ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ
ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ

Μαθηματικά 1

Σταύρος Παπαϊωάννου

Ιούνιος 2015

Περιεχόμενα

1.3 Γραμμικά συστήματα

Το επόμενο σύστημα εξισώσεων λέγεται γραμμικό σύστημα ν εξισώσεων με ν αγνώστους:

$$\begin{array}{l} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + ... + \alpha_{1\nu}x_\nu = \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 + ... + \alpha_{2\nu}x_\nu = \beta_2 \qquad (1) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{\nu1}x_1 + \alpha_{\nu2}x_2 + \alpha_{\nu3}x_3 + ... + \alpha_{\nu\nu}x_\nu = \beta_\nu \end{array}$$

Ονομάζεται γραμμικό διότι όλοι του οι όροι είναι πρωτοβάθμιοι ως προς τις μεταβλητές x_i.[1] Το σύστημα (1) έχει πάντα μοναδική λύση, την $(x_1, x_2, ..., x_\nu)$, όταν τα αριστερά μέλη των εξισώσεών του είναι γραμμικά ανεξάρτητα[2], άρα εφ' όσον η ορίζουσα του πίνακα Α των συντελεστών των αγνώστων είναι διάφορη του μηδενός.

Για παράδειγμα στο επόμενο σύστημα 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους:

$$\begin{array}{l} x - y = -1 \\ x + y = 5 \end{array}$$

ουσιαστικά, έχουμε τις εξισώσεις 2 ευθειών (την $y=x+1$ και την $y=-x+5$). Άρα, η λύση του συστήματος είναι ο υπολογισμός των συντεταγμένων του σημείου τομής των 2 ευθειών, όπου συναληθεύουν οι δύο εξισώσεις.

---

[1] *Οι όροι x_1^2, x_2x_3 κ.λ.π. είναι δευτεροβάθμιοι, ενώ οι όροι: x_1^3, $x_1x_2x_3$, $x_1x_2^2$ κ.λ.π. είναι τριτοβάθμιοι, κ.ο.κ..*

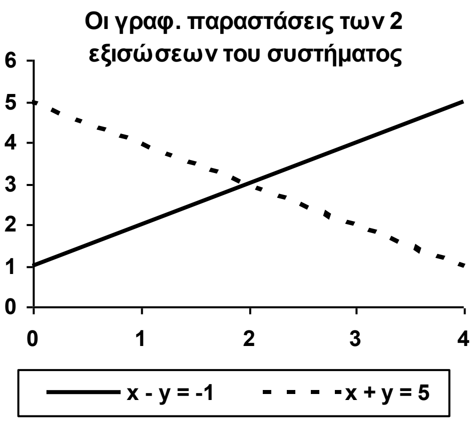
[2] *Για παράδειγμα στο σύστημα:*

$$\begin{array}{l} x + 2y + 3z = 5 \\ -x + 4y + 2z = 4 \\ x + 8y + 8z = 14 \end{array}$$

οι εξισώσεις είναι γραμμικά εξαρτημένες, μια και η τρίτη εξίσωση προκύπτει από τις άλλες δύο (διπλασιάζοντας την πρώτη και αθροίζοντάς την στη δεύτερη). Επομένως η τρίτη εξίσωση είναι μια ψευτοεξίσωση που δεν αντιστοιχεί σε φυσικές ανάγκες.

Ξεχωρίζουν 3 περιπτώσεις:

- Οι ευθείες τέμνονται σε ένα σημείο, άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση.
- Οι ευθείες είναι παράλληλες, άρα το σύστημα δεν έχει καμιά λύση (**αδύνατο**).
- Τέλος, εάν οι δύο ευθείες του συστήματος ταυτίζονται, τότε το σύστημα λέγεται **αόριστο**, και έχει άπειρες λύσεις διότι, ουσιαστικά, δεν περιέχει 2 εξισώσεις, αλλά μία, η οποία είναι συνάρτηση (και επαληθεύεται από άπειρες δυάδες σημείων).



Τα γραμμικά συστήματα κατέχουν μια εξέχουσα θέση στην προσπάθεια επίλυσης των περισσοτέρων προβλημάτων που μπορεί να συναντήσει κανείς. Οι μέθοδοι λύσης ενός συστήματος είναι πολλές και η καθεμιά τους χρησιμοποιείται κατά περίπτωση. Ας μελετήσουμε κάποιες από αυτές…

1.3.5 Μέθοδος αντικατάστασης

Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται όταν θέλουμε να λύσουμε ένα μικρό σύστημα (π.χ. 2x2), ή όταν πολλοί συντελεστές των αγνώστων είναι ίσοι με το μηδέν. Η λειτουργία της μεθόδου είναι απλή: Λύνουμε μία από τις εξισώσεις ως προς μία μεταβλητή και τον αντικαθιστούμε σε κάποια άλλη από τις εξισώσεις. Έτσι αυτή περιέχει ν-1 αγνώστους.

Λύνοντας στη συνέχεια την $2^{η}$ εξίσωση ως προς έναν άλλο άγνωστο και αντικαθιστώντας τη σχέση που προκύπτει, σε μια τρίτη εξίσωση, μειώνουμε τους αγνώστους σε ν-2. Με τον τρόπο αυτό, όταν φθάνουμε στην τελευταία (ν-οστή) εξίσωση, υπάρχει μόνον ένας άγνωστος, του οποίου την τιμή υπολογίζουμε και γυρίζουμε ανάποδα…

Παράδειγμα $1^{ο}$: Να λυθεί το σύστημα:

$x + y = 10$	Λύση της $1^{ης}$ ως προς y	$y = 10 - x$
$2x - y = 2$	και αντικατάστασή του στη	$2x - 10 + x = 2$

Από τη $2^η$ τώρα προκύπτει το x, το οποίο αντικαθιστούμε στην $1^η$ για να υπολογίσουμε το y:

$$3x = 12 \quad ή \quad x=4 \quad οπότε \quad y=10-4=6$$

Παράδειγμα 2^o: Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{aligned} 2x + 3y - 2z &= 2 \\ -2y + z &= -1 \\ 5z &= 15 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} 2x + 3*2 - 2*3 = 2 \quad &ή \quad x = 1 \\ -2y + 3 = -1 \quad &ή \quad y = 2 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

όπου πηγαίνουμε από κάτω προς τα πάνω…

Άσκηση: Ζητείται η αντιστροφή του πίνακα $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{bmatrix}$, ως εξής:

Γράφουμε το γινόμενο των πινάκων: $\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{4} & \mathbf{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$ και αφού υπολογίσουμε το γινόμενο του αριστερού μέλους και εξισώνουμε τα στοιχεία του πίνακα του αριστερού μέλους με τα αντίστοιχα του μοναδιαίου στο δεξί μέλος, καταλήγοντας σε ένα εύκολο σύστημα 4 εξισώσεων με αγνώστους τα α, β, γ και δ.

1.3.5 Η μέθοδος των οριζουσών (Μέθοδος Cramer)

Έστω το επόμενο γραμμικό σύστημα ν εξισώσεων με ν αγνώστους:

$$\begin{aligned} &\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1\nu}x_\nu = \beta_1 \\ &\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2\nu}x_\nu = \beta_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\alpha_{\nu1}x_1 + \alpha_{\nu2}x_2 + \ldots + \alpha_{\nu\nu}x_\nu = \beta_\nu \end{aligned}$$

Ορίζουμε την ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων Δ, καθώς και τις ορίζουσες Δx_1, Δx_2,…., Δx_ν, οι οποίες προκύπτουν από την Δ με αντικατάσταση της στήλης των συντελεστών της αντίστοιχης μεταβλητής, με τη στήλη των σταθερών όρων.

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2\nu} \\ \ldots & & & \\ \alpha_{\nu1} & \alpha_{\nu2} & \ldots & \alpha_{\nu\nu} \end{pmatrix}, \ \Delta x_1 = \det \begin{pmatrix} \beta_1 & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1\nu} \\ \beta_2 & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2\nu} \\ \ldots & & & \\ \beta_\nu & \alpha_{\nu2} & \ldots & \alpha_{\nu\nu} \end{pmatrix}, \ldots, \ \Delta x_\nu = \det \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \beta_2 \\ \ldots & & & \\ \alpha_{\nu1} & \alpha_{\nu2} & \ldots & \beta_\nu \end{pmatrix}$$

Σύμφωνα με το θεώρημα του Cramer, το οποίο δεχόμαστε χωρίς απόδειξη, η λύση του προηγούμενου γραμμικού συστήματος δίνεται από τις σχέσεις:

$$\mathbf{x_1} = \frac{\Delta x_1}{\Delta}, \quad \mathbf{x_2} = \frac{\Delta x_2}{\Delta}, \ldots\ldots, \quad \mathbf{x_\nu} = \frac{\Delta x_\nu}{\Delta}$$

Προφανώς, οι παραπάνω λύσεις ισχύουν με την προϋπόθεση πως η ορίζουσα Δ (των συντελεστών των αγνώστων) είναι διάφορη του μηδενός. Έχουμε λοιπόν την παρακάτω διερεύνηση:

1η) Η ορίζουσα Δ είναι διάφορη του μηδενός. Τότε ισχύει το θεώρημα Gramer και το σύστημα έχει μοναδική λύση.

2η) Η ορίζουσα Δ είναι ίση με το μηδέν, όπως και όλες οι ορίζουσες Δ_j. Δηλαδή ισχύουν οι ισότητες:

$$\Delta = 0 \quad \text{και} \quad \Delta_j = 0 \ \text{ για κάθε } j = 1,2,\ldots,\nu$$

Στην περίπτωση αυτή, το σύστημα λέγεται αόριστο, κι έχει άπειρες λύσεις. Για παράδειγμα, αόριστο είναι το σύστημα:

$$\begin{aligned} 2x + 5y &= 10 \\ 6x + 15y &= 30 \end{aligned}$$

Η 2η εξίσωση είναι η 1η τριπλασιασμένη (Δ=0). Άρα

$$y = -\frac{2}{5}x + 2$$

η οποία είναι μια συνάρτηση και επαληθεύεται από άπειρες δυάδες, οι οποίες αποτελούν τις λύσεις του συστήματος. Συνήθως ορίζουμε 2 δυάδες: Η πρώτη προκύπτει με το να θέσουμε στη θέση του ενός αγνώστου την τιμή 1, και η δεύτερη (γενική) με το να θέσουμε στη θέση του ενός αγνώστου τη γενική τιμή κ. Έτσι προκύπτουν οι λύσεις (με τη μορφή ενός πίνακα-στήλη):

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8/5 \end{bmatrix} \quad \text{και το γενικο} \quad X = \begin{bmatrix} \kappa \\ 2 - 2\kappa/5 \end{bmatrix}$$

3η) Η ορίζουσα Δ είναι ίση με το μηδέν, ενώ τουλάχιστον μία από τις ορίζουσες Δ_j είναι διάφορη του μηδενός. Κλασσικό παράδειγμα της περίπτωσης αυτής είναι το σύστημα

$$\begin{aligned} 2x + 5y &= 10 \\ 6x + 15y &= 20 \end{aligned}$$

Παρατηρούμε πως ενώ το α’ μέλος της $2^{ης}$ εξίσωσης είναι το τριπλάσιο του α’ μέλους της $1^{ης}$ εξίσωσης, δεν ισχύει το ίδιο για το β’ μέλος, κάνοντας το **σύστημα αδύνατο** (είναι σαν να λέμε Α = 10 και 3Α = 20).

Παράδειγμα: Έστω το γραμμικό σύστημα 3x3:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 55 \\ 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 74 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 30 \end{aligned}$$

Για το σύστημα αυτό ορίζουμε τις ορίζουσες Δ, Δ_1, Δ_2 και Δ_3.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 55 & 2 & 3 \\ 74 & 2 & 4 \\ 30 & -1 & 2 \end{vmatrix} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 55 & 3 \\ 4 & 74 & 4 \\ 3 & 30 & 2 \end{vmatrix} \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 55 \\ 4 & 2 & 74 \\ 3 & -1 & 30 \end{vmatrix}$$

Με τη μέθοδο του Sarrus υπολογίζουμε τις τιμές των οριζουσών:

$$\Delta = -6 , \quad \Delta_1 = -18 , \quad \Delta_2 = -30 \quad \text{και} \quad \Delta_3 = -78$$

οπότε οι λύσεις του συστήματος:

$$x_1 = \Delta_1/\Delta = -18/-6 = 3 , \quad x_2 = \Delta_2/\Delta = -30/-6 = 5 , \quad x_3 = \Delta_3/\Delta = -78/-6 = 13$$

ή, με τη μορφή πίνακα-στήλης: $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 13 \end{bmatrix}$

1.3.5 Η μέθοδος του Gauss (του επαυξημένου πίνακα)

Όπως είπαμε και στο κεφάλαιο των πινάκων, το παρακάτω σύστημα των ν εξισώσεων με ν αγνώστους (νxν εν συντομία…)

$$
\begin{aligned}
\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \dots + \alpha_{1\nu}x_\nu &= \beta_1 \\
\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 + \dots + \alpha_{2\nu}x_\nu &= \beta_2 \qquad (1) \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\alpha_{\nu1}x_1 + \alpha_{\nu2}x_2 + \alpha_{\nu3}x_3 + \dots + \alpha_{\nu\nu}x_\nu &= \beta_\nu
\end{aligned}
$$

γράφεται με τη βοήθεια ενός πίνακα, ο οποίος καλείται «επαυξημένος πίνακας». Ουσιαστικά ο πίνακας αυτός είναι το ίδιο το σύστημα, μόνο που του αφαιρέθηκαν τα «περιττά» στοιχεία, δηλαδή τα x_i, τα + και τα =. Καταλήγουμε λοιπόν στον πίνακα [διάστασης (ν,ν+1)] :

$$
G = \begin{bmatrix}
\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1\nu} & \beta_1 \\
\alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{22} & \beta_2 \\
\alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \dots & \alpha_{3\nu} & \beta_3 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\alpha_{\nu1} & \alpha_{\nu2} & \alpha_{\nu3} & \dots & \alpha_{\nu} & \beta_\nu
\end{bmatrix}
$$

Επίσης είδαμε πως οι επιτρεπτές γραμμοπράξεις (στοιχειώδεις μετασχηματισμοί) δεν επηρεάζουν καθόλου τη λύση του συστήματος μια και σέβονται τις ιδιότητες των ισοτήτων (π.χ. εάν τα δύο μέλη μιας ισότητας τα πολλαπλασιάσουμε με την ίδια σταθερή, η ισότητα παραμένει). Ο αντικειμενικός στόχος στην περίπτωση αυτή είναι να μετατρέψουμε, με επιτρεπτές γραμμοπράξεις, τις πρώτες ν στήλες του επαυξημένου πίνακα (που περιέχει τον πίνακα των συντελεστών των αγνώστων), σε μοναδιαίο πίνακα. Να φθάσουμε δηλαδή στη μορφή:

$$
G = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_1 \\
0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \lambda_2 \\
0 & 0 & 1 & \dots & 0 & \lambda_3 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda_\nu
\end{bmatrix}
$$

που ισοδυναμεί με το σύστημα-λύση των εξισώσεων (1):

$$
x_1 = \lambda_1 , \quad x_2 = \lambda_2 , \quad x_3 = \lambda_3 \quad , \quad \dots\dots , \quad x_\nu = \lambda_\nu
$$

Γίνεται φανερό πως η διαδικασία λύσης του είναι πιστή αντιγραφή του υπολογισμού του αντίστροφου πίνακα, με τους μηδενισμούς των στοιχείων που δεν ανήκουν στην κύρια διαγώνιο του πίνακα των συντελεστών των αγνώστων. Ας παρακολουθήσουμε το παράδειγμα:

Παράδειγμα: Να λυθεί το γραμμικό σύστημα:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 20 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 28 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 &= -10 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 20 \\ 2 & 2 & 2 & 28 \\ 3 & -1 & -1 & -10 \end{array}\right] = \left|\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 20 \\ 0 & -2 & 0 & -12 \\ 0 & -7 & -4 & -70 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -4 & -28 \end{array}\right|$$

Μηδενίζοντας τα στοιχεία (κάτω από τη διαγώνιο) της $1^{ης}$ και της $2^{ης}$ στήλης φθάνουμε σε μια μορφή η οποία μας επιτρέπει να λύσουμε το σύστημα με αντικαταστάσεις (όπως σε προηγούμενο παράδειγμα). Θα μπορούσαμε όμως να συνεχίσουμε και στην ίδια λογική:

$$= \left|\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 13 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right. \boxed{\begin{array}{c} 1 \\ 6 \\ 7 \end{array}}$$

Και η λύση, με τη μορφή πίνακα-στήλης: $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$

1.3.5 Επίλυση μέσω του αντίστροφου πίνακα

Ξαναγυρίζουμε και πάλι στο σύστημα (1).

$$\begin{aligned} &\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \dots + \alpha_{1\nu}x_\nu = \beta_1 \\ &\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 + \dots + \alpha_{2\nu}x_\nu = \beta_2 \qquad (1) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\alpha_{\nu1}x_1 + \alpha_{\nu2}x_2 + \alpha_{\nu3}x_3 + \dots + \alpha_{\nu\nu}x_\nu = \beta_\nu \end{aligned}$$

Στο $2^{ο}$ παράδειγμα της παραγράφου για τον πολλαπλασιασμό πινάκων είδαμε πως εάν Α είναι ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων, Χ ο πίνακας-στήλη των αγνώστων και Β ο πίνακας-στήλη των σταθερών όρων:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \dots & \alpha_{\nu\nu} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_\nu \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_\nu \end{bmatrix}$$

τότε το σύστημα γράφεται:

$$AX = B$$

οπότε πολλαπλασιάζοντας από αριστερά την ισότητα με τον αντίστροφο πίνακα του Α:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \quad \text{ή} \quad IX = A^{-1}B \quad \text{ή} \quad X = A^{-1}B$$

Δηλαδή: **Πολλαπλασιάζοντας τον αντίστροφο πίνακα (A^{-1}), του πίνακα των συντελεστών των αγνώστων, με τον πίνακα-στήλη των σταθερών όρων (Β), υπολογίζουμε τον πίνακα-στήλη των λύσεων του συστήματος.**

Πρόκειται για μία μέθοδο πολύ χρήσιμη, ιδιαίτερα στην περίπτωση που δίνεται ο αντίστροφος πίνακας A^{-1}, όπως όταν δουλεύουμε με έναν ηλ. υπολογιστή και:

- δημιουργούμε ένα δικό μας πρόγραμμα αντιστροφής πινάκων, ή
- χρησιμοποιούμε ένα πρόγραμμα αντιστροφής τετραγωνικών πινάκων το οποίο μας δίνεται έτοιμο από τη γλώσσα προγραμματισμού, ή
- χρησιμοποιούμε μία έτοιμη εντολή από το προγραμματιστικό πακέτο που χρησιμοποιούμε (π.χ. το Excel ή Matlab).

Παράδειγμα $1^{ο}$: Έστω το σύστημα:

$$\begin{aligned} 4x_1 + 6x_2 + x_3 + 2x_4 &= 41 \\ 6x_1 + 4x_2 + x_3 - 2x_4 &= 9 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 &= -25 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 &= 33 \end{aligned}$$

Να δειχθεί πως ο πίνακας A^{-1} είναι ο αντίστροφος του πίνακα των συντελεστών των αγνώστων (του A):

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} 0,6 & -0,5 & 0,5 & -0,2 \\ -0,46 & 0,6 & -0,5 & 0,12 \\ -0,2 & 0 & 0 & 0,4 \\ 0,78 & -0,8 & 0,5 & -0,16 \end{vmatrix}$$

Πράγματι, πολλαπλασιάζοντας τους πίνακες A και A^{-1} έχουμε:

$$\begin{vmatrix} 4 & 6 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 1 & -4 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} \text{ X } \begin{vmatrix} 0,6 & -0,5 & 0,5 & -0,2 \\ -0,46 & 0,6 & -0,5 & 0,12 \\ -0,2 & 0 & 0 & 0,4 \\ 0,78 & -0,8 & 0,5 & -0,16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Επομένως ο πίνακας A^{-1} είναι πράγματι ο αντίστροφος του A (το γινόμενό τους δίνει τον μοναδιαίο). Τέλος, υπολογίζουμε τη λύση του συστήματος, πολλαπλασιάζοντας τον A^{-1} με τον πίνακα-στήλη των σταθερών όρων:

$$\begin{vmatrix} 0,6 & -0,5 & 0,5 & -0,2 \\ -0,46 & 0,6 & -0,5 & 0,12 \\ -0,2 & 0 & 0 & 0,4 \\ 0,78 & -0,8 & 0,5 & -0,16 \end{vmatrix} \text{ X } \begin{vmatrix} 41 \\ 9 \\ -25 \\ 33 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{vmatrix}$$

καταλήγοντας στη λύση:

$$x_1 = 1,\ x_2 = 3,\ x_3 = 5,\ x_4 = 7 \quad \text{ή} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{5} \\ \mathbf{7} \end{bmatrix}$$

Παρατήρηση: Από τα προηγούμενα γίνεται φανερό πως εάν κατά τη διαγωνοποίηση του πίνακα των συντελεστών των αγνώστων (του A), κάποιο από τα στοιχεία της διαγωνίου παραμείνει μηδέν (παρ'όλες τις αντιμεταθέσεις με τις επόμενες γραμμές), τότε:

- Η ορίζουσα του A είναι ίση με το μηδέν.
- Ο πίνακας A δεν αντιστρέφεται.
- Το σύστημα δεν έχει μοναδική λύση (θα είναι αδύνατο ή αόριστο).

Παράδειγμα 2ο: Έστω το σύστημα:

$$\begin{aligned} 4x_1 + 6x_2 + \ x_3 &= 19 \\ 6x_1 + 4x_2 - \ x_3 &= 11 \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 &= -8 \end{aligned}$$

Αρχικά, ας υπολογίσουμε την ορίζουσα του πίνακα (Α) των συντελεστών των αγνώστων, μετατρέποντάς την σε τριγωνική:

$$\begin{vmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 6 & 4 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 0 & -5 & -2,5 \\ 0 & -5 & -2,5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 0 & -5 & -2,5 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

πράγμα που συμβαίνει διότι οι γραμμές του Α είναι γραμμικά εξαρτημένες ($3^η = 2^η - 1^η$). Παρατηρούμε πως η σχέση αυτή ισχύει και για τα δεύτερα μέλη των εξισώσεων του συστήματος (–8=11–19). Άρα, το σύστημα είναι αόριστο και θα έχει άπειρες λύσεις[3]

Διαγράφοντας την μία από τις τρεις εξισώσεις (εδώ θα προτιμούσαμε την $1^η$ επειδή έχει τους μεγαλύτερους συντελεστές), θα είχαμε το επόμενο σύστημα δύο εξισώσεων με τρεις αγνώστους:

$$\begin{aligned} 6x_1 + 4x_2 - \ x_3 &= 11 \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 &= -8 \end{aligned}$$

όπου θα πρέπει να θέσουμε μία αυθαίρετη τιμή για τον ένα άγνωστο, έστω για τον x_1 και να υπολογίσουμε τους άλλους δύο:

$1^η$ προσπάθεια: Θέτουμε την τιμή $x_1=1$. Τότε έχουμε το σύστημα:

$$\begin{aligned} 4x_2 - \ x_3 &= 5 \\ -2x_2 - 2x_3 &= -10 \end{aligned}$$

του οποίου η (μοναδική) λύση είναι: $x_2 = 2$ και $x_3 = 3$. Επομένως, μία από τις άπειρες λύσεις του αρχικού (αόριστου) συστήματος είναι η:

---

[3] *Στο ίδιο, προφανώς συμπέρασμα θα φθάναμε αν υπολογίζαμε τις ορίζουσες $Δx_1, Δx_2,$ και $Δx_3$, σύμφωνα με το Θεώρημα του Cramer, όπου θα βλέπαμε πως ισχύει:*

$$\boldsymbol{Δx_1 = Δx_2 = Δx_3 = 0}$$

$(x_1 = 1 , x_2 = 2 , x_3 = 3)$ ή με την μορφή του πίνακα στήλη: $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

2η προσπάθεια: Επιχειρούμε τώρα να βρούμε μια σχέση που θα μας δίνει όλο το σύνολο των λύσεων του αόριστου συστήματος του παραδείγματος αυτού. Για το λόγο αυτό θέτουμε στον άγνωστο x_1 μια γενική τιμή, έστω την τιμή x_1=κ. Τότε έχουμε το σύστημα:

$$\begin{aligned} 4x_2 - x_3 &= 11 - 6\kappa \\ -2x_2 - 2x_3 &= -8 - 2\kappa \end{aligned}$$

Εύκολα λύνουμε το σύστημα αυτό[4] και βρίσουμε πως η γενική μορφή των λύσεων (το σύνολο ή η κλάση όλων των λύσεων) δίνεται από τις σχέσεις:

$(x_1=\kappa , x_2=3-\kappa , x_3=1+2\kappa)$ ή με την μορφή του πίνακα στήλη:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa \\ 3-\kappa \\ 1+2\kappa \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε πως η λύση που βρήκαμε κατά την 1η προσπάθεια, προφανώς, περιλαμβάνεται στη γενική μορφή της λύσης, και λαμβάνεται για την τιμή κ=1.

1.3.5 Ομογενή γραμμικά συστήματα

Ένα γραμμικό σύστημα λέγεται ομογενές όταν οι σταθεροί του όροι είναι ίσοι με το μηδέν. Δηλαδή ομογενές είναι το παρακάτω σύστημα:

$$\begin{aligned} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \ldots + \alpha_{1\nu}x_\nu &= 0 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 + \ldots + \alpha_{2\nu}x_\nu &= 0 \qquad (2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{\nu1}x_1 + \alpha_{\nu2}x_2 + \alpha_{\nu3}x_3 + \ldots + \alpha_{\nu\nu}x_\nu &= 0 \end{aligned}$$

[4] *Για παράδειγμα, διπλασιάζοντας την δεύτερη εξίσωση και προσθέτοντας στην πρώτη έχουμε:* $-5x_3 = -5-10\kappa$ *απ' όπου προκύπτει* $x_3 = 1+2\kappa$

Εάν ακολουθήσουμε τη μέθοδο των οριζουσών, αντιλαμβανόμαστε πως οι ορίζουσες $\Delta_j = 0$ για κάθε j=1,2,..,ν (διότι η κάθε μία από αυτές θα περιέχει τη στήλη των σταθερών όρων, άρα μια στήλη με όλα τα στοιχεία ίσα με το μηδέν, άρα θα μηδενίζεται).

Επομένως, εάν η ορίζουσα του πίνακα Α, των συντελεστών των αγνώστων, είναι διάφορη του μηδενός, το ομογενές σύστημα (2) έχει μοναδική λύση, την προφανή, τη μηδενική:

$$\mathbf{x_1 = 0\ ,\ \ x_2 = 0\ ,\ \ldots\ ,\ x_\nu = 0}$$

Εάν θέλουμε να έχουμε και άλλες λύσεις (εκτός της μηδενικής), θα πρέπει η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων (η det[A]) να είναι ίση με το μηδέν. Αυτό θα συμβαίνει όταν τα αριστερά μέλη των εξισώσεων του συστήματος (2) δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητα, οπότε μία από τις εξισώσεις θα είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων. **Τότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις (ν-άδες τιμών για τους αγνώστους x_j) οι οποίες υπολογίζονται όταν κρατήσουμε τις ν-1 γραμμικά ανεξάρτητες εξισώσεις και δώσουμε αυθαίρετες τιμές στον ένα από τους αγνώστους.**

Παράδειγμα 1^ο^: Δίνεται το ομογενές σύστημα: $\begin{array}{l} 2x_1 + 4x_2 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 = 0 \end{array}$ (Σ.1).

Είναι φανερό πως το σύστημα έχει λύση την προφανή, την μηδενική: $x_1 = x_2 = 0$, όπως συμβαίνει σε κάθε ομογενές σύστημα. Αναζητούμε μήπως εκτός από την προφανή (μηδενική) λύση, έχει και άλλες λύσεις. Για το λόγο αυτό υπολογίζουμε την ορίζουσα των συντελεστών του:

$$\det\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = 2*6 - 3*4 = 0$$

πράγμα που συμβαίνει διότι η 2^{η} γραμμή του πίνακα των συντελεστών προκύπτει από το γινόμενο της $1^{\eta\varsigma}$ επί το 1,5 (ή αντίστοιχα η 2^{η} στήλη προκύπτει από το γινόμενο της $1^{\eta\varsigma}$ επί το 2).

Άρα, το (Σ.1) έχει ουσιαστικά μόνο μία εξίσωση, έστω την 1^{η} (που έχει και μικρότερους συντελεστές)

$$2x_1 + 4x_2 = 0$$

Θέτοντας όπου $x_1=1$, έχουμε $x_2=-0,5$. Δηλαδή έχουμε σαν λύση τον πίνακα

$$X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1/2\end{bmatrix}$$

Αντίθετα, εάν θέσουμε στο x_1 την γενική τιμή κ, θα έχουμε σαν λύση:

$(x_1=\kappa,\ x_2=-0,5\kappa)$ ή αλλιώς $X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\kappa\\-\kappa/2\end{bmatrix}=\kappa\begin{bmatrix}1\\-1/2\end{bmatrix}$

Παρατήρηση: Αξίζει να παρατηρήσουμε πως στα ομογενή συστήματα ο πίνακας-στήλη της γενικής λύσης (όταν δηλαδή θέσαμε $x_1=\kappa$), προκύπτει από την μερική λύση για $x_1=1$, με τον πολλαπλασιασμό της επί κ. . **Προσοχή, αυτό ισχύει μόνο στα ομογενή συστήματα.** Άλλωστε είδαμε πως στο αντίστοιχο παράδειγμα του μή ομογενούς αόριστου συστήματος, δεν ίσχυε η παρατήρηση αυτή.

Παράδειγμα 2^{o}: Δίνεται το ομογενές σύστημα:

$$\begin{aligned}x_1+6x_2+x_3+2x_4&=0\\x_1+4x_2+2x_3-2x_4&=0\\x_1-2x_2+x_3-4x_4&=0\\3x_1+8x_2+4x_3-4x_4&=0\end{aligned}$$

Είναι φανερό πως το σύστημα έχει λύση την προφανή, την μηδενική: $x_j=0$ για κάθε j. Εάν στη συνέχεια υπολογίσουμε την ορίζουσα των συντελεστών του, θα διαπιστώσουμε πως:

$$\det[A]=0$$

διότι η 4$^{\eta}$ εξίσωσή του είναι το άθροισμα των υπολοίπων τριών. Κρατούμε λοιπόν τις πρώτες τρεις εξισώσεις[5] και δίνουμε διάφορες τιμές στο x_1. Για κάθε μία τιμή του x_1 υπολογίζουμε την τιμή των άλλων αγνώστων. Εάν, για παράδειγμα $x_1=1$, έχουμε το σύστημα:

$$\begin{aligned}6x_2+x_3+2x_4&=-1\\4x_2+2x_3-2x_4&=-1\\-2x_2+x_3-4x_4&=-1\end{aligned}$$

[5] *Θα μπορούσαμε να διαγράψουμε οποιαδήποτε από τις 4 εξισώσεις, μια και έτσι θα έπαυε να ισχύει η σχέση της γραμμικής εξάρτηση. Απλά, επιλέγουμε την 4$^{\eta}$ διότι έχει του μεγαλύτερους συντελεστές (για ευκολία στις πράξεις).* ***Προσοχή! Εάν η γραμμική εξάρτηση αφορούσε μόνον δύο (ή τρεις) από τις τέσσερις εξισώσεις, θα έπρεπε, προφανώς, να διαγράψουμε μία από αυτές…***

Η περίπτωση του συγκεκριμένου συστήματος είναι ιδιαίτερη, διότι το πέρασμα στο δεξί μέλος του x_1 ξανακάνει το σύστημα που προκύπτει αόριστο, πράγμα που δεν θα συνέβαινε εάν θέταμε την τιμή 1 σε κάποια άλλη μεταβλητή, πχ στο x_4! Εάν λοιπόν θέσουμε $x_4=1$, έχουμε το σύστημα:

$$\begin{aligned} x_1 + 6x_2 + x_3 &= -2 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 4 \end{aligned}$$

με λύση:

$$x_1 = 0 \,,\ x_2 = -0{,}75 \,,\ x_3 = 2{,}5 \quad \text{για την τιμή} \quad x_4 = 1$$

η οποία γράφεται: $$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.75 \\ 2.5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Εάν, αντίστοιχα είχαμε θέσει $x_4=\kappa$, η λύση θα ήταν:

$$x_1 = 0 \,,\ x_2 = -0{,}75\kappa \,,\ x_3 = 2{,}5\kappa \,,\ x_4 = \kappa$$

η οποία γράφεται: $$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \kappa \begin{bmatrix} 0 \\ -0.75 \\ 2.5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.75\kappa \\ 2.5\kappa \\ \kappa \end{bmatrix}$$

Σημαντική Παρατήρηση: Παρατηρούμε λοιπόν πως όταν η τοποθέτηση της τιμής 1 σε έναν άγνωστο του αόριστου ομογενούς συστήματος, μετά τη διαγραφή μιας εξίσωσης, οδηγήσει εκ νέου σε αόριστο σύστημα, αυτό σημαίνει πως στη γενική λύση του αρχικού αόριστου συστήματος ο άγνωστος αυτός παίρνει την τιμή μηδέν(0)! Σ' αυτή την περίπτωση θέτουμε την τιμή 1 σε κάποιον άλλο άγνωστο και ο υπολογισμός των υπολοίπων αγνώστων γίνεται φυσιολογικά. Τέλος, η γενίκευσης της λύσης του αόριστου συστήματος προκύπτει με τον πολλαπλασιασμό της μερικής λύσης (πίνακα-στήλης) επί το κ. Για άλλη μια φορά να θυμίσουμε πως <u>αυτό ισχύει μόνο στα ομογενή συστήματα.</u>

<u>Άσκηση:</u> Δίνεται το ομογενές γραμμικό σύστημα:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 8x_2 &= 0 \\ 3x_1 + \lambda x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία το σύστημα αυτό έχει λύσεις πέραν της προφανούς, υπολογίστε μία από αυτές τις λύσεις, αλλά και τη γενική έκφραση της λύσης.