ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΡΕΥΣΤΩΝ Ι

κ. ΣΟΦΙΑΛΙΔΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΤΕ

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.

- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

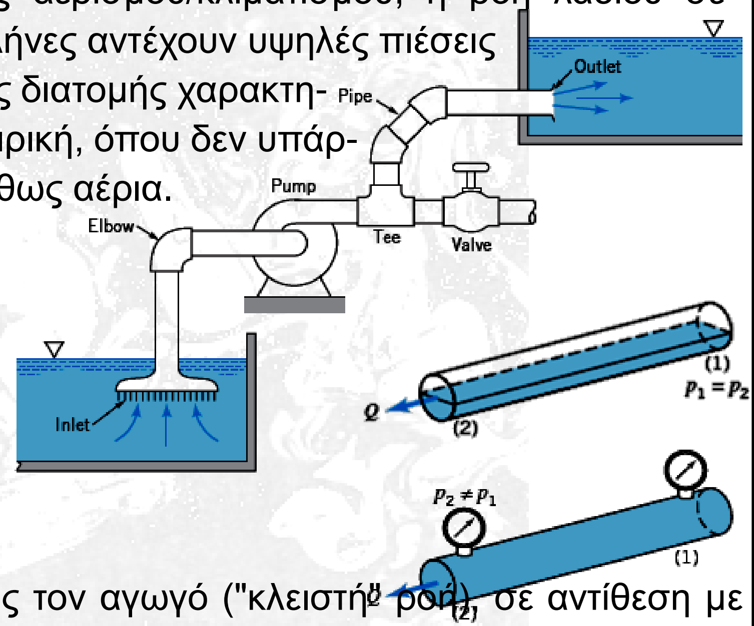
- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Κεντρικής Μακεδονίας» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

6.1 ΓΕΝΙΚΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ
6.1.1 ΣΤΡΩΤΗ ΚΑΙ ΤΥΡΒΩΔΗΣ ΡΟΗ
6.1.2 ΡΟΗ ΣΤΗΝ ΕΙΣΟΔΟ
6.1.3 ΠΙΕΣΗ & ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΗ ΤΑΣΗ
6.2 ΠΛΗΡΩΣ ΑΝΕΠΤΥΓΜΕΝΗ ΣΤΡΩΤΗ ΡΟΗ
6.3 ΠΛΗΡΩΣ ΑΝΕΠΤΥΓΜΕΝΗ ΤΥΡΒΩΔΗΣ ΡΟΗ
6.3.1 ΜΕΤΑΒΑΣΗ ΑΠΟ ΣΤΡΩΤΗ ΣΕ ΤΥΡΒΩΔΗ ΡΟΗ
6.3.2 ΤΥΡΒΩΔΗΣ ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΗ ΤΑΣΗ
6.3.3 ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ ΣΕ ΤΥΡΒΩΔΗ ΡΟΗ
6.4 ΔΙΑΣΤΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΡΟΗΣ ΣΕ ΚΛΕΙΣΤΟΥΣ ΑΓΩΓΟΥΣ
6.4.1 ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΑΠΩΛΕΙΕΣ
(ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ MOODY & ΣΧΕΣΗ COLEBROOK)
6.4.2 ΤΟΠΙΚΕΣ ΑΠΩΛΕΙΕΣ
6.5 ***ΑΣΚΗΣΕΙΣ***

6.1.1 Στρωτη και Τυρβωδης Μονιμη Ροη – (α)

Η διάλεξη αυτή έχει ως αντικείμενο την **ιξώδη** ασυμπίεστη ροή σε κλειστούς **σωλήνες** και **αγωγούς**. "Σωλήνας“ (pipe) συνήθως ονομάζεται ο αγωγός κυκλικής διατομής ενώ "αγωγός" (duct), αν και γενικότερη ονομασία, αυτός με μη–κυκλική (π.χ. ορθογωνική) διατομή. Παραδείγματα ροής σε κλειστούς αγωγούς είναι η ροή του αίματος σε φλέβες και αρτηρίες και η ροή του αέρα στους πνεύμονες, η ροή νερού στους σωλήνες της ύδρευσης, η ροή αέρα στους αγωγούς αερισμού/κλιματισμού, η ροή λαδιού σε υδραυλικά συστήματα μετάδοσης κίνησης κ.α. Συνήθως οι σωλήνες αντέχουν υψηλές πιέσεις και δεν παραμορφώνονται, ενώ αντίθετα οι αγωγοί μη–κυκλικής διατομής χαρακτηρίζονται από πολύ μικρές πιέσεις, κοντά δηλαδή στην ατμοσφαιρική, όπου δεν υπάρχει κίνδυνος παραμόρφωσης. Τέτοιοι αγωγοί μεταφέρουν συνήθως αέρια.

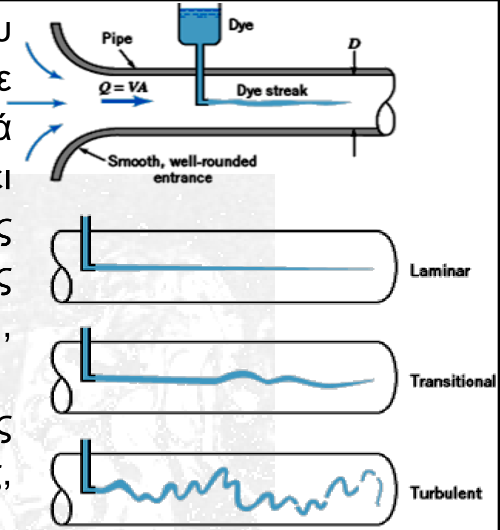


Ένα τυπικό παράδειγμα συστήματος κλειστών αγωγών δίνεται στο διπλανό σχήμα, όπου εκτός από ευθύγραμμα τμήματα σωλήνων, περιλαμβάνονται και ειδικά εξαρτήματα (διακλαδώσεις/tee, γωνίες/elbow, βάνες/valve), όπως επίσης και συσκευές πρόσδωσης ενέργειας, υπό τη μορφή <u>διαφοράς πίεσης</u> ώστε να επιτευχθεί η ροή του ρευστού (αντλία/pump).

ΑΝΟΙΚΤΗ ΚΛΕΙΣΤΗ ΡΟΗ ΣΕ ΑΓΩΓΟΥΣ

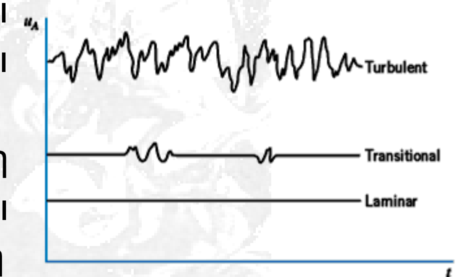
Στην παρούσα διάλεξη υποθέτουμε ότι το υγρό γεμίζει πλήρως τον αγωγό ("κλειστή" ροή), σε αντίθεση με την περίπτωση που καταλαμβάνει μόνο μέρος του αγωγού ("ανοικτή" ροή ή ροή σε ανοικτό αγωγό ή ροή ελεύθερης επιφάνειας). Η διαφορά, που δίνεται στο παραπάνω σχήμα, είναι ουσιώδης, καθώς στην πρώτη περίπτωση η ροή προκαλείται από τη **διαφορά πίεσης** κατά μήκος του αγωγού, ενώ στη δεύτερη από τη **βαρύτητα**. Η βαρύτητα μπορεί να συμμετέχει (ενισχύοντας ή αντιστεκόμενη) στην κίνηση υγρού σε κλειστό αγωγό, αλλά δεν είναι ο κύριος μηχανισμός. Διαφορά πίεσης κατά μήκος της ροής σημειώνεται σε εξαιρετικές περιπτώσεις σε ανοικτό αγωγό.

6.1.1 ΣΤΡΩΤΗ ΚΑΙ ΤΥΡΒΩΔΗΣ ΜΟΝΙΜΗ ΡΟΗ – (β)



Ο **Osbourne Reynolds** (1842–1912) πραγματοποίησε το πείραμα που φαίνεται στο διπλανό σχήμα (έγχυση μελάνης σε ρεύμα νερού) και διαπίστωσε ότι όταν αυξάνει η ταχύτητα της ροής, η ινώδης φλέβα του μελανιού σταματά να είναι μία σταθερή, ομαλή και ευθεία γραμμής και ενώ αρχικά εμφανίζει σύντομα και απότομα σημάδια αστάθεια, τελικά καταλήγει να είναι μία ασταθής γραμμή με έντονη χρονική μεταβολή και τυχαία κίνηση. Οι διάφορες καταστάσεις της ροής που περιγράφηκαν ονομάζονται ***στρωτή*** (laminar), ***μεταβατική*** (transitional) και ***τυρβώδης*** (turbulent) ροή.

Επίσης παρατηρούμε ότι στη στρωτή ροή η γραμμή της μελάνης κατάντη της ροής αρχίζει να παρουσιάζει θολότητα και σταδιακή αύξηση του πάχους της, λόγω της μοριακής διάχυσης της μελάνης στο νερό. Αντίθετα για τυρβώδη ροή, η μελάνη σε πολύ μικρότερο μήκος έχει σχεδόν εξαφανιστεί, διότι έχει αναμιχθεί σχεδόν πλήρως με το νερό. Το ίδιο ακριβώς φαινόμενο συμβαίνει και στον καπνό του τσιγάρου όταν αυτό βρίσκεται στο σταχτοδοχείο.



Εάν μετρήσουμε σε κάποιο σημείο την ταχύτητα της ροής θα πάρουμε τη διπλανή καταγραφή συναρτήσει του χρόνου. Βλέπουμε λοιπόν ότι αν και οι συνθήκες της ροής παραμένουν σταθερές με το χρόνο, εν τούτοις για τυρβώδη τυρβώδη ροή η ταχύτητα παρουσιάζει μη–μονιμότητα. Το ίδιο ισχύει και για όλα τα υπόλοιπα φυσικά μεγέθη (πίεση, θερμοκρασία, κ.λπ.).

Ο λόγος της αστάθειας είναι η αύξηση των αδρανειακών δυνάμεων της ροής που συμβαίνει με την αύξηση της ταχύτητας. Οι δυνάμεις αυτές υπερνικούν πλήρως τις δυνάμεις του ιξώδους, οι οποίες έχουν κατασταλτική δράση για την κίνηση, καθώς μετατρέπουν μέσω της τριβής την κινητική ενέργεια σε θερμότητα η οποία σκεδάζεται ("χάνεται"), δηλαδή δεν μπορεί να ανακτηθεί ως έργο.

Ο λόγος των αδρανειακών δυνάμεων ως προς τις δυνάμεις ιξώδους δίνεται από τον παρακάτω αδιάστατο αριθμό, ο οποίος ονομάζεται **αριθμός Reynolds**, προς τιμή του O. Reynolds:

$$\boldsymbol{Re=\rho UL/\mu}$$

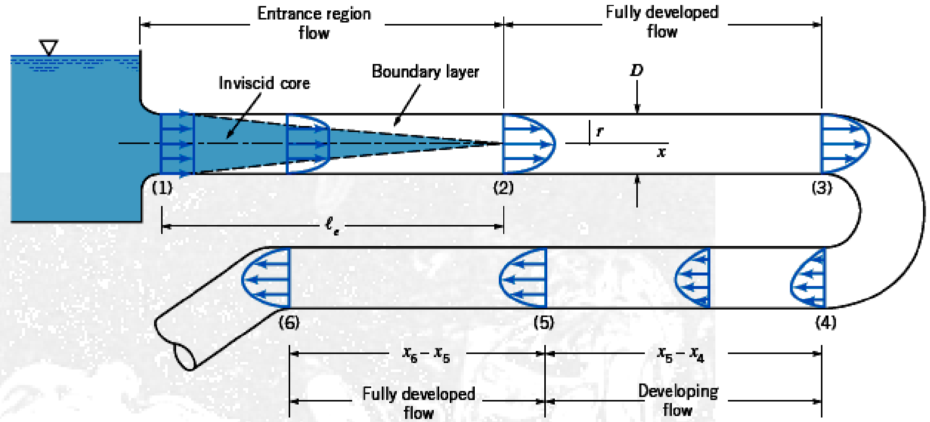
όπου U=χαρακτηριστική ταχύτητα, L=χαρακτηριστικό μήκος, ρ=πυκνότητα ρευστού και μ=μοριακό ιξώδες ρευστού. Στην περίπτωση ροής σε κλειστό αγωγό, $\boldsymbol{L=D}$ για σωλήνα και $\boldsymbol{L=D_h}$ για αγωγό μη-κυκλικής διατομής, ενώ ***U*=μέση τιμή της ταχύτητας στη διατομή του σωλήνα/αγωγού**. Το μέγεθος D_h είναι η υδραυλική διάμετρος του αγωγού, η οποία ορίζεται ως $\boldsymbol{D_h=4A/\Pi}$ ($\boldsymbol{A}$=επιφάνεια διατομής και $\boldsymbol{\Pi}$=βρεχόμενη περίμετρος). Η υδραυλική διάμετρος σωλήνα συμπίπτει με τη γεωμετρική διάμετρο του σωλήνα, ενώ για τετραγωνικό αγωγό ισούται με την πλευρά του.

Για κάθε τύπο ροής, υπάρχει μία τιμή του Re (πιο σωστά, ένα εύρος τιμών) όπου η ροή μεταβαίνει από τη στρωτή στην τυρβώδη κατάσταση και ονομάζεται κρίσιμος αριθμός Reynolds.

Για κλειστούς αγωγούς η τιμή αυτή είναι μεταξύ 2300 και 4000. Κάτω από 2300 η ροή είναι στρωτή, πάνω από 4000 είναι τυρβώδης, ενώ ενδιάμεσα είναι μεταβατική. Η ασάφεια επακριβούς ορισμού της μετάβασης από στρωτή σε τυρβώδη, οφείλεται στη διαταραχή που έχει η ροή στην είσοδο του αγωγού, στην τραχύτητα του αγωγού, σε τυχόν ταλαντώσεις του αγωγού, κ.λπ. Όσο περισσότερη είναι η αναταραχή στη ροή (από οποιαδήποτε αιτία), η μετάβαση σε τυρβώδη ροή γίνεται σε χαμηλότερο αριθμό Reynolds.
Η κρίσιμη τιμή του Re για ροή πάνω από πλάκα είναι 500000, όταν αυτή ορίζεται με μήκος L την τρέχουσα τιμή της συντεταγμένης x, που είναι παράλληλη στην πλάκα.

Εάν η ροή έχει αριθμό Re κάτω από την κρίσιμη τιμή, τότε οι όποιες αναταραχές δεν μπορούν να συντηρηθούν, πόσο μάλλον να ενισχυθούν και επεκταθούν, ώστε να δημιουργήσουν γενικότερη τυρβώδη κατάσταση. Η επίδραση του ιξώδους (στο να δαπανά την κινητική ενέργεια της ροής και να τη μετατρέπει σε θερμότητα λόγω τριβής) υπερτερεί της επίδρασης της αδράνειας λόγω μικρών ταχυτήτων ροής.

6.1.2 Ροη στην Εισοδο– (α)



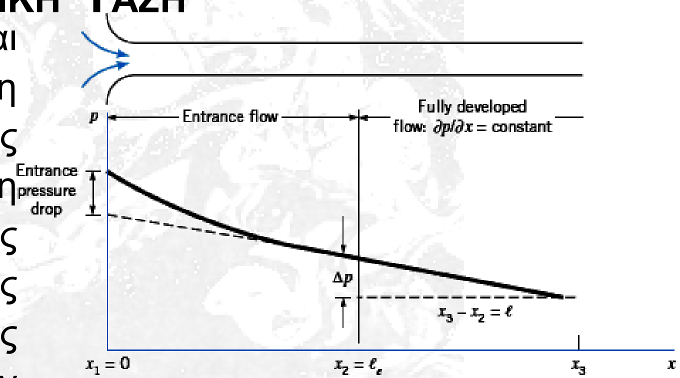
Η ροή σε κλειστό αγωγό προϋποθέτει ότι το ρευστό έχει εισέλθει στον αγωγό από κάποια είσοδο. Έστω λοιπόν ότι η ροή έρχεται από κάποια δεξαμενή και τότε στη διατομή εισόδου (θέση 1) η κατανομή (**προφίλ**) της ταχύτητας είναι ομοιόμορφη όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Λόγω της συνθήκης μη–ολίσθησης (§1.9) που προκαλεί το ιξώδες του ρευστού, η ταχύτητα του ακριβώς πάνω στο τοίχωμα έχει την τιμή του τοιχώματος, δηλαδή για ακίνητο σωλήνα είναι μηδενική. Αυτό όμως συνεπάγεται ότι λόγω της αρχής διατήρησης της μάζας η ροή θα επιταχυνθεί στο κεντρικό τμήμα της διατομής. Η περιοχή κοντά στο τοίχωμα όπου η ταχύτητα συνεχώς μειώνεται από την είσοδο του αγωγού λόγω της δράσης του ιξώδους, ονομάζεται **οριακό στρώμα**. Το πλάτος του οριακού στρώματος αυξάνει ακτινικά συνεχώς, έως ότου καταλάβει όλη τη διάμετρο του αγωγού (θέση 2). Σε όλο αυτό το διάστημα υπάρχει ακτινική μετάδοση ορμής από το κεντρικό τμήμα που κινείται με μεγαλύτερη ταχύτητα προς το τοίχωμα, όπου η ταχύτητα είναι μικρότερη. Η επίδραση του ιξώδους περιορίζεται μέσα στο οριακό στρώμα, διότι απαιτείται μη–μηδενική κλίση ταχύτητας (§1.8) για την ύπαρξη διατμητικής τάσης (στο κέντρο της διατομής η ταχύτητα είναι ομοιόμορφη). Όταν τα οριακά στρώματα συναντηθούν, η επίδραση του ιξώδους εκτείνεται σε όλη τη διατομή.

Ακολουθεί ένα ακόμη τμήμα αγωγού, όπου η κατανομή της ταχύτητας μεταβάλλεται έως ότου σε κάθε ακτινική θέση η ροή σταματήσει να επιταχύνεται/επιβραδύνεται κατά μήκος της ροής, οπότε σε κάθε κατάντη θέση η κατανομή της ταχύτητας είναι αμετάβλητη και η ροή ονομάζεται **πλήρως ανεπτυγμένη**. Το συνολικό μήκος του αγωγού από την είσοδο έως το σημείο αυτό ονομάζεται **μήκος εισόδου, $l_{εισ}$,** και είναι διαφορετικό για στρωτή ($l_{εισ}/D=0.06Re$) και τυρβώδη ροή ($l_{εισ}/D=4.4Re^{1/6}$).

Το μήκος εισόδου για στρωτή ροή δηλαδή μπορεί να είναι μικρό (0.6*D*) για *Re*=10, ή πολύ μεγάλο (120*D*) για *Re*=2000. Αντίθετα, για τυρβώδη ροή στο εύρος $10^4<Re<10^5$ είναι $20D<l_{εισ}<30D$.
Επίσης, η κατανομή (προφίλ) της ταχύτητας για πλήρως ανεπτυγμένη ροή είναι διαφορετική για στρωτή και τυρβώδη ροή, όπως θα περιγραφεί λεπτομερώς παρακάτω.

Η κατάσταση πλήρους ανάπτυξης, μπορεί να διαταραχθεί από οποιαδήποτε μεταβολή, όπως η στροφή του αγωγού (μεταξύ θέσεων 3 και 4). Όταν η διαταραχή πάψει να υπάρχει, η ροή αναπτύσσεται (μεταξύ θέσεων 4 & 5) και επανέρχεται σε στάδιο πλήρους ανάπτυξης (θέση 5), μέχρι την επόμενη διαταραχή (θέση 6), εφόσον είναι διαθέσιμο το απαιτούμενο μήκος, κ.ο.κ.

6.1.3 Πιεση & Διατμητικη Ταση

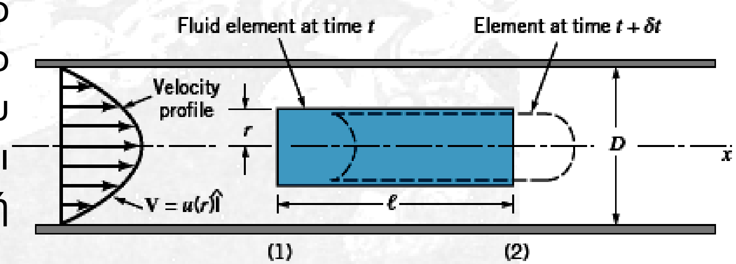


Η ροή σε έναν κλειστό αγωγό οφείλεται στη διαφορά πίεσης ή/και στην επίδραση της βαρύτητας (για υγρό). Σε οριζόντιο αγωγό η βαρύτητα απλά προκαλεί μία μεταβολή της υδροστατικής πίεσης στη διατομή του αγωγού, χωρίς όμως να προκαλεί ροή. Άρα είναι η διαφορά πίεσης $\boldsymbol{\Delta p=p_1-p_2}$, που ευθύνεται για τη ροή. Για πλήρως ανεπτυγμένη ροή, η δράση της εξισορροπείται ακριβώς πλήρως από τη δράση της διατμητικής τάσης του ιξώδους λόγω της ακτινικής μεταβολής της ταχύτητας (παραμόρφωσης). Στην **περίπτω**ση αυτή οι αδρανειακές δυνάμεις είναι μηδενικές, επειδή το ρευστό κινείται με σταθερή ταχύτητα, άρα δεν επιταχύνεται/επιβραδύνεται. Αντίθετα, σε περιοχές όπου η επιτάχυνση δεν είναι μηδενική (π.χ. μήκος εισόδου), τότε οι αδρανειακές δυνάμεις είναι το αποτέλεσμα την διαφοράς των δυνάμεων πίεσης και ιξώδους. Και για τις δύο περιπτώσεις, η κατανομή της πίεσης κατά μήκος του αγωγού, δίνεται στο σχήμα. Στο τμήμα όπου η ροή είναι πλήρως ανεπτυγμένη, σε κάθε θέση, η δύναμη της πίεσης που ασκείται στην επιφάνεια της διατομής, ισούται με τη δύναμη του ιξώδους που ασκείται στην περιφέρεια του τοιχώματος.

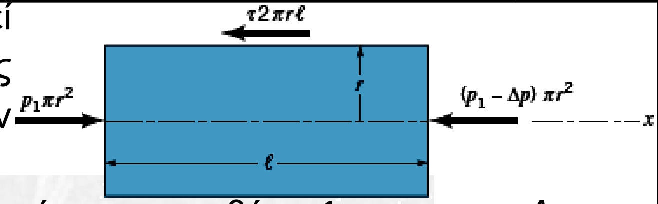
Στην περίπτωση της στρωτής ροής η μετάδοση της ορμής, μέσω της δράσης του ιξώδους, από τα σωματίδια ρευστού υψηλής ταχύτητας προς αυτά χαμηλής ταχύτητας, γίνεται με την κίνηση των μορίων, δηλαδή σε μικροσκοπικό επίπεδο, ενώ στην τυρβώδη ροή γίνεται σε μακροσκοπική κλίμακα λόγω της εναλλαγής ορμής μεταξύ στοιχειωδών σωματιδίων ρευστού υπολογίσιμης μάζας (δηλαδή όχι απειροστού μεγέθους), τα οποία κινούνται άτακτα και συγκρούονται μεταξύ τους.

Στην περίπτωση της στρωτής, πλήρως ανεπτυγμένης ροής, υπάρχει ακριβής αναλυτική προσέγγιση, όπως θα δούμε σε λίγο. Όταν η ροή αναπτύσσεται η ανάλυση δεν είναι καθόλου εύκολη, ενώ όταν η ροή είναι τυρβώδης, ακόμη και όταν είναι πλήρως ανεπτυγμένη, η αναλυτική προσέγγιση είναι αδύνατη.

Αν και οι περισσότερες ροές στη φύση είναι τυρβώδεις, παρόλα αυτά είναι χρήσιμο και διδακτικό να μελετήσουμε την ακριβή ανάλυση της πλήρως ανεπτυγμένης στρωτής ροής, πιο συγκεκριμένα να εξάγουμε την κατανομή της ταχύτητας και από αυτήν να υπολογίσουμε την πτώση πίεσης, παροχή και διατμητική τάση στο τοίχωμα. Η ανάλυση που ακολουθεί στηρίζεται στο 2ο Νόμο κίνησης του Newton, $\vec{F} = m\vec{\alpha}$, όταν αυτός εφαρμοστεί σε ένα σωματίδιο ρευστού.



Έστω ένα σωματίδιο ρευστού μήκους l, και ακτίνας r, το οποίο είναι "κεντραρισμένο" στον άξονα του σωλήνα, διαμέτρου D, το οποίο βρίσκεται τη χρονική στιγμή t στη θέση που υποδεικνύεται με τη συνεχή γραμμή. Εφόσον η ροή είναι μόνιμη, η τοπική επιτάχυνση, $\partial\vec{U}/\partial t$, είναι μηδενική και επειδή είναι πλήρως ανεπτυγμένη το ίδιο ισχύει και για την επιτάχυνση συναγωγής $\vec{U}\bullet\nabla\vec{U} = u(\partial u/\partial x)\vec{i}$. Άρα κάθε σωματίδιο ρευστού κινείται με σταθερή ταχύτητα μία τροχιά παράλληλη προς το σωλήνα, ενώ τα γειτονικά σωματίδια κινούνται με ελαφρώς διαφορετική ταχύτητα. Λόγω της μικρής αυτής διαφοράς, τη χρονική στιγμή $t+\delta t$ το σωματίδιο θα βρίσκεται στη νέα θέση και θα έχει το νέο σχήμα που δίνεται με τις διακεκομμένες γραμμές. Αυτή ακριβώς η διαφορετική τιμή της



ταχύτητας των γειτονικών σωματιδίων (παραμόρφωση), δημιουργεί τη διατμητική τάση λόγω ιξώδους η οποία εξισορροπεί τη δύναμη της πίεσης. Εάν θεωρήσουμε τον Ο.Ε. του σχήματος και αγνοήσουμε την επίδραση της βαρύτητας, τότε η πίεση είναι σταθερή σε κάθε διατομή, παρότι διαφέρει από διατομή σε διατομή (§6.6) και μάλιστα είναι p_1 στη θέση 1 και $p_2=p_1-\Delta p$, στη θέση 2, δηλαδή η πίεση πέφτει ($p_2>p_1$) και η διαφορά $\Delta p>0$ προκαλεί τη ροή. Η διαφορική πίεση ασκείται στην επιφάνεια της διατομής, $\pi r^2/4$.

Παράλληλη υπάρχει η διατμητική τάση, $\tau(r)$, η οποία ασκείται όπου υπάρχει μεταβολή της ταχύτητας, άρα και στο τοίχωμα, όπου η τιμή της είναι τ_w. Η διατμητική τάση ασκείται στην περιμετρική επιφάνεια $2\pi r l$.

Αφού λοιπόν το σωματίδιο του ρευστού κινείται με σταθερή ταχύτητα, τότε οι δυνάμεις που ασκούνται στη δ/νση x έχουν μηδενική συνισταμένη και το άθροισμά τους γράφεται ως: $\mathbf{(p_1)\pi r^2 - (p_1-\Delta p)\pi r^2 - \tau 2\pi r l = 0}$ ή εναλλακτικά ως: $\mathbf{\Delta p/l = 2\tau/r}$ **(1)**

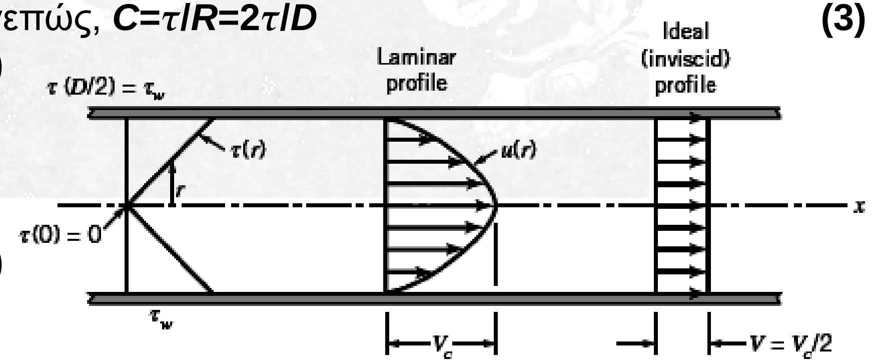
και παρατηρούμε ότι ***<u>για μηδενική διατμητική τάση (π.χ. άτριβη ροή) η πτώση πίεσης είναι μηδενική</u>***.

Εφόσον ούτε η Δp ούτε το l είναι συνάρτηση της ακτίνας (άρα και ο λόγος τους, $\Delta p/l$), συνεπάγεται ότι και ο λόγος $2\tau/r$ είναι ανεξάρτητος της ακτίνας, δηλαδή $\boldsymbol{\tau=Cr}$ **(2)**

όπου C=σταθερά. Λόγω της (2) στον άξονα συμμετρίας (r=0) η διατμητική τάση είναι μηδενική (τ=0), ενώ στο τοίχωμα ($r=R$) λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της, τ_w. Συνεπώς, $\boldsymbol{C=\tau/R=2\tau/D}$ **(3)**

οπότε η (2) γίνεται: $\boldsymbol{\tau=2\tau_w r/D}$ **(4)**

υποδηλώνοντας γραμμική κατανομή της διατμητικής τάσης στην ακτινική δ/νση, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Αντικατάσταση στην (1) δίνει ότι η πτώση πίεσης είναι:

$\boldsymbol{\Delta p=4l\tau_w/D}$ **(5)**

συνδέοντας την πτώση πίεσης με τη διατμηκτή τάση στο τοίχωμα. Η πτώση πίεσης είναι μεγάλη είτε εάν η διατμητική τάση στο τοίχωμα είναι μεγάλη, είτε/και εάν ο λόγος είναι ***l/D*** μεγάλος, δηλαδή για μεγάλα μήκη σωλήνων η πτώση πίεσης γίνεται σημαντική. Το αποτέλεσμα της (5) μπορεί να εξαχθεί άμεσα εάν θεωρησουμε Ο.Ε. που εκτείνεται έως τα τοιχώματα. Όμως αυτό δεν μας βοηθά στον υπολογισμό της διατμητικής τάσης στο τοίχωμα, ώστε να υπολογιστεί και η πτώση πίεσης από την (3), ούτε στην εκτίμηση της παροχής. Η λύση δίνεται από την εύρεση της κατανομής της ταχύτητας και του υπολογισμού της κατανομής της διατμητικής τάσης με την οποία συνδέεται μέσω της εξής σχέσης για Νευτώνειο ρευστό:

$$\tau = -\mu(du/dr) \qquad \textbf{(6)}$$

όπου το αρνητικό πρόσημο δηλώνει ότι η ταχύτητα μειώνεται όσο το *r* αυξάνει (από τον άξονα προς το τοίχωμα). Οι εξισώσεις (1) και (6) είναι αυτές που διέπουν την κίνηση ενός Νευτώνειου ρευστού σε πλήρως ανεπτυγμένη ροή.

Συνδυάζοντάς τις: $\frac{du}{dr} = -\left(\frac{\Delta p}{2\mu\ell}\right) r$ ενώ ολοκληρώνοντας: $\int du = -\frac{\Delta p}{2\mu\ell}\int r\,dr$ παίρνουμε: $u = -\left(\frac{\Delta p}{4\mu\ell}\right) r^2 + C_1$

Η σταθερά C_1 υπολογίζεται από την συνθήκη μη–ολίσθησης στο τοίχωμα, δηλαδή ότι ***u*=0 στο *r*=*R*=*D*/2** και είναι $C_1=(\Delta p/16\mu l)D^2$. Άρα τελικά η κατανομή της ταχύτητας είναι:

$$\boxed{u(r) = \left(\frac{\Delta p\, D^2}{16\,\mu\ell}\right)\left[1-\left(\frac{2r}{D}\right)^2\right] = U_c\left[1-\left(\frac{2r}{D}\right)^2\right]} \qquad \textbf{(7)}$$

όπου $U_c = \left(\frac{\Delta p\, D^2}{16\,\mu\ell}\right)$ **(8)**

είναι η τιμή της ταχύτητας στον άξονα του αγωγού. Εναλλακτικά μπορούμε να γράψουμε την (7) ως συνάρτηση της διατμητικής τάσης του τοιχώματος (και όχι της πτώσης πίεσης) χρησιμοποιώντας την (5):

$$\boxed{u(r) = \frac{\tau_w D}{4\mu}\left[1-\left(\frac{2r}{D}\right)^2\right]} \qquad \textbf{(9)}$$

Η ολοκλήρωση της (7) κατά την ακτινική δ/νση οδηγεί στον υπολογισμό της ογκομετρικής παροχής:

$$Q=\int u dA=\int_{r=0}^{r=R} u(r)2\pi r dr=2\pi U_c\int_{r=0}^{r=R}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]rdr \quad \text{ή} \quad Q=\frac{\pi R^2 U_c}{2} \qquad \textbf{(10)}$$

Επίσης, εξ' ορισμού η μέση ταχύτητα ισούται με το λόγο της ογκομετρικής παροχής προς την επιφάνεια της διατομής: $\boldsymbol{U_m=Q/A=Q/(\pi R^2)}$:

$$\boxed{U_m=\frac{\pi R^2 U_c}{2\pi R^2}=\frac{U_c}{2}=\frac{\Delta p D^2}{32\mu\ell}} \qquad \textbf{(11)}$$

άρα μπορούμε να εκφράσουμε την ογκομετρική παροχή ως:

$$\boxed{Q=\frac{\pi D^4 \Delta p}{128\mu\ell}} \qquad \textbf{(12)}$$

Η κατανομή της ταχύτητας για στρωτή ροή, σχέση (10), είναι παραβολική και δίνεται στο προηγούμενο σχήμα. Επίσης η (11) δηλώνει ότι η μέση ταχύτητα είναι ακριβώς το ήμισυ της μέγιστης ταχύτητας που εμφανίζεται στο μέσο (άξονα) του αγωγού. Συμπερασματικά η ογκομετρική παροχή, Q, είναι:

(α) ευθέως ανάλογη της πτώσης πίεσης, Δp.

(β) αντιστρόφως ανάλογη του μοριακού ιξώδους, μ.

(γ) αντιστρόφως ανάλογη του μήκους του αγωγού, l.

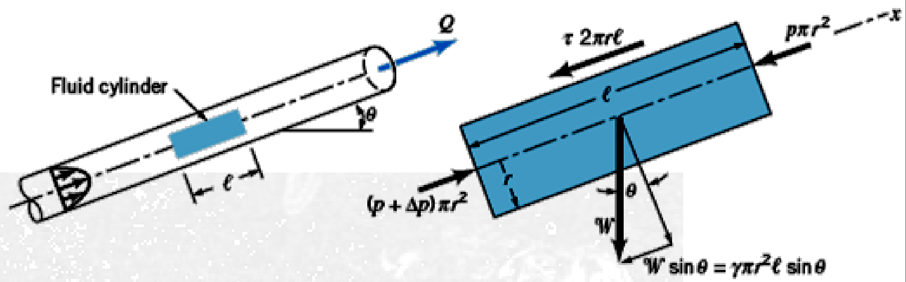
(δ) ανάλογη της τέταρτης δύναμης της διαμέτρου του αγωγού, D.

Οι παραπάνω εξισώσεις περιγράφουν πλήρως τη **μόνιμη**, **πλήρως ανεπτυγμένη**, **στρωτή** ροή σε **οριζόντιο** αγωγό **κυκλικής διατομής**, η οποία προς τιμή των ερευνητών που τη μελέτησαν πρώτοι πειραματικά ονομάζεται **<u>ροή Hagen–Poiseuille</u>**. Ειδικότερα η σχέση (12) ονομάζεται κοινώς νόμος του Poiseuille. Σε περίπτωση όπου ο αγωγός δεν είναι οριζόντιος και το ρευστό είναι υγρό, τότε πρέπει να ληφθεί υπόψη στο ισοζύγιο δυνάμεων και αυτή της υδροστατικής πίεσης, όπως δείχνει το παρακάτω σχήμα:

Στην προκειμένη περίπτωση η δράση της βαρύτητας αντιτίθεται στη ροή, άρα είναι:

$(\Delta p - \gamma l \sin\theta)/l = 2\tau/r$ **(13)**

και ομοίως ισχύουν οι εξισώσεις όπου εμφανίζεται η πτώση πίεσης Δp, (5), (7), (8), (11) και (12), αρκεί αυτή να αντικατασταθεί από το $(\Delta p - \gamma l \sin\theta)$ ή το $(\Delta p + \gamma l \sin\theta)$ εάν η βαρύτητα ενισχύει τη ροή.



Εάν γράψουμε ξανά τη σχέση (11) για την πτώση πίεσης: $\Delta p = \dfrac{32\mu\ell U_m}{D^2}$ και διαιρέσουμε και τα δύο μέλη με τη δυναμική πίεση **$(1/2)\rho U_m 2$**, ώστε να τα αδιαστατοποιήσουμε:

$$\frac{\Delta p}{(1/2)\rho U_m^2} = \frac{32\mu\ell U_m}{(1/2)\rho U_m^2 D^2} = 64\left(\frac{\mu}{\rho U_m D}\right)\left(\frac{\ell}{D}\right) = \frac{64}{Re}\left(\frac{\ell}{D}\right)$$

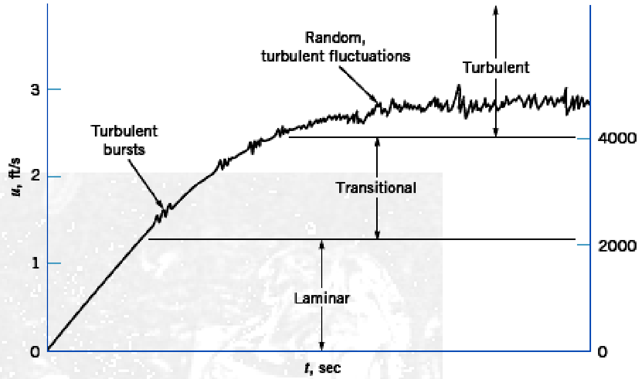
Η σχέση των απωλειών πίεσης λόγω τριβής στα τοιχώματα γράφεται συνήθως ως:

$$\Delta p = f\,\frac{\ell}{D}\,\frac{\rho U_m^2}{2} \qquad \textbf{(14)}$$

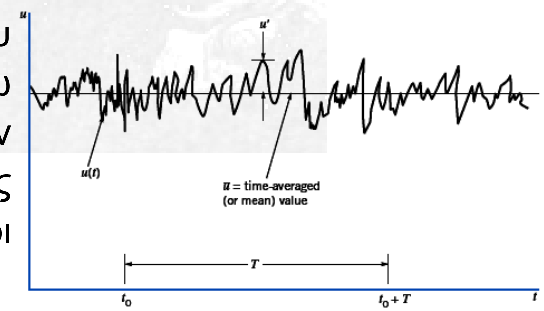
Όπου **$f = \Delta p(D/l)/(\rho U_m^2/2)$** είναι ο αδιάστατος συντ/στής τριβής, η **<u>συντ/στής τριβής του Darcy</u>**. Συνεπώς για τη ροή Hagen–Poiseuille είναι **$f=64/Re$** και εάν αντικαταστήσουμε την πτώση πίεσης με τη διατμητική τάση στο τοίχωμα από τη σχέση (5) έχουμε ότι **$f=(8\tau_w)/(\rho U_m^2)$**. Η σχέση (14) χρησιμοποιείται και για τυρβώδη ροή, ενώ η πτώση πίεσης Δp, συχνά αποκαλείται ως **<u>γραμμικές απώλειες</u>**.

Επίσης, η εξίσωση της ενέργειας για ασυμπίεστη, μόνιμη ροή σε αγωγό με σταθερή διατομή γράφεται ως: $\left(\dfrac{p_1}{\gamma} + z_1\right) - \left(\dfrac{p_2}{\gamma} + z_2\right) = h_L$ και εφόσον συνδυαστεί με τη σχέση (13) δίνει ότι $h_L = \dfrac{2\tau\ell}{\gamma r}$ ενώ στη συνέχεια η χρήση της (4) οδηγεί στη: $h_L = \dfrac{4\ell\tau_w}{\gamma D}$ η οποία εκφράζει την πτώση πίεσης σε μονάδες στήλης ύδατος ως συνάρτηση της διατμητικής τάσης του τοιχώματος.

6.3.1 Μεταβαση απο Στρωτη σε Τυρβωδη Ροη – (α)



Ας θεωρήσουμε την περίπτωση ροής σε κυκλικό αγωγό, όπου η παροχή αυξάνεται σταδιακά, έστω με το άνοιγμα μίας βάνας. Αυτό σημαίνει ότι αυξάνεται η μέση ταχύτητα, άρα και ο *Re*, όπως δείχνει το σχήμα. Αρχικά και για *Re*<2000 η μέτρηση της ταχύτητα σε κάποιο σημείο δείχνει σταθερότητα στην τιμή της, η οποία μεταβάλλεται μόνο με το περαιτέρω άνοιγμα της βάνας. Στο διάστημα 2000<*Re*<4000, η μέτρηση της ταχύτητας παρουσιάζει σποραδικές αλλαγές (απότομες αυξομειώσεις) στο μέτρο της, οι οπ οποίες όμως συμβαίνουν αραιά. Αυτό το εύρος ταχυτήτων (ισοδύναμα εύρος *Re*) αποτελεί τη μεταβατική κατάσταση προς την τυρβώδη ροή. Η τελευταία συμβαίνει σίγουρα όταν *Re*>4000 ή και σε μικρότερες τιμές (ανάλογα με το επίπεδο διαταραχής της ροής) και χαρακτηρίζεται από τη συνεχή και τυχαία μεταβολή της ταχύτητας, γύρω από μία μέση τιμή, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Ο χρόνος ολοκλήρωσης, *T*, για την εύρεση της μέσης τιμής είναι αρκετές τάξεις μεγέθους μεγαλύτερος από το χρόνο που χαρακτηρίζει τις μεταβολές του "σήματος" της ταχύτητας. Η μέση τιμή, $\overline{u}$, δίνεται από την οριζόντια συνεχή γραμμή, ενώ η απόκλιση της **στιγμιαίας τιμής**, $u(t)$, από αυτή ονομάζεται διακύμανση και συμβολίζεται με $u'(t)$. Άρα σε κάθε χρονική στιγμή ισχύει: $u(t)=\overline{u}+u'(t)$. Η σχέση αυτή ονομάζεται **ανάλυση κατά Reynolds** και είναι η βάση κάθε πρακτικής προσπάθειας μελέτης των τυρβωδών ροών.



Η τυρβώδης ροή χαρακτηρίζεται από έντονη στροβιλώδη κατάσταση, όπου δίνες ρευστού διαφόρων μεγεθών ανταλλάσσουν κινητική ενέργεια μέσω της δράσης του ιξώδους. Πιο συγκεκριμένα οι μεγάλες δίνες που περιέχουν την κινητική ενέργεια, "σπάνε" συνεχώς σε μικρότερες, στις οποίες μεταβιβάζουν κινητική ενέργεια. Η διαδικασία αυτή συνεχίζεται έως ότου οι δίνες υποβιβαστούν σε ένα μικρό μέγεθος (κοινό για όλες τις ροές), όπου η δράση του ιξώδους είναι πλέον καταλυτική και μετατρέπει την κινητική ενέργεια σε θερμότητα μέσω της τριβής. Επίσης, η τυρβώδης ροή προκαλεί πολλαπλάσια ανάμιξη (ορμής, μάζας & θερμότητας) απ' ότι η στρωτή ροή. Αυτό συμβαίνει διότι η μετάδοση δε γίνεται με μοριακό τρόπο, αλλά λόγω της έντονης διαταραχής υπάρχει ταχεία και έντονη μεταφορά σωματιδίων ρευστού (και όχι απλά μορίων) στο χώρο. Οι περισσότερες ροές στη φύση είναι τυρβώδεις.

6.3.2 Τυρβωδης Διατμητικη Ταση

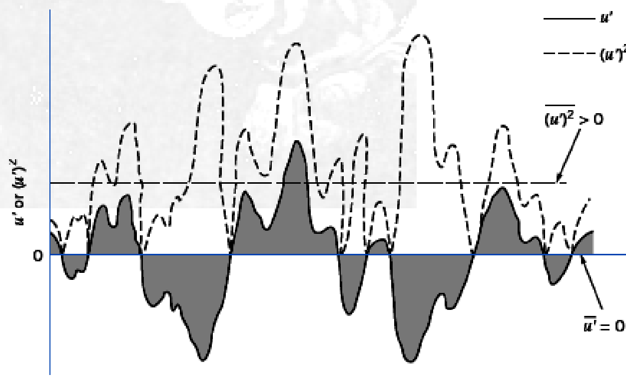
Σύμφωνα με την ανάλυση κατά Reynolds, η μέση τιμή ενός τυρβώδους μεγέθους (π.χ. της ταχύτητας) δίνεται από την ολοκλήρωση στο χρόνο της στιγμιαίας τιμής:

$$\bar{u} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} u(x, y, z, t)\, dt$$

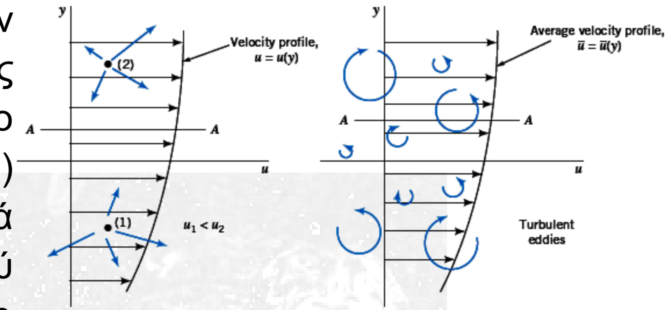
Από τον ορισμό της ανάλυσης του Reynolds, ισχύει ότι ***u΄*=*u*(*t*)–** $\bar{u}$, άρα:

$$\overline{u'} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} (u - \bar{u})\, dt = \frac{1}{T}\left(\int_{t_0}^{t_0+T} u\, dt - \bar{u}\int_{t_0}^{t_0+T} dt\right) = \frac{1}{T}(T\bar{u} - T\bar{u}) = 0$$

δηλαδή ότι η μέση χρονικά τιμή της διακύμανσης είναι (εξ' ορισμού) μηδενική. Αυτό το αποτέλεσμα ήταν αναμενόμενο, διότι η απόκλιση από τη μέση τιμή (διακυμάνσεις) είναι ισομερώς κατανεμημένη πάνω και κάτω από τη μέση τιμή. Όμως η χρονικά μέση τιμή των γινομένων των διακυμάνσεων δεν είναι μηδενικά, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα για τη διακύμανση **(*u΄*)²**, η οποία εξ' ορισμού είναι θετική. Η μέση τιμή του γινομένου αυτού, δηλαδή η $\overline{(u')^2}$ ονομάζεται ορθή τάση Reynolds, ενεργεί όπως η πίεση (κάθετα σε μία επιφάνεια ρευστού μέσα στη ροή) και σε τυρβώδη ροή έχει σημαντικό μέγεθος (ακόμη και πολλαπλάσιο της πίεσης). Αντίστοιχα, τα γινόμενα διακυμάνσεων διαφορετικών συνιστωσών της ταχύτητας, όπως η $\overline{u'v'}$ μπορεί να είναι θετικά ή αρνητικά, ονομάζονται διατμητικές τάσεις Reynolds ενεργούν ακριβώς όπως η μοριακή διατμητική τάση ***τ*=*μ*du/dy**. Οι τυρβώδεις διατμητικές είναι πολλαπλάσιες των μοριακών.



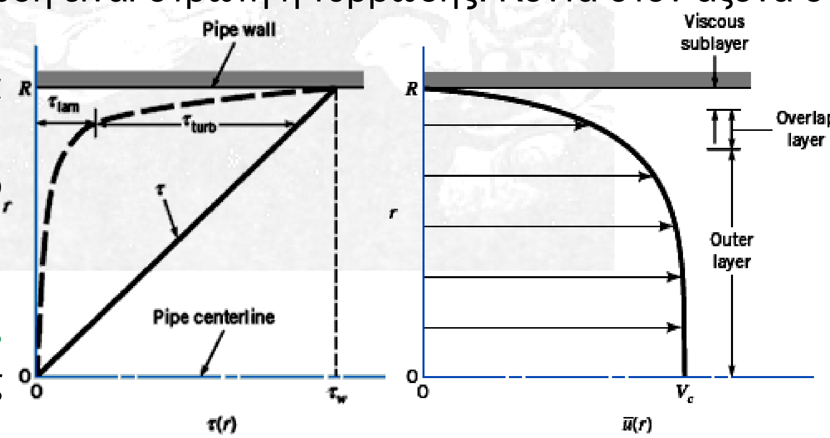
6.3.2 ΤΥΡΒΩΔΗΣ ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΗ ΤΑΣΗ – (α)



Στη στρωτή ροή η διατμητική τάση οφείλεται αποκλειστικά στην κλίση της ταχύτητας (αριστερό σχήμα), δηλαδή στη μετάδοση της κινητικής ενέργειας με την κίνηση των μορίων από το "γρήγορο" στο "αργό" τμήμα της ροής. Στην τυρβώδη ροή (δεξιό σχήμα) εξακολουθεί η δράση των μορίων (μοριακό ιξώδες) αλλά ταυτόχρονα λόγω των δινών ολόκληρα τμήματα ρευστού μεταφέρονται κάθετα στην κύρια ταχύτητα, ενισχύοντας τη μετάδοση ορμής στη δ/νση αυτή. Αυτό επιτυγχάνεται μέσω της δράσης των διακυμάνσεων και στις δύο δ/νσεις, δηλαδή της διατμητικής τάσης Reynolds, $\overline{uv}$ και μπορούμε να γράψουμε τη συνολική διατμητική τάση ως:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} - \rho\overline{uv} = \tau_{\sigma\tau\rho\omega\tau\acute{\eta}} + \tau_{\tau\upsilon\rho\beta\acute{\omega}\delta\eta\varsigma} \qquad (15)$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι για στρωτή ροή ισχύει $u'=v'=0$, άρα και $\tau_{\tau\upsilon\rho\beta\acute{\omega}\delta\eta\varsigma}=0$ και παίρνουμε τη γνωστή σχέση για τη μοριακή διατμητική τάση. Το παρακάτω σχήμα δείχνει την κατανομή της συνολικής, τ, όσο και των δύο επιμέρους (στρωτή και τυρβώδης) διατμητικών τάσεων στην ακτινική δ/νση του αγωγού. Υπενθυμίζεται ότι η κατανομή της τ είναι γραμμική (§6.8) ανεξάρτητα εάν η ροή είναι στρωτή ή τυρβώδης. Κοντά στον άξονα συμμετρίας και έως ότου πλησιάσουμε το τοίχωμα, η στρωτή τάση είναι μικρότερη της τυρβώδους. Το τμήμα αυτό ονομάζεται **εξωτερικό στρώμα** (outer layer). Η τυρβώδης τάση παίρνει τη μέγιστη τιμή της λίγο πριν το τοίχωμα, μέσα στο **ενδιάμεσο στρώμα** (overlap layer), όπου είναι πλέον συγκρίσιμη με τη στρωτή τάση. Τέλος, κοντά στο τοίχωμα, στο **οριακό υπόστρωμα** (viscous sublayer) η στρωτή τάση κυριαρχεί και η τυρβώδης μηδενίζεται, λόγω της συνθήκης μη–ολίσθησης.



Στο ίδιο σχήμα δίνεται η αντίστοιχη κατανομή της ταχύτητας, η οποία είναι πολύ πιο "γεμάτη" από την παραβολική κατανομή για στρωτή ροή. Κατ' αντιστοιχία της στρωτής διατμητικής τάσης μπορούμε να εκφράσουμε την τυρβώδη τάση ως: $\tau_{\tau\upsilon\rho\beta\omega\delta\eta\varsigma} = \eta(d\bar{u}/dy)$ όπου **η=τυρβώδες ιξώδες**, το οποίο δεν αποτελεί ιδιότητα του ρευστού όπως το *μ*, αλλά χαρακτηριστικό της ροής. Την παραδοχή αυτή έκανε ο Boussinesq και το *η* είναι πολύ μεγαλύτερο του *μ* στο εξωτερικό στρώμα (μία τυπική τιμή είναι μεταξύ 1000 και 10000).

6.3.3 ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ ΣΕ ΤΥΡΒΩΔΗ ΡΟΗ

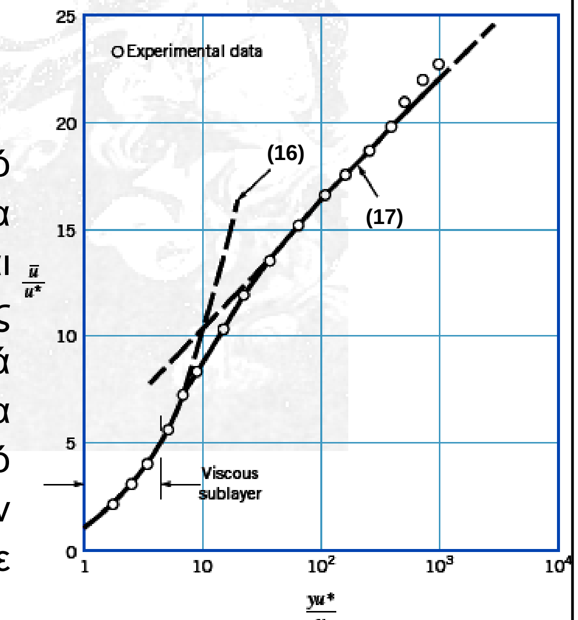
Η κατανομή της ταχύτητας σε τυρβώδη ροή έχει μία "παγκόσμια" συμπεριφορά, εφόσον γραφεί σε αδιάστατη μορφή $u^+=\bar{u}/u^*$ και παρασταθεί με την αδιάστατη απόσταση από το τοίχωμα $y=R-r$, $y^+=yu^*/\nu$, όπου ν=κινηματικό ιξώδες=μ/ρ και u^* είναι η ταχύτητα τριβής, η οποία ισούται με $(\tau_w/\rho)^{1/2}$.

Στο σχήμα δίπλα παριστάνεται η κατανομή της ταχύτητας ως (u^+ vs y^+). Η μετρημένη κατανομή μπορεί να περιγραφεί με δύο σχέσεις:

$$u^+ = y^+ \quad \text{για } y^+ < 5 \qquad (16)$$

$$u^+ = \frac{1}{\kappa}\ln y^+ + C \quad \text{για } y^+ > 30 \qquad (17)$$

Η πρώτη ισχύει στο οριακό υπόστρωμα, ενώ η δεύτερη στο εξωτερικό στρώμα. Στο ενδιάμεσο στρώμα (**5<*y*+<30**) η ταχύτητα ακολουθεί μία κατανομή που δεν προσεγγίζεται ικανοποιητικά από καμία από τις (16) και (17). Ο νόμος του εξωτερικού στρώματος ονομάζεται και λογαριθμικός νόμος του τοιχώματος, γι' αυτό και το στρώμα αυτό ονομάζεται συχνά **στρώμα λογαριθμικού νόμου**. Στη σχέση (17) **κ≈0.4** είναι η παγκόσμια σταθερά του von Karman ενώ C είναι μία σταθερά η οποία εξαρτάται από παράγοντες όπως εάν η ροή είναι κλειστή ή ανοικτή, την τραχύτητα, την ύπαρξη έγχυσης ή αναρρόφησης ρευστού στον τοίχο. Για κλειστή ροή σε σωλήνα είναι περίπου 5.5.



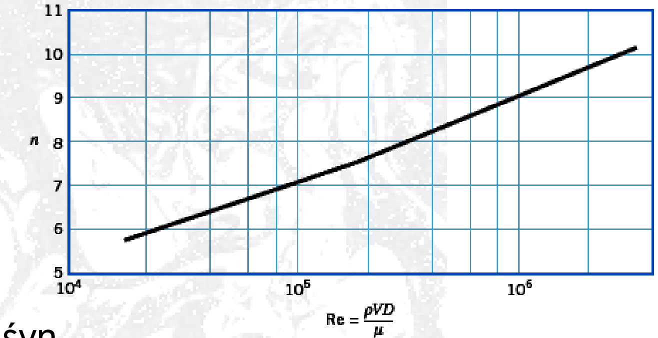
6.3.3 ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ ΣΕ ΤΥΡΒΩΔΗ ΡΟΗ – (α)

Από τα παραπάνω φαίνεται ότι δεν μπορεί να υπάρξει αναλυτική λύση για την εύρεση της κατανομής της ταχύτητας σε τυρβώδη ροή και πρέπει να χρησιμοποιηθούν εμπειρικές σχέσεις που εξάχθηκαν μέσω πειραμάτων. Από το λογαριθμικό νόμο μπορούμε να εξάγουμε την εξής σχέση:

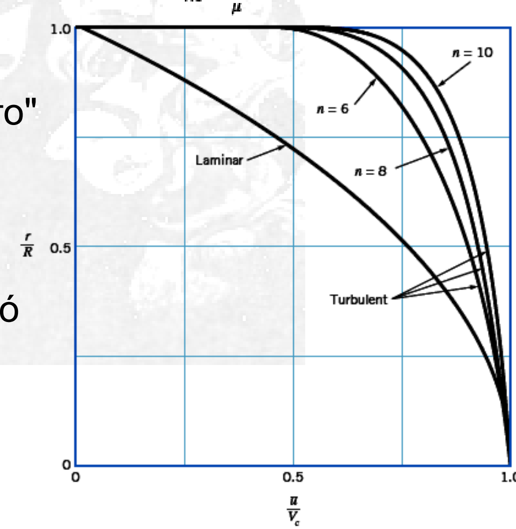
$$\frac{(U_c - \bar{u})}{u^*} = \frac{1}{\kappa} ln\left(\frac{R}{y}\right) \qquad (18)$$

Μία άλλη πολύ διαδεδομένη εμπειρική σχέση για την κατανομή της τυρβώδους ταχύτητας είναι η εκθετική:

$$\frac{\bar{u}}{U_c} = \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/n} \qquad (19)$$



Ο εκθέτης (1/*n*) για τις περισσότερες εφαρμογές παίρνεται με *n*=7. Ο συντελεστής n είναι συνάρτηση του αριθμού Re, όπως δείχνει το διπλανό σχήμα. Επίσης για μερικές τιμές του n στο κάτω σχήμα δίνονται οι αντίστοιχες κατανομές της ταχύτητας, μαζί με το προφίλ για στρωτή ροή. Το σχήμα παριστάνει την ταχύτητα αδιαστατοποιημένη με τη μέγιστη τιμή (στον άξονα συμμετρίας του αγωγού) και την απόσταση από τον τοίχο με την ακτίνα του αγωγού. Εδώ φαίνεται καθαρά το πιο "γεμάτο" προφίλ της τυρβώδους ροής, το οποίο μάλιστα "γεμίζει" όσο αυξάνει ο Re.



Ο εκθετικός νόμος έχει δύο μειονεκτήματα: (α) δεν ισχύει για την περιοχή κοντά στον τοίχο, όπου δίνει άπειρη κλίση ταχύτητας και (β) δε δίνει το σωστό αποτέλεσμα στον άξονα συμμετρίας όπου πρέπει $d\bar{u}/dr = 0$. Παρόλα αυτά προσφέρει μία πολύ χρήσιμη εκτίμηση του τυρβώδους πεδίου ταχύτητας και χρησιμοποιείται πολύ συχνά για πρακτικούς υπολογισμούς.

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΑΠΩΛΕΙΕΣ – ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ MOODY/ΣΧΕΣΗ COLEBROOK

Από τη διαστατική ανάλυση (διάλεξη 6η) προκύπτει ότι η πτώση πίεσης σε σωλήνα με τυρβώδη ροή, με τη μορφή αδιάστατου αριθμού, είναι μία συνάρτηση της μορφής:

$$\frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho V^2} = \tilde{\phi}\left(\frac{\rho V D}{\mu}, \frac{\ell}{D}, \frac{\varepsilon}{D}\right)$$

δηλαδή σε αντίθεση με τη στρωτή ροή, η πτώση πίεσης εξαρτάται εκτός από τον αριθμό Re και από τη *σχετική τραχύτητα*, *ε*/*D*, του αγωγού. Επίσης, μπορούμε πάλι να απλοποιήσουμε την παραπάνω σχέση εάν υποθέσουμε ότι η πτώση πίεσης είναι ανάλογη του μήκους του αγωγού, δηλαδή ότι:

$$\frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho V^2} = \frac{\ell}{D}\phi\left(\text{Re}, \frac{\varepsilon}{D}\right)$$

Όπως αναφέρθηκε στην §6.11 ο όρος $\boldsymbol{\Delta p(D/l)/(\rho U^2/2)}$ είναι ο **συντελεστής τριβής**, ***f***, άρα η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$\Delta p = f\frac{\ell}{D}\frac{\rho V^2}{2} \qquad \text{όπου} \qquad f = \phi\left(\text{Re}, \frac{\varepsilon}{D}\right)$$

Για στρωτή ροή, όπως είδαμε, είναι ***f*=*φ*(*Re*)=64/*Re***, δηλαδή ανεξάρτητος του *ε*/*D*. Στην περίπτωση της τυρβώδους ροής, δεν μπορεί να εξαχθεί αναλυτική σχέση όπως η παραπάνω για στρωτή ροή, παρά μόνο εμπειρικές σχέσεις που έχουν εξαχθεί μετά από πάρα πολλές πειραματικές παρατηρήσεις.

Για μόνιμη, ασυμπίεστη, πλήρως ανεπτυγμένη ροή σε οριζόντιο σωλήνα σταθερής διατομής, η εξίσωση της ενέργειας δίνει (εξίσωση **Darcy–Weisbach**):

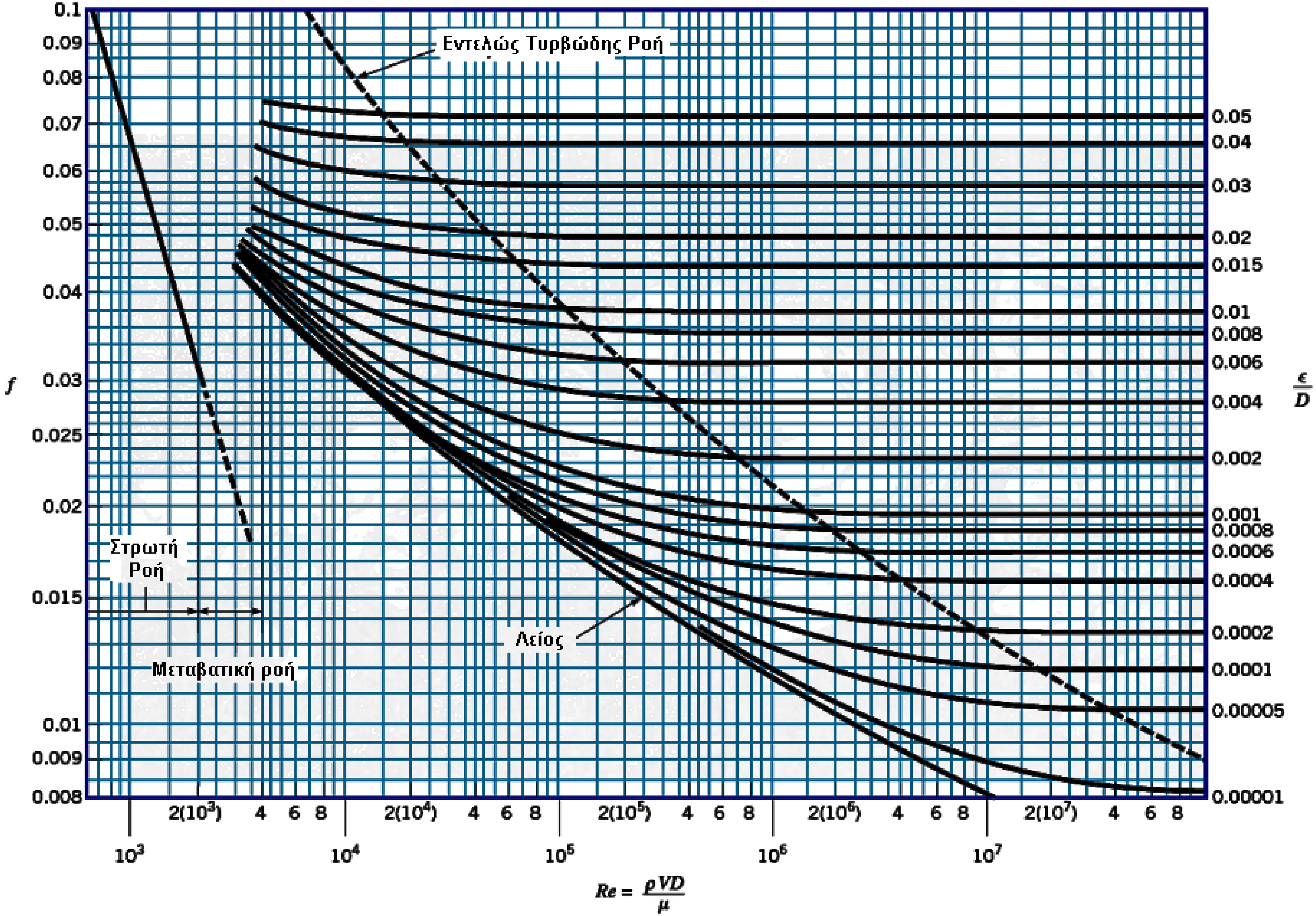
$$\boxed{h_L = f\frac{\ell}{D}\frac{V^2}{2g}}$$

Για μόνιμη, ασυμπίεστη ροή σε αγωγό σταθερής διατομής, η εξίσωση της ενέργειας δίνει ότι:

$$p_1 - p_2 = \gamma(z_2 - z_1) + \gamma h_L = \gamma(z_2 - z_1) + f\frac{\ell}{D}\frac{\rho V^2}{2}$$

δηλαδή ότι η πτώση της πίεσης είναι συνδυασμός της αλλαγής υψομέτρου και των απωλειών τριβής.
Στην επόμενη διαφάνεια παριστάνεται το διάγραμμα Moody, που δίνει γραφικά τη σχέση *f*=*φ*(Re,*ε*/*D*).

6.4 Διαστατική Ανάλυση σε Ροή σε Κλειστούς Αγωγούς – (β)



Στο διάγραμμα Moody παρατηρούμε ότι:

- Για στρωτή ροή ο συντ/στής *f* είναι ανεξάρτητος της τραχύτητας και ίσος με 64/Re.
- Για μεγάλους Re ο συντ/στής *f* είναι ανεξάρτητος του Re (οριζόντιες καμπύλες). Η ροή ονομάζεται πλήρως τυρβώδης ροή.
- Για την περιοχή μεταξύ 2000<Re<4000 η ροή είναι μεταβατική και δεν μπορούμε να υπολογίσουμε με ασφάλεια το συντ/στή τριβής *f*.
- Για λείους σωλήνες ο συντ/στής τριβής δεν είναι μηδενικός, δηλαδή όσο λείος και εάν είναι ένας σωλήνας, πάντα υπάρχουν απώλειες πίεσης (λόγω της συνθήκης μη–ολίσθησης).

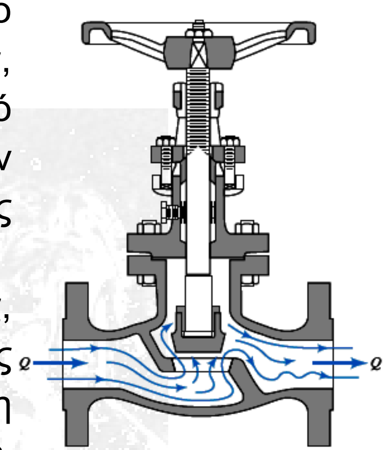
Η παρακάτω σχέση, η γνωστή ως **σχέση του Colebrook**, αναπαράγει με ακρίβεια (της τάξης του 10%) το διάγραμμα Moody στο τυρβώδες κομμάτι του:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0 \log\left(\frac{\varepsilon/D}{3.7} + \frac{2.51}{\mathrm{Re}\sqrt{f}}\right)$$

Η σχέση αυτή δεν επιδέχεται άμεση επίλυση ως προς το *f*, διότι δεν είναι αλγεβρική. Η λύση βρίσκεται με επαναληπτική διαδικασία, δηλαδή:

- υπόθεση μίας τιμής για το *f*,
- αντικατάστασή της στο $1^{ο}$ και $2^{ο}$ μέλος και σύγκριση τους.
- Σε περίπτωση ασυμφωνίας, υιοθέτηση νέας τιμής του *f* που μας δίνει η επίλυση του $1^{ου}$ μέλος εάν εξισωθεί με την τιμή που έδωσε για το $2^{ο}$ μέλος η προηγούμενη υπόθεση για το *f*.

ΤΟΠΙΚΕΣ (ΔΕΥΤΕΡΕΥΟΥΣΕΣ) ΑΠΩΛΕΙΕΣ



Επιπρόσθετα των γραμμικών απωλειών, μία σωληνογραμμή δεν αποτελείται μόνο από ευθύγραμμα τμήματα σωλήνα, αλλά και από εξαρτήματα, όπως γωνίες, διακλαδώσεις, βάνες, κ.λπ. Επειδή τα εξαρτήματα συνήθως αποτελούν μικρό ποσοστό του μήκους της σωληνογραμμής, οι απώλειες πίεσης που προκαλούν ονομάζονται δευτερεύουσες, αν και πολλές φορές υπερβαίνουν τις γραμμικές (πρωτεύουσες).

Παράδειγμα τοπικών απωλειών αποτελεί η ροή μέσα από τη βάνα του σχήματος, όπου με την αλλαγή της γεωμετρίας της διατομής προκαλείται η ρύθμιση της παροχής, μέσω της δημιουργίας απωλειών λόγω τριβής. Σε τέτοιες περιπτώσεις η λεπτομερής ανάλυση της ροής είναι αδύνατη και βασίζεται πλήρως στην πειραματική παρατήρηση. Η πιο γνωστή μέθοδος είναι η έκφραση των απωλειών πίεσης μέσω του συντελεστή K_L όπου:

$$K_L = \frac{h_L}{(V^2/2g)} = \frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho V^2} \quad \text{δηλαδή} \quad \Delta p = K_L \tfrac{1}{2}\rho V^2 \quad \text{ή} \quad \boxed{h_L = K_L \frac{V^2}{2g}}$$

Άρα όταν ο συντ/στής K_L είναι μονάδα σημαίνει ότι η πτώση πίεσης μέσα από ένα εξάρτημα ισούται με τη δυναμική πίεση, $\rho U^2/2$. Ο K_L είναι συνάρτηση τόσο της γεωμετρίας, όσο και του αριθμού *Re* του σωλήνα. Όπως, όπως συμβαίνει και στις γραμμικές απώλειες, η επίδραση του *Re* εκμηδενίζεται σε μεγάλες ταχύτητες επειδή οι δυνάμεις αδράνειας είναι πολλαπλάσιες των δυνάμεων του ιξώδους. Άρα στις περισσότερες περιπτώσεις με πρακτική εφαρμογή, ο συντ/στής K_L είναι συνάρτηση μόνο της γεωμετρίας του εξαρτήματος.

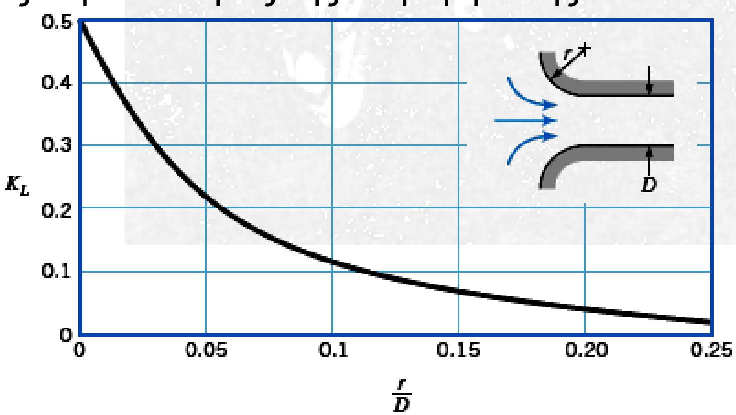
Πολλές φορές οι τοπικές απώλειες δίνονται ως ισοδύναμο μήκος αγωγού, $l_{ισοδ}$, δηλαδή με το μήκος αγωγού ίδιας διαμέτρου που προκαλεί την ίδια πτώση πίεσης με το εξάρτημα:

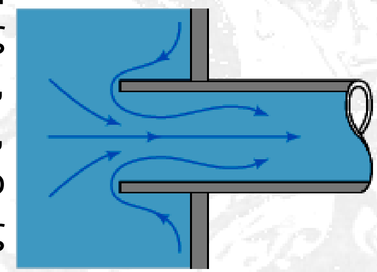
$$h_L = K_L \frac{V^2}{2g} = f \frac{\ell_{eq}}{D}\frac{V^2}{2g} \quad \text{ή} \quad \ell_{eq} = \frac{K_L D}{f}$$

6.4 ΔΙΑΣΤΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΕ ΡΟΗ ΣΕ ΚΛΕΙΣΤΟΥΣ ΑΓΩΓΟΥΣ – (ε)

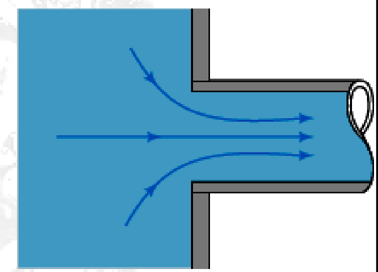
Πολλές φορές οι τοπικές απώλειες προκαλούνται από την αλλαγή της διατομής του σωλήνα, όπως για παράδειγμα η **είσοδος του ρευστού από μία δεξαμενή σε έναν αγωγό**. Το σχήμα δίνει το συντ/στή K_L, συναρτήσει της γεωμετρίας της διαμόρφωσης της ένωσης του σωλήνα με τη δεξαμενή. Όπως αναφέρθηκε στην §4.9, όταν η διαμόρφωση είναι οξεία το ρευστό δεν μπορεί να "στρίψει" και δημιουργείται vena contracta, προκαλώντας αδυναμία ολικής ανάκτησης της πίεσης μετά τη διαμόρφωση. Η διαφορά της θεωρητικής ανάκτησης της πίεσης, που δίνεται από την εξίσωση Bernoulli λόγω της τοπικής επιβράδυνσης της ροής και της πραγματικής ανάκτησης, είναι η (τοπική) απώλεια πίεσης. <u>Γενικά, η ροή μπορεί να επιταχυνθεί πλήρως αποδοτικά, αλλά όχι να επιβραδυνθεί, όπου πάντοτε έχουμε απώλειες πίεσης</u>.

Στην περίπτωση οξείας γωνίας, η ροή "αποκολλάται" στη γωνία και οι τριβές που εμφανίζονται μεταφράζονται ως πτώση πίεσης. Με τη καμπύλη διαμόρφωση της ακμής, επιτυγχάνεται συντριπτική μείωση των απωλειών, ακριβώς επειδή το ρευστό μπορεί εύκολα να "στρίψει«. Το παρακάτω σχήμα δίνει το συντ/στή K_L συναρτήσει της ακτίνας καμπυλότητας της διαμόρφωσης.

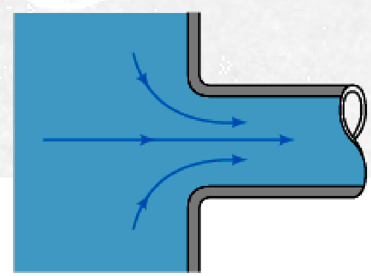




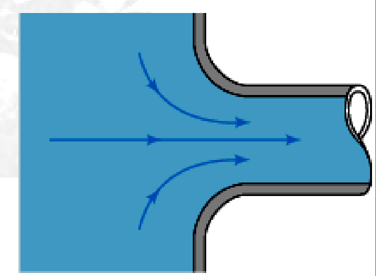
K_L= 0.80



K_L= 0.50

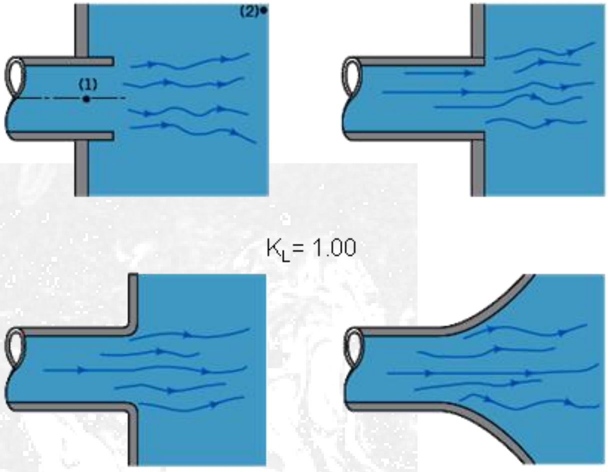


K_L= 0.20

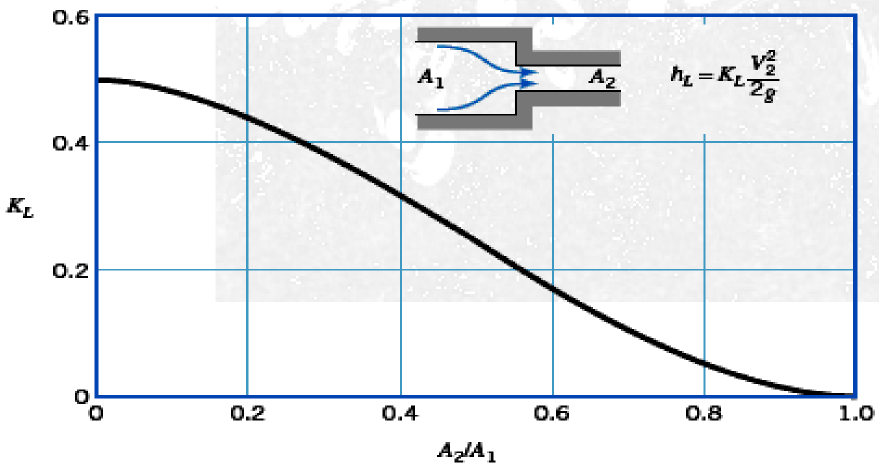


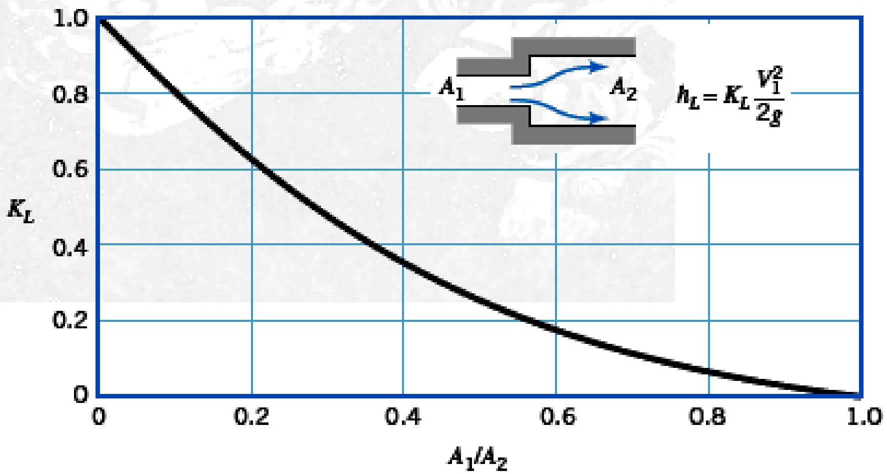
K_L= 0.04

Στην **έξοδο της ροής από έναν αγωγό μέσα σε μία δεξαμενή**, υπάρχουν πάλι απώλειες πίεσης αλλά αφενός είναι ανεξάρτητες της διαμόρφωσης εξόδου, αφετέρου είναι πάντοτε ίσες με τη δυναμική πίεση, αφού το ρευστό επιβραδύνεται πλήρως, δηλαδή $\boldsymbol{K_L}$**=1.0**.



Απώλειες συμβαίνουν επίσης όταν υπάρχει **αλλαγή στη διατομή ενός αγωγού**, δηλαδή στένωση ή διεύρυνση, όπως φαίνεται στα σχήματα παρακάτω, συναρτήσει του λόγου των διαμέτρων. Ο συντ/στής K_L κυμαίνεται μεταξύ του μηδενός όταν $A_2/A_1=1$, δηλαδή όταν δεν υπάρχει αλλαγή στη διάμετρο του αγωγού, έως την τιμή 0.5 για στένωση και 1.0 για διεύρυνση, όταν $A_2/A_1=0$, που αντιστοιχεί σε είσοδο ροής από δεξαμενή σε σωλήνα και έξοδο από σωλήνα σε δεξαμενή αντίστοιχα.



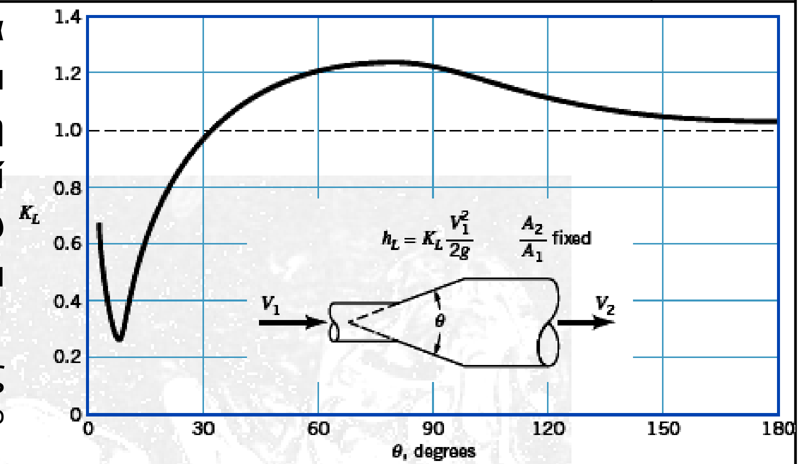


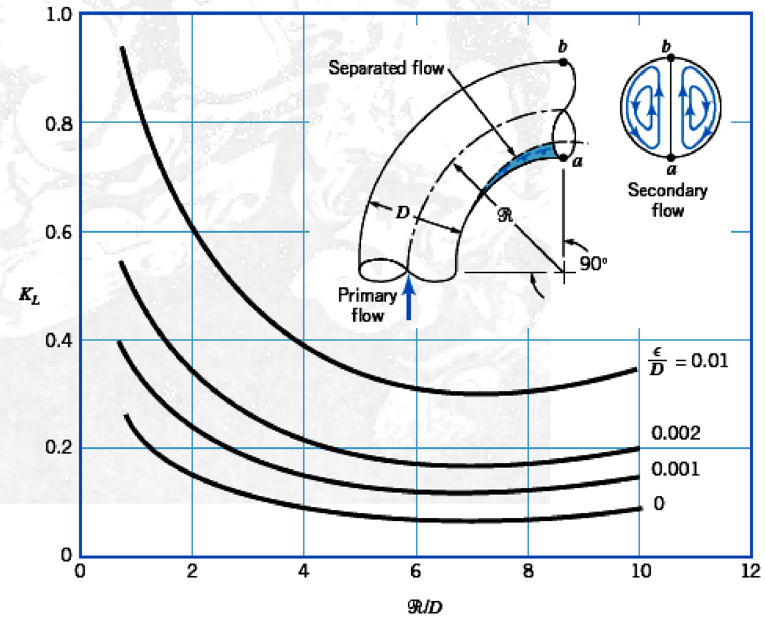
Στην περίπτωση ενός **διαχύτη (diffuser)**, που ουσιαστικά αντιστοιχεί σε μία *σταδιακή διεύρυνση* του αγωγού, οι απώλειες πίεσης παρουσιάζουν ένα ελάχιστο για μία μικρή γωνία. Περαιτέρω μείωση της γωνίας, αν και προκαλεί πληρέστερη ανάκτηση πίεσης, αυξάνει τις απώλειες λόγω τριβής στα τοιχώματα του διαχύτη, οπότε συνολικά οι απώλειες αυξάνονται.

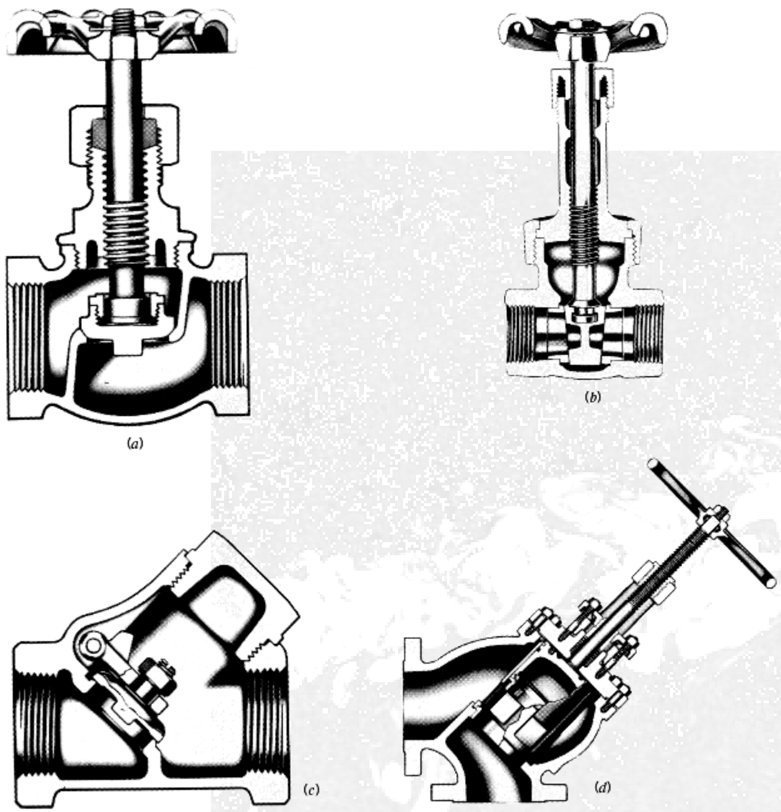
Σε περίπτωση **ακροφυσίου (nozzle)**, ο συντ/στής απωλειών είναι μικρός και κυμαίνεται από 0.02 για θ=30° έως 0.07 για θ=60°.

Οι **καμπύλες** επίσης προκαλούν απώλειες πίεσης και οφείλονται στην αποκόλληση της ροής στο εσωτερικό τμήμα και στη δευτερεύουσα συστροφική ροή που δημιουργείται εξαιτίας της ανισορροπίας των φυγοκεντρικών δυνάμεων που αναπτύσσονται στην καμπύλη. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ο συντ/στής K_L συναρτήσει της τραχύτητας και της ακτίνας καμπυλότητας.

Στις δύο επόμενες διαφάνειες δίνεται ο συντ/στής τοπικών απωλειών K_L για διάφορες κατηγορίες βανών σε διάφορες θέσεις "κλεισίματος", καθώς και για διάφορα εξαρτήματα που συνδέονται με φλάντζα ή σπείρωμα.

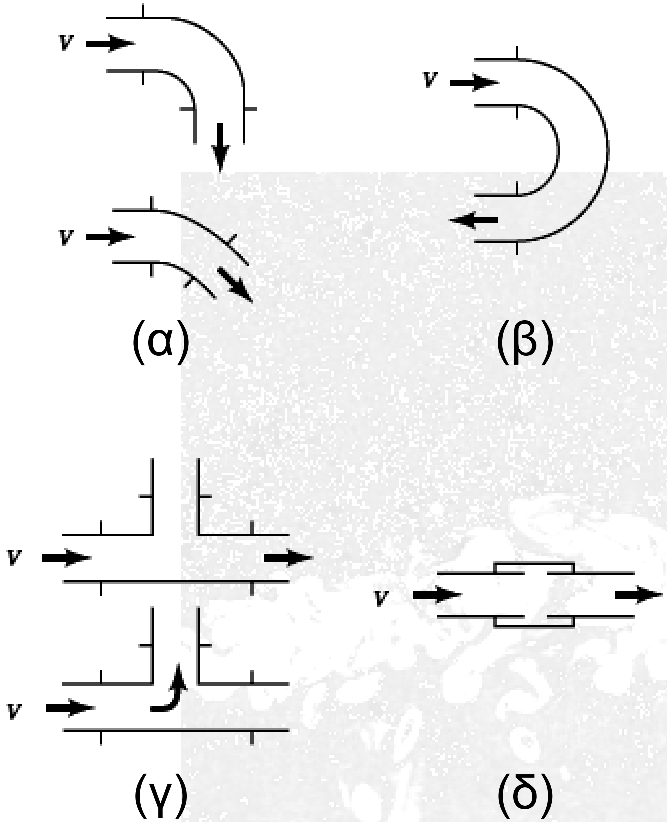






(α) Τύπου Σφαίρας
(b) Τύπου Θυρίδας
(c) Αντεπιστροφής Περιστροφικού τύπου
(d) Αντεπιστροφής Ερμητικού τύπου

Είδος		**K_L**
Τύπου Σφαίρας		
	τελείως ανοικτή	10.00
Τύπου Γωνίας		
	τελείως ανοικτή	2.00
Τύπου Θυρίδας		
	τελείως ανοικτή	0.15
	1/4 κλειστή	0.26
	2/4 κλειστή	2.10
	3/4 κλειστή	17.00
Αντεπιστροφής Περιστροφικού τύπου		
	ορθή ροή	2.00
	αντίθετη ροή	∞
Τύπου Μπάλας		
	τελείως ανοικτή	0.05
	1/3 κλειστή	5.50
	2/3 κλειστή	210.00



(α) Γόνατα
(b) Γωνίες 180°
(c) Διακλαδώσεις 180°
(d) Ενώσεις (ρακόρ)

Είδος	**K_L**
Γόνατα	
90° με φλάντζα	0.3
90° με σπείρωμα	1.5
45° με φλάντζα	0.2
45° με σπείρωμα	0.4
Γωνίες 180°	
με φλάντζα	0.2
με σπείρωμα	1.5
Διακλαδώσεις 180°	
κύρια γραμμή με φλάντζα	0.2
κύρια γραμμή με σπείρωμα	0.9
διακλάδωση με φλάντζα	1.0
διακλάδωση με σπείρωμα	2.0
Ενώσεις (ρακόρ)	
με σπείρωμα	0.08

6.5 Ασκησεις – (α)

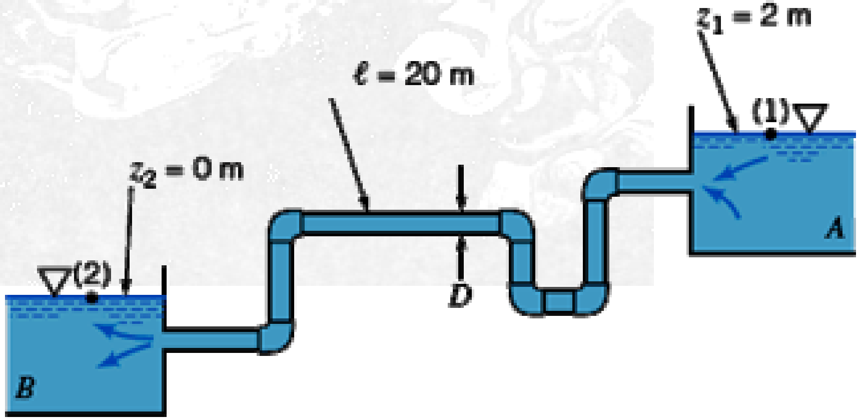
1. *Ποιος είναι ο ελάχιστος χρόνος πλήρωσης με νερό στους 70 [oC] με στρωτή ροή μίας δεξαμενής 2 [m³] μέσω αγωγού διαμέτρου 20 [cm]*. Η παροχή του αγωγού μπορεί να ρυθμιστεί κατά βούληση. **3h 47' 45.6"**

2. Πετρέλαιο με πυκνότητα 900 [kg/m³] και ιξώδες μ=0.4 [N s/m²] ρέει μέσα σε αγωγό διαμέτρου 2 [cm]. (α) *Ποια είναι η απαιτούμενη διαφορά πίεσης για να ρέει το πετρέλαιο με παροχή 0.02 [lt/s] σε οριζόντιο αγωγό μήκους 10 [m]? (β) Ποια η κλίση του λόφου εάν το πετρέλαιο ρέει με την προηγούμενη παροχή στο ίδιο μήκος σωλήνα αλλά με μηδενική διαφορά πίεσης?* **20371.8 [Pa], 13.34^{o}**

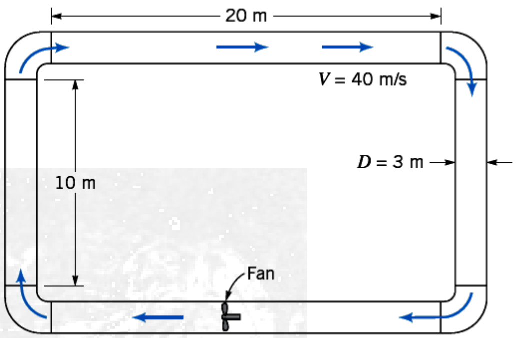
3. Νερό πυκνότητας *ρ*=998 [kg/m³] και ιξώδους *ν*=1.004×10^{-6} [m²/s] ρέει σε οριζόντιο σωλήνα διαμέτρου 0.1 [m] με κλίση πίεσης d*P*/d*x*=2.59 [kPa/m]. *Υπολογίστε το πάχος του στρωτού υποστρώματος.* **1.97×10–5 [m]**

4. Αέρας σε κανονικές συνθήκες (*ρ*=1.23 [kg/m³] και *μ*=1.79×10^{-5} [kg/m/s] ρέει σε σωλήνα διαμέτρου 4 [mm] και τραχύτητας 0.0015 [mm] με μέση ταχύτητα 50 [m/s]. Σε τέτοιες συνθήκες η ροή είναι τυρβώδης, εκτός εάν ληφθεί μέριμνα για τις συνθήκες εισόδου, την απουσία σκόνης, την έλλειψη ταλαντώσεων, κ.λπ. Έστω λοιπόν ότι η ροή μπορεί να γίνει και στρωτή. *Υπολογίστε την πτώση πίεσης σε ένα τμήμα 0.1 [m] για την περίπτωση στρωτής και τυρβώδους ροής (από το διάγραμμα Moody και από τη σχέση Colebrook).* **179 [Pa], 903 [Pa]**

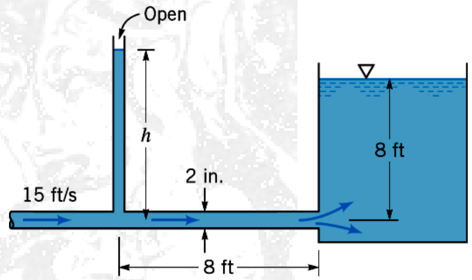
5. Νερό σε 10 [^{o}C] ρέει από τη δεξαμενή Α στη δεξαμενή Β μέσω αγωγού από χυτοσίδηρο (με τραχύτητα ε=0.26 [mm]) συνολικού μήκους 20 [m] με παροχή 0.0020 [m³/s]. Το σύστημα περιλαμβάνει είσοδο στη δεξαμενή Α με οξείες ακμές και έξι γόνατα 90^{o} με σπείρωμα. *Υπολογίστε την απαιτούμενη διάμετρο σωλήνα, ώστε όντως να επιτυγχάνεται η προαναφερθείσα παροχή*. **0.045 [m]**



6. Ο ανεμιστήρας του σχήματος προκαλεί ροή ταχύτητας 40 [m/s] στην κλειστή αεροσήραγγα, η οποία έχει διάμετρο 3 [m] και περιλαμβάνει 4 γόνατα 90ο με συντ/στή απωλειών K_L=0.30. *Υπολογίστε την ισχύ που προσδίδει ο ανεμιστήρας στον αέρα*. **372 [kW]**



7. Νερό ρέει με ταχύτητα 15 [ft/s] στον οριζόντιο αγωγό του σχήματος διαμέτρου 2[in] και καταλήγει μέσα στη δεξαμενή δεξιά. Ο αγωγός έχει σχετική τραχύτητα 0.004. *Υπολογίστε το ύψος της στάθμης του νερού h, καθώς και την πίεση στο σημείο εισόδου του αγωγού στη δεξαμενή*. **3.92 [m] 2.44 [m]**



8. Στο δίκτυο του σχήματος νερό ρέει με φυσικό τρόπο από τη δεξαμενή μέσω αγωγού μήκους 8.6 [m] και διαμέτρου D=0.05 [m]. Μετά το μήκος αυτό ο αγωγός διευρύνεται σε διάμετρο 0.10 [m] και τελικά το νερό εκρέει στην ατμόσφαιρα. Εάν το μήκος του αγωγού με τη μεγάλη διάμετρο είναι αμελητέο (όσον αφορά τις απώλειες πίεσης), *υπολογίστε την ταχύτητα εξόδου του νερού*, εάν όλες οι ενώσεις των εξαρτημάτων είναι με σπείρωμα και η τραχύτητα των σωλήνων είναι 0.3 [mm].
1.068 [m/s]