηριστικό για το μέταλλο μέγεθος, η μέτρηση του οποίου επιτρέπει τον προσδιορισμό της πυκνότητας των φορέων φορτίου.

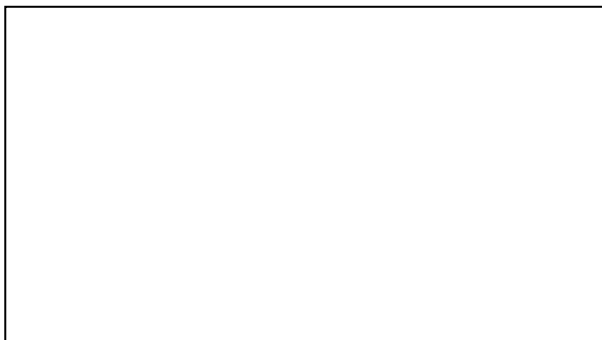
Πέραν του προσδιορισμού της αριθμητικής πυκνότητας και του πρόσημου των φορέων φορτίου το φαινόμενο Hall βρίσκει συνεχώς αυξανόμενη εφαρμογή στην μέτρηση της έντασης των μαγνητικών πεδίων.

δ) Άλλες εφαρμογές δυνάμεων από μαγνητικά πεδία: Στις οθόνες τηλεοράσεων εκμεταλλευόμαστε την εκτροπή δέσμης ηλεκτρονίων μέσω του μαγνητικού πεδίου σωληνοειδών.

Σε πολλούς από τους επιταχυντές ιόντων και ηλεκτρονίων, οι οποίοι χρησιμοποιούνται στην Φυσική Στοιχειωδών Σωματιδίων, η επιτάχυνση των σωματιδίων σε πολύ υψηλές ταχύτητες γίνεται με την βοήθεια ηλεκτρικών πεδίων. Οι απαιτούμενες όμως προς τον σκοπό αυτό τροχιές έχουν πολύ μεγάλο μήκος, οπότε συχνά «κάμπτονται» σε σπειροειδείς με την βοήθεια μαγνητικών πεδίων, καθέτων προς το επίπεδο της τροχιάς. Οι εν λόγω επιταχυντές παύουν να είναι **γραμμικοί** και χαρακτηρίζονται διεθνώς -προς τιμήν της απέραντης ελληνικής γλώσσας, την οποία εμείς οι Νεοέλληνες πασχίζουμε να εξαφανίσουμε! - ως **κύκλωτρα**.

Μαγνητικά και ηλεκτρικά πεδία κατάλληλης μορφής και ισχύος επιτρέπουν την σύγκλιση και απόκλιση ηλεκτρονικών ακτίνων, λειτουργούν δηλαδή ως **ηλεκτρικοί** και **μαγνητικοί φακοί** και βρίσκουν ευρεία εφαρμογή στην κατασκευή οπτοηλεκτρονικών οργάνων, το γνωστότερο των οποίων είναι ο παλμογράφος δέσμης ηλεκτρονίων και το σημαντικότερο το ηλεκτρονικό μικροσκόπιο, μέσω του οποίου πετυχαίνουμε μεγεθύνσεις ασύγκριτα μεγαλύτερες από εκείνες των οπτικών μικροσκοπίων.

Παράδειγμα 4.5.1: Να υπολογιστούν τα χαρακτηριστικά της τροχιάς ηλεκτρονίου, το οποίο εισέρχεται με σταθερή, αρχική ταχύτητα v μέσα σε σταθερό, ομογενές μαγνητικό πεδίο.



Όπως γνωρίζουμε, η δύναμη Lorentz \vec{F}_L είναι κάθετη στο επίπεδο, το οποίο ορίζουν η ταχύτητα \vec{v} και το μαγνητικό πεδίο \vec{B} , και το μέτρο της δίδεται από την σχέση

$$F_L = evB\eta\mu\theta \quad \{1\}$$

Αν αναλύσουμε την ταχύτητα του ηλεκτρονίου

σε μια παράλληλη και μια κάθετη προς το πεδίο συνιστώσα, \vec{v}_π και \vec{v}_κ αντίστοιχα, τότε σύμφωνα με την σχέση {1} η παράλληλη προς το πεδίο κίνηση (συνιστώσα) δεν εγείρει την επίδραση μαγνητικής δύναμης ($\eta\mu 0 = 0 \rightarrow F_L^\pi = 0$), οπότε το ηλεκτρόνιο κινείται κατά την διεύθυνση του πεδίου με σταθερή ταχύτητα

$$v_\pi = v \sigma \nu \theta = \sigma \alpha \theta. \quad \{2\}$$

Αντιθέτως, η κάθετη ($\rightarrow \eta\mu 90=1$) προς το - πεδίο κίνηση (συνιστώσα) προκαλεί την δράση μαγνητικής δύναμης, κάθετης προς το επίπεδο (\vec{v}, \vec{B}) και με μέτρο

$$F_L^\kappa = e v_\kappa B \quad \{3\}.$$

Η δύναμη αυτή λειτουργεί ως κεντρομόλος δύναμη F_k και αναγκάζει το ηλεκτρόνιο να διαγράφει κυκλική τροχιά, κάθετη προς την διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου.

!

Η ακτίνα r της κυκλικής αυτής τροχιάς υπολογίζεται από την ισότητα $F_L^\kappa = F_k \Rightarrow$

$$\Rightarrow e v_\kappa B = \frac{m v_\kappa^2}{r} \Rightarrow r = \frac{m v_\kappa}{e B} \Rightarrow r = \frac{m \nu \eta \mu \vartheta}{e B} \quad \{4\}, \text{ όπου } m \text{ η μάζα του ηλεκτρονίου.}$$

Η γωνιακή ταχύτητα ω θα είναι: $\omega = \frac{v_\kappa}{r} = \frac{\nu \eta \mu \vartheta}{\left[\frac{m \nu \eta \mu \vartheta}{e B} \right]} \Rightarrow \omega = \frac{e B}{m} \quad \{5\}$

Η συχνότητα ν και η περίοδος T υπολογίζονται άμεσα: $\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{e B}{2\pi m} \quad \{6\}$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει, ότι η περίοδος είναι ανεξάρτητη από την ταχύτητα του ηλεκτρονίου, ενώ η ακτίνα είναι ανάλογη προς αυτήν.

Επειδή το ηλεκτρόνιο κινείται συγχρόνως και κατά την διεύθυνση του πεδίου με (σταθερή όπως είδαμε) ταχύτητα v_π , η συνισταμένη κίνηση θα είναι ελικοειδής, με άξονα το μαγνητικό πεδίο. Το βήμα της έλικας (= η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών σπειρών), P , θα είναι ίσο με την απόσταση, την οποία διατρέχει το ηλεκτρόνιο κατά την διεύθυνση του πεδίου μέσα στον χρόνο μιας περιόδου:

$$P = v_\pi T = \nu \sigma \nu \theta T \Rightarrow P = \frac{2\pi m}{e B} \nu \sigma \nu \theta \quad \{7\}$$

Όπως είναι προφανές, οι παραπάνω σχέσεις ισχύουν και στην περίπτωση άλλου φορτισμένου σωματιδίου, αρκεί να αντικαταστήσουμε την αντίστοιχη μάζα και φορτίο.

4.6 Ηλεκτρομαγνητική επαγωγή

Ως **ηλεκτρομαγνητική επαγωγή** χαρακτηρίζεται το φαινόμενο της εμφάνισης ΗΕΔ στα άκρα ενός αγωγού σαν συνέπεια της μεταβολής της μαγνητικής ροής μέσω της επιφάνειας, η οποία περιορίζεται, από τον αγωγό γεωγραφικά ή/και χρονικά.

Την τιμή της παραπάνω, **επαγωγικής** καλούμενης **ηλεκτρεγερτικής δύναμης $E_{επ}$** δίνει ο παρακάτω

Νόμος της ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής του Faraday

Η επαγωγική ΗΕΔ $E_{επ}$, η οποία αναπτύσσεται στα άκρα ενός αγωγού, ισούται (κατ' απόλυτη τιμή) με τον ρυθμό μεταβολής της μαγνητικής ροής Φ μέσω της επιφάνειας, την οποία περιορίζει ο αγωγός γεωγραφικά ή/και χρονικά:

$$E_{επ} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad [4.14]$$

Παρατηρήσεις: α) Το αρνητικό πρόσημο ερμηνεύεται από τον λεγόμενο **κανόνα του Lenz**, ο οποίος αποτελεί συνέπεια της διατήρησης της ενέργειας, και σύμφωνα με τον οποίο

η επαγωγική ΗΕΔ έχει τέτοια φορά, ώστε τα **επαγωγικά ρεύματα**, τα οποία τείνει να προκαλέσει (ή και προκαλεί στην περίπτωση κλειστού αγωγού), να προσπαθούν (μέσω του δικού τους μαγνητικού πεδίου) να αναιρέσουν την αυτά προκαλέσασα μεταβολή της μαγνητικής ροής.

β) Ο παραπάνω νόμος του Faraday αποτελεί καταστάλαγμα πειραμάτων του (1831), κατά τα οποία παρατήρησε την εμφάνιση βραχύβιων, επαγωγικών ρευμάτων σε έναν κλειστό αγωγίμο βρόγχο, όταν 1°) μεταβάλλετο το ρεύμα σ' έναν γειτονικό, ακίνητο βρόγχο, 2°) μετακινείτο ο γειτονικός βρόγχος, ενώ παρέμενε σταθερό το ρεύμα που τον διέρρεε και 3°) εισάγετο στον, ή εξάγετο από τον βρόγχο ένας ραβδόμορφος μαγνήτης.

γ) Η μεταβολή της μαγνητικής ροής μπορεί να προκαλείται από οιοδήποτε αίτιο, όπως μέσω παραμόρφωσης ή/και μετακίνησης του αγωγού εντός εξωτερικού μαγνητικού πεδίου ή/και μεταβολής του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου. Η ολική παράγωγος $d\Phi/dt$ στην σχέση [4.14] παίρνει υπόψη της όλα αυτά τα αίτια. Αυτό γίνεται περισσότερο κατανοητό με τα ακόλουθα **παραδείγματα**:

γ1) Ευθύγραμμος αγωγός κινούμενος με σταθερή ταχύτητα v εντός ομογενούς μαγνητικού πεδίου έντασης B και κάθετα προς τις μαγνητικές γραμμές:

Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να εξηγήσουμε την εμφάνιση ΗΕΔ με την βοήθεια της δύναμης Lorentz. Συγκεκριμένα, μαζί με τον αγωγό κινούνται προφανώς και τα εντός

αυτού ευρισκόμενα ελεύθερα ηλεκτρόνια. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την δράση δύναμης Lorentz επί των ελευθέρων ηλεκτρονίων, της οποίας η φορά φαίνεται στο σχήμα 4.15 ενώ η τιμή της δίδεται από την σχέση

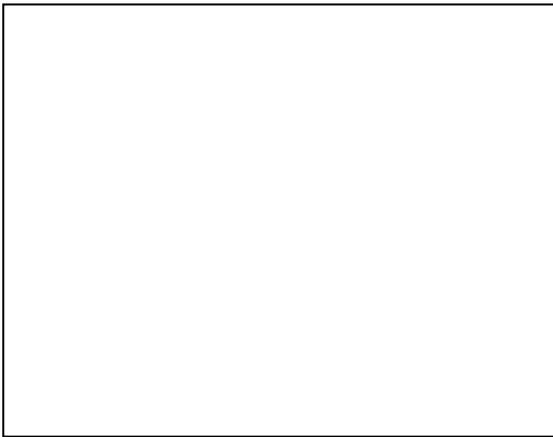
$$F_L = evB \{1\}$$

Κάτω από την επίδραση της δύναμης αυτής επέρχεται μετακίνηση των ελευθέρων ηλεκτρονίων με αποτέλεσμα την εμφάνιση τάσης εξ επαγωγής στα άκρα του αγωγού, η οποία μεγαλώνει με την «πάροδο» του χρόνου (το φαινόμενο ολοκληρώνεται πρακτικώς ακαριαία!), έως ότου η ασκούμενη εξ αιτίας του δημιουργούμενου από τον διαχωρισμό των φορτίων ηλεκτρικό πεδίο δύναμη \vec{F}_E γίνει ίση (και αντίθετη) προς την δύναμη Lorentz:

(δυναμική) ισορροπία:

$$\vec{F}_E = -\vec{F}_L \Rightarrow F_E = F_L \Leftrightarrow eE = e\nu B \Rightarrow E = \nu B \Rightarrow E_{\varepsilon\pi} / l = \nu B \Rightarrow$$

$$\underline{E_{\varepsilon\pi} = \nu Bl} \quad [4.15]$$



Η σχέση [4.15] μπορεί να μετασχηματισθεί ως εξής:

$$\begin{aligned} E_{\varepsilon\pi} = \nu Bl &= \frac{dx}{dt} Bl = \frac{dS}{dt} B \\ \Rightarrow E_{\varepsilon\pi} &= (-) \frac{d\Phi}{dt} \{2\} \end{aligned}$$

όπου dS είναι η από τον κινούμενο αγωγό μέσα σε χρόνο dt διαγραφόμενη επιφάνεια και dΦ η μέσω αυτής διερχόμενη μαγνητική ροή (βλ. σχ.4.16).

Με την σχέση {2} ξαναπαίρνουμε (εκτός του αρνητικού πρόσημου το οποίο ρυθμίζεται από τον κανόνα του Lenz, την σημασία του οποίου θα δούμε ευθύς παρακάτω) την γενική σχέση υπολογισμού της επαγωγικής τάσης ([4.14]).

Στην περίπτωση που ο κινούμενος αγωγός αποτελεί την κινητή πλευρά ενός ακινήτου πλαισίου, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, η ΗΕΔ εξ επαγωγής δημιουργεί επαγωγικό ρεύμα εντάσεως I .

Η ροή του επαγωγικού ρεύματος έχει σαν αποτέλεσμα την δράση επί του κινουμένου αγωγού δύναμης

$$F_{\varepsilon\pi} = I_{\varepsilon\pi} Bl \quad \{3\}$$

Στα πλαίσια του κανόνα του Lenz η δύναμη αυτή έχει φορά αντίθετη προς την φορά κινήσεως του αγωγού, αντιστέκεται δηλαδή στην κίνηση του αγωγού, η οποία είναι και η γενεσιουργός αιτία της ΗΕΔ εξ επαγωγής και κατά συνέπεια και του επαγωγικού ρεύματος. Ο κανόνας του Lenz είναι απαραίτητος προκειμένου να εξυπηρετηθεί η διατήρηση της ενέργειας:

Συγκεκριμένα, προκειμένου να διατηρηθεί η ταχύτητα του αγωγού σταθερή πρέπει να ασκήσουμε επ' αυτού δύναμη \vec{F} ίση και αντίθετη με την μαγνητική δύναμη $\vec{F}_{\varepsilon\pi}$. Η πρώτη δύναμη, θα παράγει έργο ίσο με εκείνο, το οποίο καταναλώνει η δεύτερη. Το έργο αυτό είναι

$$\begin{aligned} \{3\} \quad dx = v dt \quad [4.15] \rightarrow E_{\varepsilon\pi} Blv \\ dW = F_{\varepsilon\pi} dx = I_{\varepsilon\pi} B l dx = I_{\varepsilon\pi} B l v dt \quad \Rightarrow \quad dW = I_{\varepsilon\pi} E_{\varepsilon\pi} dt \quad \{4\} \end{aligned}$$

Βλέπουμε λοιπόν, ότι το έργο της δύναμης \vec{F} , η οποία διατηρεί σταθερή την ταχύτητα του κινούμενου αγωγού, ισούται με την ηλεκτρική ενέργεια του κυκλώματος. Εάν δεν αναπληρώσουμε την κινητική ενέργεια, την οποία καταναλώνει η ανθιστάμενη μαγνητική δύναμη $\vec{F}_{\varepsilon\pi}$, η ταχύτητα του αγωγού θα μειώνεται συνεχώς, έως ότου μηδενισθεί. Όλη η κινητική ενέργεια, την οποία κατείχε αρχικά ο αγωγός, θα έχει τότε μετατραπεί μέσω του έργου της $\vec{F}_{\varepsilon\pi}$ σε ηλεκτρική και τελικά σε θερμότητα, μέσω του γνωστού μας φαινομένου Joule.

γ2) Επίπεδο πλαίσιο, περιστρεφόμενο με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω εντός ομογενούς μαγνητικού πεδίου έντασης B , γύρω από τον κάθετο προς τις μαγνητικές δυναμικές γραμμές άξονα (βλ. σχ. 4.18): (Η εν λόγω διάταξη αποτελεί ουσιαστικά την **αρχή λειτουργίας της γεννήτριας εναλλασσόμενου ρεύματος**).

φορά περιστροφής του πλαισίου

Η επαγωγική τάση $E_{\varepsilon\pi}$, η οποία αναπτύσσεται στα άκρα του πλαισίου, μπορεί και πάλι να εξηγηθεί ως αποτέλεσμα της δράσης της δύναμης Lorentz επί των κινουμένων, ελευθέρων ηλεκτρονίων του πλαισίου. Ο υπολογισμός της είναι όμως πολύ απλούστερος, αν χρησιμοποιηθεί απ' ευθείας ο νόμος του Faraday:

$$E_{\varepsilon\pi} = (-) \frac{d\Phi}{dt} \quad \begin{array}{c} = \\ \uparrow \\ B = \sigma\alpha\vartheta. \\ S = \text{επιπεδη} \end{array} \quad (-) \frac{d(BS \cos \vartheta)}{dt} \quad \begin{array}{c} = \\ \text{χρονικώς} \\ \text{αμετάβλητα} \end{array} \quad (-)BS \frac{d \cos \theta}{dt}$$

$$\begin{aligned} \vartheta &= \omega t \\ &= (-)BS \frac{d \cos(\omega t)}{dt} = (-)BS(-\omega \sin(\omega t)) \Rightarrow \underline{E_{\varepsilon\pi} = BS\omega \sin(\omega t)} \quad [4.16] \end{aligned}$$

Στην περίπτωση που το πλαίσιο είναι κλειστό, διαρρέεται από επαγωγικό ρεύμα τέτοιας φοράς, ώστε -σύμφωνα με τον κανόνα του Lenz - να δρα επί του πλαισίου ζεύγος μαγνητικών δυνάμεων, το οποίο αντιστέκεται στην περιστροφή του πλαισίου. (Όποιος έχει κάνει ποδήλατο με δυναμό, ένοιωσε την δράση του ζεύγους αυτού!). Η υπερνίκηση των εν λόγω μαγνητικών δυνάμεων απαιτεί την προσφορά έργου, το οποίο τελικά και μετατρέπεται σε ηλεκτρική ενέργεια. Με άλλα λόγια, οι γεννήτριες ηλεκτρικού ρεύματος δεν «γεννούν» ρεύμα εκ του μηδενός, αλλά το παράγουν δαπανώντας άλλες μορφές ενέργειας, όπως άλλωστε απαιτεί και η παγκόσμια αρχή διατηρήσεως της ενέργειας.

γ3) Χρονικώς μεταβαλλόμενα μαγνητικά πεδία: Στις δύο παραπάνω περιπτώσεις η εμφάνιση επαγωγικής τάσεως ήταν αποτέλεσμα της σχετικής κίνησης μαγνητών και αγωγών. Αυτό όμως δεν σημαίνει, ότι ο αποφασιστικός παράγων είναι η κίνηση, αλλά - όπως μεγαλοφυώς συνειδητοποίησε ο Faraday - η μέσω αυτής προκαλούμενη μεταβολή της μαγνητικής ροής.

Μεταβολή της μαγνητικής ροής μπορούμε να έχουμε κάλλιστα και στην περίπτωση ακινητών αγωγών: αρκεί να μεταβάλλεται χρονικώς το μαγνητικό πεδίο, εντός του οποίου ευρίσκονται. Το παρακάτω παράδειγμα θα μας πείσει εξάλλου, ότι δεν υπάρχει ουσιαστική διαφορά μεταξύ της κατ' αυτόν τον τρόπο προκαλούμενης μεταβολής της μαγνητικής ροής και εκείνης μέσω σχετικής κίνησης:

Ας υποθέσουμε, ότι διαθέτουμε δύο πλαίσια, εκ των οποίων το ένα διαρρέεται από ρεύμα, ενώ το άλλο είναι συνδεδεμένο με ένα γαλβανόμετρο (βλ. σχ. 4.19). Μεταξύ των δύο πλαισίων παρεμβάλλεται αδιαφανές υφασμάτινο πέτασμα, έτσι ώστε έκαστο των πλαισίων να μην μπορεί να «δει», τι κάνει το άλλο. Μεταβάλλουμε τώρα την μέσω του πλαισίου 2 διερχόμενη μαγνητική ροή μετακινώντας το πλαίσιο 1, οπότε το γαλβανόμετρο μας δείχνει την διέλευση (του επαγωγικού) ρεύματος, το οποίο οφείλεται στην εμφάνιση της επαγωγικής τάσεως. Στην συνέχεια επαναφέρουμε το πλαίσιο 1 στην αρχική του θέση και - χωρίς να το μετακινούμε - μεταβάλλουμε μέσω του ροοστάτη την ένταση του ρεύματος κατά τέτοιο τρόπο, ώστε η μέσω του πλαισίου 2 διερχόμενη μαγνητική ροή να μεταβάλλεται με τον ίδιο ακριβώς ρυθμό, όπως και προηγουμένως. Όπως είναι προφανές, το πλαίσιο 2 δεν μπορεί να αντιληφθεί, αν η εν λόγω μεταβολή

της μαγνητικής ροής οφείλεται στην κίνηση του πλαισίου 1 ή στην μεταβολή του αυτό διαρρέοντος ρεύματος. Έτσι στα άκρα του αναπτύσσεται η ίδια επαγωγική τάση, όπως και προηγουμένως, πράγμα το οποίο επιβεβαιώνει το ρεύμα, το οποίο μας δείχνει το γαλβανόμετρο.

Σχήμα 4.19: Για την κατάδειξη της καθοριστικής σημασίας του ρυθμού μεταβολής της μαγνητικής στο φαινόμενο της ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής.

Από τα παραπάνω γίνεται φανερό, ότι

επαγωγική ΗΕΔ εμφανίζεται σαν συνέχεια της μεταβολής της μαγνητικής ροής, άσχετα με το αίτιο που την προκαλεί.

Ενώ τώρα στην περίπτωση που η μαγνητική ροή μεταβάλλεται εξ αιτίας της σχετικής κίνησης αγωγών και μαγνητών, η *εναγόμενη* ΗΕΔ μπορεί να ερμηνευτεί ως το μακροσκοπικό αποτέλεσμα της δράσης της δύναμης Lorentz επί των ελευθέρων ηλεκτρονίων, η εμφάνιση της στην περίπτωση ακινησίας, λόγω μεταβολής του μαγνητικού πεδίου, μας αναγκάζει να δεχτούμε την εμφάνιση (εξ επαγωγής) ηλεκτρικού πεδίου έντασης \vec{E} :

Γύρω από κάθε χρονικά μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο επάγεται ένα ηλεκτρικό πεδίο.

Το επαγόμενο αυτό ηλεκτρικό πεδίο διαφέρει σημαντικά από τα γνωστά μας ηλεκτροστατικά πεδία. Η γενεσιουργός του αιτία δεν είναι κάποια φορτία αλλά κάποιο μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο. Εξ αιτίας της ιδιαιτερότητας αυτής

τα επαγόμενα ηλεκτρικά πεδία είναι πεδία μη συντηρητικά και έχουν κλειστές δυναμικές γραμμές,

ενώ τα ηλεκτροστατικά πεδία είναι, όπως είδαμε, πεδία συντηρητικά και οι δυναμικές τους γραμμές πηγάζουν από θετικά και καταλήγουν σε αρνητικά φορτία.

Η επαγωγή ηλεκτρικού πεδίου γύρω από ένα χρονικώς μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο βρίσκει σημαντικότερη εφαρμογή στον τομέα των επιταχυντών στοιχειωδών σωματιδίων και συγκεκριμένα ηλεκτρονίων σε πολύ υψηλές ταχύτητες ($\geq 0,999986c$, όπου c η ταχύτητα του φωτός). Ο προς τον σκοπό αυτό χρησιμοποιούμενος επιταχυντής καλείται **βήτατρο**, επειδή τα ταχέως κινούμενα ηλεκτρόνια

καλούνται - για ιστορικούς λόγους - και **σωματίδια βήτα**. Τα ηλεκτρόνια υψηλής (κινητικής) ενέργειας χρησιμοποιούνται κυρίως για την παραγωγή λίαν διεισδυτικών (υψηλοσύχνων) ακτινών Χ, οι οποίες χρησιμοποιούνται τόσο στην Ιατρική (ακτινοθεραπεία) όσο και στην Βιομηχανία.

Ο νόμος της ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής του Faraday είναι τόσο σημαντικός, ώστε (ελαφρώς γενικευμένος από τον Maxwell) αποτελεί μια από τις τέσσερις θεμελιώδεις εξισώσεις του Ηλεκτρομαγνητισμού.

μ.γ.ό.ε.

4. 6. 1 Ο νόμος της ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής ως μία από τις εξισώσεις του Maxwell

Ας θεωρήσουμε έναν κλειστό αγωγίμο βρόγχο τυχαίου σχήματος, ο οποίος ευρίσκεται εντός ενός χρονικώς μεταβαλλόμενου μαγνητικού πεδίου. Ακόμη και αν ο βρόγχος είναι ακίνητος (σε σχέση προς το μαγνητικό πεδίο) θα παρατηρήσουμε (π.χ. με την βοήθεια γαλβανομέτρου, βλ. σχ. 4.20), ότι διαρρέεται από ρεύμα. Αυτό σημαίνει, ότι στα «άκρα» του εμφανίζεται ΗΕΔ εξ επαγωγής, η οποία σύμφωνα με τον νόμο του Faraday είναι:

$$E_{επ} = - \frac{d\Phi}{dt} \quad \{1\}$$

Στην παραπάνω σχέση το Φ παριστάνει την μέσω του βρόγχου διερχόμενη μαγνητική ροή, η οποία θα δίδεται από την σχέση [4.3]:

$$\Phi = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad \underline{\underline{\{2\}}}$$

Η μεταβολή $d\Phi / dt$ της μαγνητικής ροής οφείλεται στην συγκεκριμένη περίπτωση στην χρονική μεταβολή του μαγνητικού πεδίου \vec{B} :

$$d\Phi / dt = d\left(\oint \vec{B} d\vec{S}\right) / dt \stackrel{\text{εδω}}{=} \oint \left(d\vec{B} / dt\right) d\vec{S} \quad \{3\}.$$

Η μετακίνηση των φορέων φορτίου εντός του αγωγίμου βρόγχου οφείλεται, όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, στην δράση ενός εξ επαγωγής εμφανιζομένου ηλεκτρικού πεδίου έντασης \vec{E} . Το πεδίο αυτό προσφέρει κατά τα γνωστά ανά μονάδα φορτίου έργο ίσο με $\int \vec{E} d\vec{l}$. Το έργο αυτό έχει εξ ορισμού διαστάσεις ΗΕΔ, και για κάθε κλειστή διαδρομή είναι ίσο με $\oint \vec{E} d\vec{l}$. Το ολοκλήρωμα αυτό όχι μόνο δεν είναι ίσο με μηδέν, όπως θα συνέβαινε στην περίπτωση του ηλεκτροστατικού πεδίου λόγω της συντηρητικότητάς του, αλλά ισούται σύμφωνα με τον νόμο του Faraday {1} με τον ρυθμό μεταβολής της μαγνητικής ροής μέσω του βρόγχου. Παίρνοντας λοιπόν υπόψη και την εξίσωση {3} γράφουμε:

$$E_{\varepsilon\pi} = \oint \vec{E} d\vec{l} = -\oint \frac{d\vec{B}}{dt} d\vec{S} \quad \{4\}$$

Σημειώνουμε ότι η παραπάνω σχέση δίδει την **ΗΕΔ εξ επαγωγής στα άκρα ακινήτου βρόγχου**, ο οποίος ευρίσκεται **εντός χρονικώς μεταβαλλόμενου μαγνητικού πεδίου**.

Προκειμένου να γενικεύσουμε την σχέση {4} και για την περίπτωση κινουμένου (σε σχέση πάντα προς το μαγνητικό πεδίο) βρόγχου, θεωρούμε κατ' αρχήν την περίπτωση ευθυγράμμου αγωγού, ο οποίος κινείται εντός ομογενούς μαγνητικού πεδίου (βλ. 4.6.γ1). Όπως είδαμε, η εμφάνιση ΗΕΔ εξ επαγωγής στα άκρα του εν λόγω αγωγού αποδίδεται στην δράση της δύναμης Lorentz $\vec{F}_L = q[\vec{v} \times \vec{B}]$ επί των κινουμένων ελευθέρων ηλεκτρονίων του αγωγού. Η δράση της δύναμης αυτής είναι προφανώς ισοδύναμη με την εμφάνιση ηλεκτρικού πεδίου εντάσεως $\vec{E} = \vec{F}_L / q = [\vec{v} \times \vec{B}]$ στο εσωτερικό του κινουμένου αγωγού. Το ηλεκτρικό αυτό πεδίο προσφέρει σε οιονδήποτε φορέα φορτίου μετακινηθεί κάτω από την δράση του έργο $W = q \int_0^l \vec{E} d\vec{l}$, όπου l το μήκος του ευθυγράμμου αγωγού, το οποίο είναι και το μήκος κατά το οποίο και δρα το εξ επαγωγής ηλεκτρικό πεδίο. Το έργο αυτό, ανά μονάδα φορτίου αναγόμενο, έχει διαστάσεις ΗΕΔ, η οποία δεν είναι άλλη από την γνωστή μας (βλ. 4.6.γ1) **ΗΕΔ** εξ επαγωγής:

$$E_{\varepsilon\pi} = \frac{W}{q} = \int_0^l \vec{E} d\vec{l} = \int_0^l [\vec{v} \times \vec{B}] d\vec{l} \quad \{5\}$$

$$\left(\begin{array}{l} \vec{v} = \sigma a \theta. \\ \vec{B} = \text{ομογενές} \\ = \\ \text{vBl sin } \vartheta, \text{ όπου } \vartheta \text{ η γωνία μεταξύ } \vec{v} \text{ και } \vec{B}. \\ \text{Ξαναπαίρνουμε δηλαδή την σχέση [4.15].} \end{array} \right)$$

Η σχέση {5} ισχύει ακόμη και στην περίπτωση αγωγού τυχαίου σχήματος, κινουμένου εντός χρονικώς αμετάβλητου, μη ομογενούς μαγνητικού πεδίου, όπως προκύπτει από το ακόλουθο σκεπτικό:

Μπορούμε να θεωρήσουμε τον αγωγό αποτελούμενο από απειροστά (και άρα ευθύγραμμα) τμήματα $d\vec{l}$, στα άκρα έκαστου των οποίων εμφανίζεται η στοιχειώδης ΗΕΔ $dE_{\varepsilon\pi} = \vec{E} d\vec{l} = [\vec{v} \times \vec{B}] d\vec{l}$, όπου \vec{E} είναι η ένταση του εξ επαγωγής ηλεκτρικού πεδίου στο εσωτερικό του συγκεκριμένου στοιχείου $d\vec{l}$, \vec{v} η ταχύτητα του στοιχείου και \vec{B} το μαγνητικό πεδίο στην θέση του συγκεκριμένου στοιχείου. Η ΗΕΔ στα άκρα του αγωγού συνολικά, θα υπολογίζεται προσθέτοντας (\rightarrow ολοκληρώνοντας) τις στοιχειώδεις ΗΕΔs κατά μήκος του αγωγού:

$$E_{\varepsilon\pi} = \int dE_{\varepsilon\pi} = \int_0^l \vec{E} d\vec{l} = \int_0^l [\vec{v} \times \vec{B}] d\vec{l} \quad \{6\}$$

Σημειώνουμε, ότι η παραπάνω σχέση δίδει την **HEΔ εξ επαγωγής στα άκρα** (ανοιχτού) **αγωγού, τυχαίου σχήματος, κινουμένου εντός μη ομογενούς, χρονικώς αμετάβλητου μαγνητικού πεδίου**. Η σχέση δε αυτή θα ισχύει ακόμη και στην ακραία περίπτωση που τα άκρα του αγωγού συμπίπτουν, όταν δηλαδή ο αγωγός είναι ένας κλειστός βρόγχος:

$$E_{\varepsilon\pi} = \oint dE_{\varepsilon\pi} = \oint \vec{E} d\vec{l} = \oint [\vec{v} \times \vec{B}] d\vec{l} \quad \{7\}$$

Η σχέση αυτή μας επιτρέπει λοιπόν να υπολογίζουμε την **HEΔ εξ επαγωγής στα «άκρα» κινουμένου βρόγχου, εντός χρονικώς αμετάβλητου μαγνητικού πεδίου**.

Στην γενική περίπτωση κατά την οποία έχουμε και χρονικώς μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο, θα πρέπει να προσθέσουμε τις κατά τις σχέσεις {7} και {4} επαγόμενες HEΔs:

$$E_{\varepsilon\pi} = \oint \vec{E} d\vec{l} = -\oint \frac{d\vec{B}}{dt} d\vec{S} + \oint [\vec{v} \times \vec{B}] d\vec{l} \Rightarrow \oint \vec{E} d\vec{l} - \oint [\vec{v} \times \vec{B}] d\vec{l} = -\oint \frac{d\vec{B}}{dt} d\vec{S} \Rightarrow$$

$$\oint (\vec{E} - [\vec{v} \times \vec{B}]) d\vec{l} = -\oint \frac{d\vec{B}}{dt} d\vec{S} \quad [4.17]$$

Η σχέση αυτή, η οποία αποτελεί ουσιαστικά την επαναδιατύπωση του νόμου της ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής του Faraday, είναι μια από τις θεμελιώδεις εξισώσεις του Ηλεκτρομαγνητισμού: **η δεύτερη από τις εξισώσεις του Maxwell**. Σημειώτεον ότι \vec{E} είναι η ένταση του επαγόμενου ηλεκτρικού πεδίου για έναν με την ταχύτητα \vec{v} ως προς το μαγνητικό πεδίο \vec{B} κινούμενο παρατηρητή.

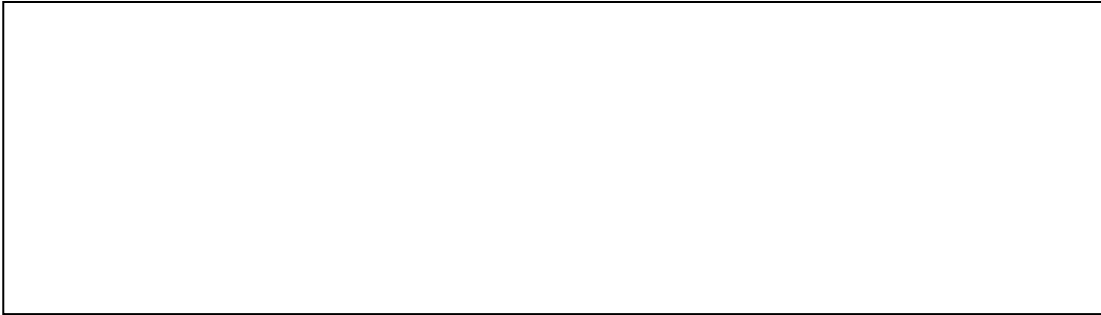
Παράδειγμα 4.6.1: Ορθογώνιο πλαίσιο, κινούμενο με σταθερή ταχύτητα v εισέρχεται εντός ομογενούς μαγνητικού πεδίου έντασης B , το οποίο εκτείνεται εντός τετραγωνικής περιοχής πλευράς l . Οι πλευρές του πλαισίου είναι a και b (μικρότερα l). Ζητείται ο προσδιορισμός της μέσω του πλαισίου διερχόμενης μαγνητικής ροής καθώς και της επαγομένης HEΔ, και η γραφική παράσταση των δύο αυτών μεγεθών συναρτήσει της θέσεως του πλαισίου θεωρώντας ότι $l = 20\text{cm}$, $a = 2\text{cm}$, $b = 3\text{cm}$, $B = 1,5\text{T}$ και $v = 2\text{m/s}$.

Λύση:

Παίρνοντας υπόψη ότι το μαγνητικό πεδίο είναι ομογενές και πάντα κάθετο προς το πλαίσιο, έχουμε για την μέσω αυτού διερχόμενη μαγνητική ροή Φ :

$$\Phi = BS = Bac \quad \{1\}$$

όπου c το εντός του μαγνητικού πεδίου ευρισκόμενο τμήμα της πλευράς b (βλ. σχήμα) του πλαισίου.



Σύμφωνα με την σχέση {1} και τα δεδομένα του προβλήματος, η μέσω του πλαισίου

διερχόμενη μαγνητική ροή παίρνει τις ακόλουθες τιμές:

όταν $c=0$ δηλαδή το πλαίσιο βρίσκεται εκτός μαγνητικού πεδίου: $x \leq 0$ και $x \geq (l+b)$

όταν ολόκληρο το πλαίσιο βρίσκεται εντός του πεδίου: $b \leq x \leq l$

$$\left| \begin{array}{l} 0 \\ Bab \\ Bax \\ Ba[b - (x - 1)] \end{array} \right.$$

Σημειωτέον ότι το x παριστάνει την συντεταγμένη της μετωπικής πλευράς του πλαισίου. (Για τους πολύ σχολαστικούς και προς αποφυγή παρεξηγήσεων λόγω του υποτιθέμενου αμελητέου πάχους των πλευρών του πλαισίου, όταν το $x=0$ θεωρούμε ότι το πλαίσιο βρίσκεται ακόμη εκτός του μαγνητικού πεδίου).

Η επαγόμενη ΗΕΔ θα παίρνει επομένως (σύμφωνα με τον νόμο [4.14] του Faraday: $E_{επ} = -d\Phi / dt$) τις ακόλουθες τιμές:

όταν $c=0$ δηλαδή το πλαίσιο βρίσκεται εκτός μαγνητικού πεδίου: $x \leq 0$ και $x > (l+b)$

όταν ολόκληρο το πλαίσιο βρίσκεται εντός του πεδίου: $b < x < l$

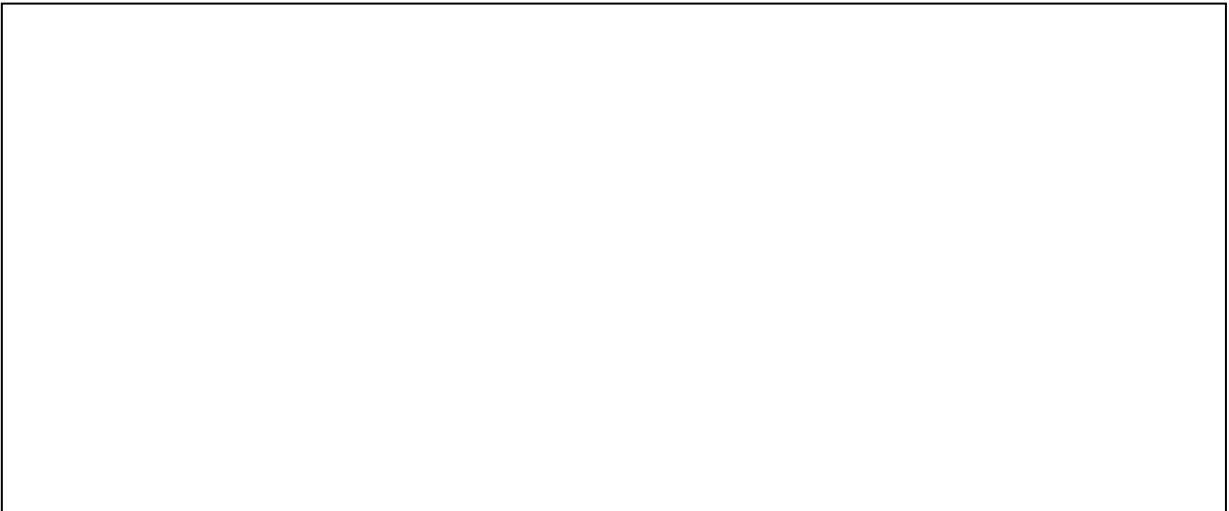
$$\left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ -Ba(dx/dt) = -Bav \\ -Bad[b - (x - 1)]/dt = Bav \end{array} \right.$$

Αν αντικαταστήσουμε τα αριθμητικά δεδομένα στις παραπάνω σχέσεις παίρνουμε:

$$\Phi = \begin{cases} 0 & \text{όταν } x \leq 0 \text{ και } x \geq 23\text{cm} \\ 1,5T \cdot 2 \cdot 10^{-2} \text{m} \cdot 3 \cdot 10^{-2} \text{m} = 9 \cdot 10^{-4} \text{Wb} & \text{όταν } 3 \cdot 10^{-2} \text{m} \leq x \leq 20 \cdot 10^{-2} \text{m} \\ 1,5 \cdot 2 \cdot 10^{-2} x = 3 \cdot 10^{-2} x \text{Wb} & \text{κατά την είσοδο : } 0 \leq x \leq 3 \cdot 10^{-2} \text{m} \\ 1,5 \cdot 2 \cdot 10^{-2} [3 \cdot 10^{-2} - (x - 20 \cdot 10^{-2})] & \text{κατά έξοδο } 20 \cdot 10^{-2} \text{m} \leq x \leq 23 \cdot 10^{-2} \text{m} \end{cases}$$

$$E_{\text{επ}} = \begin{cases} 0 & \text{όταν } x \leq 0 \text{ και } x > 23 \cdot 10^{-2} \text{m} \\ 0 & \text{όταν } 3\text{cm} < x \leq 20 \cdot 10^{-2} \text{m} \\ -1,5T \cdot 2 \cdot 10^{-2} \text{m} \cdot 2\text{m/s} = -6 \cdot 10^{-2} \text{V} & \text{κατά την είσοδο : } 0 < x \leq 3 \cdot 10^{-2} \text{m} \\ +6 \cdot 10^{-2} \text{V} & \text{κατά την έξοδο } 20 \cdot 10^{-2} \text{m} < x \leq 23 \cdot 10^{-2} \text{m} \end{cases}$$

Η μεταβολή της ροής και της επαγόμενης ΗΕΔ συναρτήσει της βάσεως του πλαισίου αποδίδονται γραφικά στο ακόλουθο διάγραμμα



Παράδειγμα 4.6.2: Σωληνοειδές με 2000 σπείρες ακτίνας 0,1 m στρέφεται γύρω από άξονα κάθετο προς τις δυναμικές γραμμές του γήινου μαγνητικού πεδίου με συχνότητα 30 Hz. Ζητείται η μέγιστη επαγόμενη ΗΕΔ, αν η ένταση του πεδίου ισούται με $5 \cdot 10^{-5}$ T.

Λύση:

Η στα άκρα του σωληνοειδούς επαγόμενη ΗΕΔ δίδεται από την σχέση [4.16]:

$$E_{\varepsilon\pi} = NBS\omega \sin(\omega t) \quad \{1\}.$$

N είναι ο αριθμός των σπειρών του σωληνοειδούς, με τον οποίο και πολλαπλασιάσαμε την σχέση [4.16], λόγω του ότι είχε υπολογισθεί, για μια σπείρα.

Σύμφωνα με την σχέση {1} η μέγιστη τιμή της $E_{\varepsilon\pi}$ θα αναπτύσσεται, όταν $\sin(\omega t) = 1$ και θα είναι:

$$E_{\varepsilon\pi}^{\max} = NBS\omega = NB(\pi r^2)2\pi\nu = 2000 \cdot 5 \cdot 10^{-5} (3,14 \cdot 0,1^2) 2 \cdot 3,14 \cdot 30 \Rightarrow E_{\varepsilon\pi}^{\max} = 0,59V$$

Παράδειγμα 4.6.3: Η μαγνητική ροή μέσω του πλαισίου, το οποίο εικονίζεται στο παρακάτω σχήμα, μεταβάλλεται με τον χρόνο σύμφωνα με την σχέση: $\Phi = 2t^2 - 3t + 3mWb$ {1}. Ζητείται η γραφική παράσταση της επαγόμενης ΗΕΔ συναρτήσει του χρόνου.

Λύση:



Η ΗΕΔ δίδεται από το νόμο της ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής του Faraday:

$$E_{\varepsilon\pi} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(2t^2 - 3t + 3) = -(2 \cdot 2t - 3)$$

$$\Rightarrow E_{\varepsilon\pi} = -4t + 3mV$$



Η εξάρτηση της ΗΕΔ από τον χρόνο αποδίδεται γραφικά στο παρακάτω διάγραμμα:

Σημειώνουμε, ότι το επαγωγικό ρεύμα θα διαρρέει το πλαίσιο αντίστροφα προς την φορά των δεικτών του ρολογιού, προσπαθώντας σύμφωνα με τον κανόνα του Lenz να αναιρέσει το αίτιο που το προκαλεί.

4.6.2 Εφαρμογές του φαινομένου της ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής

Το φαινόμενο της ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής βρίσκει ευρύτατες εφαρμογές στην τεχνολογία, οι σπουδαιότερες από τις οποίες περιγράφονται εν συντομία στην συνέχεια.

α) Δυνορεύματα: Τα μέσω ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής στο εσωτερικό συμπαγών αγωγών εμφανιζόμενα ρεύματα, καλούνται **ρεύματα Foucault ή δυνορεύματα**, το τελευταίο επειδή συχνά είναι κυκλικά. Η φορά τους προσδιορίζεται από τον κανόνα του Lenz. Η εμφάνιση των δυνορευμάτων συνεπάγεται την μετατροπή ενέργειας σε θερμότητα μέσω του φαινομένου Joule. Η εν λόγω ενέργεια προέρχεται είτε από την μηχανική ενέργεια, η οποία δαπανάται για την κίνηση του αγωγού, είτε - στην περίπτωση ακινήτων αγωγών εντός χρονικώς μεταβαλλόμενων μαγνητικών πεδίων - από την ηλεκτρική, η οποία απαιτείται για την δημιουργία των χρονικώς μεταβαλλόμενων μαγνητικών πεδίων. Στην δεύτερη περίπτωση η παραγόμενη θερμική ισχύς είναι ανάλογη προς το τετράγωνο της συχνότητας του μαγνητικού πεδίου. Για τον λόγο αυτό στους λεγόμενους **ηλεκτρομαγνητικούς φούρνους** χρησιμοποιούνται για την δημιουργία του μαγνητικού πεδίου υψηλόσυχνα ρεύματα, ώστε να παράγεται μεγάλη θερμική ισχύς.

Προκειμένου να περιοριστούν οι ενεργειακές απώλειες μέσω δυνορευμάτων κατασκευάζουμε τα μαγνητιζόμενα στοιχεία των διαφόρων συσκευών (π.χ. τους πυρήνες των μετασχηματιστών) **φυλλωτά** και διατάσσουμε τα μεμονωμένα φύλλα **παράλληλα** προς τις μαγνητικές γραμμές.

β) Δυναμικά μικρόφωνα: Χρησιμοποιούνται για την μετατροπή ηχητικών ταλαντώσεων (ήχων) σε ηλεκτρικές. Αυτό επιτυγχάνεται π.χ. με την βοήθεια λεπτού ταινιωτού αγωγού, ο οποίος ταλαντώνεται κάτω από την επίδραση της πίεσης των ηχητικών κυμάτων μεταξύ των πόλων ενός μόνιμου μαγνήτη. Έτσι η επαγομένη ΗΕΔ μεταβάλλεται στον ρυθμό του ήχου.

γ) Ηλεκτρομαγνητικοί μεταποιητές: Χρησιμοποιούνται για την μετατροπή μηχανικών μεγεθών, (π.χ. δυνάμεων, ταχυτήτων, επιταχύνσεων) σε ηλεκτρικές τάσεις. Η λειτουργία τους είναι παρόμοια με εκείνη των δυναμικών μικροφώνων: κάτω από την επίδραση του προς μέτρηση μηχανικού μεγέθους έχουμε την μετακίνηση ενός αγωγού (συνήθως πρόκειται για σωληνοειδές προς αύξηση της ευαισθησίας) εντός στατικού μαγνητικού πεδίου, οπότε στα άκρα του εμφανίζεται ΗΕΔ εξ επαγωγής, η τιμή της οποίας είναι ανάλογη προς το μηχανικό μέγεθος.

δ) Μαγνητοϋδροδυναμικά φαινόμενα: Το φαινόμενο της ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής εμφανίζεται φυσικά και στην περίπτωση ρευστών αγωγών, δηλαδή στην περίπτωση αγωγίμων υγρών και αερίων, και επηρεάζει σημαντικά τα χαρακτηριστικά ροής και τις επιμέρους ιδιότητές τους. Το γεγονός αυτό έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση πολλών και σπουδαίων φαινομένων, με την μελέτη των οποίων ασχολείται ένας ιδιαίτερος επιστημονικός κλάδος, η **Μαγνητοϋδροδυναμική**. Για παράδειγμα, η ροή ενός αγωγίμου υγρού εντός μαγνητικού πεδίου εγείρει την δράση της δύναμης Lorentz επί των κινουμένων ιόντων με αποτέλεσμα την αύξηση του συντελεστού ιξώδους του υγρού. Το γεγονός αυτό συνεπάγεται την αύξηση

της απαιτούμενης βαθμίδας πίεσεως για την διατήρηση της ροής.

Εξάλλου η διάδοση του ήχου εντός ακινήτων ρευστών, διαρρεομένων από ρεύμα και ευρισκομένων εντός μαγνητικού πεδίου, γίνεται αρκετά πολύπλοκη, λόγω του γεγονότος ότι στην ήδη επικρατούσα υδροστατική πίεση προστίθεται και η πίεση, η οποία δημιουργείται από την δύναμη Lorentz.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει επίσης η μελέτη της συμπεριφορά του εντός μαγνητικού πεδίου ευρισκομένου πλάσματος (Ως πλάσμα χαρακτηρίζεται η κατάσταση εκείνη της ύλης, η οποία προκύπτει αν θερμάνουμε ένα αέριο σε τόσο υψηλές θερμοκρασίες, ώστε να ιονισθεί μέρος των ατόμων του. Ανάλογα δε με το βαθμό ιονισμού διακρίνουμε ασθενώς, μετρίως και ολικώς ιονισμένο πλάσμα, όταν ο βαθμός ιονισμού είναι μικρότερος του 1%, όταν ανέρχεται σε μερικά %, και όταν πλησιάζει το 100% αντιστοίχως.).

Στο φαινόμενο της ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής στην περίπτωση ταχέως κινουμένου πλάσματος στηρίζεται η λειτουργία της λεγόμενης μαγνητούδροδυναμικής (MHD) γεννήτριας ηλεκτρικής ενέργειας. Με την βοήθεια καταλλήλου ακροφυσίου επιταχύνουμε δέσμη πλάσματος σε υπερηχητική ταχύτητα και την διοχετεύουμε εντός μαγνητικού πεδίου, το οποίο δημιουργείται με την βοήθεια υπεραγωγίων ηλεκτρομαγνητών, προκειμένου να έχει μεγάλη ένταση. Η ένταση του μαγνητικού πεδίου είναι κάθετη προς την διεύθυνση ροής (βλ. σχ. 4.21). Παράλληλα δε προς το επίπεδο τους τοποθετείται ζεύγος ηλεκτροδίων, προς τα οποία και εκτρέπονται τα ηλεκτρόνια και θετικά ιόντα του πλάσματος, τα μεν



Σχήμα 4.21: Αρχή λειτουργίας της μαγνητούδροδυναμικής γεννήτριας σχηματικά

πρώτα προς το επάνω τα δε δεύτερα προς το κάτω ηλεκτρόδιο, εξ αιτίας της δύναμης Lorentz.

Μέσω της MHD - γεννήτριας έχουμε απ' ευθείας μετατροπή κινητικής σε ηλεκτρική ενέργεια, χωρίς την χρήση κινουμένων μηχανικών μερών, όπως συμβαίνει στις συμβατικές ηλεκτρογεννήτριες (βλ. στην συνέχεια). Για θερμοκρασίες περί τους 3000 K ο βαθμός αποδόσεως της MHD - γεννήτριας ανέρχεται σε 0.5 ~ 0,6, είναι δηλαδή ιδιαίτερα υψηλός.

Σημειωτέον ότι η αρχή λειτουργίας της MHD - γεννήτριας βρίσκει εφαρμογή και στην μέτρηση της **ταχύτητας ροής** του πλάσματος και αγωγίων ρευστών γενικώς.

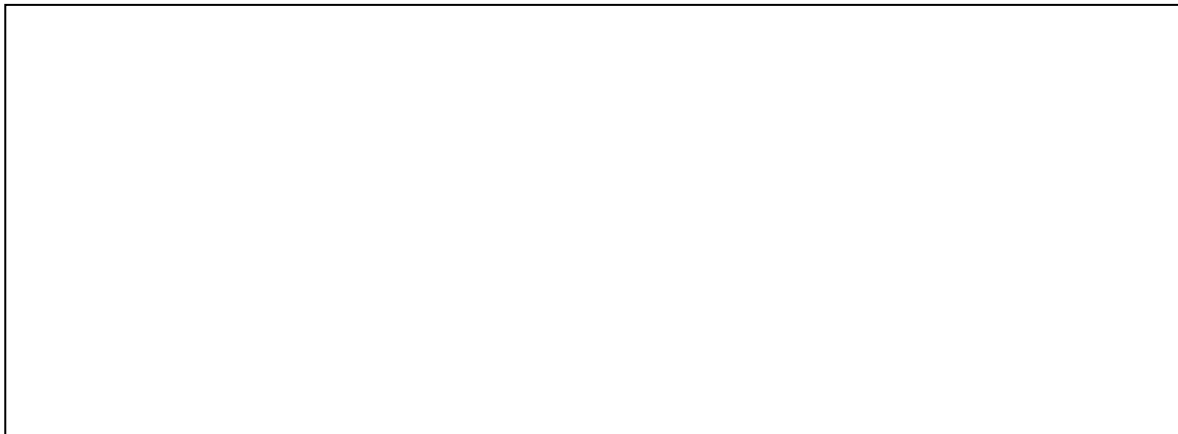
Η λειτουργία της MHD - γεννήτριας μπορεί να αντιστραφεί: Εφαρμόζοντας μια συνεχή τάση επί των ηλεκτροδίων, αντιθέτου πόλωσης με πριν, προκαλούμε εντός του πλάσματος ένα κάθετο προς την διεύθυνση ροής ρεύμα, αντιθέτου φοράς από εκείνο στην MHD - γεννήτρια. Το ρεύμα αυτό εγείρει την δράση δύναμης Lorentz, η οποία επιταχύνει τα φορτισμένα σωματίδια του πλάσματος σε ταχύτητες πολύ

μεγαλύτερες από την αρχική. Με τον τρόπο αυτό πετυχαίνουμε ταχύτητες σωματιδίων σημαντικά μεγαλύτερες από εκείνες μέσω καύσεως στους πυραυλοκινητήρες, ανοίγοντας έτσι νέες προοπτικές στην **κίνηση διαστημοπλοίων**.

ε) Γεννήτριες εναλλασσόμενου και συνεχούς ρεύματος: Αποτελούν την πιο διαδεδομένη και προς στιγμήν σημαντικότερη εφαρμογή του φαινομένου της ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής, μια και με την βοήθειά τους παράγεται το σύνολο σχεδόν της ηλεκτρικής ενέργειας σε παγκόσμια κλίμακα. Η αντιστροφή εξάλλου της λειτουργίας τους αντιστοιχεί σ' εκείνη του **ηλεκτροκινητήρα**. Ας πάρουμε όμως τα πράγματα με την σειρά.

Εναλλασσόμενη καλείται η **τάση**, της οποίας η τιμή και φορά (δηλ. το πρόσημο) είναι **περιοδικές** συναρτήσεις του χρόνου. Η εναλλασσόμενη δε τάση της οποίας η τιμή είναι **ημιτονοειδής** συνάρτηση του χρόνου καλείται **αρμονική**.

Η παραγωγή εναλλασσόμενης τάσης στηρίζεται στο φαινόμενο της ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής: Αν η μαγνητική ροή, η οποία διαρρέει βρόγχο ή σωληνοειδές μεταβάλλεται περιοδικά με τον χρόνο, τότε και η επαγόμενη ΗΕΔ (τάση) θα είναι περιοδική συνάρτηση του χρόνου, χωρίς βέβαια οι δύο συναρτήσεις να έχουν την ίδια ακριβώς χρονική εξάρτηση. Την περιοδική μεταβολή της μαγνητικής ροής για συχνότητες μικρότερες του ενός kHz μπορούμε να την πετύχουμε με τους δύο τρόπους, οι οποίοι αποδίδονται παρακάτω σχηματικά.



Και στις δύο παραπάνω περιπτώσεις επάγεται **εναλλασσόμενη** τάση, εφόσον η γωνιακή ταχύτητα είναι **περιοδική** συνάρτηση του χρόνου. Στην ειδική δε περίπτωση που η **γωνιακή ταχύτητα** είναι **σταθερή**, η εναλλασσόμενη τάση είναι **αρμονική**, όπως θα δούμε ευθύς αμέσως για την περίπτωση περιστρεφόμενου πλαισίου εντός ομογενούς μαγνητικού πεδίου:

Η ροή Φ μέσω του πλαισίου δίδεται από την σχέση $\Phi = BS \cos \varphi$ {1},

όπου S το εμβαδόν του πλαισίου και φ η γωνία ανάμεσα στην ένταση του μαγνητικού πεδίου και την κάθετη επί του πλαισίου.

Αν το πλαίσιο περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω , έτσι ώστε η κάθετη επί του πλαισίου να διαγράφει εντός χρόνου t γωνία φ , θα ισχύει η σχέση $\omega = \varphi/t$ {2},

Αντικαθιστώντας την {2} στην {1} παίρνουμε για την μαγνητική ροή Φ την ακόλουθη έκφραση:

$$\Phi = BS \cos \omega t \quad \{3\}$$

Η επαγωγική τάση u στα άκρα του πλαισίου θα είναι σύμφωνα με τον νόμο της ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής [4.14]:

$$u = -\frac{d\Phi}{dt} \stackrel{\{3\}}{=} -\frac{d}{dt}[BS \cos \omega t] = -[-\omega BS \sin \omega t] \Rightarrow u = u_0 \sin \omega t \quad \text{αρμονική τάση} \quad [4.18]$$

όπου $u_0 = \text{πλάτος τάσεως}$

$$\omega t = \text{φάση}$$

$\omega = \text{κυκλική συχνότητα}$ (της αρμονικής τάσεως)

Πολλές φορές αντί της κυκλικής συχνότητας ω προτιμάται η συχνότητα ν ή η περίοδος T . Μεταξύ των τριών αυτών μεγεθών ισχύουν οι γνωστές σχέσεις: $\omega = 2\pi\nu = 2\pi / T$ {4}, με την βοήθεια των οποίων παίρνουμε τις ισοδύναμες με την [4.18] εκφράσεις

$$u = u_0 \sin(2\pi\nu t) = u_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \quad [4.18\alpha]$$

Επανεθυμίζουμε, ότι

η συχνότητα ισούται με τον αριθμό των περιστροφών του πλαισίου στην μονάδα του χρόνου.

η περίοδος ισούται με τον χρόνο που απαιτείται για την ολοκλήρωση μιας πλήρους περιστροφής.

Σημειωτέον, ότι τα ευρωπαϊκά δίκτυα εναλλασσομένου ρεύματος έχουν συχνότητα 50 Hz (άρα περίοδο 0.02 s) ενώ τα αμερικανικά 60 Hz.

Στο σχήμα 4.23 αποδίδεται γραφικά το λεγόμενο χρονοδιάγραμμα της αρμονικής τάσης, δηλαδή η γραφική της παράσταση συναρτήσεως του χρόνου.

Σχήμα 4.23: Γραφική - παράσταση αρμονικής (αριστερά) και ανορθωμένης (με ένα πλαίσιο στο μέσο και με δύο πλαίσια σε σειρά δεξιά) τάσης.

Τα άκρα του περιστρεφόμενου πλαισίου (ή σωληνοειδούς) μιας γεννήτριας εναλλασσομένου ρεύματος καταλήγουν σε δύο μαζί με το πλαίσιο περιστρεφομένους δακτυλίους (βλ. σχ. 4.24a). Επί των δακτυλίων εφάπτονται δύο κατάλληλα διαμορφωμένα τεμάχια (συνήθως από άνθρακα), τα οποία καλούνται ψήκτρες, και τα οποία συνδέονται με το εξωτερικό κύκλωμα, το οποίο τροφοδοτεί η γεννήτρια. Αν οι δύο αυτοί δακτύλιοι αντικατασταθούν με δύο μονωμένους μεταξύ τους ημιδακτυλίους (βλ. σχ. 4.24b), τότε η παρά των ψηκτρών παραλαμβανόμενη τάση παύει να είναι εναλλασσόμενη, και μετατρέπεται σε παλλόμενη «συνεχή», η μορφή της οποίας φαίνεται στο μέσον του σχήματος 4.23. Η ανόρθωση αυτή της εναλλασσόμενης τάσης οφείλεται στο γεγονός, ότι η πόλωση έκαστου ημιδακτυλίου αλλάζει κάθε μισή στροφή (κάθε ημιπερίοδο), τότε ακριβώς που ο δακτύλιος αλλάζει και ψήκτρα. Έτσι έκαστη ψήκτρα βρίσκεται πάντα σε επαφή με δακτύλιο συγκεκριμένης πόλωσης και είναι πάντα θετική ή αρνητική. Βλέπουμε λοιπόν, ότι το σύστημα των δύο μονωμένων ημιδακτυλίων λειτουργεί ως ανορθωτής και αποτελεί την απλούστερη δυνατή μορφή ενός συλλέκτη.

Σχήμα 4.24: Σχηματική παράσταση γεννήτριας εναλλασσομένου ρεύματος (a) και αρχή λειτουργίας της γεννήτριας συνεχούς ρεύματος (b).

Προκειμένου να εξομαλύνουμε την από την γεννήτρια με ένα πλαίσιο και συλλέκτη εκ δύο ημιδακτυλιδίων παραγόμενη τάση, χρησιμοποιούμε στην πράξη γεννήτριες με πολλά πλαίσια, τα οποία καταλήγουν σε συλλέκτη με κυλινδρική μορφή και διηρημένο σε πολλούς τομείς, μονωμένους μεταξύ τους. Τα πλαίσια είναι συνδεδεμένα με κατάλληλο τρόπο σε σειρά, έτσι ώστε στις ψήκτρες να παραλαμβάνεται το άθροισμα των μερικών τάσεων, οι οποίες επάγονται στα μεμονωμένα πλαίσια. (Ο ακριβής τρόπος σύνδεσης υπόκειται σε κανόνες, οι οποίοι αναλύονται μόνο σε υπερεξειδικευμένα εγχειρίδια, στα οποία και παραπέμπουμε κάθε ενδιαφερόμενο αναγνώστη). Στο σχήμα 4.23 (δεξιά) φαίνεται η παραλαμβανόμενη παρά των ψηκτρών τάση για την υποθετική περίπτωση δύο καθέτων μεταξύ τους πλαισίων. Η αποδιδόμενη τάση u ισούται ανά πάσα στιγμή με το άθροισμα των μερικών, ανορθωμένων τάσεων u_1 και

u_2 , οι οποίες έχουν διαφορά φάσεως κατά $\pi/2$, οπότε η δεύτερη υστερεί της πρώτης κατά $T/4$.

Το μαγνητικό πεδίο, εντός του οποίου περιστρέφεται το επαγωγικό πλαίσιο, δεν είναι απαραίτητο να δημιουργείται με την βοήθεια μονίμου μαγνήτη, αλλά μπορεί κάλλιστα να χρησιμοποιηθεί ένας ηλεκτρομαγνήτης. Στην περίπτωση αυτή ο ηλεκτρομαγνήτης (σωληνοειδής με πυρήνα από μαλακό σίδηρο) μπορεί να τροφοδοτείται με ρεύμα από την ίδια την γεννήτρια: Με το που αρχίζει το πλαίσιο να περιστρέφεται, εμφανίζεται στα άκρα του επαγωγική τάση λόγω της (έστω και ασθενούς) μένουσας μαγνήτισης του πυρήνα του σωληνοειδούς. Το ρεύμα, το οποίο διαρρέει εξ αιτίας της τάσης αυτής το σωληνοειδές, ενισχύει το μαγνητικό πεδίο και έτσι και την επαγωγική τάση, κ.ο.κ., μέχρι που επιτυγχάνεται η τελική τάση της γεννήτριας (**δυναμοηλεκτρική αρχή του Siemens**).

ζ) Ηλεκτροκινητήρες: Η λειτουργία τους στηρίζεται στην αντιστροφή της αρχής λειτουργίας των γεννητριών εναλλασσομένου και συνεχούς ρεύματος: Αν εφαρμόσουμε σε ένα εντός μαγνητικού πεδίου ευρισκόμενο πλαίσιο εναλλασσόμενη (ή - με την παρεμβολή συλλέκτου-συνεχή) τάση, τότε το πλαίσιο περιστρέφεται κάτω από την επίδραση της ροπής, η οποία αναπτύσσεται εξ αιτίας των δυνάμεων Lorentz (βλ. κεφ.4.5β).

η) Μετασχηματιστές: Ένας μετασχηματιστής αποτελείται από δύο (χάριν απλότητας στην πράξη μπορεί να είναι και περισσότερα) σωληνοειδή με διαφορετικό αριθμό σπειρών, τα οποία είναι μαγνητικά συζευγμένα μέσω κλειστού πυρήνα (βλ. σχ. 4.25) από μαγνητικά μαλακό (δηλαδή χωρίς ουσιαστική *μένουσα* μαγνήτιση για περιορισμό της *μαγνητικής υστέρησης*, βλ. κεφ. 6) σιδηρομαγνητικό υλικό.

Οι μετασχηματιστές χρησιμοποιούνται για τον μετασχηματισμό εναλλασσομένων τάσεων ή και ηλεκτρικών παλμών.

Η λειτουργία των μετασχηματιστών στηρίζεται στο φαινόμενο της ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής: Στο **πρωτεύον σωληνοειδές** εφαρμόζεται η προς μετασχηματισμό τάση u_1 . Το πρωτεύον σωληνοειδές

διαρρέεται τότε από εναλλασσόμενο ρεύμα έντασης i_1 , το οποίο δημιουργεί ένα περιοδικά μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό του πυρήνα. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την ανάπτυξη από την μια τάσεως $u_{επ1}$ από **αυτεπαγωγή** (= η ανάπτυξη ΗΕΔ εξ επαγωγής, η οποία οφείλεται στην μεταβολή του μαγνητικού πεδίου του ίδιου του αγωγού, βλ. §4.6.3) στο πρωτεύον σωληνοειδές και από την άλλη μιας τάσεως u_2 από **αμοιβαία** (όπως χαρακτηρίζεται, βλ. §4.6.5) **επαγωγή** στο **δευτερεύον σωληνοειδές**.

Οι επαγωγικές αυτές τάσεις είναι:
$$u_{επ1} = -N_1 \frac{d\Phi}{dt} \quad \text{και} \quad u_2 = -N_2 \frac{d\Phi}{dt} \quad \{1\}$$

όπου N_1 και N_2 είναι ο αριθμός των σπειρών του πρωτεύοντος και δευτερεύοντος σωληνοειδούς αντίστοιχα.

Στην περίπτωση ενός ιδανικού μετασχηματιστή δεν έχουμε σκέδαση μαγνητικής ροής, όπως δεν

έχουμε και φαινόμενα μαγνητικής υστέρησης, οπότε ο ρυθμός μεταβολής $d\Phi/dt$ της μαγνητικής ροής ανά σπείρα είναι ο ίδιος και για τα δύο σωληνοειδή. Διαιρώντας λοιπόν κατά μέλη τις σχέσεις {1} παίρνουμε:

$$\frac{u_2}{u_{\varepsilon\pi 1}} = \frac{N_2}{N_1} \Leftrightarrow u_2 = u_{\varepsilon\pi 1} \frac{N_2}{N_1} \quad \{2\}$$

Ο 2^{ος} κανόνας του Kirchhoff για το πρωτεύον κύκλωμα δίδει εξάλλου: $u_1 + u_{\varepsilon\pi 1} = 0 \Rightarrow u_1 = -u_{\varepsilon\pi 1}$ {3}.

Αντικαθιστώντας στην {2} παίρνουμε:

$$\frac{u_2}{u_1} = \left(-\right) \frac{N_2}{N_1} \quad [4.19]$$

Σημειώνουμε ότι u_1 , είναι η τάση με την οποία *τροφοδοτείται* το πρωτεύον σωληνοειδές και u_2 η τάση η οποία αναπτύσσεται στα άκρα του δευτερεύοντος σωληνοειδούς εξ αιτίας του φαινομένου της αμοιβαίας επαγωγής. Το αρνητικό πρόσημο στην παραπάνω σχέση δείχνει, ότι οι δύο αυτές τάσεις βρίσκονται σε φάση, έχουν δηλαδή ίσες αλλά αντίθετες τιμές.

Ο λόγος N_1 / N_2 του αριθμού των σπειρών του πρωτεύοντος προς του αριθμού των σπειρών του δευτερεύοντος σωληνοειδούς καλείται **λόγος μετασχηματισμού**. Από την σχέση [4.19] είναι δε φανερό, ότι όταν το δευτερεύον σωληνοειδές έχει περισσότερες σπείρες, τότε ο μετασχηματιστής ανυψώνει την τάση και καλείται **μετασχηματιστής ανυψώσεως** ($N_2 > N_1$). Στην αντίθετη περίπτωση ο μετασχηματιστής υποβιβάζει την τάση και καλείται **μετασχηματιστής υποβιβασμού** ($N_2 < N_1$).

Στην περίπτωση ενός ιδανικού μετασχηματιστή δεν έχουμε ενεργειακές απώλειες (γεγονός το οποίο ισχύει με αρκετή προσέγγιση και για τους πραγματικούς μετασχηματιστές), οπότε η (στιγμιαία) ισχύς p_1 , του πρωτεύοντος θα ισούται με εκείνη (p_2) του δευτερεύοντος κυκλώματος: $p_1 = p_2$

$$[4.19] \quad u_1 i_1 = u_2 i_2 \Rightarrow \frac{i_1}{i_2} = \frac{u_2}{u_1} = \left(-\right) \frac{N_2}{N_1} \quad [4.20]$$

Σημειωτέον ότι στην πράξη οι διαφορές φάσεως (βλ. κεφ.5) μεταξύ έντασης και τάσης είναι και για τα δύο κυκλώματα περίπου οι ίδιες. Έτσι ο λόγος (i_1 / i_2) των στιγμιαίων εντάσεων ισούται με τον λόγο (I_{01}/I_{02}) των αντιστοίχων πλατών καθώς και τον λόγο (I_1/I_2) των αντιστοίχων ενεργών τιμών (βλ. κεφ.5).

Στην περίπτωση ενός πραγματικού μετασχηματιστή δεν ισχύει η ισότητα της ισχύος του πρωτεύοντος κυκλώματος με εκείνη του δευτερεύοντος, για τους ακόλουθους κυρίως λόγους:

- 1) Η μαγνητική ροή του δευτερεύοντος σωληνοειδούς είναι ασθενέστερη λόγω μαγνητικής σκέδασης.
- 2) Η ωμική αντίσταση των δύο σωληνοειδών δεν είναι αμελητέα, γεγονός το οποίο συνεπάγεται την μετατροπή μέρος της ηλεκτρικής σε θερμική ισχύ, μέσω του γνωστού μας φαινομένου Joule.
- 3) Απώλειες ισχύος έχουμε επίσης λόγω φαινομένων μαγνητικής υστέρησης στον πυρήνα του μαλακού σιδήρου, στον οποίο αναπτύσσονται και δινορεύματα παρά την φυλλωτή του κατασκευή, η οποία βέβαια τα περιορίζει σημαντικά, όταν η συχνότητα της εναλλασσόμενης τάσης δεν ξεπερνά τα

50kHz.

Θα πρέπει βέβαια να τονίσουμε, ότι οι παραπάνω απώλειες είναι σχετικά περιορισμένες, γεγονός το οποίο σε συνδυασμό με την απλή σχετικά κατασκευή των μετασχηματιστών οδήγησε στην επικράτηση του εναλλασσομένου ρεύματος έναντι του συνεχούς: Η παραγόμενη στις μονάδες παραγωγής εναλλασσόμενη τάση των 6~20 kV μετασχηματίζεται σε 50~400 kV, ώστε κατά την μεταφορά της ηλεκτρικής ισχύος στους τόπους κατανάλωσης να έχουμε κατά το δυνατόν μικρότερες απώλειες. (Για συγκεκριμένη ηλεκτρική ισχύ, υψηλή τάση συνεπάγεται μικρή ένταση του ρεύματος, το τετράγωνο της οποίας καθορίζει τις θερμικές απώλειες συνέπεια του φαινομένου Joule) Στους τόπους κατανάλωσης η τάση υποβιβάζεται στην τιμή των 380 V και 220 V με την βοήθεια μετασχηματιστών υποβιβασμού τάσεως. Αντιθέτως στην περίπτωση συνεχούς ρεύματος δεν έχουμε αντίστοιχους αποδοτικούς τρόπους αυξομείωσης της τάσεως.

4.6.3 Αυτεπαγωγή

Αυτεπαγωγή καλείται το φαινόμενο της εμφάνισης ΗΕΔ εξ επαγωγής στα άκρα ενός αγωγού εξ αιτίας της μεταβολής του ρεύματος (άρα και του αντιστοίχου μαγνητικού πεδίου) που τον διαρρέει.

Η αυτεπαγωγή αποτελεί ειδική περίπτωση του φαινομένου της επαγωγής και οφείλεται στην μεταβολή μαγνητικής ροής μέσω της επιφάνειας, την οποία περικλείει (χρονικά ή γεωγραφικά) ο αγωγός, και η οποία οφείλεται στην μεταβολή του μαγνητικού πεδίου του ίδιου του αγωγού.

Το φαινόμενο της αυτεπαγωγής είναι ιδιαίτερα έντονο στην περίπτωση ενός σωληνοειδούς, εξ αιτίας της μεγάλης εντάσεως του μαγνητικού του πεδίου καθώς και της μεγάλης επιφάνειας (= συνολική επιφάνεια όλων των σπειρών του σωληνοειδούς), η οποία διαρρέεται απ' αυτό. Συγκεκριμένα η ένταση του μαγνητικού πεδίου στο εσωτερικό ενός ιδανικού (μήκος πολύ μεγαλύτερο από την διάμετρο του) σωληνοειδούς δίδεται ως γνωστόν από την σχέση ([4.7]):

$$B = \mu_0 \frac{N}{l} i, \text{ όπου } l \text{ το μήκος και } N \text{ ο αριθμός σπειρών του σωληνοειδούς.}$$

Η ολική μαγνητική ροή $\Phi_{ολ}$ μέσω των N σπειρών του σωληνοειδούς είναι $\Phi_{ολ} = N \Phi_{σπειρών}$

$$N(BS) = N \left(\mu_0 \frac{N}{l} iS \right) \Rightarrow \Phi_{ολ} = \mu_0 \frac{N^2}{l} iS \quad \{2\}$$

Η ΗΕΔ από αυτεπαγωγή θα υπολογίζεται από τον νόμο ([4.14]) του Faraday:

$$E_{αεπ} = - \frac{d\Phi_{ολ}}{dt} = - \frac{d}{dt} \left[\mu_0 \frac{N^2}{l} Si \right] \Rightarrow E_{αεπ} = - \mu_0 \frac{N^2}{l} S \frac{di}{dt} \equiv -L \frac{di}{dt} \quad [4.21]$$

Η σταθερά αναλογίας L καλείται **συντελεστής αυτεπαγωγής** (ή απλώς **αυτεπαγωγή**) του αγωγού και εξαρτάται από την γεωμετρία του αγωγού και από το υλικό που περιβάλλεται, απ' αυτόν. Στο Διεθνές Σύστημα μονάδων S.I. μονάδα μέτρησης του L είναι το **Vs/A** και καλείται **H(ενry)**.

Αγωγοί χωρίς αυτεπαγωγή: Αγωγοί χωρίς αυτεπαγωγή κατασκευάζονται μέσω **δίμιτης περιτύλιξης** (βλ. σχ. 4.26). κατά την οποία εκμεταλλευόμαστε το γεγονός, ότι τα μαγνητικά πεδία δύο παραλλήλων αγωγών, οι οποίοι διαρρέονται από αντίρροπα ρεύματα, αλληλοεξουδετερώνονται. Με τον τρόπο αυτό κατασκευάζονται επί παραδείγματι οι σπείρες πυρακτώσεως των ηλεκτρονικών λυχνιών.

4.6.4 Επίδραση αυτεπαγωγής στο ρεύμα κυκλώματος LR

Όταν ο διακόπτης δ μετακινηθεί προς την **θέση α** , τότε στα άκρα της αυτεπαγωγής L αναπτύσσεται ΗΕΔ από αυτεπαγωγή, μέτρου $L di / dt$, η οποία σύμφωνα με τον κανόνα του Lenz έχει πολικότητα αντίθετη προς εκείνη της πηγής. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η ένταση του ρεύματος να μην αποκτά αμέσως την οριακή της τιμή E/R , αλλά έτσι όπως προκύπτει από τον 2^ο κανόνα του Kirchhoff:

$$E - L \frac{di}{dt} = iR \Leftrightarrow \frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{E}{L} \quad \{1\} \rightarrow i = \frac{E}{R} (1 - e^{-Rt/L})$$

[4.22]

Σημειωτέον, ότι η {1} είναι μια συνήθης μη ομογενής διαφορική εξίσωση, πρώτης τάξεως και πρώτου βαθμού. Η επίλυση της γίνεται με την μέθοδο που περιγράψαμε στο κεφάλαιο 3.5.8, παίρνοντας υπόψη την αρχική συνθήκη ($t = 0 \rightarrow i = 0$). Η εξάρτηση της έντασης του ρεύματος από τον χρόνο αποδίδεται γραφικά στο σχήμα 4.28.

Αν ο διακόπτης μετακινηθεί προς την **θέση β** , τότε η {1} παίρνει την μορφή:

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = 0 \rightarrow$$

$$\underline{i = \frac{E}{R} e^{-Rt/L}} \quad [4.22]$$

Ο χρόνος $t = L/R$ είναι η χαρακτηριστική **σταθερή χρόνου** του κυκλώματος. Πρόκειται ως γνωστόν (βλ. κεφ.3.5.8) για τον χρόνο, εντός του οποίου η ένταση έχει πάρει 63% της τελικής της τιμής E/R (διακόπτης θέση α) ή έχει απολέσει το 63% της αρχικής της τιμής E/R (διακόπτης θέση β). Σημειωτέον ότι **οι οριακές τιμές επιτυγχάνονται σε ποσοστό 99% μέσα σε πέντε σταθερές χρόνου.**

4.6.5 Αμοιβαία επαγωγή

Δύο αγωγοί, οι οποίοι ευρίσκονται ο ένας τόσο πλησίον του άλλου, ώστε να «αλληλοισθάνονται» τις ενδεχόμενες μεταβολές των μαγνητικών τους πεδίων, χαρακτηρίζονται ως **μαγνητικά συζευγμένοι.**

Κάθε μεταβολή του ρεύματος ενός εκ των δύο μαγνητικώς συζευγμένων αγωγών επάγει -μέσω της αντίστοιχης μεταβολής του μαγνητικού του πεδίου-, εντός του οποίου βρίσκεται ο συζευγμένος αγωγός, ΗΕΔ $E_{\alpha\mu.\epsilon\pi}$, η οποία δίδεται από την ακόλουθη, ημιεμπειρική σχέση:

$$E_{\alpha\mu.\epsilon\pi} = -\Lambda \frac{di}{dt} \quad [4.23]$$

Ο συντελεστής Λ καλείται **συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής** και εξαρτάται από την γεωμετρία (σχήμα και διαστάσεις) των συζευγμένων αγωγών, την σχετική τους θέση καθώς και τις μαγνητικές ιδιότητες του περιβάλλοντος μέσου. Όπως δε και ο συντελεστής αυτεπαγωγής μετράται σε Henry.

4.7 Ενέργεια και πυκνότητα ενέργειας μαγνητικού πεδίου

Αν πολλαπλασιάσουμε τις τάσεις στα άκρα της πηγής της αντίστασης και της αυτεπαγωγής του κυκλώματος του σχήματος 4.27 με την στιγμιαία τιμή i της έντασης του ρεύματος, παίρνουμε:

$$i \left(E - L \frac{di}{dt} = iR \right) \rightarrow Ei = i^2 R + Li \frac{di}{dt} \Leftrightarrow Ei = \underbrace{i^2 R}_{\text{θερμική ισχύς}} + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right) \quad \{1\}$$

Ei = προσφερόμενη από την πηγή ηλεκτρική ισχύς

$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right)$ = ισχύς η οποία δαπανάται για την μεταβολή της ενέργειας του μαγνητικού πεδίου του σωληνοειδούς

Η εξίσωση αυτή αποτελεί άμεση διατύπωση της αρχής διατηρήσεως της ενέργειας για την περίπτωση κυκλώματος, αποτελούμενου από πηγή, ωμική αντίσταση και αυτεπαγωγή: Η στιγμιαία ισχύς (Ei), η οποία προσφέρεται από την πηγή σε μια τυχαία χρονική στιγμή, μετατρέπεται κατά ένα μέρος ίσο με ($i^2 R$) σε θερμική ισχύ εξ αιτίας του φαινομένου Joule στην αντίσταση R , και κατά ένα δεύτερο μέρος σε «μαγνητική ισχύ» $d[Li^2/2]/dt$. Εφόσον δε η ισχύς ισούται εξ ορισμού με τον ρυθμό μεταβολής της ενέργειας, από τα παραπάνω συνάγεται, ότι η **ενέργεια του μαγνητικού πεδίου** ενός **σωληνοειδούς**, συντελεστή L , το οποίο διαρρέεται από ρεύμα έντασης i , δίδεται από την σχέση:

$$W_{\mu} = \frac{1}{2} Li^2 \quad [4.24]$$

Η ενέργεια αυτή επαναδιοχετεύεται στο κύκλωμα κατά την αποσύνδεση του μαγνητικού πεδίου, η οποία επέρχεται όταν αποσυνδέσουμε το σωληνοειδές από την πηγή.

Το μαγνητικό πεδίο ενός (μακρού) σωληνοειδούς (βλ. κεφ. 4.4.1α) είναι ομογενές και περιορισμένο στο εσωτερικό του σωληνοειδούς. Έτσι η πυκνότητα ενέργειας w_{μ} του μαγνητικού πεδίου ενός σωληνοειδούς (όπως και κάθε ομογενούς μαγνητικού πεδίου) υπολογίζεται διαιρώντας την συνολική ενέργεια του πεδίου δια του όγκου v , εντός του οποίου περιορίζεται το πεδίο. Αν λοιπόν l είναι το μήκος του σωληνοειδούς, S το εμβαδόν των σπειρών και N ο αριθμός τους, έχουμε:

$$w_{\mu} = \frac{W_{\mu}}{v} \underset{v=SI}{=} \underset{[4.24]}{=} \frac{\frac{1}{2} Li^2}{SI} \underset{[4.21]}{=} \frac{\frac{1}{2} \left(\mu_0 \frac{N^2}{l} S \right) i^2}{SI} = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{N^2}{l^2} i^2 \quad \Rightarrow \quad [4.7]: B = \mu_0 \frac{N}{l} i \quad w_{\mu} = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

{1}

Η σχέση {1} ισχύει και στην γενική περίπτωση *μη ομογενούς* μαγνητικού πεδίου, μόνο που τότε η πυκνότητα ενέργειας w_{μ} μεταβάλλεται από σημείο σε σημείο, εξ αιτίας της αντιστοίχου μεταβολής της έντασης του πεδίου:

$$\text{πυκνότητα} \quad w_{\mu} = \frac{dW_{\mu}}{dv} = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

5 Εναλλασσόμενα ρεύματα

Εναλλασσόμενο καλείται το **ρεύμα**, του οποίου η τιμή και η φορά είναι περιοδικές συναρτήσεις του χρόνου. Στην περίπτωση δε που πρόκειται για *ημιτονοειδή* (ή *συνιμιτονοειδή*) συνάρτηση, το εναλλασσόμενο ρεύμα χαρακτηρίζεται ως **αρμονικό**. Αυτή την ειδική κατηγορία εναλλασσόμενου ρεύματος θα εννοούμε, ακόμη και όταν μιλάμε απλώς για εναλλασσόμενο ρεύμα, εκτός και αν το τονίζουμε, ότι πρόκειται για μη ημιτονοειδές εναλλασσόμενο ρεύμα.

Ένα κύκλωμα διαρρέεται από εναλλασσόμενο ρεύμα, όταν στα άκρα του εφαρμόζεται **εναλλασσόμενη τάση**: τάση της οποίας η τιμή και το πρόσημο είναι περιοδικές συναρτήσεις του χρόνου. Όπως είδαμε στο κεφάλαιο 4.2.6ε, εναλλασσόμενη τάση αναπτύσσεται στους ακροδέκτες μιας γεννήτριας εναλλασσομένου ρεύματος σαν άμεση εφαρμογή του φαινομένου της ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής. Σημειωτέον ότι η κατασκευή μιας γεννήτριας εναλλασσομένου ρεύματος είναι αισθητά απλούστερη από εκείνη των γεννητριών συνεχούς, γεγονός το οποίο αποτελεί έναν από τους λόγους, στους οποίους οφείλεται η ευρεία χρήση εναλλασσομένου ρεύματος - όχι όμως και τον σπουδαιότερο! Αυτός συνδέεται:

α) με την δυνατότητα του εύκολου και σχεδόν χωρίς ενεργειακές απώλειες μετασχηματισμού της εναλλασσόμενης τάσης μέσω μετασχηματιστών (βλ. 4.6.2η). Έτσι η μεταφορά της ηλεκτρικής ενέργειας από τις μονάδες παραγωγής στους τόπους κατανάλωσης γίνεται υπό υψηλή τάση και άρα χαμηλή ένταση, με αποτέλεσμα την ελαχιστοποίηση των θερμικών απωλειών λόγω του φαινομένου Joule. Εν συνεχεία στους τόπους κατανάλωσης η τάση υποβιβάζεται στα γνωστά μας 220 ή 380 V, με τα οποία τροφοδοτείται η οικιακή και βιομηχανική κατανάλωση.

β) με την δυνατότητα διανομής του εναλλασσομένου ρεύματος ως τριφασικό, η οποία επιτρέπει την χρήση των λεγομένων *ασύγχρονων* (η γωνιακή τους ταχύτητα είναι διαφορετική από την κυκλική συχνότητα του ρεύματος) *κινητήρων*, οι οποίοι είναι οι απλούστεροι και οικονομικότεροι ηλεκτροκινητήρες.

Φυσικά υπάρχουν τομείς, όπου επιβάλλεται η χρήση συνεχούς ρεύματος (τηλεπικοινωνίες, ηλεκτροχημική βιομηχανία, διάφορες οικιακές συσκευές κ.λ.π.). Ακόμη όμως και σ' αυτούς η απαιτούμενη ηλεκτρική ενέργεια προέρχεται από την ανόρθωση εναλλασσομένου ρεύματος.

Η συντριπτική λοιπόν μερίδα της δαπανώμενης παγκοσμίως ηλεκτρικής ενέργειας παράγεται υπό εναλλασσόμενη μορφή. Η μελέτη επομένως των ιδιοτήτων του εναλλασσομένου ρεύματος επιβάλλεται από την πληθώρα των τεχνικών του εφαρμογών.

5.1 Χαρακτηριστικά εναλλασσομένων μεγεθών

Η γενική εξίσωση ενός (αρμονικώς) εναλλασσομένου μεγέθους α έχει την μορφή

$$\alpha = A_0 \sin(\omega t + \varphi) \quad [5.1]$$

όπου $A_0 =$ πλάτος του εναλλασσομένου μεγέθους.

$\omega =$ κυκλική συχνότητα του εναλλ. μεγέθους. (Στην περίπτωση π.χ. που το εναλλασσόμενο μέγεθος είναι η στα άκρα εντός μαγνητικού πεδίου περιστρεφόμενου πλαισίου αναπτυσσόμενη τάση, η κυκλική συχνότητα ισούται αριθμητικά με την γωνιακή ταχύτητα του πλαισίου. Βέβαια η φυσική υπόσταση της κυκλικής συχνότητας είναι εντελώς διαφορετική από εκείνη της γωνιακής ταχύτητας!)

$t =$ ο χρόνος

$(\omega t + \varphi) =$ φάση του εναλλ. μεγέθους. Σημειωτέον ότι η φάση μετράται σε ακτίνια (rad)!

ϕ = αρχική φάση του εναλλ. μεγέθους, δηλ. **φάση κατά την χρονική στιγμή $t=0$** . (Στην περίπτωση της εναλλασσόμενης τάσης περιστρεφόμενου πλαισίου, η μεν φάση ($\omega t + \phi$) ισούται με την γωνία μεταξύ της καθέτου επί του πλαισίου και της διεύθυνσης του πεδίου σε μια τυχαία χρονική στιγμή t , η δε αρχική φάση με την τιμή της εν λόγω γωνίας κατά την χρονική στιγμή $t=0$).

Χρησιμοποιώντας τις γνωστές σχέσεις $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$ [5.2],

παίρνουμε τις ακόλουθες, ισοδύναμες προς την [5.1] σχέσεις:

$$\alpha = A_0 \sin(2\pi\nu t + \phi) = A_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \phi\right) \quad [5.1\alpha]$$

όπου ν = συχνότητα εναλλ. μεγέθους. Ισούται με τον αριθμό των πλήρων εναλλαγών του

εναλλασσόμενου μεγέθους στην μονάδα του χρόνου. (Στην περίπτωση της εναλλασσόμενης τάσης, η οποία παράγεται μέσω περιστρεφόμενου πλαισίου, ισούται ουσιαστικά με τον αριθμό περιστροφών του πλαισίου στην μονάδα του χρόνου).

T = περίοδος του εναλλ. μεγέθους. Πρόκειται για τον χρόνο μεταξύ δύο πλήρων διαδοχικών εναλλαγών, εντός του οποίου το εναλλασσόμενο μέγεθος ολοκληρώνει όλο το φάσμα των τιμών του, οπότε επαναλαμβάνεται ο ίδιος κύκλος τιμών. (Στην περίπτωση της γνωστής μας πλέον εναλλασσόμενης τάσης η περίοδος ισούται αριθμητικά με τον χρόνο μιας πλήρους περιστροφής του πλαισίου).

Τα παραπάνω χαρακτηριστικά γίνονται κατανοητά με την βοήθεια του διπλανού χρονοδιαγράμματος, στο οποίο απεικονίζεται ένα τυχαίο εναλλασσόμενο μέγεθος, του οποίου η αρχική φάση ισούται με μηδέν.

5.2 Παράσταση εναλλασσόμενου μεγέθους μέσω περιστρεφόμενου ανύσματος

Ο φυσικός, θα λέγαμε, τρόπος της γραφικής παράστασης ενός (αρμονικώς εννοείται πάντα) εναλλασσόμενου μεγέθους είναι το μόλις προαναφερθέν χρονοδιάγραμμα (βλ. σχ. 5.1): Πρόκειται για ένα διάγραμμα σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων, του οποίου ο κατακόρυφος άξονας (**άξονας των τεταγμένων**) είναι ο άξονας του εναλλασσόμενου μεγέθους και ο οριζόντιος (**άξονας των τετημένων**) είναι ο άξονας του χρόνου.

Το βασικό πλεονέκτημα του χρονοδιαγράμματος είναι ότι η στιγμιαία τιμή του εναλλασσόμενου μεγέθους σε μια τυχαία χρονική στιγμή μπορεί να αναγνωσθεί απ' ευθείας από το διάγραμμα. Η ακριβής όμως χάραξη του εν λόγω διαγράμματος μπορεί να γίνει μόνο με την βοήθεια ηλεκτρονικών υπολογιστών

και καταλλήλων σχεδιαστικών, γεγονός το οποίο περιορίζει αισθητά την πρακτική του χρησιμότητα. Εξάλλου, στις περισσότερες εφαρμογές, η στιγμιαία τιμή ενός εναλλασσομένου μεγέθους έχει μικρή έως και ανεπαίσθητη αξία. (Τι μας ενδιαφέρει, για παράδειγμα, η στιγμιαία τιμή της τάσης ενός ρευματοδότη (κν. "πρίζα") στο σπίτι μας, όταν αυτή μεταβάλλεται διαρκώς, παίρνοντας 50 φορές το δευτερόλεπτο όλο το φάσμα των τιμών της;). Για τους λόγους αυτούς στην πράξη προτιμάται συνήθως

Η γραφική

παράσταση ενός εναλλασσομένου μεγέθους με την βοήθεια περιοτρεφόμενου ανύσματος στηρίζεται στους ακόλουθους συμβατικούς κανόνες:

α) Σ' ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων xy παίρνουμε (βλ. σχ. 5.2) άνυσμα \vec{a} , του οποίου το μήκος θα ισούται αριθμητικά με το πλάτος A_0 του εναλλασσομένου μεγέθους a .

β) Το εν λόγω άνυσμα τοποθετείται στο διάγραμμα έτσι ώστε η μεν αρχή του να συμπίπτει με την αρχή των αξόνων, η δε διεύθυνση του σχηματίζει με τον οριζόντιο άξονα x γωνία y , ίση με την αρχική φάση του εναλλασσομένου μεγέθους.

γ) Η στιγμιαία τιμή του εναλλασσομένου μεγέθους κατά την τυχαία χρονική στιγμή t υπολογίζεται με τον ακόλουθο τρόπο: θεωρούμε, ότι το άνυσμα \vec{a} περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω , ίση προς την κυκλική συχνότητα του εναλλασσομένου μεγέθους, και κατά την αντίθετη προς εκείνη των δεικτών του ωρολογίου φορά. Τότε - όπως παραστατικότητα φαίνεται από το σχήμα 5.2 - η προβολή του ανύσματος \vec{a} επί του άξονα y (εξ ου και «**άξονας προβολών**») ισούται αριθμητικά με την στιγμιαία τιμή $(a = A_0)\sin(\omega t + \phi)$ του εναλλασσομένου μεγέθους a . Εξάλλου η γωνία μεταξύ της διεύθυνσης του ανύσματος και του άξονα x (εξ ου και «**άξονας φάσεων**») ισούται με την φάση $(\omega t + \phi)$ κατά την τυχαία χρονική στιγμή t . (Εννοείται βέβαια, ότι για τον υπολογισμό της γωνίας πήραμε υπόψη μας και τον αριθμό των πλήρων περιστροφών του ανύσματος μέχρι την χρονική στιγμή t).

Η γραφική παράσταση ενός εναλλασσομένου μεγέθους μέσω περιστρεφόμενου ανύσματος χρησιμοποιείται ευρύτατα στις τεχνικές εφαρμογές, επειδή έχει το πλεονέκτημα να είναι απλή και αρκούντως πλήρης. Το τελευταίο συνδέεται με το γεγονός, ότι αποδίδει άμεσα όλα τα (στις συνηθισμένες τεχνικές εφαρμογές) ενδιαφέροντα στοιχεία του εναλλασσομένου μεγέθους: πλάτος, αρχική φάση, διαφορά φάσεως μεταξύ δύο ή περισσότερων μεγεθών, καθώς και την κυκλική συχνότητα ω του απεικονιζόμενου μεγέθους, η οποία συμβολίζεται με ένα βέλος ως γωνιακή ταχύτητα του περιστρεφόμενου ανύσματος. Στο σχήμα 5.3 για παράδειγμα απεικονίζονται μέσω διανυσμάτων δύο εναλλασσόμενα μεγέθη με πλάτη A_{01} και A_{02} , κυκλική συχνότητα ω και αρχικές φάσεις $\phi_1 = \pi/4$ και $\phi_2 = \pi/2$ αντίστοιχα. Από το σχήμα φαίνεται άμεσα, ότι η διαφορά φάσεως ισούται με $3\pi/4$.

Δύσχρηστη γίνεται η διανυσματική παράσταση εναλλασσομένων μεγεθών, όταν πρέπει (στα πλαίσια θεωρητικών αλλά και πρακτικών προβλημάτων) να κάνουμε υπολογισμούς: προσθέσεις, αφαιρέσεις και κυρίως πολλαπλασιασμούς, διαιρέσεις, παραγωγίσεις και ολοκληρώσεις εναλλασσομένων μεγεθών. Οι προκύπτουσες τότε δυσκολίες σχετίζονται με την φύση των διανυσμάτων, για την περιγραφή έκαστου των οποίων χρειάζεται (εφόσον περιοριζόμαστε στο επίπεδο) ένα ζεύγος αριθμών, με αποτέλεσμα ο μαθηματικός τους χειρισμός να είναι πολυπλοκότερος εκείνου των μονομέτρων

μεγεθών. Προκειμένου να αντιμετωπίσουμε τις εν λόγω υπολογιστικές δυσκολίες καταφεύγουμε στην

5.3 Μιγαδική παράσταση εναλλασσομένων μεγεθών

Ένας **μιγαδικός αριθμός** z μπορεί να γραφεί πάντα στην **ορθοκανονική ή καρτεσιανή**, όπως λέγεται) **μορφή**

$$\underline{z} = x + jy \quad [5.3]$$

όπου x, y δύο τυχαίοι πραγματικοί αριθμοί.

Οι πραγματικοί αριθμοί x και y χαρακτηρίζονται ως το **πραγματικό** και **φανταστικό μέρος** του μιγαδικού αριθμού z αντίστοιχα, γεγονός το οποίο εκφράζεται συμβολικά ως εξής:

$$\underline{\text{Re}(z)} = x \quad \underline{\text{Im}(z)} = y \quad [5.3a]$$

Το j εξάλλου ονομάζεται **φανταστική μονάδα** και ορίζεται έτσι ώστε $j^2 = -1$ [5.4]

(Σημειωτέον ότι στην μαθηματική βιβλιογραφία η φανταστική μονάδα συμβολίζεται με i . Στην τεχνική όμως βιβλιογραφία συμβολισμός αυτός θα οδηγούσε μοιραία σε σύγχυση, μια και χρησιμοποιείται και για την ένταση του ρεύματος. Για τον λόγο αυτό στην τεχνική βιβλιογραφία η φανταστική μονάδα συμβολίζεται με j).

Οι υπολογισμοί με μιγαδικούς αριθμούς γίνονται όπως και με τους πραγματικούς αριθμούς, αρκεί να παίρνουμε υπόψη μας την σχέση [5.4].

Όπως οι πραγματικοί αριθμοί μπορούν να παρασταθούν γραφικά ως σημεία επάνω σε μια ευθεία, έτσι και οι μιγαδικοί αριθμοί μπορούν να παρασταθούν γραφικά σαν σημεία επάνω σε ένα επίπεδο, το οποίο καλείται **επίπεδο Gauss**. Το επίπεδο Gauss ορίζεται από ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων x, y . Ο οριζόντιος άξονας x καλείται **πραγματικός άξονας**, ενώ ο y **φανταστικός άξονας**. Ένας μιγαδικός αριθμός $\underline{z} = x + jy$ είναι το σημείο εκείνο του επιπέδου Gauss με τις συντεταγμένες (x, y) (βλ. σχ. 5.4).

Εκφράζοντας τις καρτεσιανές συντεταγμένες x και y συναρτήσει των πολικών r και ϕ

$$x = r \cos \phi \qquad y = r \sin \phi \qquad \{1\}$$

παίρνουμε την λεγόμενη **πολική γραφή** ενός μιγαδικού αριθμού

$$\underline{z} = r(\cos \phi + j \sin \phi) \qquad [5.5]$$

όπου $r = \sqrt{x^2 + y^2} \equiv |\underline{z}| = \text{μέτρο του μιγαδικού αριθμού } \underline{z}$

$$\phi = \text{όρισμα του μιγαδικού αριθμού } \underline{z} : \phi = \text{Arg}(\underline{z})$$

Όπως φαίνεται και από το σχήμα 5.4, η γωνία ϕ μπορεί να υπολογισθεί από την σχέση **$\tan \phi = y/x$** .

Αντί ενός σημείου θα μπορούσαμε εξίσου καλά να περιγράψουμε μέσω ενός μιγαδικού αριθμού $\underline{z} = x + jy$ ένα άνυσμα \vec{a} (βλ. σχ. 5.5): Το μέτρο a του εν λόγω ανύσματος θα προσδιοριζέτο από το μέτρο $|\underline{z}|$ του μιγαδικού αριθμού ($a = |\underline{z}| = \sqrt{x^2 + y^2}$), ενώ η γωνία ϕ μεταξύ του ανύσματος \vec{a} και του φανταστικού άξονα x θα συνέπιπτε με το όρισμα ϕ του μιγαδικού αριθμού \underline{z} και θα μπορούσε να υπολογισθεί από την σχέση $\tan \phi = y/x$.



Η δυνατότητα περιγραφής ενός ανύσματος μιγαδικού αριθμού μας δίνει το πλεονέκτημα αναγωγής του διανυσματικού λογισμού σε συνήθεις αριθμητικές πράξεις. Το ίδιο βέβαια θα μπορούσαμε να πετύχουμε εργαζόμενοι με τις συντεταγμένες του ανύσματος και μάλιστα χωρίς να μπλέξουμε με φανταστικές μονάδες. Θα μπορούσε λοιπόν κάποιος να διερωτηθεί, προς τι η φασαρία περί μιγαδικών

αριθμών; Την απάντηση μας την δίνει η **σχέση του Euler**:

$$e^{\pm j\phi} = \cos \phi \pm j \sin \phi \quad [5.6]$$

Η σχέση αυτή μας επιτρέπει να γράψουμε έναν μιγαδικό αριθμό $\underline{z} = x + jy = r(\cos \phi + j \sin \phi)$ με την ακόλουθη **εκθετική μορφή**:

$$\underline{z} = r e^{j\phi} \equiv r \angle \phi \quad [5.7]$$

(Ο δεύτερος, καθαρά συμβατικός συμβολισμός, ο οποίος εισήχθη προς διευκόλυνση των τυπογραφείων και μόνο, θα λέγαμε ότι δεν είναι πλέον απαραίτητος στα πλαίσια της σύγχρονης τυπογραφικής και εκτυπωτικής τεχνολογίας. Ο συμβολισμός όμως αυτός παραμένει δημοφιλής, επειδή έχει το πλεονέκτημα να αποδίδει άμεσα τα δύο κύρια στοιχεία του διανυσματικού μεγέθους που παριστάνει: το μέτρο του r και - μέσω της γωνίας ϕ - τον προσανατολισμό του.)

$$\text{Εύκολα αποδεικνύεται ότι } \pm j = e^{\pm j\pi/2} \equiv \pm \pi/2 \quad [5.8]$$

$$[5.6] \\ (\text{Συγκεκριμένα } e^{\pm j\pi/2} = \cos(\pi/2) \pm j \sin(\pi/2) = \pm j)$$

Με την βοήθεια της εκθετικής μιγαδικής έκφρασης ενός διανυσματικού μεγέθους οι υπολογισμοί απλουστεύονται δραματικά, όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο. Προηγουμένως σε ξεκαθαρίσουμε τα διέποντα την

Εκθετική μιγαδική παράσταση εναλλασσομένων μεγεθών:

Ένα εναλλασσόμενο μέγεθος $a = A_0 \sin(\omega t + \phi)$ μπορεί (συμβατικά!) να θεωρηθεί, ότι παριστάνεται από το **φανταστικό** μέρος του μιγαδικού αριθμού $\underline{a} = A_0 \exp[j(\omega t + \phi)] \equiv A_0 \angle \omega t + \phi$, αφού σύμφωνα με την σχέση του Euler έχουμε:

$$[5.6] \\ \underline{a} = A_0 \exp[j(\omega t + \phi)] = A_0 [\cos(\omega t + \phi) + j \sin(\omega t + \phi)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Im}(\underline{a}) = A_0 \sin(\omega t + \phi) = a$$

Στην παραπάνω εκθετική μιγαδική παράσταση του εναλλασσομένου μεγέθους a διακρίνουμε άμεσα το πλάτος του A_0 , την κυκλική του συχνότητα ω , την φάση $\omega t + \phi$ και την αρχική του φάση ϕ .

Από τα παραπάνω προκύπτει εξάλλου ο ακόλουθος **κανόνας**, ο οποίος μας επιτρέπει να γράψουμε απ' ευθείας την **τριγωνομετρική μορφή ενός εναλλασσομένου μεγέθους** $a = A_0 \sin(\omega t + \phi)$, το οποίο παριστάνεται συμβολικά μέσω του φανταστικού μέρους του μιγαδικού αριθμού $\underline{a} = A_0 \exp[j(\omega t + \phi)]$:

Γράφουμε τον μιγαδικό αριθμό στην συμβολική μορφή $\underline{a} = A_0 \underline{|\omega t + \phi}$ και στην συνέχεια αντικαθιστούμε το σύμβολο "L " με το ημίτονο ("sin"):

$$\underline{a} = A_0 \exp[j(\omega t + \phi)] \rightarrow A_0 \underline{|\omega t + \phi} \rightarrow a = A_0 \sin(\omega t + \phi)$$

5.3.1 Πράξεις με μιγαδικούς αριθμούς

Ο χώρος των μιγαδικών αριθμών δεν εξαντλείται ουσιαστικά ούτε στα καλύτερα εγχειρίδια Μαθηματικών, στα εξειδικευμένα εκ των οποίων παραπέμπουμε κάθε ενδιαφερόμενο αναγνώστη. Εμείς εδώ συνοψίσαμε απλώς τους στοιχειώδεις εκείνους ορισμούς και κανόνες υπολογισμού, οι οποίοι πιστεύουμε ότι αρκούν για την αντιμετώπιση των προβλημάτων, τα οποία συναντώνται στις συνήθεις τεχνικές εφαρμογές των εναλλασσομένων ρευμάτων.

α) Μηδενικός μιγαδικός αριθμός. είναι ο μιγαδικός εκείνος αριθμός, του οποίου τόσο το πραγματικό όσο και το φανταστικό μέρος ισούται με μηδέν. Στο επίπεδο Gauss ο μηδενικά μιγαδικός αριθμός αντιστοιχεί στο σημείο τομής των αξόνων x και y.

β) Ίσοι ονομάζονται οι **μιγαδικοί αριθμοί**, των οποίων τόσο τα πραγματικά όσο και τα φανταστικά μέρη είναι ένα προς ένα ίσα:

$$\left. \begin{array}{l} \underline{z}_1 = x_1 + jy_1 \\ \underline{z}_2 = x_2 + jy_2 \end{array} \right\} \underline{z}_1 = \underline{z}_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \quad \text{και} \quad y_1 = y_2$$

γ) Αντίθετοι ονομάζονται οι **μιγαδικοί αριθμοί**, $\underline{z} = x + jy$ και $-\underline{z} = -x - jy$

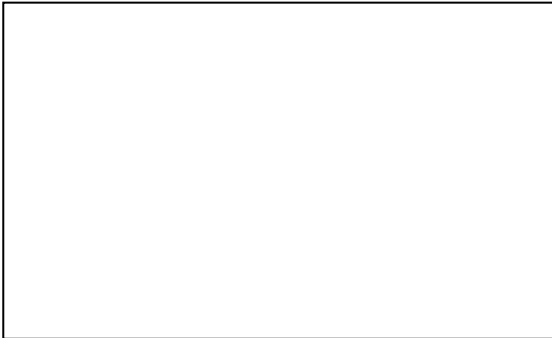


Όπως φαίνεται από το διπλανό σχήμα, τα αντίστοιχα διανύσματα είναι ίσα και αντίθετα: έχουν δηλαδή ίσα μέτρα, τον ίδιο φορέα και αντίθετες φορές.

δ) **Συζυγείς** ονομάζονται οι **μιγαδικοί αριθμοί** $\underline{z} = x + jy$ και $\overline{\underline{z}} = x - jy$

Για δύο τυχαίους συζυγείς μιγαδικούς \underline{z} και \underline{w} ισχύουν οι ακόλουθοι κανόνες:

Όπως φαίνεται από το παραπάνω σχήμα, στο επίπεδο Gauss δύο συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί αντιστοιχούν σε δύο κατοπτρικά (συμμετρικά) ως προς τον άξονα x διανύσματα.



$$\begin{aligned} \overline{\underline{z} + \underline{w}} &= \overline{\underline{z}} + \overline{\underline{w}} \\ \overline{\underline{z} \cdot \underline{w}} &= \overline{\underline{z}} \cdot \overline{\underline{w}} \\ \underline{z} \cdot \overline{\underline{z}} &= |\underline{z}|^2 \\ \underline{z} = re^{j\phi} &\Rightarrow \overline{\underline{z}} = re^{-j\phi} \end{aligned} \quad [5.9]$$

δ) **Πρόσθεση/αφαίρεση δύο μιγαδικών αριθμών** $\underline{z}_1 = x_1 + jy_1$ και $\underline{z}_2 = x_2 + jy_2$:

$$\underline{z}_1 + \underline{z}_2 = (x_1 \pm x_2) + j(y_1 + y_2) \quad [5.10]$$

Δηλαδή το άθροισμα/διαφορά δύο μιγαδικών αριθμών είναι ένας νέος μιγαδικός αριθμός, του οποίου το πραγματικό και φανταστικό μέρος ισούται με το άθροισμα/διαφορά των πραγματικών και φανταστικών μερών αντίστοιχα.

ε) **Πολλαπλασιασμός δύο μιγαδικών αριθμών** $\underline{z}_1 = r_1 e^{j\phi_1}$ και $\underline{z}_2 = r_2 e^{j\phi_2}$:

$$\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2 = r_1 \cdot r_2 e^{j(\phi_1 + \phi_2)} \quad \text{ή συμβολικά} \quad \underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2 = r_1 \cdot r_2 \left| \phi_1 + \phi_2 \right. \quad [5.11]$$

Δηλαδή πολλαπλασιάζουμε τα μέτρα και προσθέτουμε τις φάσεις.

Ιδιαίτερη σημασία έχει ο **πολλαπλασιασμός ενός μιγαδικού αριθμού \underline{z} με την φανταστική μονάδα j** :

$$j \cdot \underline{z} = e^{j\pi/2} \cdot re^{j\phi} = re^{j(\phi + \pi/2)} \equiv r \left| \phi + \pi/2 \right. \quad [5.11\alpha]$$



Βλέπουμε λοιπόν, ότι πολλαπλασιάζοντας έναν μιγαδικό αριθμό με την φανταστική μονάδα αφήνουμε ανέπαφο το μέτρο του, αυξάνουμε όμως το όρισμα του κατά $\pi/2$. Αυτό σημαίνει, ότι ο πολλαπλασιασμός ενός

μιγαδικού αριθμού με την φανταστική μονάδα ισοδυναμεί με μία περιστροφή του αντιστοίχου διανύσματος στο επίπεδο Gauss κατά $\pi/2$ ($\cong 90^\circ$). Για τον λόγο αυτό η φανταστική μονάδα j ονομάζεται και **στροφέας**.

ζ) Διαίρεση δύο μιγαδικών αριθμών $z_1 = r_1 e^{j\phi_1}$ και $z_2 = r_2 e^{j\phi_2}$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\phi_1 - \phi_2)} \quad \text{ή συμβολικά} \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \left| \phi_1 - \phi_2 \right. \quad [5.12]$$

Δηλαδή διαιρούμε τα μέτρα και αφαιρούμε τα ορίσματα.

Ιδιαίτερη σημασία έχει η **διαίρεση ενός μιγαδικού αριθμού z με την φανταστική μονάδα j** :

$$\frac{z}{j} = \frac{r e^{j\phi}}{e^{j\pi/2}} \Rightarrow \frac{z}{j} = r e^{j(\phi - \pi/2)} \equiv r \left| \phi - \pi/2 \right. \quad [5.12\alpha]$$

Βλέπουμε λοιπόν, ότι διαιρώντας έναν μιγαδικό αριθμό με την φανταστική μονάδα αφήνουμε ανέπαφο το μέτρο του, ελαττώνουμε όμως το όρισμα του κατά $\pi/2$. Αυτό σημαίνει ότι η διαίρεση ενός μιγαδικού αριθμού με την φανταστική μονάδα ισοδυναμεί με μια περιστροφή του αντιστοίχου διανύσματος στο επίπεδο Gauss κατά $-\pi/2$ ($\triangleq 90^\circ$).

Σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε εξάλλου

$$\frac{1}{j} = \frac{e^0}{e^{j\pi/2}} = e^{j(0-\pi/2)} = e^{-j\pi/2} = -j \Leftrightarrow 1/j = -j \quad [5.8] \quad [5.13]$$

η) νιοστή δύναμη μιγαδικού αριθμού: $\underline{z}^{\nu} = (re^{j\phi})^{\nu} \Rightarrow \underline{z}^{\nu} = r^{\nu} e^{j\nu\phi} \equiv r^{\nu} \underline{|\nu\phi}$ [5.14]

θ) Παραγωγήση μιγαδικού αριθμού: Όπως εξηγήσαμε στο κεφάλαιο 5.3, κατά την μελέτη εναλλασσομένων μεγεθών (εντάσεων ή τάσεων) μας ενδιαφέρει η ακόλουθη μορφή μιγαδικών αριθμών: $\underline{z} = re^{j(\omega t + \phi)}$ {1} (Το φ είναι πλέον η διαφορά φάσεως!).

Η παραγωγήση ενός τέτοιου μιγαδικού αριθμού ως προς τον χρόνο γίνεται ως εξής:

$$\frac{d\underline{z}}{dt} = \frac{d}{dt} [re^{j(\omega t + \phi)}] = r \frac{d}{dt} [e^{j\phi} e^{j\omega t}] = re^{j\phi} \frac{d}{dt} e^{j\omega t} = j\omega re^{j\phi} e^{j\omega t} = j\omega re^{j(\omega t + \phi)} \Rightarrow \underline{\frac{d\underline{z}}{dt}} = j\omega \underline{z} \quad \text{όπου} \quad \underline{z} = re^{j(\omega t + \phi)} \quad [5.15]$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι η παραγωγήση ενός μιγαδικού αριθμού $\underline{z} = e^{j(\omega t + \phi)}$ ως προς τον χρόνο t ισοδυναμεί με πολλαπλασιασμό του επί τον παράγοντα ($j\omega$).

Παίρνοντας εξάλλου υπόψη μας, ότι $j = e^{j\pi/2}$ προκύπτει:

$$\underline{\frac{d\underline{z}}{dt}} = \omega re^{j[(\omega t + \phi) + \pi/2]} \quad [5.15\alpha]$$

Επομένως η παραγωγήση ενός μιγαδικού αριθμού $\underline{z} = re^{j(\omega t + \phi)}$ ως προς τον χρόνο t ισοδυναμεί με πολλαπλασιασμό του μέτρου του επί ω και αύξηση της φάσεως του κατά $\pi/2$.

Το αντίστοιχο διάνυσμα του επιπέδου Gauss αυξάνει το μήκος του κατά ω ενώ στρέφεται συγχρόνως κατά $\pi/2$.

ι) **Ολοκλήρωση ενός μιγαδικού αριθμού** της μορφής $\underline{z} = re^{j(\omega t + \phi)}$ ως προς τον χρόνο:

$$\int \underline{z} dt = \int r e^{j(\omega t + \phi)} dt = r \int e^{j\phi} e^{j\omega t} dt = r e^{j\phi} \int e^{j\omega t} dt = r e^{j\phi} \left(\frac{1}{j\omega} e^{j\omega t} \right) = \frac{r e^{j(\omega t + \phi)}}{j\omega} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \underline{z} dt = \frac{\underline{z}}{j\omega} \quad \text{όπου} \quad \underline{z} = r e^{j(\omega t + \phi)} \quad [5.16]$$

Βλέπουμε λοιπόν, ότι η ολοκλήρωση ενός μιγαδικού αριθμού $\underline{z} = r e^{j(\omega t + \phi)}$ ως προς τον χρόνο t ισοδυναμεί με διαίρεση του με τον παράγοντα $(j\omega)$.

Παίρνοντας εξάλλου υπόψη μας, ότι $1/j = -j = e^{-j\pi/2}$ προκύπτει:

$$\int \underline{z} dt = \frac{r}{\omega} e^{j(\omega t + \phi - \pi/2)} \quad \text{ή} \quad \int \underline{z} dt = \frac{r}{\omega} \left| \omega t + \phi - \pi/2 \right. \quad [5.16\alpha]$$

Επομένως η ολοκλήρωση ενός μιγαδικού αριθμού $\underline{z} = r e^{j(\omega t + \phi)}$ ως προς τον χρόνο t ισοδύναμα, με διαίρεση του μέτρου του δια ω και ελάττωση της φάσεως του κατά $\pi/2$.

Το αντίστοιχο διάνυσμα του επιπέδου Gauss ελαττώνει το μήκος του κατά ω ενώ στρέφεται συγχρόνως κατά $-\pi/2$.

Κατά την μελέτη κυκλωμάτων εναλλασσομένου ρεύματος ενδιαφερόμαστε κυρίως για το ρεύμα, το οποίο διαρρέει το υπό μελέτη κύκλωμα, όταν στα άκρα του κυκλώματος εφαρμόζεται (αρμονική) εναλλασσόμενη τάση $[u = U_0 \sin(\omega t)]$, πλάτους U_0 και κυκλικής συχνότητας ω . Όπως δε θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο, το ρεύμα είναι επίσης εναλλασσόμενο, η δε στιγμιαία του τιμή δίδεται από την εξίσωση $i = I_0 \sin(\omega t + \phi)$, όπου το πλάτος I_0 και η διαφορά φάσεως ϕ (ως προς την τάση) εξαρτώνται από την δομή του κυκλώματος. Σύμφωνα τώρα με όσα αναπτύξαμε στις προηγούμενες παραγράφους, τάση και ρεύμα μπορούν να γραφούν σε μιγαδική μορφή ως εξής:

$$u = U_0 \sin(\omega t) \rightarrow \underline{u} = U_0 e^{j\omega t} \Rightarrow \quad \underline{i} = I_0 \underline{u}$$

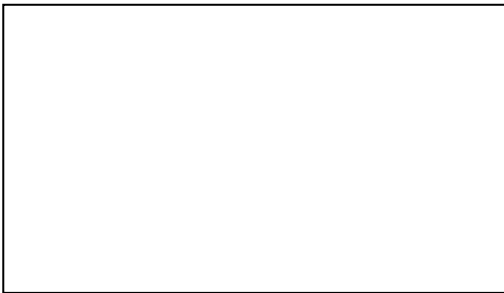
[5.17]

$$i = I_0 \sin(\omega t + \phi) \rightarrow \underline{i} = I_0 e^{j(\omega t + \phi)} \Rightarrow \underline{i} = I_0 \underline{e^{j(\omega t + \phi)}}$$

Επαναλαμβάνουμε, ότι η συμπεριφορά της πραγματικής τάσεως και εντάσεως αποδίδεται (συμβατικά) από το φανταστικό (!) μέρος της μιγαδικής τάσεως και εντάσεως αντιστοίχως:

$$\underline{u} = \text{Im}(\underline{u}) = U_0 \sin(\omega t) \quad i = \text{Im}(\underline{i}) = I_0 \sin(\omega t + \phi) \quad [5.17\alpha]$$

5.4 Μελέτη κυκλώματος RLC (σε σειρά)



Στο κύκλωμα του διπλανού σχήματος, το οποίο αποτελείται από ωμική αντίσταση τιμής R, σωληνοειδές αυτεπαγωγής L και πυκνωτή χωρητικότητας C συνδεδεμένα σε σειρά, μεταβάλλεται εκτός από την στα άκρα του κυκλώματος ασκούμενη τάση u, όπως είναι φυσικό, και η ένταση i του ρεύματος, η οποία όμως σε μια δεδομένη χρονική στιγμή t είναι η ίδια σε όλο το μήκος του κυκλώματος. (Όπως εξηγήσαμε στο κεφάλαιο 3.1, η στατικότροπη αυτή συμπεριφορά του

ρεύματος ισχύει για τις βιομηχανικές λεγόμενες συχνότητες, οι οποίες δεν ξεπερνούν τις μερικές εκατοντάδες Hertz και στις οποίες έχουμε ευθύς εξ αρχής περιοριστεί.)

Οι στιγμιαίες τιμές των τάσεων που παρατηρούνται στα στοιχεία του παραπάνω κυκλώματος δίδονται από τις ακόλουθες, γνωστές μας σχέσεις:

$$u_R = iR \quad \{1\} \quad (\text{Νόμος του Ohm})$$

$$u_L = (-)L \frac{di}{dt} \quad \{2\} \quad (\text{Νόμος της ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής για την περίπτωση της αυτεπαγωγής})$$

$$u_C = \frac{q}{C} \quad \{3\} \quad (\text{Ορισμός της χωρητικότητας πυκνωτή})$$

Σύμφωνα με τον 2^ο κανόνα του Kirchhoff θα ισχύει για τις στιγμιαίες τιμές των τάσεων:

$$u = u_E + u_L + u_C \quad \{4\}$$

Στην παραπάνω σχέση αντικαθιστούμε την αναλυτική έκφραση της αρμονικής τάσεως u καθώς και των τάσεων u_R , u_L , και u_C , προσέχοντας ότι τόσο ο πυκνωτής όσο και η αυτεπαγωγή συμπεριφέρονται ως πηγές, η στιγμιαία πώλωση των οποίων είναι αντίθετη προς εκείνη της αρμονικής τάσεως:

$$U_0 \sin(\omega t) = iR + L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} \quad \{5\}$$

Σκεπτόμενοι ότι $i = dq/dt \Rightarrow dq = idt \Rightarrow q = \int idt$ παίρνουμε:

$$iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int idt = U_0 \sin(\omega t) \quad \{5a\}$$

Όπως θα δούμε παρακάτω, η επίλυση της παραπάνω μη ομογενούς (ολοκληρω-) διαφορικής εξίσωσης μας δίνει ως αποτέλεσμα το άθροισμα δύο ρευμάτων: ενός φθίνοντος εκθετικού και ενός αρμονικού. (Πρόκειται για γενική λύση της ομογενούς και την μερική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης αντιστοίχως). Το πρώτο περιγράφει προφανώς την μεταβατική φάση της ενάρξεως της λειτουργίας του κυκλώματος και είναι χωρίς ιδιαίτερο ενδιαφέρον, αφού αργά ή γρήγορα εξαφανίζεται. Απομένει τότε το δεύτερο, αρμονικό ρεύμα, το οποίο περιγράφει την μόνιμη κατάσταση, κατά την οποία το ρεύμα μεταβάλλεται με την συχνότητα που επιβάλλει η στα άκρα του κυκλώματος εφαρμοζόμενη, αρμονική τάση, με πλάτος όμως εξαρτώμενο αποφασιστικά από την τιμή των R , L και C .

α) Επίλυση της ομογενούς εξίσωσης $iR + L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \quad \{6\}$

Σκεπτόμενοι ότι $i = dq/dt$ παραγωγίζουμε την {6} μία φορά ως προς τον χρόνο και παίρνουμε:

$$\frac{di}{dt} R + L \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{i}{C} = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0 \quad \{7\}$$

Πρόκειται για μια (βλ. 3.5.8) συνήθη, γραμμική, ομογενή διαφορική εξίσωση 2ας τάξεως με σταθερούς συντελεστές. Η επίλυσή της γίνεται σύμφωνα με το παρακάτω σχήμα:

Ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση 2ας τάξεως με σταθερούς συντελεστές

Η **γενική μορφή** μιας συνήθους, ομογενούς, γραμμικής διαφορικής εξίσωσης 2ας τάξεως με σταθερούς συντελεστές είναι:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \quad \{I\}$$

Θέτουμε $y = e^{\lambda x}$ ($\Rightarrow y' = \lambda e^{\lambda x}$ και $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$), οπότε προκύπτει η ακόλουθη

χαρακτηριστική εξίσωση: $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}$ { II }

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

1. $\lambda_1 \neq \lambda_2$, πραγματικοί αριθμοί. **Γενική λύση** $y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$ { IIIα }

2. $\lambda_1 = \lambda_2 = -a_1/2$. **Γενική λύση** $y = (c_1 + c_2 x) e^{-a_1 x/2}$ { IIIβ }

3. $\lambda_{1,2} = a \pm j\beta$, συζυγείς μιγαδικοί. **Γενική λύση** $y = e^{ax} (c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x))$ { IIIγ }

Οι σταθερές c_1 και c_2 υπολογίζονται από τις αρχικές συνθήκες.

Στην περίπτωση μας (σύγκριση της { 7 } με την { I }) έχουμε: $a_1 = R/L$ και $a_2 = 1/(LC)$, οπότε στην θέση της εξίσωσης { II } παίρνουμε:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \frac{\sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC}}}{2} \quad \{8\}$$

Διακρίνουμε λοιπόν τις ακόλουθες περιπτώσεις:

1) $(RL)^2 > 4/(LC)$. Λύση ομογενούς: $i(t) = c_1 \exp \left[\left(-\frac{R}{2L} + \frac{\sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC}}}{2} \right) t \right] +$



$$+ c_2 \exp \left[\left(-\frac{R}{2L} - \frac{\sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC}}}{2} \right) t \right] \quad \{7\alpha\}$$

Πρόκειται για απεριοδική εκθετική μείωση του ρεύματος, η οποία αποδίδεται ποιοτικά στο παραπάνω σχήμα.

2) $(R/L)^2 = 4/(LC)$. Λύση ομογενούς: $i(t) = c_1 \exp\left[-\frac{R}{2L}t\right] + c_2 t \exp\left[-\frac{R}{2L}t\right]$
 {7β}

Πρόκειται για **οριακή απεριοδική εκθετική μείωση του ρεύματος**, η οποία αποδίδεται ποιοτικά επίσης από το παραπάνω σχήμα.

3) $(R/L)^2 < 4/(LC)$. Λύση ομογενούς:

$$i(t) = c_1 \exp\left[-\frac{R}{2L}t\right] \cos\left[\frac{\sqrt{\frac{4}{LC} - \left(\frac{R}{L}\right)^2}}{2}t\right] + c_2 \exp\left[-\frac{R}{2L}t\right] \sin\left[\frac{\sqrt{\frac{4}{LC} - \left(\frac{R}{L}\right)^2}}{2}t\right] \quad \{7\gamma\}$$

.....
 $\equiv \omega_{\phi\theta} t$

Πρόκειται για **μια φθίνουσα ταλάντωση κυκλικής « συχνότητας »**

$$\omega_{\phi\theta} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2},$$

η χρονική εξάρτηση της οποίας αποδίδεται ποιοτικά στο παρακάτω σχήμα.



$$t = T = \frac{2\pi}{\omega_{\phi\theta}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}$$

Σ' όλες τις παραπάνω περιπτώσεις οι σταθερές c_1 και c_2 προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες. Αυτό σημαίνει ότι εξαρτώνται από το πότε άρχισε η μέτρηση του χρόνου, οπότε είναι χωρίς ιδιαίτερο ενδιαφέρον.

Όπως είδαμε παραπάνω, η επίλυση της ομογενούς εξίσωσης {7} μας δίνει ως αποτέλεσμα ένα ρεύμα, του οποίου η ένταση φθίνει εκθετικά με τον χρόνο (βλ. {7α} ως {7γ}). Το ρεύμα αυτό παρατηρείται επομένως μόνο κατά την έναρξη λειτουργίας του κυκλώματος και είναι ως εκ τούτου περιορισμένου πρακτικού ενδιαφέροντος. Σημειώνουμε εξάλλου, ότι το εν λόγω ρεύμα δεν επηρεάζεται από την εξωτερική τάση u , η οποία άλλωστε δεν πάρθηκε υπόψη κατά τον υπολογισμό του.

Η αρμονική τάση u με την σειρά της περιμένουμε να προκαλεί ένα (επιπλέον) επίσης αρμονικό ρεύμα, της ίδιας συχνότητας με αυτήν, αν και όχι αναγκαστικά και της ίδιας φάσης. Το αρμονικό αυτό ρεύμα i θα αντιστοιχεί προφανώς στην μερική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης {5α}. Όπως δε θα δούμε ευθύς αμέσως, ο υπολογισμός του εν λόγω αρμονικού ρεύματος απλουστεύεται δραματικά με την χρήση μιγαδικών αριθμών. Μεταπηδούμε λοιπόν στον χώρο των μιγαδικών αριθμών, όπου η {5α} παίρνει την ακόλουθη συμβολική μορφή:

$$\underline{u} = \underline{i}R + L \frac{d\underline{i}}{dt} + \frac{1}{C} \int \underline{i} dt \quad \{5\beta\}$$

όπου $\underline{u} = U_0 |_{\omega t}$ και $u = \text{Im}(\underline{u}) = U_0 \sin(\omega t)$

(βλ. [5.17] και [5.17α])

$$\underline{i} = I_0 |_{\omega t + \phi} \quad i = \text{Im}(\underline{i}) = I_0 \sin(\omega t + \phi)$$

Παίρνοντας υπόψη τους κανόνες παραγώγισης και ολοκλήρωσης του κεφαλαίου 5.3.1. σύμφωνα με τους οποίους η παραγώγιση/ολοκλήρωση ενός μιγαδικού αριθμού ως προς τον χρόνο ισοδυναμεί με πολλαπλασιασμό του επί/διαίρεσή του δια $(j\omega)$, έχουμε:

$$\underline{Z} =: R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \quad [5.18]$$

$$\underline{u} = \underline{i}R + j\omega L \underline{i} + \frac{1}{j\omega C} \underline{i} \Rightarrow \underline{u} = \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) \underline{i} \quad \Rightarrow \underline{u} = \underline{Z} \underline{i} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{i} = \frac{\underline{u}}{\underline{Z}} \quad [5.19].$$

Η εξίσωση αυτή μας θυμίζει έντονα τον νόμο του Ohm για συνεχές ρεύμα (βλ. κεφ. 3.4.1) και, ως εκ τούτου, χαρακτηρίζεται συνήθως ως **νόμος του Ohm για εναλλασσόμενα ρεύματα.**

Το μέγεθος \underline{Z} , το οποίο έχει προφανώς διαστάσεις αντίστασης, αφού ο ένας προσθετός είναι η ωμική αντίσταση R, χαρακτηρίζεται ως **μγαδική σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος.**

Ο νόμος λοιπόν του Ohm για εναλλασσόμενα ρεύματα μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

Η μιγαδική ένταση \underline{i} του ρεύματος, το οποίο διαρρέει κύκλωμα (ή τμήμα κυκλώματος), στα άκρα του οποίου εφαρμόζεται η αρμονική τάση u , υπολογίζεται διαιρώντας την **μιγαδική τάση \underline{u}** με την μιγαδική σύνθετη αντίσταση \underline{Z} του κυκλώματος (ή του τμήματος κυκλώματος).

Πολύ συχνά η μιγαδική σύνθετη αντίσταση \underline{Z} γράφεται στην ακόλουθη μορφή:

$$\underline{Z} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$$

$$\begin{aligned} 1/j &= -j \\ &= R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C} \Rightarrow \underline{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \equiv R + j(R_L - R_C) \end{aligned} \quad [5.18\alpha]$$

όπου $R =$ **ωμική αντίσταση**

$R_L = \omega L =$ **επαγωγική αντίσταση**

$R_C = \frac{1}{\omega C} =$ **χωρητική αντίσταση**

Όπως βλέπουμε, η αντίσταση ενός δεδομένου σωληνοειδούς αυτεπαγωγής L αυξάνει με αυξανόμενη κυκλική συχνότητα ω του εναλλασσομένου ρεύματος, το οποίο το διαρρέει. Το γεγονός αυτό βρίσκει εφαρμογή στο «φιλτράρισμα» υψηλών συχνοτήτων μέσω των **αποπνικτικών**, όπως χαρακτηρίζονται, **πηνίων**. Ακριβώς αντίθετη είναι η συμπεριφορά ενός πυκνωτή χωρητικότητας C . Πυκνωτές, οι οποίοι χρησιμοποιούνται προκειμένου να επιτρέπουν υψηλόσυχα ρεύματα και να καταστέλλουν τα χαμηλόσυχα, χαρακτηρίζονται ως **πυκνωτές διαρροής**.

Αν εισάγουμε την **μιγαδική επαγωγική αντίσταση** $\underline{R}_L = j\omega L$ και την **μιγαδική χωρητική αντίσταση** $\underline{R}_C = -\frac{j}{\omega C}$, η σύνθετη αντίσταση γράφεται: $\underline{Z} = R + \underline{R}_L + \underline{R}_C$

Παρατηρούμε λοιπόν, ότι **οι μιγαδικές εναλλασσόμενες αντιστάσεις όταν συνδέονται σε σειρά προστίθενται προκειμένου να διαμορφώσουν την σύνθετη αντίσταση \underline{Z}** , συμπεριφέρονται δηλαδή όπως και οι αντιστάσεις συνεχούς (Τα πλεονεκτήματα της χρήσης μιγαδικών αριθμών δεν έχουν τέλος!).

Ας ξαναγυρίσουμε όμως στον υπολογισμό του ρεύματος \underline{i} . Προς τον σκοπό αυτό γράφουμε την μιγαδική σύνθετη αντίσταση \underline{Z} σε εκθετική μορφή:

$$\underline{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \quad \{\alpha\}$$

$$= Z \underline{Arg(Z)} \quad \{\beta\}$$

$$\text{όπου } Z \equiv |Z| = \sqrt{\text{Re}^2(Z) + \text{Im}^2(Z)} \Rightarrow Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad [5.20]$$

(απόλυτη τιμή ή φαινομένη αντίσταση)

$$\text{και } Arg(Z) = \arctan \frac{\text{Im}(Z)}{\text{Re}(Z)} \Rightarrow Arg(Z) = \arctan \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad [5.20\alpha]$$

Από την [5.19] παίρνουμε εξάλλου:

$$\underline{i} = \frac{\underline{u}}{\underline{Z}} = \frac{U_0 \underline{\omega t}}{Z \underline{Arg(Z)}} = \frac{U_0}{Z} \underline{\omega t - Arg(Z)} \equiv I_0 \underline{\omega t + \phi}$$

$$\text{με } I_0 = \frac{U_0}{Z} = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad : \text{ πλάτος εντάσεως} \quad [5.21]$$

$$\text{και } \phi = -Arg(Z) = -\arctan \frac{\text{Im}(Z)}{\text{Re}(Z)} = -\arctan \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \Leftrightarrow \tan \phi = -\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad [5.21\alpha]$$

(διαφορά φάσεως μεταξύ τάσεως \underline{u} και εντάσεως \underline{i})

ή

$$I_0 = \frac{U_0}{Z} = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (R_L - R_C)^2}} \quad : \text{ πλάτος εντάσεως} \quad [5.22]$$

$$\phi = -\arctan \frac{R_L - R_C}{R} \Leftrightarrow \tan \phi = -\frac{R_L - R_C}{R} \quad [5.22\alpha]$$

(διαφορά φάσεως μεταξύ τάσεως \underline{u} και εντάσεως \underline{i})

με $R_L = \omega L$: **επαγωγική αντίσταση**

$$R_C = \frac{1}{\omega C} = \text{χωρητική αντίσταση}$$

Η μορφή [5.22] και [5.22α] έχει αυξημένο πρακτικό ενδιαφέρον, επειδή καλύπτει όλες τις **υποπεριπτώσεις κυκλώματος RLC σε σειρά**, όπως π.χ.

Κύκλωμα RC (σε σειρά): Το πλάτος I_0 της έντασης και η διαφορά φάσεως ϕ μεταξύ τάσεως και εντάσεως υπολογίζονται από τις εξισώσεις [5.22] και [5.22α] αντίστοιχα θέτοντας $R_L = 0$:

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + R_C^2}} \quad \text{και} \quad \phi = -\arctan \frac{-R_C}{R}$$

Κύκλωμα C ($\rightarrow R=0$ και $R_L = 0$):

$$[5.22] \rightarrow I_0 = \frac{U_0}{R_C} \quad \text{και} \quad \phi = -\arctan(-\infty) = -(-\pi/2) \Rightarrow \phi = \pi/2 : \text{το ρεύμα προηγείται κατά}$$

$\pi/2$

$$-\infty = \lim_{\substack{R \rightarrow 0 \\ R_L \rightarrow 0}} \frac{R_L - R_C}{R}$$

Κύκλωμα L ($\rightarrow R=0$ και $R_C = 0$)

$$[5.22] \rightarrow I_0 = \frac{U_0}{R} \quad \text{και} \quad \phi = -\arctan(\infty) \Rightarrow \phi = -\pi/2 : \text{το ρεύμα υστερεί κατά } \pi/2$$

$$\infty = \lim_{\substack{R \rightarrow 0 \\ R_C \rightarrow 0}} \frac{R_L - R_C}{R}$$

5.4.1 Κανόνες του Kirchhoff για εναλλασσόμενα ρεύματα

Είδαμε λοιπόν (βλ. [5.19]), ότι ο νόμος του Ohm διατηρεί την ισχύ του και για εναλλασσόμενα ρεύματα σε *μιγαδική* βέβαια μορφή. Το ίδιο ισχύει και για τους δύο κανόνες του Kirchhoff, οι οποίοι για εναλλασσόμενα ρεύματα διατυπώνονται ως εξής:

1^{ος} κανόνας του Kirchhoff για εναλλασσόμενα ρεύματα: Το άθροισμα των *μιγαδικών* εντάσεων των εναλλασσομένων ρευμάτων ενός κόμβου ισούται με μηδέν.

2^{ος} κανόνας του Kirchhoff για εναλλασσόμενα ρεύματα: Το άθροισμα των *μιγαδικών* εναλλασσομένων ΗΕΔ κατά μήκος ενός βρόγχου ισούται με το άθροισμα των *μιγαδικών* πτώσεων τάσεως στις *μιγαδικές* αντιστάσεις του κυκλώματος.



Η ισχύς των κανόνων του Kirchhoff με την παραπάνω μορφή και για τα εναλλασσόμενα ρεύματα στηρίζεται στο γεγονός, ότι η προβολή της συνισταμένης δύο διανυσμάτων ισούται με το άθροισμα των προβολών των δύο συνιστωσών της. Έτσι οι κανόνες του Kirchhoff, οι οποίοι ισχύουν κατ' αρχήν για τις στιγμιαίες τιμές των τάσεων και εντάσεων, θα ισχύουν και για τα αντίστοιχα μιγαδικά μεγέθη, τα οποία ως γνωστόν παριστάνονται με ανύσματα, οι προβολές των οποίων ισούνται με τις στιγμιαίες τιμές των τάσεων και εντάσεων.

Είδαμε επίσης, ότι η ολική *μιγαδική* σύνθετη αντίσταση *μιγαδικών* εναλλασσομένων αντιστάσεων, συνδεομένων σε σειρά, ισούται με το αλγεβρικό τους άθροισμα. Έστω τώρα τρεις *μιγαδικές σύνθετες* αντιστάσεις \underline{Z}_1 , \underline{Z}_2 και \underline{Z}_3 συνδεμένες παράλληλα (βλ. σχ. 5.6).



Από τον 1^ο κανόνα του Kirchhoff προκύπτει ότι:

$$\underline{i} = \underline{u} / \underline{Z} \quad \Rightarrow \quad \frac{\underline{u}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{u}}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{u}}{\underline{Z}_2} + \frac{\underline{u}}{\underline{Z}_3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3}$$

Βλέπουμε λοιπόν, ότι οι κανόνες υπολογισμού της ολικής σύνθετης μιγαδικής αντίστασης εναλλασσομένων αντιστάσεων είναι και σ' αυτήν την περίπτωση ίδιοι με εκείνους που ισχύουν και για το συνεχές ρεύμα. Μπορούμε λοιπόν να συνοψίσουμε ως εξής:

Όταν δύο υπό εναλλασσομένου ρεύματος διαρρέομενα στοιχεία συνδέονται κατά σειρά, προστίθενται οι μιγαδικές τους αντιστάσεις, όταν είναι συνδεδεμένα παράλληλα προστίθενται οι μιγαδικές τους αγωγιμότητες (Υπενθυμίζουμε, ότι αγωγιμότητα = 1/αντίσταση).

Όλα αυτά δείχνουν τα πλεονεκτήματα της μιγαδικής διατύπωσης.

5.4.2 Συντονισμός σε κύκλωμα RLC σε σειρά

Το πλάτος I_0 και η διαφορά φάσεως ϕ μεταξύ τάσεως και εντάσεως δίδονται, όπως είδαμε (βλ. [5.21] και [5.21α]), από τις σχέσεις:

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad \phi = -\arctan \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad \{1\}$$

εξαρτώνται λοιπόν αμφότερα από την συχνότητα της εναλλασσόμενης τάσεως.

Η συμπεριφορά του πλάτους I_0 συναρτήσει της κυκλικής συχνότητας ω αποδίδεται ποιοτικά στο σχήμα 5.6 για δύο διαφορετικές τιμές της ωμικής αντίστασης. Όπως βλέπουμε, **το πλάτος γίνεται μέγιστο, όταν η**

κυκλική συχνότητα ω γίνει

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad [5.23],$$

όταν δηλαδή η επαγωγική αντίσταση $R_L = \omega L$ γίνει ίση με την χωρητική $R_C = 1/(\omega C)$.

$$\left(\omega L = \frac{1}{\omega C} \Rightarrow \omega^2 = \frac{1}{LC} \right).$$

Τότε έχουμε το φαινόμενο του συντονισμού. Η συχνότητα $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ χαρακτηρίζεται ως ιδιοσυχνότητα του κυκλώματος.

Όπως προκύπτει εξάλλου από τις παραπάνω σχέσεις, η διαφορά φάσεως μεταξύ ρεύματος και τάσεως σε κατάσταση συντονισμού μηδενίζεται.

Η συμπεριφορά της διαφοράς φάσεως ϕ συναρτήσει της κυκλικής συχνότητας ω αποδίδεται ποιοτικά στο σχήμα 5.7. Όπως βλέπουμε, για μικρές συχνότητες $\left(\omega < \sqrt{\frac{1}{LC}} \right)$ υπερισχύει η χωρητική αντίσταση

$R_C = \frac{1}{\omega C}$ και το κύκλωμα εμφανίζει χωρητική συμπεριφορά: το ρεύμα προηγείται της τάσεως.

Για μεγάλες συχνότητες $\left(\omega > \sqrt{\frac{1}{LC}} \right)$

υπερισχύει η επαγωγική αντίσταση $R_L = \omega L$ και το κύκλωμα εμφανίζει επαγωγική συμπεριφορά: το ρεύμα καθυστερεί.

Σε συντονισμό το κύκλωμα εμφανίζει καθαρά ωμική συμπεριφορά: το ρεύμα είναι συμφασικό προς την τάση.

5.5 Ισχύς και ενεργές τιμές εναλλασσομένων ρευμάτων

Η στιγμιαία ισχύς P ενός εναλλασσομένου ρεύματος $i = I_0 \sin(\omega t + \phi)$, το οποίο προκαλείται από την εναλλασσόμενη τάση $u = U_0 \sin(\omega t)$, ισούται κατά τα γνωστά με το γινόμενο της (στιγμιαίας τιμής) της τάσεως και της (στιγμιαία τιμή) εντάσεως:

στιγμιαία ισχύς:
$$P = iu = I_0 U_0 \sin(\omega t) \sin(\omega t + \phi) \quad [5.24]$$

Λόγω της διαρκούς μεταβολής της με τον χρόνο, η στιγμιαία ισχύς P έχει ελάχιστη πρακτική αξία. Αντιθέτως άμεσο πρακτικό ενδιαφέρον έχει η **μέση ισχύς** \bar{P} , η οποία υπολογίζεται σύμφωνα με τον ακόλουθο γενικό ορισμό της μέσης τιμής χρονικώς μεταβαλλόμενου μεγέθους:

Μέση τιμή \bar{f} συνάρτησης f(t):
$$\bar{f} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt \quad [5.25]$$

Στην περίπτωση που πρόκειται για περιοδική συνάρτηση του χρόνου, το χρονικό διάστημα $t_2 - t_1$ λαμβάνεται, όπως είναι λογικό, ίσο με την περίοδο T:

Μέση τιμή \bar{f} περιοδικής συνάρτησης f(t) με περίοδο T

$$\bar{f} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad [5.25\alpha]$$

Σύμφωνα λοιπόν με την σχέση αυτή παίρνουμε για την μέση ισχύ:

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt \stackrel{[5.24]}{=} \frac{1}{T} \int_0^T I_0 U_0 \sin(\omega t) \sin(\omega t + \phi) dt = \frac{I_0 U_0}{T} \int_0^T I_0 U_0 \sin(\omega t) \sin(\omega t + \phi) dt$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

↓
=

$$\frac{I_0 U_0}{T} \int_0^T \sin(\omega t) [\sin(\omega t) \cos \phi + \cos(\omega t) \sin \phi] dt =$$

$$\frac{I_0 U_0}{T} \int_0^T [\sin^2(\omega t) \cos \phi + \sin(\omega t) \cos(\omega t) \sin \phi] dt = \frac{I_0 U_0}{T} \left[\cos \phi \int_0^T \sin^2(\omega t) dt + \sin \phi \int_0^T \sin(\omega t) \cos(\omega t) dt \right] =$$

$$\begin{aligned} \uparrow \int \sin(\omega t) dt &= \frac{1}{\omega} t - \frac{1}{4\omega} \sin(2\omega t) \\ \uparrow \int \sin(\omega t) \cos(\omega t) dt &= \frac{1}{2\omega} \sin^2(\omega t) \end{aligned} \quad \left\{ \frac{I_0 U_0}{T} \left[\cos \phi \left[\frac{1}{2} t - \frac{\sin(2\omega t)}{4\omega} \right]_0^T + \sin \phi \left[\frac{1}{2\omega} \sin^2(\omega t) \right]_0^T \right] \right.$$

= 0

$$= \frac{I_0 U_0}{T} \cos \phi \frac{T}{2} \Rightarrow \bar{P} = \frac{1}{2} I_0 U_0 \cos \phi \quad [5.26]$$

μέση ή ενεργός ή πραγματική ισχύς

cosφ = συντελεστής ισχύος: χαρακτηριστικό για το κύκλωμα μέγεθος.

Στην περίπτωση που το εναλλασσόμενο ρεύμα διαρρέει μια ωμική αντίσταση R ($\Rightarrow \phi = 0 \Leftrightarrow \cos\phi = 1$), η μέση του ισχύς γίνεται:

$$\bar{P}_R = \frac{1}{2} U_0 I_0 \quad I_0 = U_0 / R \quad = \quad \frac{1}{2} I_0^2 R \quad \{1\}$$

Αν η ίδια αντίσταση διαρρέετο από συνεχές ρεύμα έντασης I_0 , τότε η αντίστοιχη ισχύς θα ήταν $P_0 = I_0^2 R$. Στην περίπτωση δε που η ένταση του συνεχούς ρεύματος ήταν $I_0 = I_0 / \sqrt{2}$, τότε το συνεχές ρεύμα θα είχε ισχύ ίση με την μέση ισχύ του εναλλασσομένου ρεύματος. Η τιμή αυτή χαρακτηρίζεται ως εκ τούτου ως **ενεργός ένταση I του εναλλασσομένου ρεύματος**, η δε αυτήν προκαλούσα συνεχής τάση $U = IR = (I_0 / \sqrt{2})R = U_0 / \sqrt{2}$, ως **ενεργός τάση** αυτού:

Ενεργός ένταση I εναλλασσομένου ρεύματος καλείται η τιμή του συνεχούς εκείνου ρεύματος, το οποίο - όταν διαρρέει την ίδια ωμική αντίσταση με το εναλλασσόμενο - αποδίδει ισχύ ίση με την μέση ισχύ του εναλλασσομένου.

Ενεργά μεγέθη εναλλασσομένου ρεύματος:	$I = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$	$U = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$	[5.27]
---	----------------------------	----------------------------	---------------

Σημειωτέον ότι οι ενεργές τιμές μετρώνται απ' ευθείας με τα αμπερόμετρα και βολτόμετρα εναλλασσομένου ρεύματος. Στην χώρα μας η ενεργός τάση του ρεύματος οικιακής χρήσεως ισούται με 220 V.

Με την βοήθεια των ενεργών μεγεθών η σχέση [5.26] γράφεται:

$$\bar{P} = \frac{1}{2} I_0 U_0 \cos \phi = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \frac{U_0}{\sqrt{2}} \cos \phi \Rightarrow \bar{P} = IU \cos \phi \quad \{2\} \quad [5.27]$$

Από το νόμο του Ohm έχουμε εξάλλου:
$$\underline{i} = \frac{u}{\underline{Z}} \Rightarrow I_0 = \frac{U_0}{Z} \Rightarrow I = \frac{U}{Z} \quad [5.28]$$

$\Leftrightarrow U = IZ$ {3}. Αντικαθιστώντας την {3} στην {2} παίρνουμε:

$$\begin{aligned} Z \cos \phi &= \operatorname{Re}(\underline{Z}) \\ \bar{P} = I(IZ) \cos \phi &= I^2 Z \cos \phi = I^2 \operatorname{Re}(\underline{Z}) \quad \{4\} \\ &\text{βλ. κεφ. 5.3} \end{aligned}$$

Συνοψίζοντας λοιπόν τις σχέσεις [5.26], {2} και {4} έχουμε:

$$\bar{P} = \frac{1}{2} I_0 U_0 \cos \phi = IU \cos \phi = I^2 Z \cos \phi = I^2 \operatorname{Re}(\underline{Z}) \quad [5.26\alpha]$$

μέση ή ενεργός ή πραγματική ισχύς

Παραδείγματα

Παράδειγμα Σ.5.1: Να υπολογισθεί η μιγαδική σύνθετη αντίσταση του παρακάτω κυκλώματος:

Όπως γνωρίζουμε, στον χώρο των μιγαδικών ισχύουν και για τα εναλλασσόμενα μεγέθη οι νόμοι, που ισχύουν για τα συνεχή. Το παραπάνω κύκλωμα μπορεί επομένως να μετασχηματιστεί ως εξής:

Οι αντιστάσεις R και \underline{R}_L συνδέονται σε σειρά, οπότε έχουμε: $\underline{Z}_{RL} = R + \underline{R}_L = R + j\omega L \quad \{1\}$

Οι αντιστάσεις \underline{Z}_{RL} και \underline{R}_C συνδέονται παράλληλα, οπότε έχουμε:

$$\underline{R}_L = j\omega L \quad \underline{R}_C = -\frac{j}{\omega C} \quad 210$$

$$\frac{1}{\underline{Z}_{RLC}} = \frac{1}{\underline{Z}_{RL}} + \frac{1}{\underline{R}_c} \Rightarrow \underline{Z}_{RLC} = \frac{\underline{Z}_{RL} \underline{R}_c}{\underline{Z}_{RL} + \underline{R}_c} \stackrel{\{1\}}{=} \frac{(R + j\omega L) \left(-\frac{j}{\omega C}\right)}{(R + j\omega L) + \left(-\frac{j}{\omega C}\right)} = \frac{-\frac{j}{\omega C} R - \frac{J^2 \omega L}{\omega C}}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

$$j^2 = -1 \quad \frac{\frac{L}{C} - \frac{j}{\omega C} R}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{\left(\frac{L}{C} - \frac{j}{\omega C} R\right) \left[R - j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right]}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} =$$

↑

πολλαπλασιάζουμε επί τον συζυγή του

$$\frac{\frac{L}{C} R - j \frac{L}{C} \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) - j \frac{R^2}{\omega C} + j^2 \frac{R}{\omega C} \left(\frac{L}{C} - \frac{j}{\omega C} R\right)}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \frac{\dots \left[\frac{L}{C} \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) + \frac{R^2}{\omega C} \right] - \frac{R}{\omega C} \omega L + \frac{R}{\omega C} \frac{1}{\omega C}}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \underline{Z}_{RLC} = \frac{\frac{R}{\omega^2 C^2} - j \left[\frac{L}{C} \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) + \frac{R^2}{\omega C} \right]}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

Παράδειγμα Σ.5.2: Κύκλωμα αποτελούμενο από ωμική αντίσταση 2 kΩ και πυκνωτή 1μF συνδεδεμένα σε σειρά τροφοδοτείται με εναλλασσόμενη τάση ενεργούς τιμής 220 V και συχνότητας 50 Hz. Ζητείται:

α) Η σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος.

β) Η ενεργός τιμή του ρεύματος.



γ) Η δαπανώμενη ισχύς.

δ) Η ένδειξη ενός βολτομέτρου, όταν αυτό συνδέεται στα άκρα της αντίστασης ή του πυκνωτή.

Λύση:

α) Η αντίσταση R και ο πυκνωτής C συνδέονται σε σειρά. Στον χώρο λοιπόν των μιγαδικών έχουμε:

$$\underline{Z} = R + \underline{R}_C = R - \frac{j}{\omega C} = R - \frac{j}{2\pi\nu C} = 2000 - \frac{j}{2\pi \cdot 50 \cdot 10^{-6}} \Rightarrow \underline{Z} = 2000 - 3184,7j \quad \{1\}$$

$$Z \equiv \underline{Z} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{-1}{\omega C}\right)^2} \{1\} = \sqrt{2000^2 + (-3184,7)^2} \Rightarrow Z = 3760,6\Omega \quad \{2\}$$

β) Σύμφωνα με τον νόμο του Ohm έχουμε εξάλλου (βλ. [5.28]): $I = U/Z = 220/3760,6 \Rightarrow I = 0,059 \text{ A}$
{3}

γ) Η δαπανώμενη (= πραγματική) ισχύς δίδεται, από την σχέση [5.26α]: $\vec{P} = I^2 Z \cos \phi$
{4}

$$\text{όπου} \quad \phi = -\arctan \frac{\text{Im}(\underline{Z})}{\text{Re}(\underline{Z})} \{1\} = \arctan \frac{-3184,7}{2000} \Rightarrow \phi = 57,87^\circ \Rightarrow \cos \phi = 0,532$$

{5}

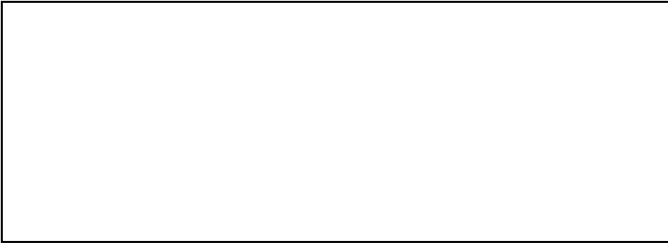
Αντικαθιστούμε την {2}, {3} και {5} στην {4}:

$$\text{ή} \quad [5.26\alpha]: \quad \vec{P} = I^2 \text{Re}(\underline{Z}) = I^2 R = 0,059 \cdot 2000 = 6,96W$$

δ) Η ένδειξη του βολτομέτρου ισούται με τις αντίστοιχες ενεργές τάσεις U_R και U_C , οι οποίες σύμφωνα με τον νόμο του Ohm (βλ. [5.28]) είναι: $U_R = IR = 0,059 \cdot 2000 \Rightarrow U_R = 118V$

$$U_C = IR_C = 0,059 \cdot 3184,7 \Rightarrow U_C = 187,9 \approx 188V$$

Παράδειγμα Σ.5.3: Ζητούνται τα ρεύματα, τα οποία διαρρέουν τους διαφόρους κλάδους του παρακάτω κυκλώματος, καθώς και τάσεις στα άκρα των στοιχείων αυτού.



$$R_1 = 2 \text{ k}\Omega$$

$$C = 40 \text{ }\mu\text{F}$$

$$R_2 = 100 \text{ }\Omega$$

$$L = 0,2 \text{ H}$$

$$U = 220 \text{ V}$$

$$\nu = 50 \text{ Hz}$$

Παρατήρηση: Όταν ψάχνουμε τα ρεύματα, τα οποία διαρρέουν τους κλάδους ενός κυκλώματος, στα άκρα του οποίου εφαρμόζεται εναλλασσόμενη τάση, εργαζόμαστε συνήθως ως εξής:

Αφού μεταπηδήσουμε στον χώρο των μιγαδικών αριθμών,

α) Υπολογίζουμε τις σύνθετες μιγαδικές αντιστάσεις των διαφόρων κλάδων χωριστά, όπως θα τις υπολογίζαμε για κυκλώματα συνεχούς.

β) Υπολογίζουμε την ολική σύνθετη μιγαδική αντίσταση διαφόρων κλάδων μαζί, έως ότου καταλήξουμε στην σύνθετη μιγαδική αντίσταση \underline{Z} ολοκλήρου του κυκλώματος.

γ) Υπολογίζουμε το ολικό μιγαδικό ρεύμα \underline{i} από τον νόμο του Ohm: $\underline{i} = \underline{u} / \underline{Z}$

δ) Ευρίσκουμε τις τάσεις \underline{u}_r στα διάφορα τμήματα του κυκλώματος πολλαπλασιάζοντας το ολικό ρεύμα \underline{i} με την σύνθετη μιγαδική αντίσταση \underline{Z}_r του συγκεκριμένου τμήματος: $\underline{u}_r = \underline{i} \cdot \underline{Z}_r$. Αν το τμήμα περιλαμβάνει πολλούς κλάδους συνδεδεμένους παράλληλα, βρίσκουμε το ρεύμα $\underline{i}_κ$ κάθε κλάδου διαιρώντας την τάση

$\underline{u}_κ = \underline{u}_τ$ στα άκρα του, με την αντίσταση $\underline{Z}_κ$ του κλάδου: $\underline{i}_κ = \underline{u}_κ / \underline{Z}_κ$.

Λύση:

Με την βοήθεια των δεδομένων μπορούμε να γράψουμε αμέσως την «χρονοεξίσωση» της (μιγαδικής) εναλλασσόμενης τάσης:

$$\underline{u} = U_0 |\underline{\omega t} = U \sqrt{2} |\underline{\omega t} = U \sqrt{2} |2\pi \nu t \quad \xrightarrow{\text{δεδομέν}} \quad \underline{u} = 220 \sqrt{2} |314t \quad \{1\}$$

Στον χώρο των μιγαδικών αριθμών το κύκλωμα μας αποτελείται από τις ακόλουθες μιγαδικές αντιστάσεις:

$$\underline{R}_1 = R_1 = 2000\Omega \quad \{2\alpha\}$$

$$\underline{R}_2 = R_2 = 100\Omega \quad \{2\beta\}$$

$$\underline{R}_C = -\frac{j}{\omega C} = -\frac{j}{2\pi \nu C} = -\frac{j}{2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 40 \cdot 10^{-6}} \Rightarrow \underline{R}_C = -79,62j \quad \begin{array}{l} -j = |-\pi/2 \\ \downarrow \\ \equiv \end{array} \quad 79,62 |-\pi/2 \quad \{2\gamma\}$$

$$\underline{R}_L = j\omega L = j\pi \nu L = j2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 0,2 \Rightarrow \underline{R}_L = 62,8j \quad \begin{array}{l} \equiv \\ \uparrow \\ j = |\pi/2 \end{array} \quad 62,8 |\pi/2 \quad \{2\delta\}$$

Οι αντιστάσεις \underline{R}_1 και \underline{R}_C είναι συνδεδεμένες παράλληλα. Έτσι έχουμε: $\frac{1}{\underline{Z}_{RIC}} = \frac{1}{\underline{R}_1} + \frac{1}{\underline{R}_C}$

$$\Rightarrow \underline{Z}_{RIC} = \frac{\underline{R}_1 \underline{R}_C}{\underline{R}_1 + \underline{R}_C} = \frac{2000(-79,62j)}{2000 - 79,62j} \quad \begin{array}{l} \text{επί τον συζυγή} \\ \text{του παρονομαστή} \\ \downarrow \\ = \end{array} \quad \frac{-2000 \cdot 79,62j(2000 + 79,62j)}{(2000 - 79,62j)(2000 + 79,62j)}$$

$$= -\frac{-2000 \cdot 79,62j(2000 + 79,62j)}{2000^2 + 79,62^2} \Rightarrow \underline{Z}_{RIC} = 3,16 - 79,49j \quad \{3\}$$

Προκειμένου να γράψουμε την (συμβολική) εκθετική μορφή της αντίστασης \underline{Z}_{RIC} υπολογίζουμε κατά τα γνωστά το μέτρο της \underline{Z}_{RIC} και το όρισμα της $Arg(\underline{Z}_{RIC})$:

$$\underline{Z}_{R1C} = \sqrt{\text{Re}^2 + \text{Im}^2} \stackrel{\{3\}}{=} \sqrt{3,16^2 + 79,49^2} = 79,55$$

{3α}

$$\text{Arg}(\underline{Z}_{R1C}) = \arctan \frac{\text{Im}}{\text{Re}} \stackrel{\{3\}}{=} \arctan \frac{-79,49}{3,16} = -87,72^\circ \quad \eta \quad -0,487\pi$$

Επομένως η συμβολική εκθετική μορφή της αντίστασης \underline{Z}_{R1C} είναι:

$$\underline{Z}_{R1C} = Z_{R1C} \stackrel{\{3\alpha\}}{\left| \text{Arg}(\underline{Z}_{R1C}) \right.} \Rightarrow \underline{Z}_{R1C} = 79,55 \left| -0,487\pi \right. \quad \{3\beta\}$$

Οι αντιστάσεις \underline{Z}_{R1C} , \underline{R}_2 και \underline{R}_L είναι συνδεδεμένες σε σειρά. Έτσι έχουμε:

$$\underline{Z}_{R1CR2L} = \underline{Z}_{R1} + \underline{R}_2 + \underline{R}_L = (3,16 - 79,49j) + 100 + 62,8j \Rightarrow \underline{Z}_{R1CR2L} = 103,16 - 16,69j \quad \{4\}$$

Για την απόλυτη τιμή και το όρισμα παίρνουμε:

$$\underline{Z}_{R1CR2L} = \sqrt{\text{Re}^2 + \text{Im}^2} \stackrel{\{4\}}{=} \sqrt{103,16^2 + 16,69^2} = 104,5$$

{4α}

$$\text{Arg}(\underline{Z}_{R1CR2L}) = \arctan \frac{\text{Im}}{\text{Re}} \stackrel{\{4\}}{=} \arctan \frac{-16,69}{103,16} = -9,19^\circ \quad \eta \quad -0,051\pi$$

Επομένως η συμβολική εκθετική μορφή της αντίστασης \underline{Z}_{R1CR2L} είναι:

$$\underline{Z}_{R1CR2L} = Z_{R1CR2L} \stackrel{\{4\alpha\}}{\left| \text{Arg}(\underline{Z}_{R1CR2L}) \right.} \Rightarrow \underline{Z}_{R1CR2L} = 104,5 \left| -0,051\pi \right. \quad \{4\beta\}$$

Το ολικό ρεύμα \underline{i} υπολογίζεται απ' ευθείας από τον νόμο του Ohm:

$$\underline{i} = \frac{\underline{u}}{\underline{Z}_{R1CR2L}} \stackrel{\{1\}}{=} \frac{220\sqrt{2} \left| 314t \right.}{104,5 \left| -0,051\pi \right.} \Rightarrow \underline{i} = 2,98 \left| 314t + 0,051\pi \right. \quad \{5\}$$

Επίσης από τον νόμο του Ohm υπολογίζονται οι τάσεις στα διάφορα στοιχεία του κυκλώματος καθώς και τα ρεύματα, τα οποία τα διαρρέουν:

$$\begin{aligned} & \{5\} \& \{3\beta\} \\ \underline{u}_{RIC} = \underline{i}Z_{RIC} & = 2,98|314t + 0,051\pi \cdot 79,55|_{-0,487\pi} \Rightarrow \\ & \underline{u}_{RIC} = 237,06|314t - 0,436\pi \end{aligned} \quad \{6\}$$

$$\underline{i}_1 = \frac{\underline{u}_{RIC}}{\underline{R}_1} \stackrel{\{6\}}{=} \frac{237,06|314t - 0,436\pi}{2000} \Rightarrow \underline{i}_1 = 0,119|314t - 0,436\pi \quad \{7\}$$

{2α}

$$\underline{i}_2 = \frac{\underline{u}_{RIC}}{\underline{R}_C} \stackrel{\{6\}}{=} \frac{237,06|314t - 0,436\pi}{76,62|_{-\pi/2}} \Rightarrow \underline{i}_2 = 2,98|314t + 0,064\pi \quad \{8\}$$

{2γ}

$$\underline{u}_{R2} = \underline{i}R_2 \stackrel{\{5\} \& \{2\beta\}}{=} (2,98|314t + 0,051\pi)100 \Rightarrow \underline{u}_{R2} = 298|314t + 0,051\pi \quad \{9\}$$

$$\underline{u}_L = \underline{i}R_L \stackrel{\{5\} \& \{2\delta\}}{=} (2,98|314t + 0,051\pi)(62,8|\pi/2) \Rightarrow \underline{u}_L = 187,14|314t + 0,551\pi$$

{10}

Έλεγχος: Σύμφωνα με τον 1^ο κανόνα του Kirchhoff πρέπει να ισχύει η ισότητα

βλ. καθ 5.3

$$\underline{i} = \underline{i}_1 + \underline{i}_2 \Rightarrow \operatorname{Re}(\underline{i}) = \operatorname{Re}(\underline{i}_1) + \operatorname{Re}(\underline{i}_2) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\underline{i}| \cos[\operatorname{Arg}(\underline{i})] = |\underline{i}_1| \cos[\operatorname{Arg}(\underline{i}_1)] + |\underline{i}_2| \cos[\operatorname{Arg}(\underline{i}_2)] \quad \begin{array}{l} \{5\}, \{7\} \& \{8\} \\ \Rightarrow \\ \uparrow \end{array}$$

χάριν απλότητας κάνουμε τον

$$\Rightarrow 2,98 \cos(0,051\pi) = 0,119 \cos(-0,436\pi) + 2,98 \cos(0,064\pi)$$

$\Rightarrow 2,94 \approx 2,92$ Η μικρή διαφορά οφείλεται προφανώς στις υπολογιστικές στρογγυλοποιήσεις.

Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να ελέγξουμε την ισχύ του 2^{ου} κανόνα του Kirchhoff: $\underline{u} = \underline{u}_{RIC} + \underline{u}_{R2} + \underline{u}_{RL}$.

6. Η ύλη εντός μαγνητικού πεδίου

6.1 Μαγνήτιση και μαγνητική διέγερση

Αν εισάγουμε στο εσωτερικό ενός σωληνοειδούς πυρήνα από κάποιο υλικό, θα παρατηρήσουμε την μεταβολή (αύξηση ή μείωση) της εντάσεως του μαγνητικού πεδίου από \vec{B}_0 σε \vec{B} . Η μεταβολή αυτή του μαγνητικού πεδίου εξ αιτίας της παρουσίας του υλικού περιγράφεται ποσοτικά μέσω της (μαγνητικής) διαπερατότητας μ του υλικού, η οποία ορίζεται ως ακολούθως:

Διαπερατότητα μ ενός υλικού καλείται ο λόγος της μαγνητικής έντασης B του μαγνητικού πεδίου (π.χ. ενός σωληνοειδούς) παρουσία του υλικού (π.χ. με την μορφή πυρήνα στο εσωτερικό του σωληνοειδούς) προς την ένταση B_0 του μαγνητικού πεδίου απουσία του υλικού:

$$\text{διαπερατότητα: } \mu = \frac{B}{B_0} \quad [6.1]$$

Η διαπερατότητα μ είναι καθαρός αριθμός και η τιμή της εξαρτάται από την φύση του υλικού και την θερμοκρασία του, χωρίς το τελευταίο να είναι απόλυτο.

Ανάλογα με την τιμή της διαπερατότητας τους τα διάφορα υλικά κατατάσσονται στις ακόλουθες τρεις κατηγορίες:

διαμαγνητικά: $\mu \lesssim 1$ → εξασθενίζουν ελαφρώς το πεδίο (π.χ. χαλκός, μόλυβδος, νερό)

παραμαγνητικά: $\mu \gtrsim 1$ → ενισχύουν ελαφρώς το πεδίο (π.χ. πλατίνα, αλουμίνιο, μαγνήσιο)

σιδηρομαγνητικά: $\mu \gg 1$ → ενισχύουν αισθητά το πεδίο (σίδηρος, κοβάλτιο, νικέλιο)

(Σημειωτέον ότι εκτός των τριών αυτών κατηγοριών, διακρίνουμε ακόμη τα λεγόμενα αντισιδηρομαγνητικά και σιδηρομαγνητικά υλικά. Βλ. κεφ. 6.5)

Στον παρακάτω Πίνακα περιέχονται οι τιμές της διαπερατότητας ορισμένων δια- και παραμαγνητικών υλικών.

Πίνακας 6.1: Διαπερατότητα ορισμένων υλικών

Διαμαγνητικά		Παραμαγνητικά	
Βισμούθιο:	0,999843	Πλατίνα:	1,000256
Μόλυβδος:	0,999984	Βολφράμιο:	1,000068
Χαλκός:	0,999990	Αλουμίνιο:	1,000024
Νερό	0,999991	Ταντάλιο:	1,000018

Όταν λοιπόν στο εσωτερικό ενός σωληνοειδούς εισαχθεί πυρήνας από κάποιο υλικό, η ένταση του μαγνητικού πεδίου του σωληνοειδούς θα αυξηθεί ή θα μειωθεί ισόποσα προς την τιμή της διαπερατότητας του συγκεκριμένου υλικού, χωρίς να μεταβληθεί η ένταση του διαρρέοντος το σωληνοειδές ρεύμα. Το πειραματικά κατοχυρωμένο αυτό φαινόμενο σε συνδυασμό με το γεγονός, ότι η εμφάνιση ενός μαγνητικού πεδίου προϋποθέτει την ύπαρξη ηλεκτρικών ρευμάτων, μας οδηγεί στην λογική υπόθεση της εμφάνισης τέτοιων ρευμάτων στην επιφάνεια του πυρήνα. Τα επιφανειακά αυτά ρεύματα δημιουργούν ένα επιπλέον μαγνητικό πεδίο $\vec{\Delta B}$, το οποίο ανάλογα με τον προσανατολισμό του ενισχύει (παρά- και σιδηρομαγνητικά υλικά) ή εξασθενίζει (διαμαγνητικά υλικά) το αρχικό πεδίο \vec{B}_0 του σωληνοειδούς:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{\Delta B} \quad \{1\}$$

Τα εν λόγω επιφανειακά ρεύματα είναι το μακροσκοπικό αποτέλεσμα του προσανατολισμού στοιχειωδών κυκλικών ρευμάτων, τα οποία είναι άμεσα συνδεδεμένα με μικροσκοπική – σε *ατομική* κλίμακα - δομή της ύλης και καλούνται γι' αυτό ατομικά κυκλικά ρεύματα. Πολλές φορές χαρακτηρίζονται και σαν ρεύματα Ampere, από το όνομα του ερευνητή, ο οποίος τα εισήγαγε πρώτος, προκειμένου να εξηγήσει τις μαγνητικές ιδιότητες της ύλης.

Τέτοια ατομικά κυκλικά ρεύματα είναι για παράδειγμα οι τροχιές των ηλεκτρονίων γύρω από τους πυρήνες των ατόμων. Συγκεκριμένα - και μέσα στα πλαίσια της κλασικής θεωρίας - η κίνηση ενός ηλεκτρονίου γύρω από τον πυρήνα (βλ. σχ. 6.1) ισοδυναμεί με (στοιχειώδες) ρεύμα εντάσεως:

$$i = \frac{q}{t} = \frac{-e}{T} = \frac{-e}{2\pi/\omega} \Rightarrow i = -\frac{e\omega}{2\pi} \quad \{2\}$$

όπου ω η σταθερή - υποτίθεται - γωνιακή ταχύτητα του ηλεκτρονίου και T η περίοδος της περιστροφής του γύρω από τον πυρήνα.

Κάθε κλειστό ρεύμα έχει ως γνωστόν (βλ. κεφ. 4.5β) μαγνητική ροπή $M^*=iS$, όπου S η επιφάνεια που περικλείεται από τον συγκεκριμένο βρόγχο:

$$M^* = iS = -\frac{e\omega}{2\pi}(\pi r^2) = -\frac{e\omega}{2}r^2 \quad \Rightarrow \quad \vec{M}^* = -\frac{e\vec{G}}{2m} \quad \{3\}$$

γενικεύοντας

όπου \vec{M}^* : μαγνητική διπολική ροπή ηλεκτρονίου εξ αιτίας της τροχιακής του κίνησης

\vec{G} : τροχιακή στροφορμή ηλεκτρονίου

m : μάζα ηλεκτρονίου

Εκτός από την τροχιακή του κίνηση το ηλεκτρόνιο διαγράφει και μια ιδιοπεριστροφή. Η κίνηση αυτή περιγράφεται μέσω του spin και διέπεται αποκλειστικά και μόνο από τους νόμους της Κβαντομηχανικής, ξεφεύγει δηλαδή εξ ολοκλήρου από τα κλασικά πλαίσια.

Όπως αποδεικνύεται λοιπόν από την Κβαντομηχανική, το ηλεκτρόνιο έχει πέρα από την τροχιακή του μαγνητική ροπή και μαγνητική ροπή εξ αιτίας της ιδιοπεριστροφής του. Όπως δε είναι φυσικό, η συνισταμένη μαγνητική ροπή ενός ηλεκτρονίου ισούται με το διανυσματικό άθροισμα της τροχιακής και ιδιοπεριστροφικής του μαγνητικής ροπής.

Ας επανέλθουμε όμως στην εξίσωση {1}. Η μεταβολή $\Delta \vec{B}$ της έντασης του μαγνητικού πεδίου εξ αιτίας της παρουσίας του υλικού καλείται και μαγνητική πόλωση \vec{J} . (Σημειωτέον ότι στην τεχνική βιβλιογραφία το διάνυσμα αυτό καλείται και μαγνήτιση).

Η εξίσωση {1} μπορεί να μετασχηματισθεί με την βοήθεια των παρακάτω διανυσματικών μεγεθών:

1) μαγνητική διέγερση:
$$\vec{H} =: \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} \quad [6.2]$$

Από την σχέση [6.2] γίνεται φανερό, ότι η μαγνητική διέγερση περιγράφει (εκτός από την σταθερά μ_0 , η οποία είναι θέμα μονάδων) την ένταση του μαγνητικού πεδίου στον κενό χώρο, όπου η ύπαρξη μαγνητικού πεδίου οφείλεται σε μακροσκοπικά (ελεύθερα, όπως αλλιώς λέγονται) ρεύματα. Τα ρεύματα αυτά διαρρέουν κάποιους αγωγούς (π.χ. τις σπείρες ενός σωληνοειδούς), οπότε μπορούν να μετρηθούν με την βοήθεια καταλλήλων αμπερομέτρων. Το γεγονός αυτό προσδίδει στο διάνυσμα \vec{H} άμεση πρακτική αξία.

2) μαγνήτιση:
$$\vec{M} =: \frac{\Delta \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\vec{J}}{\mu_0} \quad [6.3]$$

Από την σχέση αυτή φαίνεται καθαρά, ότι η μαγνήτιση περιγράφει την μεταβολή του μαγνητικού πεδίου (π.χ. ενός σωληνοειδούς χωρίς πυρήνα) εξ αιτίας της παρουσίας ύλης (π.χ. εξ αιτίας της τοποθέτησης ενός πυρήνα από κάποιο υλικό στο σωληνοειδές). Με άλλα λόγια η μαγνήτιση περιγράφει την μεταβολή του μαγνητικού πεδίου εξ αιτίας μικροσκοπικών ρευμάτων, τα οποία εμφανίζονται με κάποιον διερευνητέο μηχανισμό στην ύλη. Τα δεσμευμένα αυτά (όπως χαρακτηρίζονται) ρεύματα είναι αδύνατο να μετρηθούν άμεσα, γεγονός το οποίο αυξάνει ακόμη περισσότερο την σημασία της μαγνητικής διέγερσης.

Με την βοήθεια της μαγνητικής διέγερσης και της μαγνήτισης η σχέση {1} γράφεται:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M} \quad [6.4]$$

Η σχέση αυτή μας λέει, ότι η ένταση \vec{B} έχει παρουσία ύλης δυο συνιστώσες: η μία ($\mu_0 \vec{H}$) οφείλεται στα ελεύθερα (μακροσκοπικά) ρεύματα και η δεύτερη ($\mu_0 \vec{M}$) στα δεσμευμένα (μικροσκοπικά) ρεύματα.

6.2 Μαγνητική επιδεκτικότητα

Από τις σχέσεις [6.1]: $\vec{B} = \mu \vec{B}_0$ και [6.2]: $\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}$ προκύπτει:

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H} \quad [6.5]$$

Αν η σχέση αυτή αντικατασταθεί στην [6.4] ($\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M}$) παίρνουμε:

$$\mu \mu_0 \vec{H} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M} \Rightarrow \vec{M} = (\mu - 1) \vec{H} \equiv \chi \vec{H} \quad [6.6]$$

όπου $\chi = \mu - 1$: μαγνητική επιδεκτικότητα του συγκεκριμένου υλικού.

Από την εξίσωση αυτή και σύμφωνα με όσα είπαμε στην αρχή του κεφαλαίου τα διάφορα υλικά κατατάσσονται στις ακόλουθες κατηγορίες:

διαμαγνητικά: $\chi \lesssim 0$ ($\approx -10^{-9}$ ως -10^{-4})

παραμαγνητικά: $\chi \gtrsim 0$ ($\approx -10^{-5}$ ως 10^{-3})

σιδηρομαγνητικά: $\chi \gg 0$ (Εξαρτάται αποφασιστικά από την προϊστορία του υλικού)

6.3 Διαμαγνητισμός και παραμαγνητισμός

Συνεχίζοντας την προσπάθεια μας να κατανοήσουμε στα πλαίσια της κλασικής θεωρίας του Ηλεκτρομαγνητισμού τις μαγνητικές ιδιότητες της ύλης, θα παραβλέψουμε προς το παρόν την ύπαρξη του ηλεκτρονικού spin. Η παράλειψη αυτή δεν αλλάζει την ουσία του προβλήματος, μια και οι μαγνητικές ιδιότητες της ύλης μπορούν να κατανοηθούν πλήρως μόνο στα πλαίσια της Κβαντομηχανικής, τα οποία ξεπερνούν σαφώς τα όρια του παρόντος συγγράμματος.

Κάτω απ' αυτήν την προϋπόθεση πρέπει να τονίσουμε, ότι η ύπαρξη της τροχιακής μαγνητικής

ροπής των ηλεκτρονίων δεν συνεπάγεται κατ' ανάγκη και την ύπαρξη μη μηδενικής μαγνητικής ροπής των αντιστοιχών ατόμων! Αυτό γίνεται κατανοητό, αν σκεφθούμε, ότι σε περίπτωση απουσίας εξωτερικού μαγνητικού πεδίου οι μαγνητικές ροπές των ηλεκτρονίων θα είναι προφανώς στατιστικά κατανομημένες. Έτσι το διανυσματικό τους άθροισμα, η ολική μαγνητική ροπή του ατόμου, θα είναι φυσιολογικά μηδέν. Από την άλλη μεριά βέβαια το πείραμα αποδεικνύει και την ύπαρξη ατόμων με μόνιμη μαγνητική ροπή. Όπως αποδεικνύεται και από την Κβαντομηχανική, πρόκειται για άτομα με περιττό αριθμό ηλεκτρονίων. Ακόμη όμως και στην περίπτωση αυτή τα άτομα, τα οποία περιέχονται σ' ένα μακροσκοπικό κομμάτι του αντιστοιχού υλικού, θα έχουν τις μαγνητικές τους ροπές στατιστικά διατεταγμένες σαν συνέπεια της θερμικής τους κίνησης. Έτσι το υλικό θα έχει την συνολική μαγνητική ροπή μηδέν.

Όταν όμως το υλικό βρεθεί μέσα σ' ένα εξωτερικό μαγνητικό πεδίο, τότε επί των ατομικών μαγνητικών δίπολων αναπτύσσεται μηχανική ροπή, η οποία τείνει να τα προσανατολίσει, προς την κατεύθυνση του πεδίου. Η προκύπτουσα μαγνήτιση έχει την φορά του εξωτερικού πεδίου, το οποίο και ενισχύει. Επομένως το υλικό συμπεριφέρεται ως *παραμαγνητικό*. Δεν προσανατολίζονται βέβαια όλα τα δίπολα, μια και υπάρχει η θερμική κίνηση, η οποία τείνει να τα αποπροσανατολίσει. Το γεγονός αυτό εξηγεί την ελάττωση της μαγνητικής επιδεκτικότητας των παραμαγνητικών υλικών με αυξανόμενη θερμοκρασία.

Αντιθέτως η μαγνήτιση \vec{M} των διαμαγνητικών υλικών είναι αντίθετη προς την μαγνητική διέγερση \vec{H} και την εξασθενίζει. Το γεγονός αυτό οφείλεται στο ότι *η μαγνήτιση των διαμαγνητικών υλικών δεν είναι προσανατολιζόμενη αλλά επαγόμενη*. Είναι δηλαδή αποτέλεσμα μικροσκοπικών επαγωγικών ρευμάτων, τα οποία επάγονται στο εσωτερικό ενός υλικού, όταν αυτό βρεθεί κάτω από την επίδραση ενός εξωτερικού μαγνητικού πεδίου. Ως επαγωγικά τα ρεύματα αυτά έχουν τέτοια φορά (κανόνας του Lenz!) ώστε να αντιδρούν - μέσω της μαγνητικής τους ροπής - στο αίτιο που τα δημιούργησε και που είναι φυσικά το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο. Έτσι εξηγείται ποιοτικά και το γεγονός, ότι τα διαμαγνητικά υλικά απωθούνται ελαφρώς από το (εξωτερικό) μαγνητικό πεδίο.

Όπως αποδεικνύεται στα πλαίσια της Κβαντομηχανικής, τα παραπάνω μικροσκοπικά επαγωγικά ρεύματα προκύπτουν εξ αιτίας της κίνησης μεταπτώσεως των τροχιακών μαγνητικών διπολικών ροπών των ηλεκτρονίων γύρω από την διεύθυνση του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου. Η γωνιακή ταχύτητα μεταπτώσεως καλείται (**κυκλική**) ***συχνότητα Larmor***.

Είναι λοιπόν προφανές, ότι *ο διαμαγνητισμός είναι μια γενική ιδιότητα της ύλης*. Υλικά όμως, των οποίων τα άτομα έχουν συνισταμένη μη μηδενική μαγνητική ροπή εμφανίζουν, μία επιπλέον, μαγνήτιση εξ αιτίας του προσανατολισμού των ατομικών αυτών μαγνητικών διπόλων κατά την κατεύθυνση του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου. Η «παραμαγνητική» αυτή προσανατολιζόμενη μαγνήτιση είναι πολλές φορές ισχυρότερη από την διαμαγνητική επαγόμενη, οπότε το υλικό συμπεριφέρεται τελικά ως παραμαγνητικό και έλκεται ελαφρώς από το εξωτερικό μαγν. πεδίο.

Εξάλλου, ενώ η θερμική κίνηση αντιστέκεται στον προσανατολισμό των μόνιμων («παραμαγνητικών») δίπολων, αφήνει ανεπηρέαστη την επαγωγή («διαμαγνητικών») μαγνητικών δίπολων. Ως εκ τούτου

η μαγνητική επιδεκτικότητα των διαμαγνητικών υλικών είναι ανεξάρτητη από την θερμοκρασία, ενώ

η μαγνητική επιδεκτικότητα των παραμαγνητικών υλικών ελαττούται

με αυξανόμενη θερμοκρασία.

Η εξάρτηση της παραμαγνητικής επιδεκτικότητας από την θερμοκρασία δίδεται από τον παρακάτω, εμπειρικό νόμο του Curie:

$$\text{νόμος του Curie: } \chi_{\text{παρ}} = \frac{C}{T} \quad [6.7]$$

όπου C : σταθερά του Curie

6.4 Σιδηρομαγνητισμός

Ο σιδηρομαγνητισμός οφείλεται στην ιδιοπεριστροφική κίνηση (spin) των ηλεκτρονίων και την αντίστοιχη μαγνητική διπολική ροπή. Συγκεκριμένα - και όπως αποδεικνύεται στα πλαίσια της Κβαντομηχανικής και μόνο - η ηλεκτροστατική ενέργεια των ηλεκτρονίων ορισμένων υλικών γίνεται ελάχιστη, όταν τα spin τους είναι παράλληλα και ομόρροπα. Στις περιπτώσεις αυτές τα ηλεκτρονικά spin και οι αντίστοιχες ιδιοπεριστροφικές μαγνητικές διπολικές ροπές προσανατολίζονται φυσικά ομαδικά προκειμένου να μειωθεί η ενέργεια του συστήματος. (Η τάση προς μείωση της δυναμικής ενέργειας είναι γενικό φαινόμενο στην φύση). Έλλειψη εξωτερικού μαγνητικού πεδίου τα ηλεκτρονικά spin δεν προσανατολίζονται ομοιόμορφα σε όλη την μάζα του συγκεκριμένου υλικού, αλλά μόνο σε πολύ μικρότερες (πάντως μακροσκοπικές) περιοχές, τις ονομαζόμενες περιοχές Weiss. Μάλιστα οι διευθύνσεις προσανατολισμού των μεμονωμένων περιοχών Weiss είναι έτσι κατανομημένες, ώστε οι συνισταμένες τους μαγνητικές ροπές να αλληλοεξουτερώνονται (βλ. σχ. 6.2). Έτσι το υλικό συμπεριφέρεται σαν απομαγνητισμένο, με την προϋπόθεση βέβαια ότι δεν βρέθηκε ποτέ κάτω από την επίδραση εξωτερικού μαγνητικού πεδίου (βλ. παρακάτω).

6.4.1 Τεχνική καμπύλη μαγνητίσεως ενός σιδηρομαγνητικού υλικού

Το διπλανό διάγραμμα, στο οποίο παριστάνεται γραφικά η μαγνήτιση M, την οποία αποκτά ένα σιδηρομαγνητικό υλικό κάτω από την επίδραση εξωτερικού μαγνητικού πεδίου, συναρτήσει της μαγνητικής διέγερσης H του πεδίου καλείται τεχνικό διάγραμμα μαγνητίσεως και είναι απαραίτητο για την αξιολόγηση της χρησιμότητας ενός υλικού σε αντίστοιχες εφαρμογές.

Το διάγραμμα αυτό θα μπορούσε να κατασκευασθεί π.χ. με την βοήθεια σωληνοειδούς, εντός του οποίου

τοποθετείται πυρήνας από το συγκεκριμένο υλικό.

Η καμπύλη $0 \rightarrow 1$ καλείται **παρθενική καμπύλη**, παρατηρείται μόνο την πρώτη φορά, κατά την οποία το υλικό δέχεται την επίδραση εξωτερικού μαγνητικού πεδίου. Όπως αποδεικνύεται πειραματικά, η αύξηση της μαγνήτισης με αυξανόμενη μαγνητική διέγερση οφείλεται αρχικά στην αύξηση του όγκου εκείνων των περιοχών Weiss, των οποίων ο προσανατολισμός είναι ο πλησιέστερος προς την διεύθυνση και φορά της μαγνητικής διέγερσης, σε βάρος των υπολοίπων. Όταν ολοκληρωθεί το φαινόμενο αυτό, οπότε η διεύθυνση και φορά της μαγνήτισης είναι η ίδια για όλο τον όγκο του υλικού, παραπέρα αύξηση του εξωτερικού πεδίου προκαλεί βαθμιαίο προσανατολισμό όλων των στοιχειωδών μαγνητικών δίπολων, έως ότου επέλθει (σημείο 1 του διαγράμματος 6.3) κορεσμός. Στην κατάσταση αυτή ομιλούμε για **μαγνήτιση κορεσμού** και **ένταση κορεσμού**.

Αν αρχίσουμε, ξεκινώντας από την κατάσταση κορεσμού 1, να ελαττώνουμε την μαγνητική διέγερση, παρατηρούμε ότι η μαγνήτιση (και κατά συνέπεια και η ένταση του συνολικού μαγνητικού πεδίου B) δεν επανέρχεται μέσω της παρθενικής καμπύλης $1 \rightarrow 0$, αλλά παραμένει μεγαλύτερη από τις τιμές της καμπύλης αυτής. Το φαινόμενο αυτό καλείται **μαγνητική υστέρηση**. Το γεγονός αυτό οφείλεται στην μη αντιστρεπτότητα μέρους της αύξησης των περιοχών Weiss, την οποία περιγράψαμε ανωτέρω. Έτσι και όταν ακόμη μηδενισθεί το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο B_0 , το υλικό παραμένει μαγνητισμένο, αποτελώντας έναν **μόνιμο μαγνήτη**, ο οποίος δημιουργεί μαγνητικό πεδίο εντάσεως $\vec{B}_\mu = \mu_0 \vec{M}_\mu$.

Αν αντιστρέψουμε την φορά της μαγνητικής διέγερσης \vec{H} , και μεταβάλουμε την τιμή όπως και πριν, θα διαγράψουμε τελικά έναν κλειστό βρόγχο, $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 1$, τον λεγόμενο **βρόγχο μαγνητικής υστέρησης**. Ανάλογα με το πλάτος του βρόγχου υστερήσεως τα σιδηρομαγνητικά υλικά κατατάσσονται σε **μαγνητικά μαλακά** (στενός βρόγχος) και **μαγνητικά σκληρά** (πλατύς βρόγχος). Τα πρώτα χρησιμοποιούνται, όταν θέλουμε η μαγνήτιση να παρακολουθεί τις μεταβολές της μαγνητικής διέγερσης (π.χ. πυρήνες ηλεκτρομαγνητών), ενώ τα δεύτερα χρησιμοποιούνται για την κατασκευή μόνιμων μαγνητών. Στην πρώτη κατηγορία ανήκει ο πολύ καθαρός σίδηρος, ο οποίος είναι και μηχανικά μαλακός, στην δεύτερη ο αποσκληρυνθείς χάλυβας, γεγονός το οποίο δείχνει την προέλευση των χαρακτηρισμών «μαλακός» και «σκληρός».

Όπως φαίνεται και από το διάγραμμα μαγνήτισεως,

*η μαγνητική επιδεκτικότητα των
σιδηρομαγνητικών υλικών εξαρτάται τόσο από την μαγνητική διέγερση όσο και από την
προϊστορία του υλικού.*

Αυτό σημαίνει, ότι η σχέση μεταξύ μαγνήτισης και διέγερσης δεν είναι γραμμική.

Εξάλλου ο αυθόρμητος προσανατολισμός των spins στις περιοχές Weiss καταστρέφεται, όταν η θερμική κίνηση ξεπεράσει ένα χαρακτηριστικό για το υλικό όριο, το οποίο αντιστοιχεί στην λεγομένη **θερμοκρασία Curie T_C** . (768 °C για τον σίδηρο, 360 °C για το νικέλιο, 1075 ~ 1130 °C για το κοβάλτιο, ανάλογα με την καθαρότητα του). Για θερμοκρασίες μεγαλύτερες αυτής της κρίσιμης θερμοκρασίας το σιδηρομαγνητικό υλικό συμπεριφέρεται ως παραμαγνητικό με επιδεκτικότητα:

$$\chi = \frac{C}{T - T_C} \quad : \text{ Νόμος των Curie – Weiss } \quad [6.8]$$

6.5 Αντισιδηρομαγνητισμός και σιδηρομαγνητισμός

Ενώ, όπως είδαμε, ο σιδηρομαγνητισμός οφείλεται στην παράλληλη διάταξη των ηλεκτρονικών spins, υπάρχουν υλικά, στα οποία (και πάλι για καθαρά ενεργειακούς λόγους) έχουμε αντιπαράλληλη διάταξη των ηλεκτρονικών spins γειτονικών ατόμων. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την αλληλοεξουδετέρωση των αντιστοιχών μαγνητικών ροπών, οπότε το **αντισιδηρομαγνητικό**, όπως χαρακτηρίζεται, υλικό παρουσιάζει διαμαγνητική συμπεριφορά, παρά το γεγονός ότι αποτελείται από «παραμαγνητικά» άτομα. Η αντιπαράλληλη διάταξη των spins καταρρέει όμως σε μια χαρακτηριστική για το υλικό **θερμοκρασία Neel**, υπεράνω της οποίας το υλικό εμφανίζει παραμαγνητική συμπεριφορά. Το γνωστότερο αντισιδηρομαγνητικό υλικό είναι το οξειδίο του μαγγανίου (MnO) με $T_N = 122 \text{ K}$.

Στην περίπτωση που ένας κρύσταλλος αποτελείται από διαφορετικά ιόντα η αντιπαράλληλη διάταξη δεν εξουδετερώνει πλήρως τις μαγνητικές ροπές. Έτσι τα συγκεκριμένα υλικά συμπεριφέρονται παρόμοια με τα σιδηρομαγνητικά, έχουν όμως πολύ μικρότερη μαγνήτιση κορεσμού. Τέτοια υλικά καλούνται **σιδηρομαγνητικά υλικά**. Το γνωστότερο εξ αυτών είναι το Fe_3O_4 . Μέσω αντικατάστασης ατόμων σιδήρου με άτομα αλουμινίου, μαγνησίου ή νικελίου παίρνουμε τους λεγόμενους **σιδηρίτες**. Οι σιδηρίτες έχουν πολύ μεγάλη ειδική ηλεκτρική αντίσταση ($\approx 10^6 \Omega cm$) σε αντίθεση με τα μεταλλικά σιδηρομαγνητικά υλικά. Έτσι δεν αναπτύσσονται αισθητά δινωρεύματα, οπότε είναι κατάλληλα για πυρήνες σωληνοειδών υψηλών συχνοτήτων (μέχρι 5MHz). Εξάλλου χρησιμοποιούνται ως στοιχεία μνήμης στους ηλεκτρονικούς υπολογιστές.

6.6 Εφαρμογές

6.6.1 Μαγνητοσυστολή

Η μαγνήτιση ενός υλικού συνεπάγεται μια μικρή μεταβολή των ατομικών αποστάσεων με αποτέλεσμα την μεταβολή του όγκου του μαγνητισθέντος υλικού. Το φαινόμενο αυτό καλείται **μαγνητοσυστολή** και αξιοποιείται για την δημιουργία υπερήχων.

6.6.2 Ψύξη μέσω αδιαβατικής απομαγνήτισης

Η πρώτη μέθοδος, με την οποία κατέστη δυνατή η επίτευξη θερμοκρασιών αισθητά μικρότερων από 1K (ως 10^{-7} K περίπου), υπήρξε η αδιαβατική απομαγνήτιση. Η μέθοδος αυτή στηρίζεται στο γεγονός, ότι τα στοιχειώδη μαγνητικά δίπολα ενός παραμαγνητικού υλικού προσανατολίζονται μερικώς, όταν δεχτούν την επίδραση ενός εξωτερικού μαγνητικού πεδίου. Ο προσανατολισμός αυτός έχει ως αποτέλεσμα την ελάττωση της εντροπίας του συστήματος, η οποία αποτελεί ποσοτικό κριτήριο της σταθιάς ενός συστήματος. Χωρίς την επίδραση του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου, η παραπάνω ελάττωση της εντροπίας θα μπορούσε να επιτευχθεί μόνο μέσω ελάττωσης της θερμοκρασίας του συστήματος.

Κάτω λοιπόν από την επίδραση του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου η εντροπία του συστήματος παίρνει μία τιμή, η οποία αντιστοιχεί στην τάξη, η οποία επικρατεί σε χαμηλότερη θερμοκρασία, όταν επί του συστήματος δεν επιδρά εξωτερικό μαγνητικό πεδίο.

Αν μηδενίσουμε το πεδίο, η επιτευχθείσα τάξη θα καταστραφεί λόγω της ροής θερμικής ενέργειας από το περιβάλλον, εκτός και αν φροντίσουμε για επαρκή θερμομόνωση του συστήματος και το απομαγνητίσουμε *αδιαβατικά*: τότε δεν είναι δυνατή η ροή θερμικής ενέργειας από το περιβάλλον, οπότε η επιτευχθείσα τάξη διατηρείται με αποτέλεσμα την ελάττωση της θερμοκρασίας του συστήματος.

Σημειωτέον ότι η αδιαβατική απομαγνήτιση δεν παριστά κυκλική αλλά απλή διεργασία, αποτελούμενη από ισόθερμη μαγνήτιση και αδιαβατική απομαγνήτιση. Έτσι χρησιμοποιείται απλώς για την τελική ψύξη προψυχθέντων με άλλη μέθοδο δειγμάτων. Η χαμηλότερη μέσω αδιαβατικής απομαγνήτισης επιτευχθείσα θερμοκρασία είναι $1,2 \cdot 10^{-6} \text{ K}$ και απαιτούσε μαγνητικά πεδία της τάξεως των 3T.

ΑΤΟΜΑ

Γενικά

Όλα τα μέχρι σήμερα γνωστά υλικά αποτελούνται από μικροσκοπικές μονάδες, τα άτομα, ή συγκροτήματα ατόμων, τα μόρια. Οι μικροσκοπικές αυτές μονάδες αποτελούν την ελάχιστη δυνατή ποσότητα ύλης, η οποία εξακολουθεί να έχει τις ίδιες χημικές ιδιότητες με το υπό εξέταση υλικό. Αν δηλαδή τις διασπάσουμε (π.χ. μέσω βομβαρδισμού με άλλα σωματίδια), θα διαπιστώσουμε, ότι τα θραύσματα έχουν εντελώς διαφορετικές ιδιότητες από τα συγκεκριμένα άτομα (ή μόρια). Εξάλλου αξιοσημείωτο είναι το γεγονός, ότι όλα τα άτομα ενός συγκεκριμένου στοιχείου είναι πανομοιότυπα μεταξύ τους.

7.1 Δομή και χαρακτηρισμός των ατόμων

Όπως διαπιστώθηκε με την βοήθεια πειραμάτων σκέδασης, κατά τα οποία βομβαρδίζουμε ένα υλικό με διάφορα ηλεκτρικώς φορτισμένα ή μη σωματίδια και παρατηρούμε την σκέδαση τους, τα άτομα αποτελούνται από έναν κεντρικό πυρήνα και από έναν αριθμό περί τον πυρήνα περιφερόμενων ηλεκτρονίων, τα οποία συνθέτουν το ατομικό περίβλημα. Τα κύρια χαρακτηριστικά της σήμερα παραδεκτής δομής του ατόμου αποδίδονται σχηματικά στο παρακάτω διάγραμμα.

ΔΟΜΗ ΤΟΥ ΑΤΟΜΟΥ σχηματικά



φορτίο:	$e (= 1,6 \cdot 10^{-19} C)$	0	-e
μάζα:	$1836 m_e$	$1839 m_e$	$9,11 \cdot 10^{-31} kg \equiv m_e$
σύμβολο:	${}_1^1 p$	${}_0^1 n$	e^-

Όπως φαίνεται από το παραπάνω διάγραμμα, ο πυρήνας αποτελείται από πρωτόνια (θετικώς με ένα στοιχειώδες ηλεκτρικό φορτίο φορτισμένα σωματίδια, σύμβολο ${}_1^1 p$) και ουδετερόνια (ηλεκτρικώς

ουδέτερα - όπως φανερώνει και το όνομα τους - σωματίδια, σύμβολο 1_0n). Γύρω από τον πυρήνα περιφέρονται τόσα ηλεκτρόνια (φορτίο ίσο και αντίθετο με εκείνο του πρωτονίου, αμελητέα μάζα, σύμβολο e^-), όσα και τα εντός του πυρήνος πρωτόνια. Έτσι τα άτομα είναι υπό κανονικές συνθήκες ηλεκτρικώς ουδέτερα.

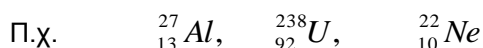
Ο πυρήνας συγκεντρώνει το σύνολο σχεδόν της μάζας του ατόμου παρά το γεγονός, ότι η διάμετρος του ($\sim 10^{-14}$ m) είναι κατά 10000 περίπου φορές μικρότερη από εκείνη του ατόμου. Η συγκέντρωση ύλης στον πυρήνα ανέρχεται στην τρομακτική τιμή των 10^{11} kg/cm^3 , δηλαδή σε εκατό εκατομμύρια τόνους ανά κυβικό εκατοστόμετρο!

Για τον χαρακτηρισμό των ατόμων χρησιμοποιείται ο ακόλουθος, συμβολικός τρόπος γραφής:

$$\begin{matrix} Z \\ A \end{matrix} \text{ (σύμβολο στοιχείου)}$$

όπου $Z = \text{ατομικός αριθμός} = \text{αριθμός πρωτονίων του πυρήνος} = \text{αριθμός ηλεκτρονίων του ατομικού περιβλήματος.}$

$A = \text{μαζικός αριθμός} = \text{αριθμός νουκλεονίων του πυρήνος}$



Όταν αναφερόμαστε σε έναν συγκεκριμένο πυρήνα χωρίς να μας ενδιαφέρει το ατομικό περίβλημα, χρησιμοποιούμε συχνά τον όρο «νουκλίδιο»

7.2 Ισότοπα

Οι χημικές ιδιότητες ενός στοιχείου καθορίζονται από τον αριθμό των ηλεκτρονίων του, ο οποίος - όπως προαναφέραμε - είναι ίσος με εκείνον των πρωτονίων του πυρήνος. Επομένως στοιχεία με τον ίδιο αριθμό πρωτονίων έχουν τις ίδιες χημικές ιδιότητες, ακόμη και αν έχουν διαφορετικό αριθμό ουδετερονίων. Επειδή λοιπόν τα στοιχεία αυτά βρίσκονται στην ίδια θέση του Περιοδικού Πίνακα (στον οποίο ως γνωστόν κατατάσσουμε τα διάφορα χημικά στοιχεία σύμφωνα με τον ατομικό τους αριθμό και άρα σύμφωνα με τις χημικές τους ιδιότητες), καλούνται ισότοπα :

Τα ισότοπα ενός στοιχείου διαφέρουν ως προς τον αριθμό των πρωτονίων.

Π.χ. Μερικά από τα ισότοπα του Ουρανίου:

άτομο	πρωτόνια	ουδετερόνια	συχνότητα
${}_{92}^{234}\text{U}$	92	142	0,0057%
${}_{92}^{235}\text{U}$	92	143	0,72%

7.3 Μάζα και διαστάσεις των ατόμων

Όταν μιλάμε για την μάζα ενός ατόμου, αναφερόμαστε συνήθως στην **σχετική μάζα M** , η οποία μας δείχνει πόσο μεγαλύτερη είναι η (απόλυτη) μάζα του συγκεκριμένου ατόμου, από το 1/12 της (απόλυτης) μάζας του ατόμου του άνθρακα ${}_{6}^{12}\text{C}$.

Η παραπάνω (σχετική) μάζα αναφέρεται δε συνήθως λανθασμένα ως «ατομικό βάρος», εξ αιτίας της σύγχυσης η οποία επικρατεί, όσον αφορά την σημασία των όρων «μάζα» και «βάρος».

Η σχετική μάζα του ελαφρύτερου στοιχείου, του Υδρογόνου, είναι 1,008, ενώ του βαρύτερου, του Ουρανίου, 238,03. (Στην περίπτωση του Ουρανίου εννοείται η μέση τιμή για όλα τα ισότοπα, λαμβανομένης υπόψη της συχνότητας με την οποία συναντώνται στην φύση.)

Η **απόλυτη μάζα** μετράται σε kg. Για λόγους δε σκοπιμότητας (βλ. παραπάνω) έχει εισαχθεί η **ατομική μονάδα μάζας u** , η οποία ισούται με το 1/12 της απόλυτης μάζας του ισότοπου ${}_{6}^{12}\text{C}$:

$$\text{ατομική μονάδα μάζας: } 1u =: \frac{m({}_{6}^{12}\text{C})}{12} = 1,66057 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \quad (\text{ή } 1\text{kg} = 6,022045 \cdot 10^{26} u)$$

Η απόλυτη μάζα m ενός ατόμου υπολογίζεται πολλαπλασιάζοντας την σχετική του μάζα M με την ατομική μονάδα μάζας:

$$\underline{m = M \cdot u} \quad [7.1]$$

Η διάμετρος τώρα του ατόμου αναφέρουμε απλώς, ότι - όπως προκύπτει από έγκυρες πειραματικές μετρήσεις - είναι της τάξεως των 10^{-10} m, ενώ η διάμετρος του πυρήνα της τάξεως των 10^{-14} m.

7.4 Ατομικό περίβλημα

Επειδή τα άτομα διαφεύγουν - λόγω του μικροσκοπικού τους μεγέθους - της άμεσης παρατήρησης, η μόνη δυνατότητα περιγραφής της δομής τους είναι η χρήση «**ατομικών μοντέλων**». Τα μοντέλα αυτά «ζουν και πεθαίνουν» ανάλογα με την ικανότητα τους να εξηγούν την μακροσκοπική, παρατηρήσιμη συμπεριφορά των ατόμων. Έτσι βρίσκονται σε διαρκή εξέλιξη και βελτίωση. Ας δούμε λοιπόν τα κυριότερα εξ αυτών:

Μοντέλο του Rutherford: Τα ηλεκτρόνια περιστρέφονται γύρω από τον πυρήνα, όπως οι πλανήτες γύρω από τον ήλιο. Με άλλα λόγια, το άτομο αποτελεί ένα είδος μικροσκοπικού πλανητικού

συστήματος, στο οποίο όμως τον ρόλο της κεντρομόλου δυνάμεως παίζει η ελκτική δύναμη Coulomb μεταξύ του θετικού πυρήνα και των αρνητικών ηλεκτρονίων, και όχι η συντριπτικά ασθενέστερη βαρυτική έλξη.

Σύμφωνα τώρα με τους νόμους της Ηλεκτροδυναμικής το κεντρομόλως επιταχυνόμενο, όπως και κάθε επιταχυνόμενο ηλεκτρικό φορτίο, θα έπρεπε να ακτινοβολεί διαρκώς ενέργεια. Το γεγονός αυτό θα είχε ως αποτέλεσμα την διαρκή ελάττωση της δυναμικής και κινητικής ενέργειας του ηλεκτρονίου. Έτσι το ηλεκτρόνιο θα έπεφτε μέσα σε ελάχιστο χρόνο επί του πυρήνος διαγράφοντας μια σπειροειδή τροχιά. Το άτομο του Rutherford είναι επομένως ασταθές.

Μοντέλο του Bohr: Ο Bohr επέκτεινε το μοντέλο του Rutherford προκειμένου να εξηγήσει την ευστάθεια του ατόμου και την εκπομπή ακτινοβολίας συγκεκριμένων διακριτών συχνοτήτων. Προς τον σκοπό αυτό εισήγαγε δύο συνθήκες, οι οποίες εκινούντο έξω από τα πλαίσια της κλασικής Φυσικής και βρήκαν την εξήγησή τους αργότερα μέσω της Κβαντομηχανικής.

7.4.1 Συνθήκες του Bohr

1^η Συνθήκη του Bohr: Τα ηλεκτρόνια ενός ατόμου κινούνται χωρίς να ακτινοβολούν επί συγκεκριμένων (κυκλικών) τροχιών, οι οποίες καλούνται **σταθερές ή επιτρεπόμενες** και καθορίζονται από την επόμενη **κβαντική συνθήκη**:

Η στροφορμή ενός γύρω από τον πυρήνα περιστρεφόμενου

ηλεκτρονίου είναι ακέραιο πολλαπλάσιο της ποσότητας $h = \frac{h}{2\pi}$:

$$L = mrv = nh \quad [7.2]$$

όπου L = τροχιακή στροφορμή ηλεκτρονίου

m = μάζα ηλεκτρονίου

r = ακτίνα διαγραφομένης τροχιάς

v = ταχύτητα ηλεκτρονίου

$n = 1,2,3... =$ **κύριος κβαντικός αριθμός**

$$h = \frac{h}{2\pi}, \quad h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js: } \underline{\text{σταθερή του Plank.}}$$

2^η Συνθήκη του Bohr: Ένα άτομο εκπέμπει ένα φωτόνιο ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας, όταν ένα ηλεκτρόνιο μεταπηδά από μια τροχιά μεγαλύτερου κύριου κβαντικού αριθμού σε μια τροχιά μικρότερου κύριου κβαντικού αριθμού. Η ενέργεια δε του εκπεμπόμενου φωτονίου ισούται με την διαφορά της τελικής από την αρχική ενέργεια του ηλεκτρονίου:

$$E = h\nu = E_{\alpha\rho\chi} - E_{\tau\epsilon\lambda} \quad [7.3]$$

όπου **E = ενέργεια εκπεμπόμενου φωτονίου**

$\nu =$ εκπεμπομένης ακτινοβολίας

$E_{\alpha\rho\chi} =$ ολική αρχική ενέργεια ηλεκτρονίου

$E_{\tau\epsilon\lambda} =$ ολική τελική ενέργεια ηλεκτρονίου

Το μοντέλο του Bohr παρά το γεγονός, ότι μας επιτρέπει να υπολογίσουμε εύκολα και με ακρίβεια το φάσμα του απλούστερου όλων των ατόμων, του Υδρογόνου, αδυνατεί όμως να εξηγήσει π.χ. την

Λεπτή υφή του φάσματος του Υδρογόνου. Αν εξετάσουμε το φάσμα του Υδρογόνου με μεγαλύτερη ανάλυση, θα παρατηρήσουμε, ότι πολλές από τις «γραμμές» του αποτελούνται από δύο ξεχωριστές γραμμές, ευρισκόμενες η μία κοντά στην άλλη.

Προκειμένου να αντιμετωπιστούν οι αδυναμίες αυτές ο **Sommerfeld** διεύρυνε το ατομικό μοντέλο του Bohr εισάγοντας εκτός της κυκλικής και ελλειπτικές τροχιές. Πιο συγκεκριμένα, σύμφωνα με τον Sommerfeld σε κάθε τιμή του κύριου κβαντικού αριθμού αντιστοιχούν n τροχιές οι οποίες αριθμούνται μέσω του δευτερεύοντος κβαντικού αριθμού $l = 0, 1, 2, \dots, (n - 1)$. Στην μέγιστη τιμή του l (για δεδομένο n) αντιστοιχεί πάντα μια κυκλική τροχιά, ενώ στις υπόλοιπες αντιστοιχούν ελλειπτικές τροχιές, η εκκεντρότητα των οποίων αυξάνεται με ελαττούμενη τιμή του l .

Ένα ηλεκτρόνιο κινούμενο επί μιας ελλειπτικής τροχιάς έχει μεγαλύτερη ταχύτητα στο πλησίον του πυρήνα ευρισκόμενο τμήμα απ' ότι στο πιο απομακρυσμένο. Το γεγονός αυτό συνεπάγεται - σύμφωνα με την θεωρία της Σχετικότητας - μια αντίστοιχη αυξομείωση της μάζας του ηλεκτρονίου. Έτσι οι τροχιές του ηλεκτρονίου, οι οποίες ανήκουν στον ίδιο κύριο κβαντικό αριθμό έχουν διαφορετικές ενέργειες.

Εκτός του κύριου (n) και δευτερεύοντος (l) κβαντικού αριθμού και προκειμένου να εξηγηθούν τα χαρακτηριστικά πολυπλοκοτέρων φασμάτων εισήχθησαν άλλοι δύο κβαντικοί αριθμοί:

Ο μαγνητικός κβαντικός αριθμός m , ο οποίος παίρνει τις $(2l + 1)$ τιμές: $-l, -l+1, \dots, 0, \dots, l-1, \dots, l$, και περιγράφει τον προσανατολισμό των τροχιών στον χώρο.

Ο κβαντικός αριθμός του spin s , ο οποίος περιγράφει τον προσανατολισμό της ιδιοπεριστροφικής ορμής του ηλεκτρονίου σε σχέση με την φορά της τροχιακής του ορμής.

7.4.2 Φλοιώδης δομή του ατομικού περιβλήματος

Στα πλαίσια του διευρυμένου (μέσω της εισαγωγής του μαγνητικού κβαντικού αριθμού και του κβαντικού αριθμού του spin) μοντέλου των Bohr - Sommerfeld συνηθίζεται να θεωρούμε, ότι όλες οι

τροχιές, οι οποίες ανήκουν στον ίδιο κύριο κβαντικό αριθμό n (και οι οποίες έχουν χονδρικώς σχεδόν την ίδια ενέργεια), αποτελούν έναν φλοιό. Για λόγους δε ιστορικούς, ο εσωτερικός φλοιός ($n=1$) συμβολίζεται με το γράμμα Κ, ο αμέσως εξωτερικότερος ($n=2$) με το γράμμα Λ, κ.ο.κ. Ο αριθμός των τροχιών, οι οποίες περιέχονται σε κάθε φλοιό, προκύπτει από τις τιμές των τεσσάρων κβαντικών αριθμών. Όπως δε φαίνεται και από τον Πίνακα 7.4.2

Ο φλοιός με τον κύριο κβαντικό αριθμό n περιέχει n^2 τροχιές.

Πίνακας 7.4.2: «Φλοιοί – τροχιές – ηλεκτρόνια» και κβαντικοί αριθμοί						
K	$n=1$	$l=0$	$m=0$	μια τροχιά	κυκλική	
L	$n=2$	$\left[\begin{array}{l} l=0 \\ l=0 \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} m=0 \\ \left\{ \begin{array}{l} m=-1 \\ m=0 \\ m=1 \end{array} \right\} \end{array} \right\}$		μια ελλειπτική και τρεις κυκλικές τροχιές		σε κάθε τροχιά έχουμε δύο δυνατότητες προσανατολισμού του spin: παράλληλα και αντιπαράλληλα προς την τροχιακή ορμή (δηλαδή $s = \pm 1/2$)
M	$n=3$	$\left[\begin{array}{l} l=0 \\ l=1 \\ l=2 \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} m=0 \\ \left\{ \begin{array}{l} m=0 \\ m=\pm 1 \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} m=0 \\ m=\pm 1 \\ m=\pm 2 \end{array} \right\} \end{array} \right\}$		μια έκκεντρη τροχιά	πολύ ελλειπτική	και πέντε κυκλικές τροχιές

Η ταξινόμηση των χημικών στοιχείων κατά αύξουσα ατομική μάζα καταδεικνύει μια περιοδικότητα των χημικών ιδιοτήτων και οδήγησε ως γνωστόν στην δημιουργία του Περιοδικού Πίνακα από τον Mendelejeff. Ο εν λόγω πίνακας εξηγείται επακριβώς, αν δεχθούμε, ότι η δομή του ατομικού περιβλήματος

ακολουθεί τους παρακάτω δύο κανόνες:

α) Όλα τα ηλεκτρόνια ενός ατόμου κινούνται επί εκείνων των επιτρεπομένων - σύμφωνα με το διευρυμένο μοντέλο των Bohr - Sommerfeld («μοντέλο των φλοιών») - τροχιών, επί των οποίων έχουν την ελάχιστη δυνατή ενέργεια.

β) Απαγορευτική αρχή του Pauli: Δύο ηλεκτρόνια ενός ατόμου πρέπει να διαφέρουν σε έναν τουλάχιστον κβαντικό αριθμό.

Σύμφωνα με την απαγορευτική αρχή του Pauli σε κάθε τροχιά μπορούν να κινούνται δύο το πολύ ηλεκτρόνια, των οποίων τα spin θα είναι αντιπαράλληλα. Αυτό σημαίνει, ότι οι n^2 τροχιές του φλοιού n μπορούν να δεχτούν $2(n^2)$ ηλεκτρόνια.

Το μοντέλο των ατομικών φλοιών παραμένει ακόμη και σήμερα δημοφιλές κυρίως λόγω της παραστατικότητάς του, αν και έχει αρκετές αδυναμίες. Π.χ. δεν εξηγεί την απαγορευτική αρχή του Pauli, απλώς την δέχεται αξιωματικά. Δεν εξηγεί τα κριτήρια μετάβασης από μια τροχιά σε άλλη, δεν εξηγεί τις δύο τιμές του κβαντικού αριθμού του spin, δεν μπορεί καν να εξηγήσει το φάσμα του Ηλίου, κ.λ.π. Όλες αυτές οι αδυναμίες ξεπερνιούνται μόνο στα πλαίσια του κυματικού μοντέλου του ατόμου, το οποίο είναι γέννημα θρέμμα της Κβαντομηχανικής.

Στα πλαίσια του κυματομηχανικού μοντέλου του ατόμου οι τροχιές του Bohr αντικαθίστανται μέσω τρισδιάστατων στάσιμων κυμάτων, έκαστο των οποίων έχει συγκεκριμένη ενέργεια και συχνότητα και παριστάνει μια «κατάσταση» ενός ηλεκτρονίου. Έτσι στην θέση της μεταπήδησης από μια τροχιά σε μια άλλη έρχεται η μετάβαση από μια κατάσταση (\approx τρισδιάστατο στάσιμο κύμα) σε μια άλλη. **Η ένταση των παραπάνω κυμάτων σε ένα σημείο του χώρου αποτελεί το μέτρο της πιθανότητας να βρίσκεται το ηλεκτρόνιο στην συγκεκριμένη θέση.**

7.5 Ο πυρήνας

7.5.1 Έλλειμμα μάζας – ενέργεια σύνδεσης

Η μάζα ενός πυρήνα μπορεί να προσδιοριστεί με πάρα πολύ μεγάλη ακρίβεια με την βοήθεια των *φασματογράφων μάζας*. Από τέτοιου είδους ακριβείς μετρήσεις προκύπτει, ότι η μάζα ενός ατομικού πυρήνα είναι πάντα μικρότερη από το άθροισμα των μαζών των νουκλεονίων, εκ των οποίων αποτελείται:

Η διαφορά μάζας Δm μεταξύ της μάζας ενός πυρήνα και του αθροίσματος των μαζών των νουκλεονίων, εκ των οποίων αποτελείται ο συγκεκριμένος πυρήνας, καλείται έλλειμμα μάζας.

Με άλλα λόγια, όταν μεμονωμένα νουκλεόνια συνδέονται για την δημιουργία ενός πυρήνα, χάνουν ένα μέρος της μάζας τους. Η μάζα αυτή δεν εξαφανίζεται, αλλά μετατρέπεται - σύμφωνα με την αρχή ισοδυναμίας μεταξύ μάζας και ενέργειας - σε ενέργεια. Η ενέργεια αυτή καλείται *ενέργεια συνδέσεως W* και ελευθερούται κατά την συνένωση των νουκλεονίων σε έναν πυρήνα:

Ενέργεια συνδέσεως W καλείται η ενέργεια, η οποία ελευθερούται κατά την δημιουργία ενός πυρήνα από μεμονωμένα νουκλεόνια.

Αν αντιθέτως θέλουμε να διασπάσουμε έναν πυρήνα σε μεμονωμένα νουκλεόνια, θα πρέπει να του προσφέρουμε ενέργεια ίση προς την ενέργεια συνδέσεως.

Σύμφωνα με την αρχή ισοδυναμίας μεταξύ μάζας και ενέργειας του Einstein, μεταξύ του ελλείμματος μάζας και της ενέργειας συνδέσεως ισχύει η σχέση:

$$\overline{W = \Delta mc^2} \quad [7.4]$$

όπου W = ενέργεια συνδέσεως

Δm = έλλειμμα μάζας

$c = 3 \cdot 10^8$ m/s = ταχύτητα του φωτός στο κενό.

Σημειώνουμε ότι η ενέργεια συνδέσεως των διαφόρων πυρήνων είναι κατά 10 περίπου φορές μεγαλύτερη από την ενέργεια αναδιάταξης των ηλεκτρονίων. Η ίδια αναλογία ισχύει επομένως και για την ενέργεια, η οποία συνοδεύει τις πυρηνικές (διάσπαση του πυρήνα) και χημικές (π.χ. καύση χημικών καυσίμων) αντιδράσεις αντίστοιχα.

Η ενέργεια συνδέσεως διαφέρει από πυρήνα σε πυρήνα και αποτελεί ένα χαρακτηριστικό μέγεθος για τον συγκεκριμένο πυρήνα. Ιδιαίτερο όμως πρακτικό ενδιαφέρον έχει η μέση ενέργεια συνδέσεως ανά νουκλεόνιο: αν κατορθώσουμε να αυξήσουμε την μέση ενέργεια συνδέσεως ανά νουκλεόνιο, κερδίζουμε την αύξηση ως εκλυόμενη ενέργεια. Όπως τώρα φαίνεται στο σχήμα 7.1, την μεγαλύτερη (μέση) ενέργεια συνδέσεως ανά νουκλεόνιο έχουν πυρήνες, των οποίων ο μαζικός αριθμός M είναι γύρω στο 50. Επομένως:

Πυρηνική ενέργεια
ελευθερούται κατά την συνένωση
ελαφριών πυρήνων («πυρηνική σύντηξη») ή κατά την διάσπαση βαρέων πυρήνων («πυρηνική διάσπαση»), λόγω της αύξησης της μέσης ενέργειας συνδέσεως ανά νουκλεόνιο.

7.5.2 Φυσική ραδιενέργεια

Μεταξύ των νουκλεονίων (πρωτονίων και ουδετερονίων) του πυρήνα αναπτύσσονται δύο είδη δυνάμεων: απωστικές δυνάμεις Coulomb μεταξύ των ομωνύμων πρωτονίων και ελκτικές δυνάμεις μεταξύ όλων των νουκλεονίων, οι οποίες καλούνται ισχυρές πυρηνικές δυνάμεις και είναι καθαρά κβαντομηχανικής φύσεως. Οι ελκτικές ισχυρές πυρηνικές δυνάμεις είναι, όπως προδίδει και το όνομα τους, πολύ ισχυρότερες από τις απωστικές δυνάμεις Coulomb, έχουν όμως πολύ μικρή εμβέλεια ($< 10^{-15}$ cm). Αντιθέτως οι δυνάμεις Coulomb έχουν άπειρη εμβέλεια. Αποτέλεσμα τούτου είναι η αστάθεια των

βαρύτερων και κατά συνέπεια ογκωδέστερων πυρήνων. Πιο συγκεκριμένα πρόκειται για τους πυρήνες με ατομικό αριθμό μεγαλύτερο του 84. Οι πυρήνες αυτοί διασπώνται λοιπόν αυθόρμητα εκπέμποντας την λεγόμενη **ραδιενεργό ακτινοβολία**, φαινόμενο το οποίο χαρακτηρίζεται ως **φυσική ραδιενέργεια**.

Η ραδιενεργός ακτινοβολία αποτελείται από:

α) Σωματίδια α = πυρήνες Ηλίου, αποτελούμενοι από δύο πρωτόνια και δύο ουδετερόνια.

β) Σωματίδια β = ταχέως κινούμενα ηλεκτρόνια, η ταχύτητα τους μπορεί να φτάσει μέχρι και το 99,9% της ταχύτητας του φωτός.

γ) Σωματίδια γ = κβάντα ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας πολύ μεγάλης ($\sim 10^{20}$ Hz) συχνότητας, άρα και ενέργειας.

7.5.3 Νόμος της φυσικής ραδιενέργειας

Πειραματικές μετρήσεις έδειξαν, ότι ο αριθμός dN των πυρήνων, οι οποίοι διασπώνται, μέσα σε χρόνο dt , είναι ανάλογος του αριθμού N των κατά την δεδομένη χρονική στιγμή υπαρχόντων, μη διασπασθέντων πυρήνων: $dN = -\lambda N dt$ [7.5]

(Το αρνητικό πρόσημο σημαίνει, ότι έχουμε *ελάττωση* του αριθμού των ραδιενεργών πυρήνων με την πάροδο του χρόνου).

Η σταθερά αναλογίας λ καλείται σταθερά διασπάσεως και εξαρτάται μόνο από το είδος του πυρήνα.

Η εξίσωση [7.5] μπορεί να γραφεί και στην μορφή:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \quad [7.5\alpha]$$

Ο ρυθμός των διασπάσεων (dN/dt) καλείται και **ραδιενεργός δραστηριότητα** της συγκεκριμένης ποσότητας του ραδιενεργού υλικού.

Μονάδα μέτρησης της ραδιενεργούς δραστηριότητας είναι το **Becquerel** $\equiv Bq = 1s^{-1}$.

Συχνά χρησιμοποιείται η ειδική ραδιενεργή δραστηριότητα $= \frac{\text{ραδιενεργή δραστηριότητα}}{\text{μάζα}}$.

η οποία μετράται σε Bq/g. Τιμές της ειδικής ραδιενεργής δραστηριότητας ορισμένων ραδιενεργών ισοτόπων περιέχονται στον Πίνακα 7.5.3.

Πίνακας 7.5.3: Ειδική ραδιενεργή δραστηριότητα μερικών ισοτόπων (Bq/g)

Μόλυβδος	$({}^{214}_{82}Pb)$	$1,22 \cdot 10^{18}$	Θόριο	$({}^{230}_{90}Th)$	$7,03 \cdot 10^8$
Βισμούθιο	$({}^{214}_{83}Bi)$	$1,67 \cdot 10^{18}$	Θόριο	$({}^{234}_{90}Th)$	$8,47 \cdot 10^{14}$
Πολώνιο	$({}^{218}_{84}Po)$	$1,05 \cdot 10^{19}$	Ουράνιο	$({}^{234}_{92}U)$	$2,1 \cdot 10^8$
Ραδόνιο	$({}^{222}_{86}Rn)$	$5,74 \cdot 10^{15}$	Ουράνιο	$({}^{238}_{92}U)$	$1,22 \cdot 10^4$
Ράδιο	$({}^{226}_{88}Ra)$	$3,7 \cdot 10^{10}$			

Ολοκλήρωση της [7.5] δίδει: $dN = -\lambda N dt \Rightarrow \frac{dN}{N} = -\lambda dt \Rightarrow$
 $\Rightarrow \int_{N_0}^N \frac{dN}{N} = -\lambda \int_0^t dt \Rightarrow \ln \frac{N}{N_0} = -\lambda t \Rightarrow \frac{N}{N_0} = e^{-\lambda t} \Leftrightarrow$

$$N = N_0 e^{-\lambda t} : \quad \text{νόμος της ραδιενέργειας} \quad [7.6]$$

όπου N_0 = αρχικά υπάρχοντες ραδιενεργοί πυρήνες

Η εκθετική ελάττωση του αριθμού των μη διασπασθέντων πυρήνων με την πάροδο του χρόνου αποδίδεται ποιοτικά στο σχήμα 7.2.

Ο χρόνος $T_{1/2}$, εντός του οποίου έχει διασπασθεί το ήμισυ των αρχικώς υπαρχόντων ραδιενεργών πυρήνων, καλείται χρόνος υποδιπλασιασμού ή ημιζωή. Ο χρόνος υποδιπλασιασμού μπορεί να υπολογισθεί από την σχέση [7.6] θέτοντας $N = N_0 / 2$:

$$\frac{N_0}{2} = N_0 \exp[-\lambda T_{1/2}] \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2} = \exp[-\lambda T_{1/2}] \Rightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln[\exp[-\lambda T_{1/2}]] \Rightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\lambda T_{1/2} \Rightarrow$$

$$T_{1/2} = -\frac{\ln(1/2)}{\lambda} = -\frac{\ln 1 - \ln 2}{\lambda} \Rightarrow \quad T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} \quad \text{:χρόνος υποδιπλασιασμού} \quad [7.7]$$

Όπως βλέπουμε, ο χρόνος υποδιπλασιασμού εξαρτάται μόνο από την σταθερή διασπάσεων λ και είναι κατά συνέπεια χαρακτηριστικός για το συγκεκριμένο ραδιενεργό στοιχείο. Στον Πίνακα 7.5.3.α δίδεται ο χρόνος υποδιπλασιασμού ορισμένων από τα σπουδαιότερα ραδιενεργά νουκλίδια.

Πίνακας 7.5.3α: Χρόνος υποδιπλασιασμού μερικών ραδιενεργών νουκλιδίων

Φώσφορος	${}_{15}^{32}P$	14,3 d	Στρόντιο	${}_{38}^{90}Sr$	29 α
Χλώριο	${}_{17}^{36}Cl$	$3 \cdot 10^5 a$	Ράδιο	${}_{88}^{226}Ra$	1601 α
Χλώριο	${}_{17}^{38}Cl$	38 min	Ουράνιο	${}_{92}^{234}U$	$2,5 \cdot 10^5 a$
Κάλιο	${}_{19}^{42}K$	12,4 h	Ουράνιο	${}_{92}^{235}U$	$7,1 \cdot 10^8 a$
Κοβάλτιο	${}_{27}^{60}Co$	5,25 α	Ουράνιο	${}_{92}^{238}U$	$4,5 \cdot 10^9 a$
Στρόντιο	${}_{38}^{89}Sr$	54 d	Πλουτώνιο	${}_{94}^{239}Pu$	$2,44 \cdot 10^4 a$

7.6 Επίδραση ραδιενεργούς ακτινοβολίας

Τόσο η φυσική όσο (και κυρίως) η τεχνητή ραδιενέργεια (βλ. κεφ. 7.8) βρίσκουν όλο και περισσότερες εφαρμογές στην σύγχρονη Ιατρική, Βιολογία και Τεχνολογία γενικότερα. Οι εν λόγω εφαρμογές αποτελούν αντικείμενο εξειδικευμένων κλάδων των αντιστοίχων επιστημών και δεν είναι δυνατόν να αναλυθούν στα πλαίσια του παρόντος συγγράμματος. Εκείνο όμως το οποίο μπορούμε να επισημάνουμε, είναι ότι όλες αυτές οι εφαρμογές στηρίζονται στις βιολογικές και μη δράσεις της ραδιενεργούς ακτινοβολίας, τα κύρια γνωρίσματα των οποίων περιγράφουμε παρακάτω.

Βιολογική δράση ραδιενέργειας: Τα σωματίδια αλλά και τα φωτόνια προκαλούν κατά μήκος της διαδρομής τους τόσο τον ιονισμό ατόμων όσο και την διάσπαση μορίων. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την πραγματοποίηση ασυνήθων χημικών αντιδράσεων, οι οποίες πραγματοποιούνται μόνον μεταξύ ιονισμένων ατόμων. Εξάλλου η διάσπαση ακόμη και μεμονωμένων μορίων επηρεάζει την λειτουργία των κύτταρων, επειδή εξαρτάται ακριβώς από την συμπεριφορά μεμονωμένων μορίων. Έτσι η ραδιενέργεια μπορεί να προκαλέσει την νέκρωση ή (σχεδόν ακόμη χειρότερα) τον εκφυλισμό των προσβληθέντων κύτταρων. Ένας υγιής οργανισμός μπορεί φυσικά να αντιμετωπίσει τις παραπάνω βλάβες, μόνον όμως όταν περιορίζονται σε μερικά μόνο κύτταρα.

Τις μεγαλύτερες μεταβολές προξενούν τα σωματίδια α, επειδή προκαλούν - λόγω της μεγάλης τους μάζας - ιονισμούς κρούσεως ήδη σε πολύ μικρή διαδρομή. Από την άλλη έχουν ως εκ τούτου μικρή διεισδυτική ικανότητα. Έτσι είναι δραστικά μόνον όταν η πηγή τους βρεθεί εντός του οργανισμού. Αντιθέτως τα σωματίδια γ χαρακτηρίζονται από μικρή δραστικότητα μεγάλη όμως διεισδυτικότητα. Το τελευταίο σε συνδυασμό με τις περιορισμένες δυνατότητες θωράκισης τις κάνει ιδιαίτερα επικίνδυνες. Τα σωματίδια β έχουν, όσον αφορά την δραστικότητα και διεισδυτικότητα μια ενδιάμεση θέση.

Μη βιολογική δράση της ραδιενέργειας: Η επίδραση της ραδιενεργούς ακτινοβολίας επί των διαφόρων υλικών επηρεάζει τις ιδιότητές τους μέσω δύο κυρίως μηχανισμών. Κατά πρώτον μέσω της διάσπασης μορίων, των οποίων η επανένωση γίνεται συχνά σε διαφορετική διάταξη από πριν. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την διαφοροποίηση των φυσικών κυρίως ιδιοτήτων του συγκεκριμένου υλικού. Η αναδιάταξη αυτή των μορίων έχει μεγαλύτερη επίδραση στην περίπτωση υλικών, τα οποία αποτελούνται από μακρομόρια. Έτσι πολλά πλαστικά μπορούν μέσω της ραδιενέργειας να αποκτήσουν π.χ. μεγαλύτερη θερμοκρασιακή αντοχή.

Η έκθεση εξάλλου ενός υλικού με κρυσταλλική δομή σε σωματίδια υψηλής ενέργειας μπορεί να προκαλέσει εκσφενδονισμό μεμονωμένων ιόντων του κρυσταλλικού πλέγματος. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την αλλαγή των ιδιοτήτων του κρυστάλλου, όπως π.χ. την διαύγεια του, το χρώμα του, την ηλεκτρική του αγωγιμότητα κ.λ.π.

Υπάρχουν βέβαια και υλικά (όπως τα μέταλλα και τα κεραμικά), τα οποία είναι εξαιρετικά ανθεκτικά στην έκθεση σε ραδιενεργή ακτινοβολία. Μόνον πάρα πολύ έντονη και μακροχρόνια έκθεση μπορεί να μεταβάλλει, αισθητά τις ιδιότητές τους.

7.7 Δοσολογία

Προκειμένου να αξιολογήσουμε την επίδραση ραδιενεργούς ακτινοβολίας (γενικότερα κάθε *ιονίζουσας* ακτινοβολίας, όπως π.χ. ακτίνες Röntgen, ακτίνες ουδετερονίων κ.λ.π.) επί των διαφόρων υλικών εισάγουμε την δόση D και τον ρυθμό δόσεως D :

Δόση (εκθέσεως) ή Απορροφηθείσα δόση ή ενεργειακή δόση P καλείται το πηλίκο της απορροφηθείσας από ένα υλικό ενέργειας W προς την μάζα m του υλικού:

$$\underline{\underline{D = \frac{W}{m}}} \quad [7.8]$$

Μονάδα μέτρησης: $[D] = \frac{J}{kg} \equiv Gy(Gray)$

Ρυθμός δόσεως D καλείται το πηλίκο της δόσεως προς τον χρόνο απορρόφησής της:

$$D = \frac{D}{t} \quad [7.9]$$

Όσον αφορά την βιολογική δράση της ραδιενεργούς ακτινοβολίας, θα πρέπει να σημειώσουμε, ότι δεν περιγράφεται πλήρως μέσω της δόσεως, επειδή εξαρτάται και από το είδος της ακτινοβολίας. Για τον λόγο αυτό εισήχθη η ισοδύναμη ή **βιολογική δόση D_B** ως μέτρο της δράσης της ακτινοβολίας επί του ανθρωπίνου οργανισμού. Η βιολογική δόση υπολογίζεται πολλαπλασιάζοντας την δόση D με τον χαρακτηριστικό για το είδος της ακτινοβολίας **«παράγοντα ποιότητας» Q** :

$$\vec{D}_B = QD \quad [7.10]$$

Η μονάδα μέτρησης της βιολογικής δόσης ονομάζεται **"rem"**.

Ο παράγοντας ποιότητας είναι ουσιαστικά αδιάστατο μέγεθος, το οποίο υπολογίζεται πειραματικά, συγκρίνοντας το βιολογικό αποτέλεσμα της απορροφηθείσας δόσης ενός συγκεκριμένου είδους ακτινοβολίας με εκείνο, το οποίο επιφέρει δόση 0,01Gy ακτινών Röntgen. Αυτό σημαίνει ουσιαστικά, ότι η βιολογική δόση D_B δεν αποτελεί γνήσιο φυσικό μέγεθος. Στον Πίνακα 7.7 δίδεται ο παράγοντας ποιότητας ορισμένων ειδών ακτινοβολίας.

Πίνακας 7.7: Τιμή του παράγοντα ποιότητας ορισμένων ακτινοβολιών σε «rem/Gy»

Ακτίνες Röntgen	100	Αργά ουδετερόνια	300
» γ	100	γρήγορα ουδετερόνια	1000
» β	100	γρήγορα πρωτόνια	1000
» α	1000	βαρέα πυρηνικά θραύσματα	2000

Στις σύγχρονες κοινωνίες έχουν θεσπισθεί ως **ανώτατο όριο βιολογικής δόσης τα 5rem/έτος** με την προϋπόθεση, ότι δεν θα ξεπεραστούν τα **3 rem/(13 εβδομάδες)** και τα **5 · (ηλικία σε έτη - 18)** για όλη την διάρκεια της ζωής. Σημειωτέον δε ότι οι τιμές αυτές ισχύουν για άτομα, τα οποία έχουν επαγγελματική επιβάρυνση και υπόκεινται σε προσωπική μέτρηση δόσεως. **Για άτομα, τα οποία εκτίθενται ευκαιριακά σε ακτινοβολία, τα ισχύοντα όρια είναι το 1/10 των παραπάνω, για μεγάλες δε μάζες πληθυσμού το 1/100.** Στον Πίνακα 7.7α περιέχεται, η φυσιολογική δράση διαφόρων βιολογικών δόσεων ακτινών γ.

Πίνακας 7.7α: Βιολογική δράση ακτίνων γ

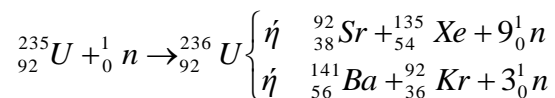
Απορροφηθείσα δόση	Δράση
< 50 rem	Μικρή προσωρινή αλλαγή δεικτών αίματος

80 ~ 120 rem	Αδιαθεσία και εμετοί στο 10% των περιπτώσεων
400 ~ 500 rem	Θάνατοι σε ποσοστό 50% εντός 30 ημερών. Όσοι επιζήσουν συνέρχονται εντός 6 μηνών.
550 ~ 750 rem	Θάνατοι σε ποσοστό 100%
5000 rem	Βαριά προσβολή του νευρικού συστήματος. Θάνατος εντός μιας βδομάδας

7.8 Τεχνητή ραδιενέργεια. Σχάση

Ακόμη και ευσταθείς πυρήνες είναι δυνατόν να μετατραπούν σε ραδιενεργούς, αν τους «βομβαρδίσουμε» με κατάλληλα «βλήματα», όπως πρωτόνια, ουδετερόνια και σωματίδια α. Η κατ' αυτόν τον τρόπο εκπεμπόμενη ραδιενέργεια καλείται **τεχνητή ραδιενέργεια** και αποτελείται από τα ίδια σωματίδια με την φυσική ραδιενέργεια. Φυσική και τεχνητή ραδιενέργεια είναι ως εκ τούτου το ίδιο επικίνδυνες για τους ζώντες οργανισμούς.

Από όλες τις δυνατότητες τεχνητής διάσπασης ενός αρχικά ευσταθούς πυρήνα ιδιαίτερο πρακτικό ενδιαφέρον έχει η από τους Hahn και Strassmann το 1938 ανακαλυφθείσα και ως **σχάση** χαρακτηριζόμενη. Πρόκειται για την διάσπαση ενός (βαρέως) πυρήνος σε δύο περίπου ισόμαζα θραύσματα, και όχι απλώς την εκπομπή μεμονωμένων σωματιδίων α, β, γ, ρ, η κ.λ.π. Σημειωτέον ότι λίγοι μόνον από τους υπάρχοντες στην φύση πυρήνες μπορούν να υποστούν σχάση. Ο γνωστότερος όλων εκείνος του Ουρανίου ${}_{92}^{235}\text{U}$. Η σχάση του εν λόγω πυρήνα επιτυγχάνεται μέσω βομβαρδισμού με «αργά» (βλ. παρακάτω) ουδετερόνια και εξελίσσεται ποικιλοτρόπως. Η παρακάτω **πυρηνική αντίδραση** περιγράφει δύο από τις πολλές δυνατότητες:



Κατά την σχάση ενός πυρήνος εκλύεται μεγάλη ποσότητα ενέργειας, η οποία καλείται **πυρηνική ενέργεια** και οφείλεται στο έλλειμμα μάζας: το άθροισμα των μαζών των θραυσμάτων και των εκπομπομένων σωματιδίων είναι μικρότερο από την μάζα του αρχικού πυρήνος και των χρησιμοποιηθέντων βλημάτων. Π.χ. στην παραπάνω περίπτωση του Ουρανίου το έλλειμμα μάζας ανέρχεται σε 1% περίπου. Έτσι 1 kg Ουρανίου δίδει περίπου $7 \cdot 10^{13}$ J, εκ των οποίων το 83% παραλαμβάνεται ως κινητική ενέργεια των θραυσμάτων, το 3% ως κινητική ενέργεια των ουδετερονίων και το 3% εκπέμπεται με μορφή ακτινοβολίας (όλα τα %% στο περίπου).

7.9 Αλυσιδωτή αντίδραση

Τα κατά την σχάση παραγόμενα **δευτερογενή**, όπως λέγονται, ουδετερόνια μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την επίτευξη άλλων σχάσεων, αφού προηγουμένως επιβραδυνθούν σε «θερμικές» (βλ. παρακάτω) ταχύτητες. Εφόσον δε διαθέτουμε μια ελάχιστη, «κρίσιμη» ποσότητα σχάσιμου υλικού, έχουμε μια αυτοσυντηρούμενη, **αλυσιδωτή αντίδραση**.

Η αλυσιδωτή αντίδραση μπορεί να είναι *μη ελεγχόμενη*, όπως π.χ. στην περίπτωση της **ατομικής**

Βόμβας: Το σχάσιμο υλικό ${}_{92}^{235}\text{U}$ ή (Πλουτώνιο) ${}_{94}^{239}\text{Pu}$ είναι αρχικά χωρισμένο σε αρκετές υποκρίσιμες ποσότητες. Όταν θέλουμε να εκραγεί φέρουμε τις ποσότητες αυτές σε επαφή με την βοήθεια κατάλληλα τοποθετημένων χημικών εκρηκτικών. Έτσι η μάζα γίνεται υπερκρίσιμη και αρχίζει η αλυσιδωτή αντίδραση, ενώ τα ανθεκτικά τοιχώματα του περιβλήματος εμποδίζουν την εκτόξευση σχάσιμου υλικού πριν την «καύση» του.

Αντιθέτως εις τους λεγόμενους **πυρηνικούς αντιδραστήρες** μπορούμε με διάφορα απλά, μηχανικά μέσα να ελέγχουμε την ταχύτητα μιας αλυσιδωτής αντίδρασης, επιτυγχάνοντας έτσι την αξιοποίηση της πυρηνικής ενέργειας για την παραγωγή ισχύος.

Ένας τυπικός πυρηνικός αντιδραστήρας αποτελείται ουσιαστικά από τα ακόλουθα συστήματα:

1) Σχάσιμο υλικό («καύσιμο»): Συνήθως πρόκειται για **εμπλουτισμένο** Ουράνιο, δηλαδή μείγμα ${}_{92}^{238}\text{U}$ (χρόνος υποδιπλασιασμού $T_{1/2} = 4,5 \cdot 10^9 \text{ a}$) και ${}_{92}^{235}\text{U}$ ($T_{1/2} = 7,1 \cdot 10^8 \text{ a}$), στο οποίο το σχάσιμο ${}_{92}^{235}\text{U}$ περιέχεται σε αναλογία μεγαλύτερη εκείνης (0,7%), με την οποία απαντάται στην φύση. Το σχάσιμο υλικό περιέχεται συνήθως με την μορφή ράβδων, οι οποίες αποτελούνται από μεμονωμένα δισκία εμπλουτισμένου ουρανίου.

2) Επιβραδυντής: Τα εκπεμπόμενα κατά την σχάση, δευτερογενή ουδετερόνια πρέπει να επιβραδυνθούν το ταχύτερο δυνατό σε ταχύτητες της τάξεως 2000 m/s («**θερμικά ουδετερόνια**»). Διαφορετικά δεν προκαλούν σχάση άλλων πυρήνων ${}^{235}\text{U}$, αλλά παγιδεύονται από μη σχάσιμους πυρήνες ${}^{238}\text{U}$. Η εν λόγω επιβράδυνση γίνεται μέσω ελαστικής κρούσεως με πυρήνες μιας ουσίας, του **επιβραδυντού**, εντός του οποίου είναι «βυθισμένοι» οι ράβδοι Ουρανίου. Οι πυρήνες του επιβραδυντού πρέπει να είναι ελαφροί και να μην απορροφούν ουδετερόνια. Τις ιδιότητες αυτές έχουν το βαρύ ή σύνηθες ύδωρ καθώς και ο καθαρός Άνθρακας με την μορφή Γραφίτη.

3) Ράβδοι ρύθμισης: Η ισχύς του αντιδραστήρα μπορεί να αυξομειωθεί με την βοήθεια ράβδων ή πλακών από Κάδμιο ή Βάριο, οι οποίες παρεμβάλλονται μεταξύ των ράβδων Ουρανίου και απορροφούν μέρος των δευτερογενών ουδετερονίων.

4) Ψυκτικό ρευστό: Η εκλυόμενη κατά την πυρηνική σχάση ενέργεια (ένα γραμμάριο φυσικού Ουρανίου παράγει τόση ενέργεια, όση περίπου και 125 τόνοι Άνθρακα!) αποδίδεται αρχικά, κυρίως ως κινητική ενέργεια των θραυσμάτων. Μέσω κρούσεων αυτών με το περιβάλλον μετατρέπεται στην συνέχεια σε θερμότητα, η οποία απάγεται με την βοήθεια καταλλήλου ψυκτικού ρευστού. Τέτοιο μπορεί να είναι για παράδειγμα σύνηθες ή βαρύ ύδωρ, το οποίο μπορεί να παίζει συγχρόνως και τον ρόλο του επιβραδυντού. Το ψυκτικό ρευστό αποδίδει την θερμότητα αυτή σε κατάλληλους εναλλάκτες, προκειμένου να μετατραπεί με την βοήθεια ατμοστροβίλων σε ηλεκτρική ενέργεια.

Προβληματισμοί

Η μέσω πυρηνικών αντιδραστήρων ειρηνική αξιοποίηση της πυρηνικής ενέργειας περιήλθε (κυρίως μετά το ατύχημα του Τσερνομπίλ) τα τελευταία χρόνια σε κατάσταση έντονης αμφισβήτησης, λόγω των **προβλημάτων** τα οποία μπορεί να προκαλέσει σε περίπτωση ατυχήματος ή κακού σχεδιασμού.

Συγκεκριμένα, όλοι οι κατά την σχάση παραγόμενοι πυρήνες είναι ραδιενεργοί και εκπέμπουν ακτινοβολία β και γ. Το 10% περίπου της εκλυόμενης ενέργειας απάγεται μέσω της εν λόγω ακτινοβολίας. Το γεγονός αυτό σε συνδυασμό με την μεγάλη εμβέλεια και καταστροφική δράση κυρίως

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. BERKLEY (πανεπιστήμιο): ΦΥΣΙΚΗ (Τόμος 2) ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΣ ΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ, **ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑ ΦΥΣΙΚΗΣ Ε.Μ.Π, Αθήνα 1984**
2. Βουδούρης Γ. : Ηλεκτροτεχνία, Έκδοση 3^η, **Αθήνα 1959**
3. Dobrinski/Krakau/Vogel: Physic für Ingenieure, Έκδοση 4^η, **Teubner Stuttgart, 1976**
4. Feynman, eighton, Sands: The Feynman Lectures of Physics, **Volume II, Έκδοση 16^η, Addison – Wesley Publishing Company, 1983**
5. Gerthsen- Kneser- Vogel: PHYSIK, Έκδοση 13^η, **Springer- Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1977.**
6. Halliday- Resnick: ΦΥΣΙΚΗ (Μέρος Β), **Εκδόσεις Γ.Α.Πνευματικός, Αθήνα 1976.**
7. Jackson J.D.: Klassische Elektrodynamik, Έκδοση 2^η, **de Gruyter, Berlin- New York, 1983.**
8. Kittel Ch.: Einführung in die Festkörperphysik, Έκδοση 5^η, **Oldenburg Verlag, München Wien, 1980.**
9. Wagner M.: Elemente der Theoretischen Physik 2, **rororo vieweg Physik, 1977.**
10. Feldmann: Repetitorium der Ingenieur- Mathematik, Έκδοση 6^η, **Hannover 1985.**

