



# Κατασκευές Οπλισμένου Σκυροδέματος Ι

Ενότητα 4: Διαστασιολόγηση για μεγέθη ορθής έντασης – Κάμψη δοκών

Γεώργιος Παναγόπουλος

Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών ΤΕ & Μηχανικών Τοπογραφίας και  
Γεωπληροφορικής ΤΕ (Κατεύθυνση ΠΜ)



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ  
πρόγραμμα για την ανάπτυξη



# Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Κεντρικής Μακεδονίας» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



---

# Διαστασιολόγηση για μεγέθη ορθής έντασης

## Προέχουσα κάμψη δοκών

# Περιεχόμενα ενότητας

1. Παραδοχές διαστασιολόγησης
2. Συμπεριφορά δοκών σε κάμψη υπό κατακόρυφα φορτία
3. Εικόνες καμπτικής αστοχίας δοκών
4. Προέχουσα κάμψη ορθογωνικών διατομών

# Σκοποί ενότητας

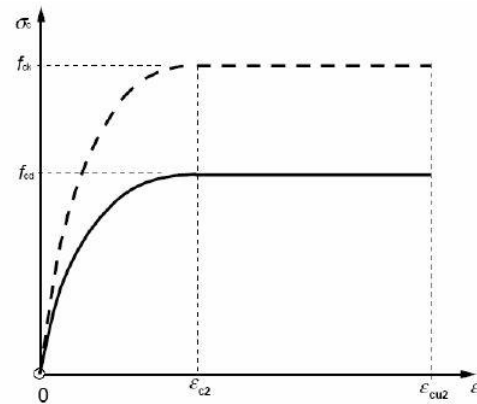
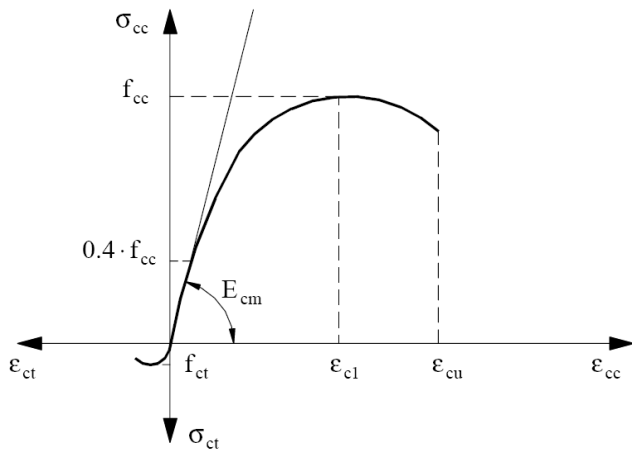
- Εισαγωγή στη διαστασιολόγηση ορθογωνικών διατομών δοκών
- Παρουσίαση εικόνων καμπτικής αστοχίας δοκών υπό κατακόρυφη φόρτιση
- Μεθοδολογία υπολογισμού απαιτούμενου οπλισμού για προέχουσα κάμψη

# Παραδοχές διαστασιολόγησης

- Θεωρούνται ιδεατά διαγράμματα τάσεων-παραμορφώσεων
- Η διατομή παραμένει επίπεδη και κάθετη στον παραμορφωμένο άξονα του στοιχείου
- Ο οπλισμός υφίσταται τις ίδιες μεταβολές παραμορφώσεων με το περιβάλλον σκυρόδεμα (αγνοούνται πιθανές ολισθήσεις)
- Η εφελκυστική αντοχή του σκυροδέματος αμελείται
- Η μέγιστη θλιπτική παραμόρφωση του σκυροδέματος λαμβάνεται ίση με
  - 3.5‰ σε κάμψη (καθαρή ή με αξονική δύναμη)
  - 2‰ σε κεντρική θλίψη

# Παραδοχές διαστασιολόγησης

## Ιδεατά διαγράμματα τάσεων-παραμορφώσεων για το σκυρόδεμα



$$\sigma_c = \begin{cases} f_{cd} & 0 \geq \varepsilon_c \geq \varepsilon_{c2} \\ f_{cd} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}} \right)^n \right] & \varepsilon_{c2} \geq \varepsilon_c \geq \varepsilon_{cu2} \end{cases}$$

$$f_{cd} = \alpha_{cc} \frac{f_{ck}}{\gamma_c}$$

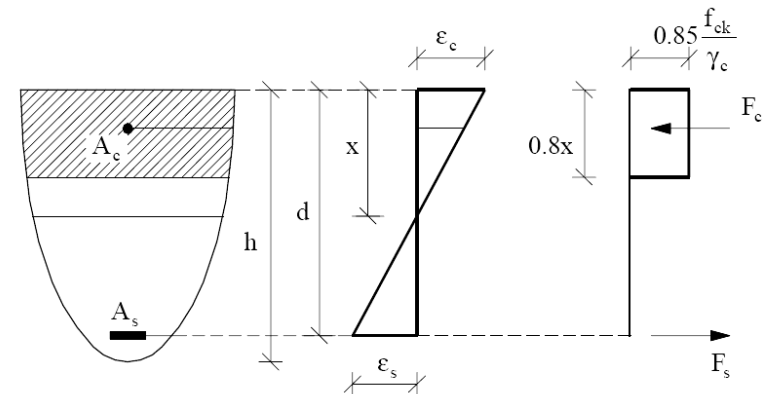


Σε ένα μήκος 0.20x από την ουδέτερη γραμμή η τάση είναι μηδέν

Στο υπόλοιπο 0.80x η τάση είναι σταθερή και έχει τιμή:  $\alpha_{cc} f_{cd}$

Μειωτικός συντελεστής  $\alpha_{cc}$  που συνεκτιμά μακροχρόνιες επιδράσεις στη θλιπτική αντοχή και δυσμενείς επιρροές που προκύπτουν από τον τρόπο που επιβάλλεται το φορτίο.

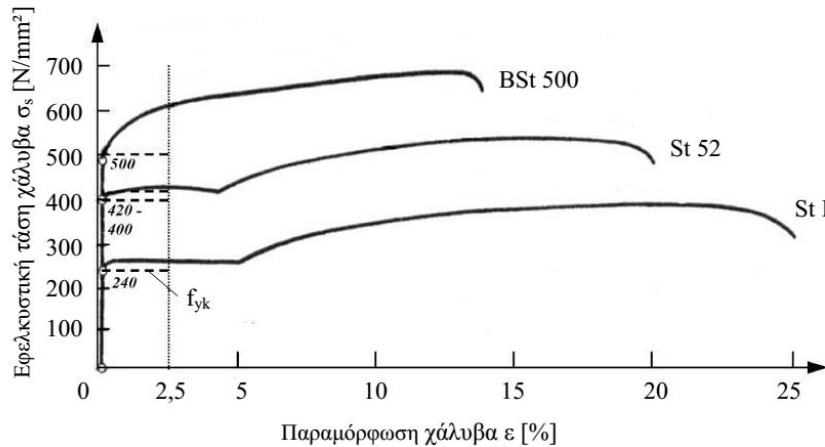
Συνιστώμενη τιμή: 1 (EC2) & 0.85 (ΕΚΟΣ)



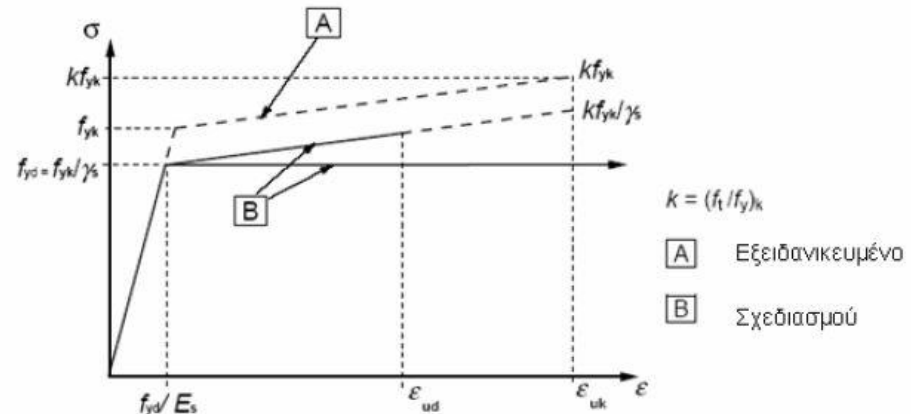


# Παραδοχές διαστασιολόγησης

## Ιδεατά διαγράμματα τάσεων-παραμορφώσεων για το χάλυβα



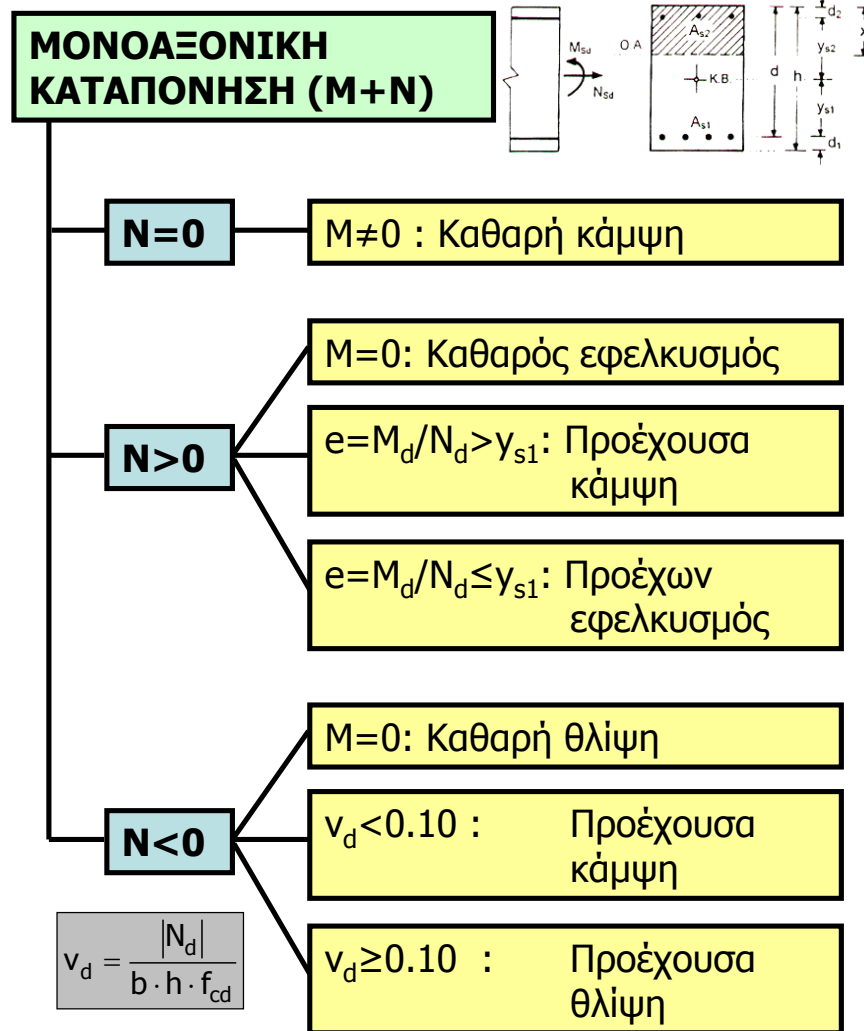
$$\sigma_{sd} = \begin{cases} +f_{yd} + (k-1)f_{yd} \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_y}{\varepsilon_{uk} - \varepsilon_y} & \varepsilon_s > \varepsilon_y \\ E_s \cdot \varepsilon_s & |\varepsilon_s| < \varepsilon_y \\ -f_{yd} - (k-1)f_{yd} \frac{|\varepsilon_s| - \varepsilon_y}{\varepsilon_{uk} - \varepsilon_y} & \varepsilon_s < -\varepsilon_y \end{cases}$$



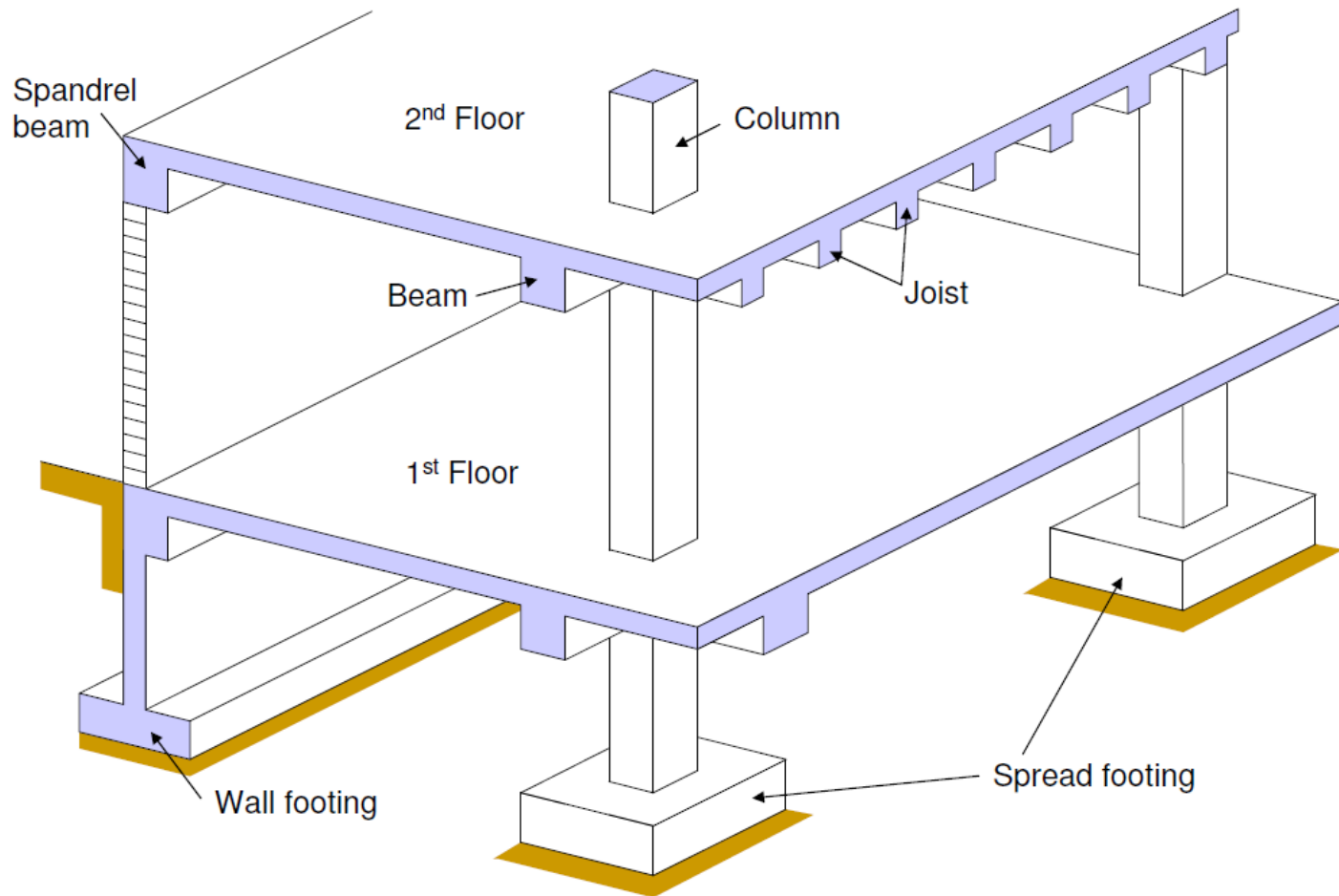
(1) Καραβεζύρογλου Μ. (2009), Διαχρονική θεώρηση των αντοχών σκυροδέματος και χάλυβα οπλισμών βάσει των κανονισμών, 16<sup>ο</sup> Συνέδριο Σκυροδέματος, ΤΕΕ, ΕΤΕΚ, 21-23/10/2009, Πάφος, Κύπρος

# Συνδυασμοί ροπής – αξονικού φορτίου (M-N)

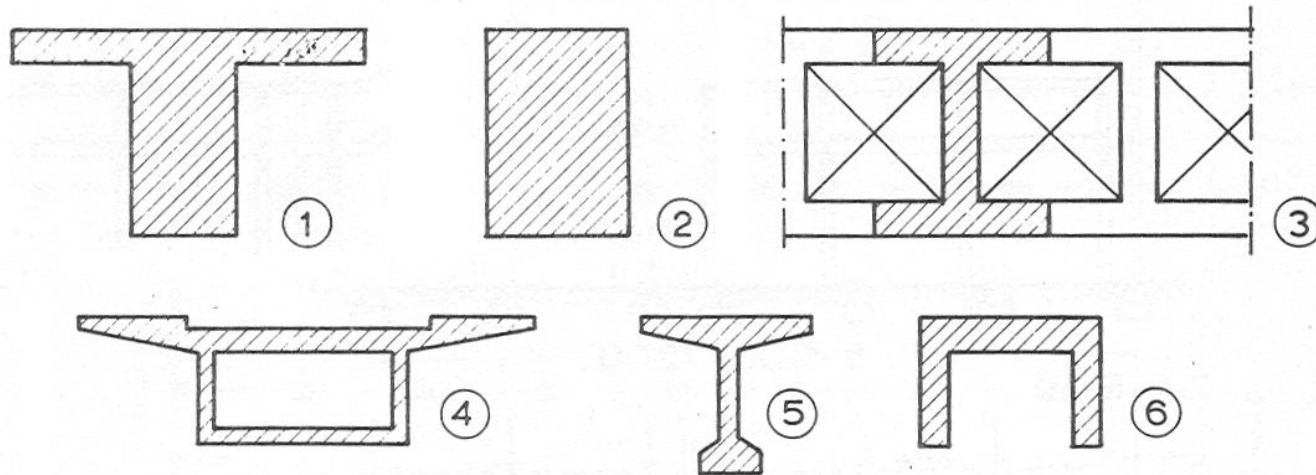
Διάκριση περιπτώσεων  
(διαφορετική μεθοδολογία υπολογισμού)



# Φέρων οργανισμός κατασκευής Ο/Σ



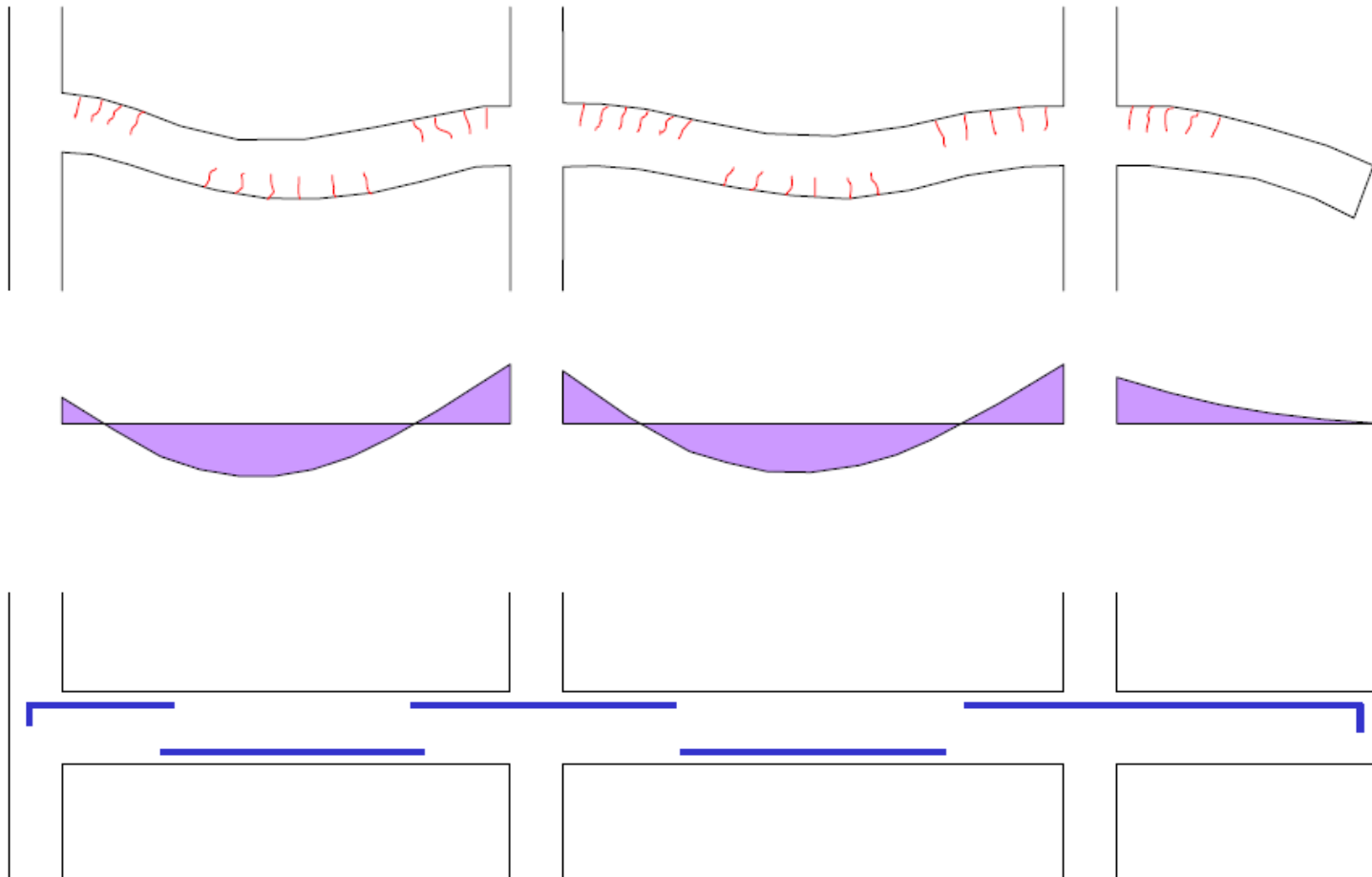
# Τυπικές διατομές δοκών Ο/Σ



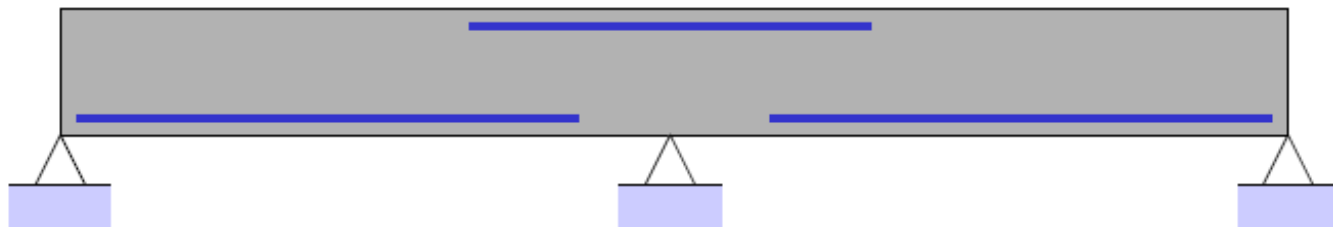
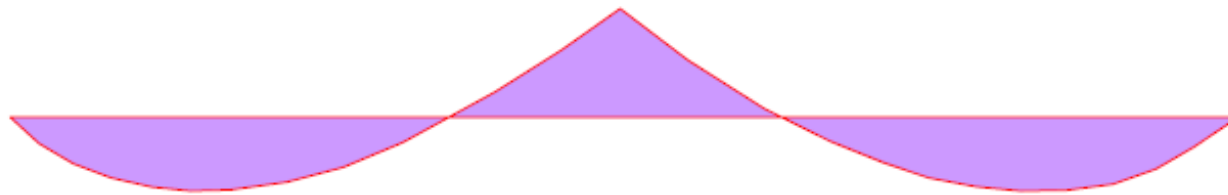
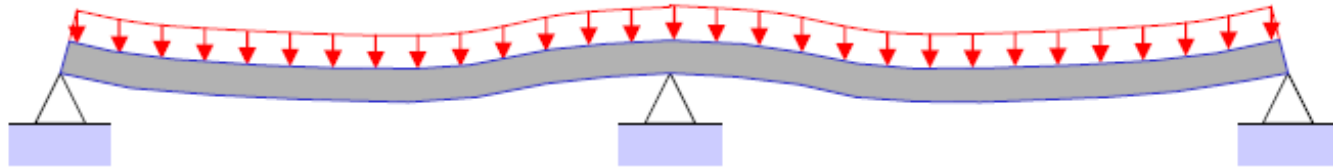
- ① Πλακοδοκός, ② Ορθογωνική, ③ Κυψελική, ④ Κιβωτοειδής,  
⑤ Διατομή I, ⑥ Διατομή II

(1) Πενέλης Γ., Στυλιανίδης Κ., Κάππος Α., Ιγνατάκης Γ. (1995) “Κατασκευές από Οπλισμένο Σκυρόδεμα”, Υπηρεσία Δημοσιευμάτων Α.Π.Θ., Θεσ/νίκη

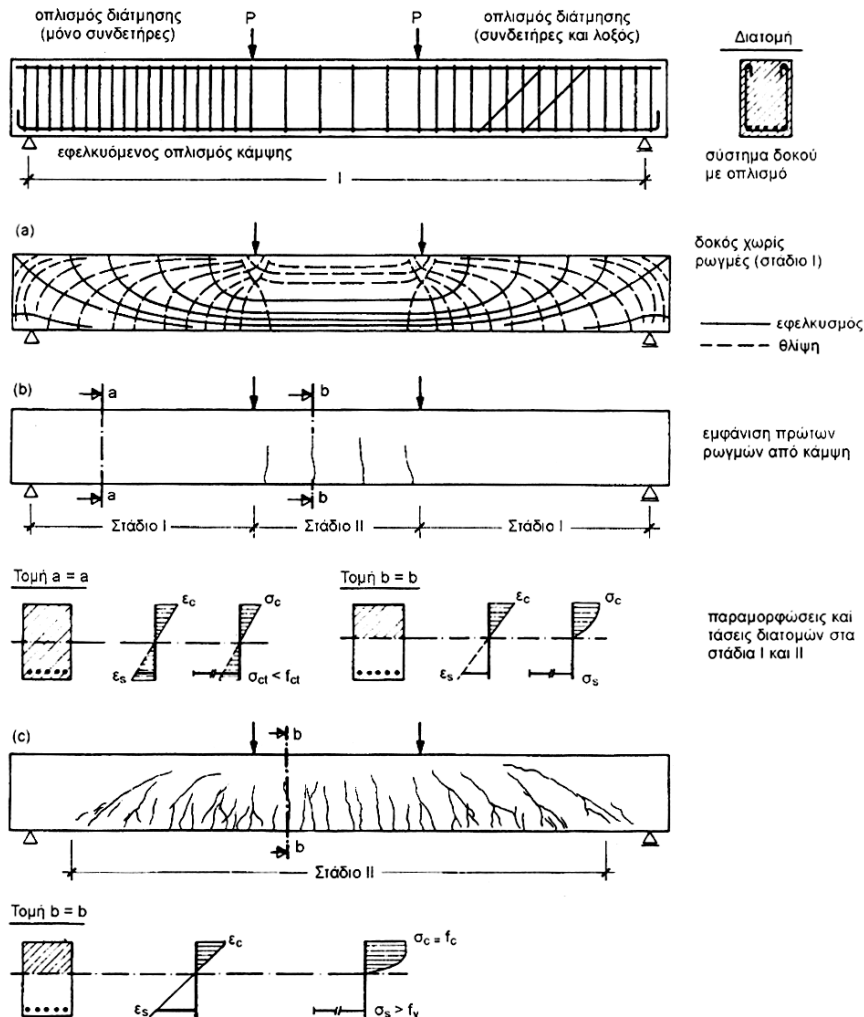
# Συνεχείς δοκοί υπό κατακόρυφα φορτία



# Συνεχής δοκός δύο ανοιγμάτων



# Αμφιέρειστες δοκοί σε κάμψη



## στάδιο I

$$\sigma_{ct} < f_{ct}$$

η ακραία τάση του σκυροδέματος  $\sigma_{ct}$  από κάμψη παραμένει μικρότερη από την αντοχή του σκυροδέματος  $f_{ct}$  σε εφελκυσμό από κάμψη

## στάδιο II

$$\sigma_{ct} > f_{ct}$$

Οι εφελκυστικές τάσεις στα ρήγματα παραλαμβάνονται εξ ολοκλήρου από τον οπλισμό (ρηγματωμένη εφελκυσμένη ζώνη σκυροδέματος)

## στάδιο III

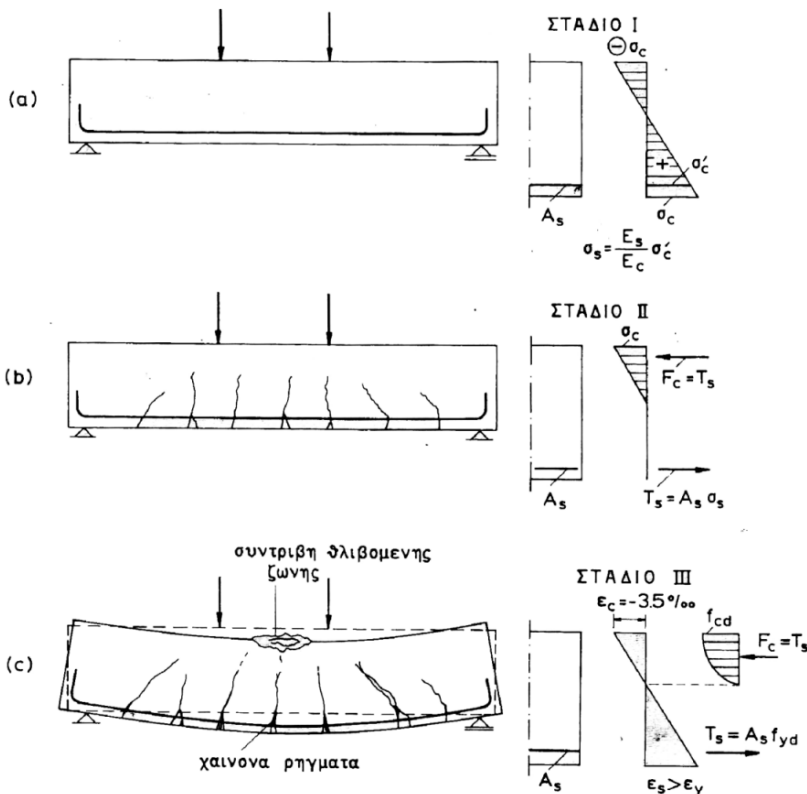
$$\sigma_s > f_y$$

Διαρροή του χάλυβα. Πολύ έντονες πλαστικές παραμόρφωσεις της δοκού (βέλος κάμψης)

# Εικόνες καμπτικής αστοχίας δοκών Ο/Σ (1/4)

## Διατομές “κανονικά” οπλισμένες

$$A_{s,min} < A_s < A_{s,max}$$



- Μετά την υπέρβαση της **εφελκυστικής αντοχής** του σκυροδέματος η δοκός μεταπίπτει από το στάδιο I στο στάδιο II.
  - Οι εφελκυστικές τάσεις παραλαμβάνονται **μόνο από τον οπλισμό**.
  - Εμφανίζονται τριχοειδή ρήγματα.
- Με την αύξηση του φορτίου και **εφόσον ο οπλισμός δε διαρρέει** τα ρήγματα αυτά **πληθαίνουν** σε αριθμό, παρουσιάζουν όμως μια ιδιαίτερα χαρακτηριστική ευστάθεια προχωρώντας καθύψος της διατομής με **ιδιαίτερα βραδείς ρυθμούς**

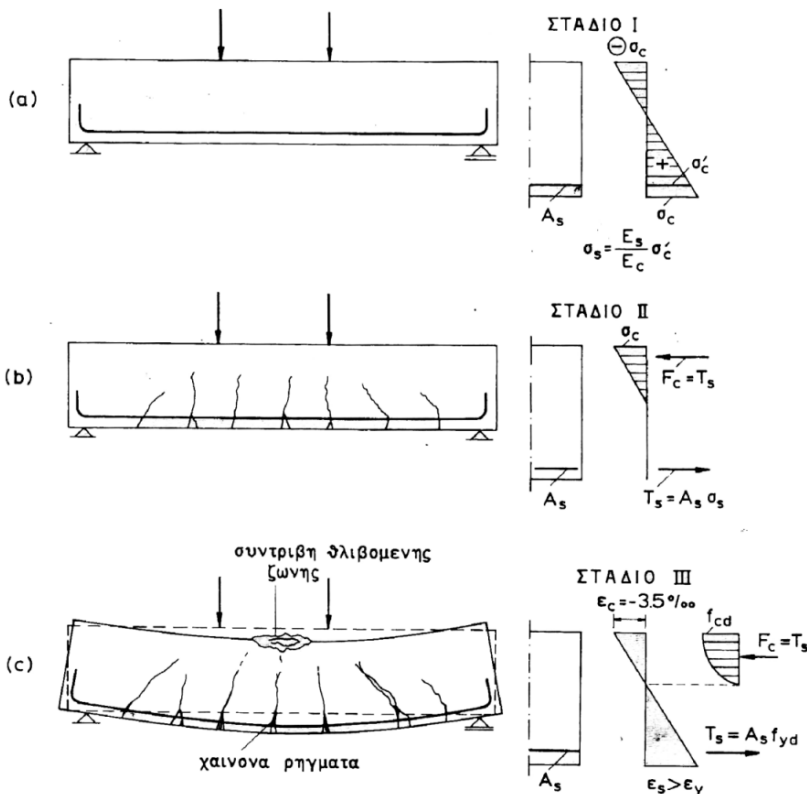
(1) Πενέλης Γ., Στυλιανίδης Κ., Κάππος Α., Ιγνατάκης Γ. (1995) “Κατασκευές από Οπλισμένο Σκυρόδεμα”, Υπηρεσία Δημοσιευμάτων Α.Π.Θ., Θεσ/νίκη



# Εικόνες καμπτικής αστοχίας δοκών Ο/Σ (2/4)

## Διατομές “κανονικά” οπλισμένες

$$A_{s,min} < A_s < A_{s,max}$$



- Με την περαιτέρω αύξηση του φορτίου οι οπλισμοί φτάνουν στο **όριο διαρροής** τους χωρίς να έχει εξαντληθεί η φέρουσα ικανότητα της θλιβόμενης ζώνης του σκυροδέματος (στάδιο III). Τότε τα τριχοειδή ρήγματα αρχίζουν γρήγορα να διευρύνονται και η δοκός να παρουσιάζει **μεγάλα βέλη κάμψης**
- Η τελική αστοχία επέρχεται συνήθως από τη **συντριβή της θλιβόμενης ζώνης** λόγω της αδυναμίας της να φέρει σε τόσο μικρό ύψος θλιπτική δύναμη ίση με τη δύναμη διαρροής του οπλισμού

**Πλάσטיμη συμπεριφορά**

(1) Πενέλης Γ., Στυλιανίδης Κ., Κάππος Α., Ιγνατάκης Γ. (1995) “Κατασκευές από Οπλισμένο Σκυρόδεμα”, Υπηρεσία Δημοσιευμάτων Α.Π.Θ., Θεσ/νίκη

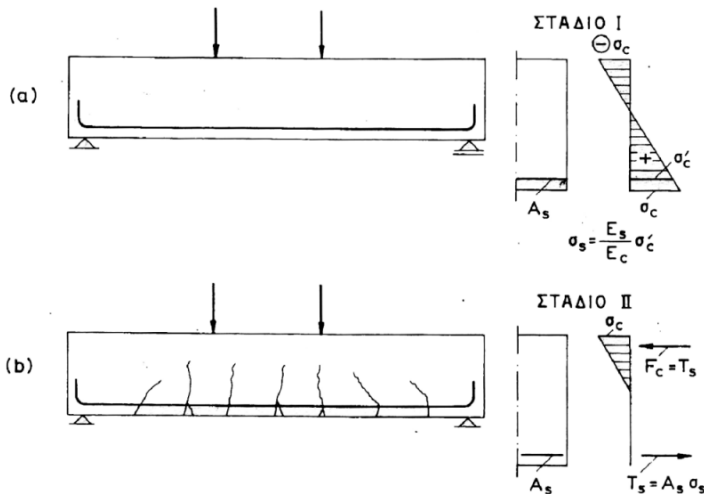
# Εικόνες καμπτικής αστοχίας δοκών Ο/Σ (3/4)

## Διατομές “ασθενώς” οπλισμένες

$$A_s < A_{s,min}$$

- Είναι οι διατομές με ιδιαίτερα **χαμηλό ποσοστό οπλισμού**
- Κατά τη μετάβαση από το στάδιο I στο στάδιο II οι οπλισμοί δεν είναι σε θέση να παραλάβουν τις εφελκυστικές τάσεις που αναπτύσσονται στην εφελκυσόμενη ζώνη.
- Με την εμφάνιση των πρώτων ρηγμάτων ο οπλισμός διαρρέει και η δοκός καταρρέει, **χωρίς καμία προειδοποίηση**.
- Πρόβλεψη για τοποθέτηση ενός **ελάχιστου ποσοστού οπλισμού** στην εφελκυσόμενη ζώνη ( $A_{s,min}$ ).

**Ψαθυρή συμπεριφορά**

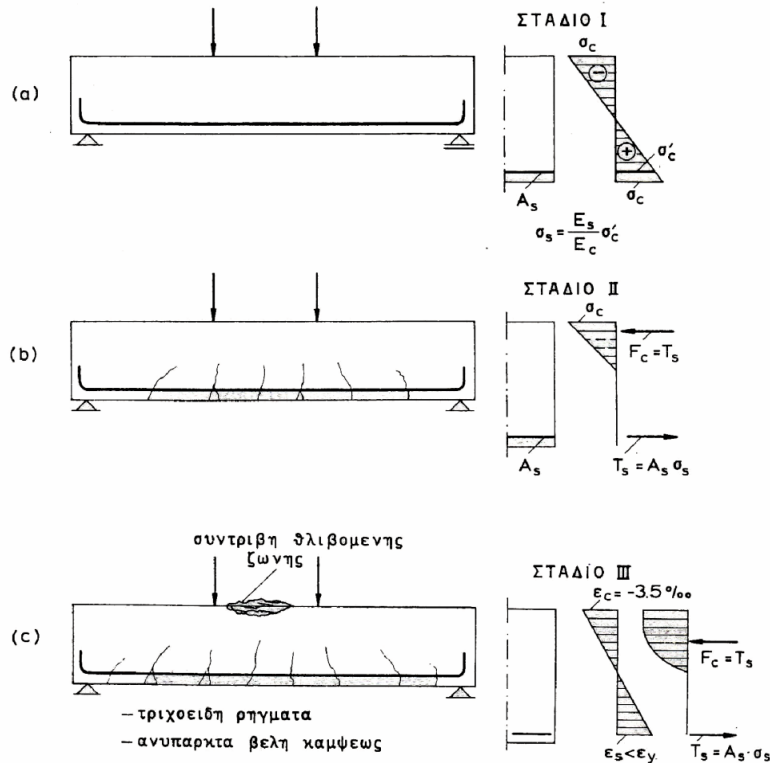


(1) Πενέλης Γ., Στυλιανίδης Κ., Κάππος Α., Ιγνατάκης Γ. (1995) “Κατασκευές από Οπλισμένο Σκυρόδεμα”, Υπηρεσία Δημοσιευμάτων Α.Π.Θ., Θεσ/νίκη

# Εικόνες καμπτικής αστοχίας δοκών Ο/Σ (4/4)

## Διατομές “ισχυρά” οπλισμένες

$$A_s < A_{s,min}$$

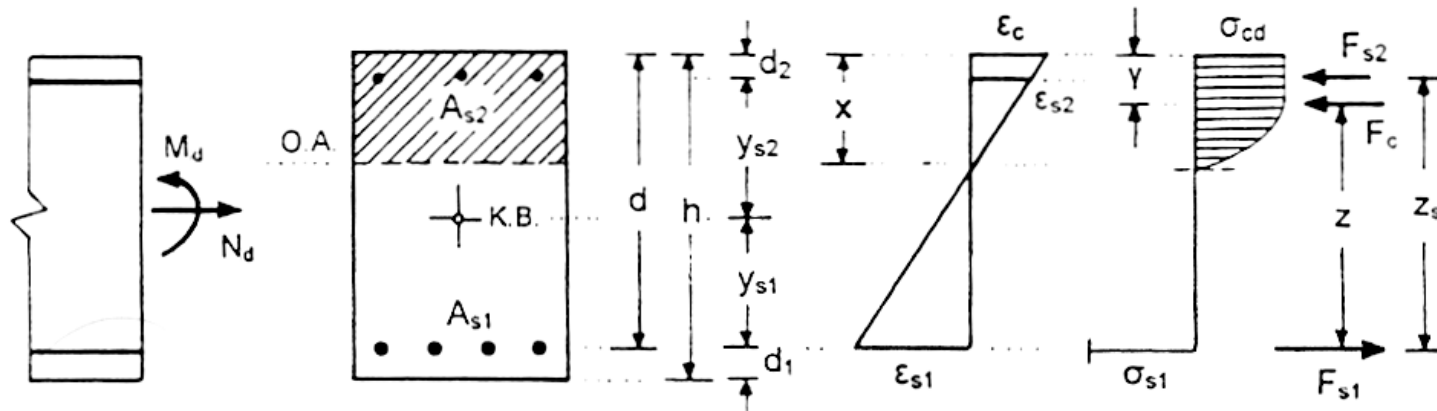


- Στο στάδιο II, λόγω όμως του υψηλού ποσοστού οπλισμού οι αναπτυσσόμενες τάσεις στον χάλυβα είναι πολύ μικρές και τα τριχοειδή ρηγάτα είναι λεπτότερα από ότι στις κανονικά οπλισμένες δοκούς
- Με την αύξηση του φορτίου και χωρίς κάποια σημαντική διεύρυνση ή επέκταση των τριχοειδών ρηγμάτων, εξαντλείται η θλιπτική αντοχή του σκυροδέματος στη θλιβόμενη ζώνη πριν από τη διαρροή του οπλισμού.
- Αιφνίδια συντριβή της θλιβόμενης ζώνης του σκυροδέματος, χωρίς προειδοποιητικά ρηγάτα μεγάλου εύρους ή μεγάλα βέλη κάμψης.
- Πρόβλεψη ενός **μέγιστου επιτρεπόμενου ποσοστού οπλισμού** στην εφελκυσμένη ζώνη ( $A_{s,max}$ ).

**Ψαθυρή συμπεριφορά**

(1) Πενέλης Γ., Στυλιανίδης Κ., Κάππος Α., Ιγνατάκης Γ. (1995) “Κατασκευές από Οπλισμένο Σκυρόδεμα”, Υπηρεσία Δημοσιευμάτων Α.Π.Θ., Θεσ/νίκη

# Πρόεχουσα κάμψη ορθογωνικών διατομών (1/6)



$F_c$

η θλιπτική δύναμη του σκυροδέματος

$F_{s1}$

η δύναμη του εφελκόμενου οπλισμού

$F_{s2}$

η δύναμη του θλιβόμενου οπλισμού

$z$

ο μοχλοβραχίονας των εσωτερικών δυνάμεων

$x$

το ύψος της θλιβόμενης ζώνης

$d$

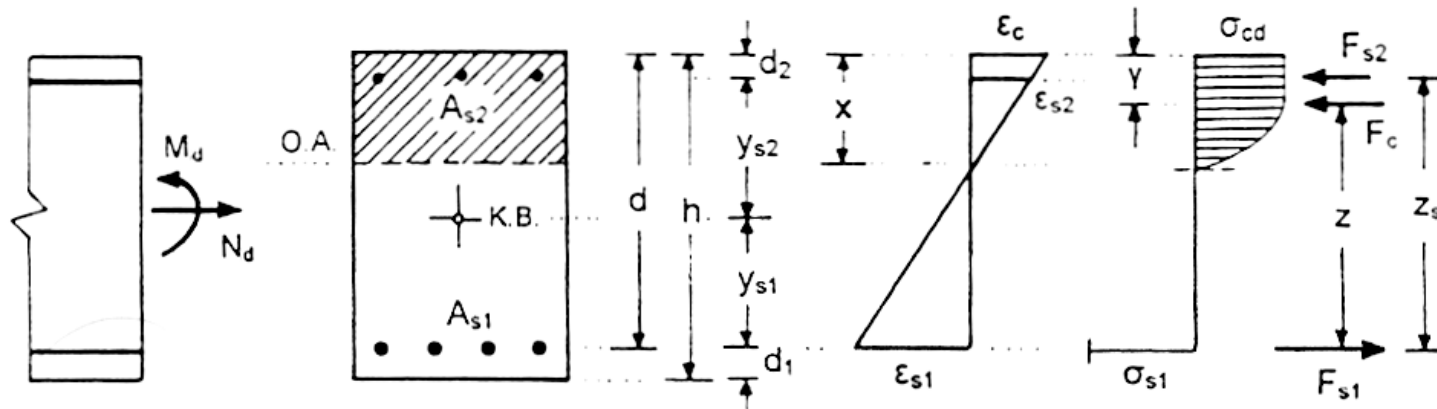
το στατικό ύψος της διατομής

$y_{s1}, y_{s2}$

η απόσταση ανάμεσα στο κέντρο βάρους της διατομής και στο κέντρο βάρους του εφελκόμενου και θλιβόμενου οπλισμού αντίστοιχα

**Θεώρηση  
σταδίου II**

# Πρόεχουσα κάμψη ορθογωνικών διατομών (2/6)



Οι εξισώσεις ισορροπίας  $\Sigma N=0$  και  $\Sigma M=0$ , για ροπές ως προς το σημείο εφαρμογής της  $F_{s1}$  δίνουν αντίστοιχα:

$$N_d + F_c + F_{s2} - F_{s1} = 0$$

$$M_{sd} - F_c \cdot z - F_{s2} \cdot z_s = 0$$

$M_{sd}$ : ροπή των εξωτερικών δυνάμεων ως προς το σημείο εφαρμογής της δύναμης  $F_{s1}$ . Η ροπή αυτή χρησιμοποιείται ουσιαστικά ως *ροπή σχεδιασμού*

$$M_{sd} = M_d - N_d \cdot y_{s1}$$

# Πρόεχουσα κάμψη ορθογωνικών διατομών (3/6)

$$M_{sd} = M_d - N_d \cdot \gamma_{s1}$$



$$\mu_{sd} = \frac{M_{sd}}{b \cdot d^2 f_{cd}}$$

$\mu_{sd}$  : η ανηγμένη τιμή της ροπής σχεδιασμού

$b$  το πλάτος της διατομής

$d$  το στατικό ύψος

$f_{cd}$  η τιμή σχεδιασμού της θλιπτικής αντοχής του σκυροδέματος

- Η ανηγμένη τιμή της ροπής συγκρίνεται με μια οριακή τιμή  $\mu_{lim}$  η οποία προσδιορίζεται συναρτήσει της ποιότητας των υλικών και του λόγου  $d_2/d$ .
- Απλοποιητικά, για χάλυβα με  $f_{yk}=500\text{MPa}$  και ποιότητες σκυροδέματος με  $f_{ck}<50\text{MPa}$  μπορεί να θεωρηθεί ότι  $\mu_{lim}=0.296$  (Καραβεζύρογλου, 2011)

# Πρόχουσα κάμψη ορθογωνικών διατομών (4/6)

Ανάλογα με το μέγεθος της  $\mu_{sd}$  διακρίνονται δύο περιπτώσεις

1. Αν  $\mu_{sd} \leq \mu_{lim}$  δεν απαιτείται η τοποθέτηση θλιβόμενου οπλισμού. Το μηχανικό ποσοστό οπλισμού  $\omega$  προσδιορίζεται από σχετικό πίνακα  
Ο απαιτούμενος εφελκυσμένος οπλισμός είναι:

$$A_s = \omega \cdot b \cdot d \cdot \frac{f_{cd}}{f_{yd}} + \frac{N_{sd}}{f_{yd}}$$

2. Αν  $\mu_{sd} > \mu_{lim}$  τότε απαιτείται η τοποθέτηση και θλιβόμενου οπλισμού και τα μηχανικά ποσοστά οπλισμού  $\omega_1$  και  $\omega_2$  για τον εφελκυσμένο και θλιβόμενο οπλισμό αντίστοιχα προσδιορίζονται από διαφορετικούς πίνακες

$$A_{s1} = \omega_1 \cdot \rho_1 \cdot b \cdot d \cdot \frac{f_{cd}}{f_{yd}} + \frac{N_{sd}}{f_{yd}}$$

$$A_{s2} = \omega_2 \cdot \rho_2 \cdot b \cdot d \cdot \frac{f_{cd}}{f_{yd}}$$

# Πρόχουσα κάμψη ορθογωνικών διατομών (5/6)

Πίνακας υπολογισμού οπλισμού κάμψης ορθογωνικών διατομών  
**χωρίς** θλιβόμενο οπλισμό

$\mu_{sd}$	$\omega$	$\xi=x/d$	$\zeta=z/d$	$\epsilon_c$ (‰)	$\epsilon_s$ (‰)
0.01	0.0101	0.030	0.990	0.77	25.00
0.02	0.0203	0.044	0.985	1.15	25.00
0.03	0.0306	0.055	0.980	1.46	25.00
0.04	0.0410	0.066	0.976	1.76	25.00
0.05	0.0515	0.076	0.971	2.06	25.00
0.06	0.0621	0.086	0.967	2.37	25.00
0.07	0.0728	0.097	0.962	2.68	25.00
0.08	0.0836	0.197	0.957	3.01	25.00
0.09	0.0946	0.118	0.951	3.35	25.00
0.10	0.1058	0.131	0.946	3.20	23.29
0.11	0.1170	0.145	0.940	3.50	20.71
0.12	0.1285	0.159	0.934	3.50	18.55
0.13	0.1401	0.173	0.928	3.50	16.73
0.14	0.1519	0.188	0.922	3.50	15.16



# Πρόχουσα κάμψη ορθογωνικών διατομών (6/6)

Πίνακες υπολογισμού οπλισμού κάμψης ορθογωνικών διατομών  
με θλιβόμενο οπλισμό

$\mu_{sd}$	$\omega_1$	$\omega_2$	$\xi=x/d$	$\zeta=z/d$	$\epsilon_c$ (‰)	$\epsilon_s$ (‰)
0.30	0.3670	0.004	0.81	0.45	3.50	4.278
0.32	0.3870	0.025				
0.34	0.4080	0.045				
0.36	0.4280	0.066				
0.38	0.4490	0.086				
0.40	0.4690	0.107				
0.42	0.4900	0.128				
0.44	0.5100	0.148				
0.46	0.5310	0.169				
0.48	0.5510	0.19				
0.50	0.5720	0.21				

Συντελεστές $\rho_1$ και $\rho_2$	$\omega_1$ (Πίν.6.2)	$d_2/d$							
		0.03	0.05	0.07	0.09	0.11	0.13	0.15	0.17
$\rho_1$	<0.363	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	0.469	1.000	1.005	1.010	1.015	1.020	1.026	1.032	1.038
	0.572	1.000	1.008	1.016	1.024	1.033	1.042	1.052	1.062
	0.674	1.000	1.010	1.020	1.030	1.042	1.053	1.065	1.078
	0.777	1.000	1.011	1.023	1.035	1.048	1.061	1.075	1.090
$\rho_2$		1.000	1.021	1.043	1.066	1.090	1.115	1.141	1.169