Δυναμική των Κατασκευών

Ασκήσεις Πράξης

Διδάσκων: Κολιόπουλος Παναγιώτης
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

ΤΕΙ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Κεντρικής Μακεδονίας» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΟΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΣΕΡΡΩΝ ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΙΑΣ

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ

Διδάσκων: Κολιόπουλος Παναγιώτης
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΑΞΗΣ

Ορισμοί:

- Μεταφορική δυσκαμψία (αντίσταση) ενός συστήματος για μετατόπιση στη διεύθυνση x-x, **k_x(kN/m)** = η στατική δύναμη P_x που απαιτείται να εφαρμοσθεί ώστε να προκληθεί μοναδιαία μετατόπιση u_x(m).
- Στροφική δυσκαμψία (αντίσταση) ενός συστήματος για στροφή γύρω από άξονα y-y, **$k_{\theta,y}$(kNm/rad)** = η στατική ροπή M_y που απαιτείται να εφαρμοσθεί ώστε να προκληθεί μοναδιαία στροφή θ_y(rad).

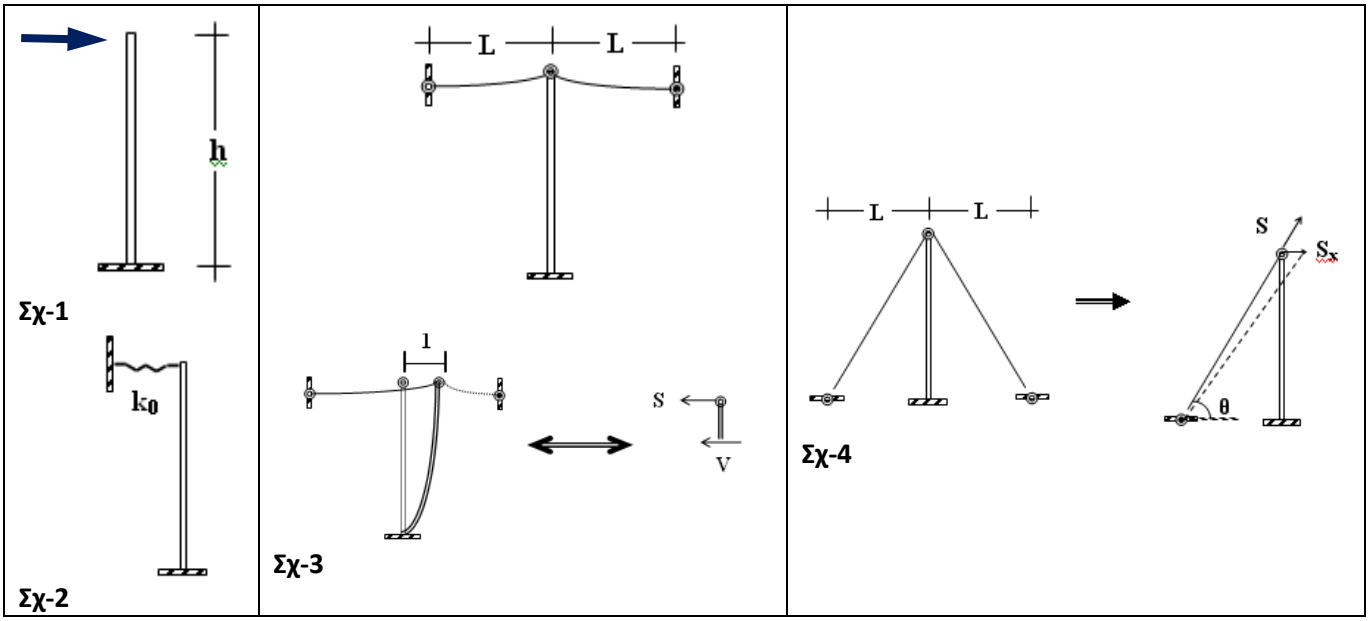
Εφαρμογές

(I) Να υπολογισθεί η μεταφορική δυσκαμψία του προβόλου του σχήματος 1 με ύψος h = 4.0 m και τετραγωνική διατομή 40x40 (σε cm). **Δίνεται**: $E = 21 \cdot 10^6$ kN/m^2

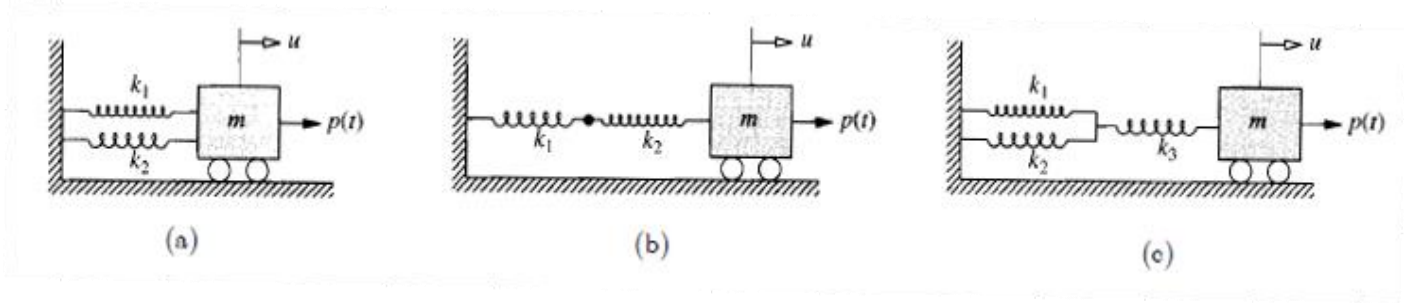
(II) Για την αύξηση της δυσκαμψίας του προηγούμενου προβόλου προστίθεται οριζόντιο ελατήριο δυστένειας k_0 (σχ.2). Να προσδιορισθεί η σταθερά k_0 ώστε η συνολική δυσκαμψία του φορέα να ισούται με k_{tot} = 3000 kN/m.

(III) Αν αντί για ελατήριο χρησιμοποιηθούν δύο οριζόντια συμμετρικά καλώδια (σχ.3) μήκους L= 2.0 m, κυκλικής διατομής με διάμετρο d και από υλικό με μέτρο ελαστικότητας $E = 21*10^6$ kN/m^2, να υπολογισθεί η διάμετρος d ώστε η συνολική δυσκαμψία του φορέα να ισούται με ktot = 3000 kN/m.

(IV) Να επαναληφθούν οι υπολογισμοί του προηγούμενου ερωτήματος αν τα καλώδια στηρίζονται στο έδαφος (σχ.4).

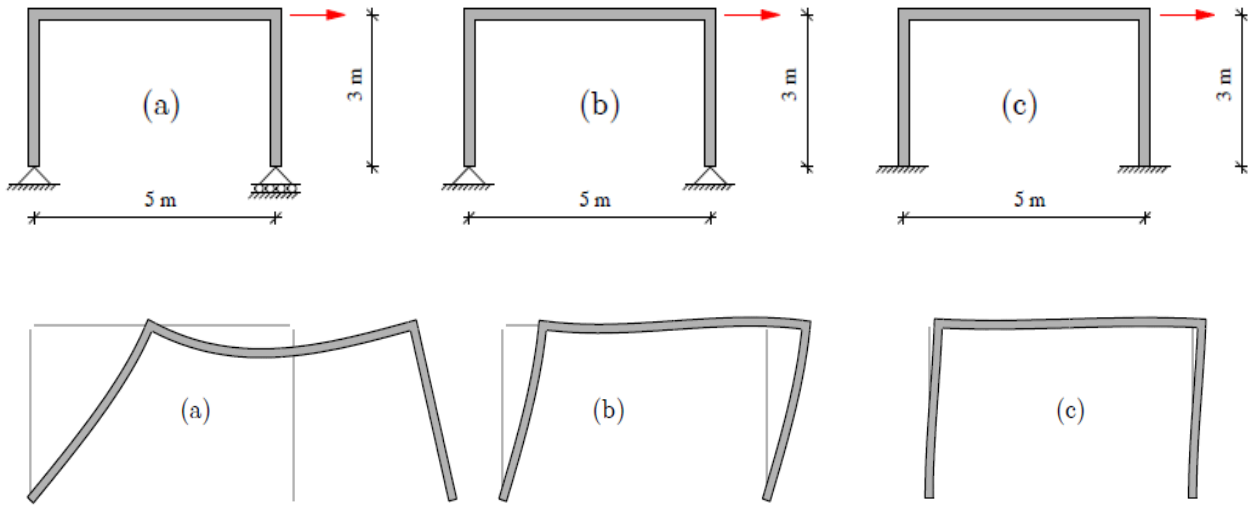


(V)



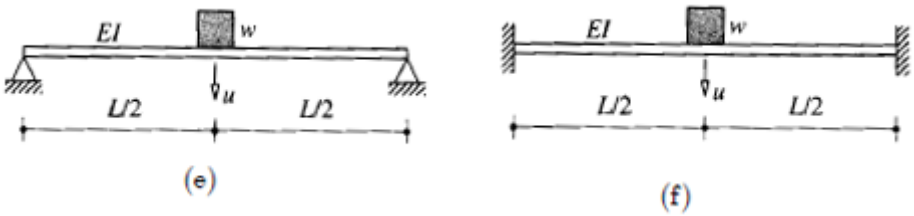
(a) $K = k_1+k_2$ **(b) $K = (k_1 \cdot k_2)/(k_1+k_2)$** **(c) $K = k_3 \cdot (k_1+k_2)/(k_1+k_2+k_3)$**

(VI)



Σταθερό EI **(a) k = 0.0417·EI** **(b) k = 0.121·EI** **(c) k = 0.538·EI**

(VII)

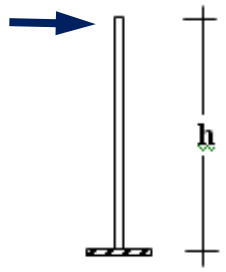


€ K = 48·EI/L^3 = 2·3EI/(L/2)^3 **(f) K = 192·EI/L^3 = 2·12EI/(L/2)^3**

ΛΥΣΕΙΣ

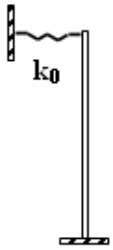
(I) Να υπολογισθεί η μεταφορική δυσκαμψία του προβόλου του σχήματος με ύψος h = 4.0 m και τετραγωνική διατομή 40x40 (σε cm).
Δίνεται: $E = 21\cdot10^6$ kN/m^2

Η δυσκαμψία k = δύναμη P που προκαλεί μοναδιαία μετατόπιση της κορυφής.
$M(x) = EI*\kappa(x) = P*(h-x)$, x = απόσταση από πάκτωση, κ(x) = καμπυλότητα →
$EI*\phi(x) = \int EI*\kappa(x)dx = \int P*(h-x)dx = P*(hx-x^2/2)+c$, ϕ(x) = στροφή. ϕ(0) = 0 → c = 0
$EI*v(x) = \int EI*\phi(x)dx = P*(h\,x^2/2-x^3/6)+c$, v(x) = μετατόπιση. v(0) = 0 → c = 0
$EI*v(h) = P*h^3/3$ → Για v(h) = 1, $P = k = 3\cdot E\cdot I/h^3 = 3\cdot(21\cdot10^6)\cdot(0.4^4/12)/4^3 = 2100$ kN/m



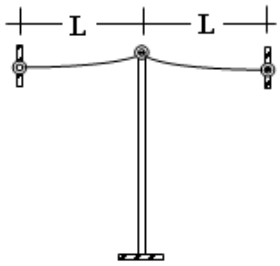
(II) Για την αύξηση της δυσκαμψίας του προηγούμενου προβόλου προστίθεται οριζόντιο ελατήριο δυστένειας k_0. Να προσδιορισθεί η σταθερά k0 ώστε η συνολική δυσκαμψία του φορέα να ισούται με ktot = 3000 kN/m.

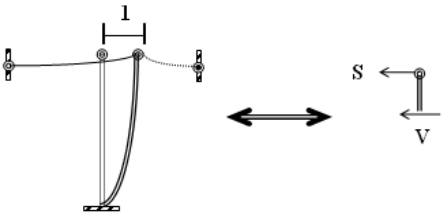
$K_{tot} = k + k_0 = 2100 + k0 = 3000$ → k0 = 900 kN/m



(III) Αν αντί για ελατήριο χρησιμοποιηθούν δύο οριζόντια συμμετρικά καλώδια μήκους L= 2.0 m, κυκλικής διατομής με διάμετρο d και από υλικό με μέτρο ελαστικότητας $E = 21*10^6$ kN/m^2, να υπολογισθεί η διάμετρος d ώστε η συνολική δυσκαμψία του φορέα να ισούται με ktot = 3000 kN/m.

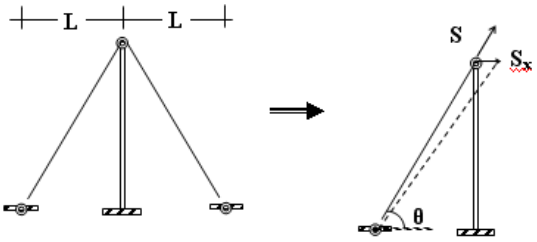
Τα καλώδια αντιστέκονται μόνο σε εφελκυσμό, οπότε ανά πάσα στιγμή μόνο ένα καλώδιο συμμετέχει στην αντίσταση (δυσκαμψία) του φορέα.
Αν η αντίσταση του καλωδίου τεθεί ως kc, έχουμε και πάλι
$K_{tot} = k + k_c = 2100 + k_c = 3000$ → $k_c = 900$ kN/m
Εξ' ορισμού, η παραπάνω αντίσταση θα ισούται με την δύναμη που αναπτύσσεται στο καλώδιο για μοναδιαία μετατόπιση του άκρου του.
Από το μάθημα της Αντοχής έχουμε ότι για καλώδιο μήκους L και εμβαδού διατομής A, η δύναμη που προκαλεί μήκυνση καλωδίου κατά δL, είναι: $S = (E\cdot A/L)\cdot\delta L$
Για δL = 1, → $S = k = E\cdot A/L = (21\cdot10^6)\cdot A/2.0 = 900$ →
$A = 28.571\cdot10^{-5}$ m^2 = $(\pi\cdot d^2/4)$ → d = 0.01 m = 1cm.



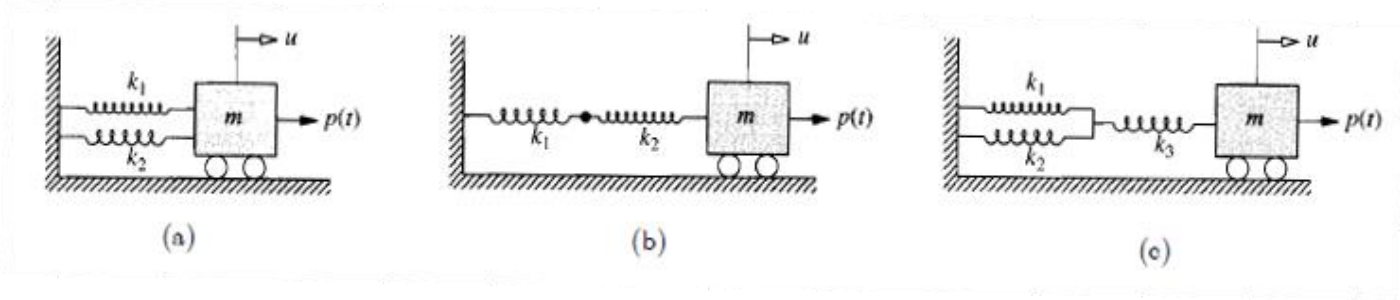


(IV) Να επαναληφθούν οι υπολογισμοί του προηγούμενου ερωτήματος αν τα καλώδια στηρίζονται στο έδαφος.

(α) Το μήκος καλωδίου $L' = (4^2+2^2)^{1/2} = 4.472$ m
(β) Η δυσκαμψία αφορά <u>οριζόντια</u> μετακίνηση κορυφής. Η δύναμη καλωδίου όμως δεν είναι πλέον οριζόντια, οπότε μας ενδιαφέρει η συνιστώσα $S_x = S\cdot\cos\theta$.
(γ) Η μοναδιαία οριζόντια μετακίνηση, αντιστοιχεί σε μήκυνση καλωδίου $\delta L = 1\cdot\cos\theta$.
(δ) $S = (E\cdot A/L')\cdot1\cdot\cos\theta$ → $k_c = S_x = (E\cdot A/L')\cdot\cos\theta^2 = 900$ kN/m
Εδώ $\tan\theta = 4/2 = 2$ → θ = 1,107 rad → $\cos\theta = 0.447$ → $A = (900\cdot4.472)/(21\cdot10^6\cdot0.447^2) = 9.59\cdot10^{-4}$m^2 $=(\pi\cdot d^2/4)$ → d =3.5cm

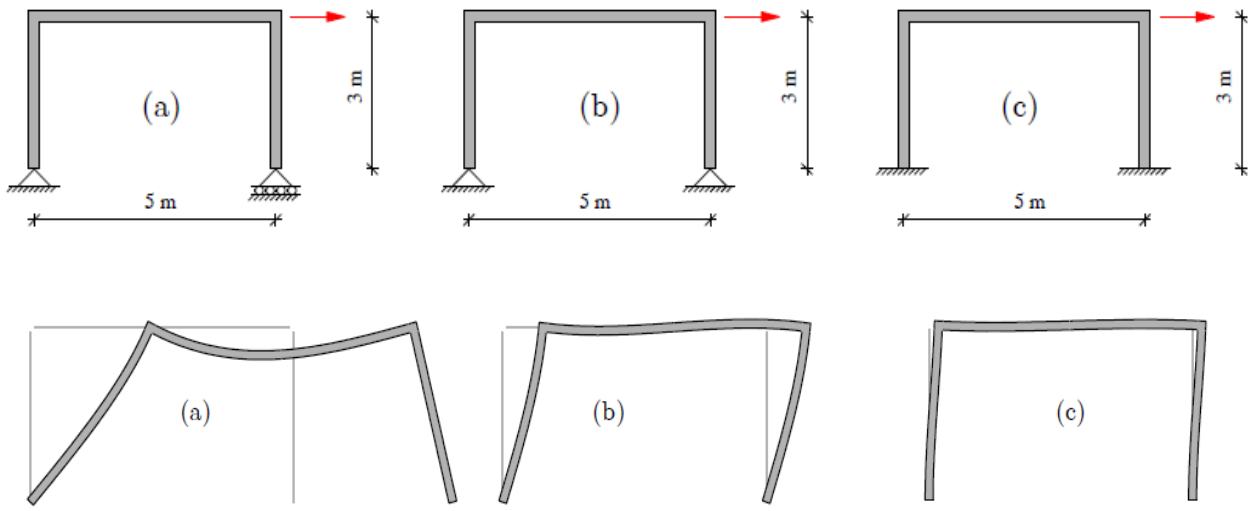


(V)



(a) K = k_1+k_2 **(b) K = $(k_1 \cdot k_2)/(k_1+k_2)$** **(c) K = $k_3 \cdot (k_1+k_2)/(k_1+k_2+k_3)$**

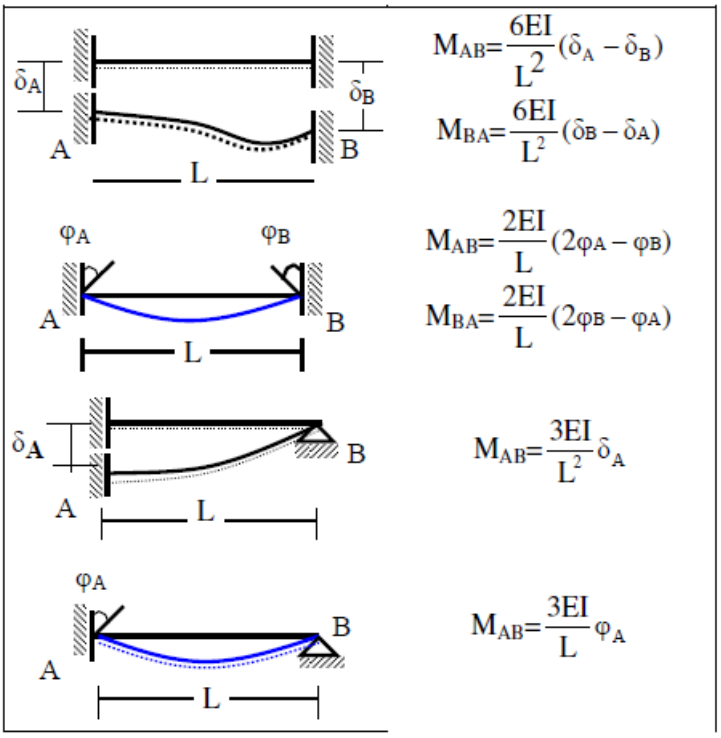
(VI)



Σταθερό EI → (a) k = 0.0417·EI **(b) k = 0.121·EI** **(c) k = 0.538·EI**

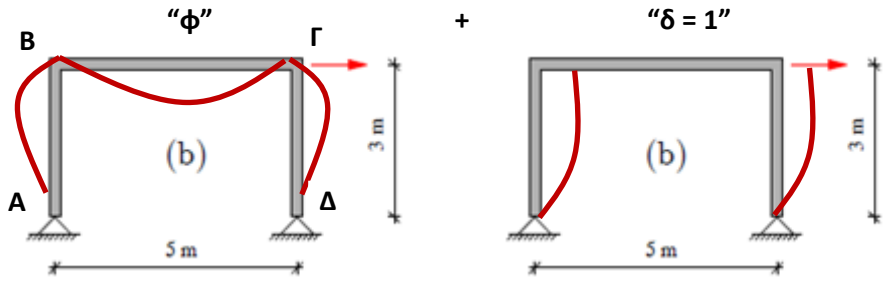
<u>Σχόλιο-1</u>: Στις περιπτώσεις (a) & (b) οι στύλοι είναι μονόπακτοι δοκοί με τον εσωτερική πάκτωση (κόμβος κεφαλής) να παρουσιάζει μετατόπιση & στροφή. Στην περίπτωση (c) οι στύλοι είναι αμφίπακτοι δοκοί, με ανάλογα χαρακτηριστικά. Σε όλες τις περιπτώσεις το ζύγωμα είναι αμφίπακτη δοκός με εσωτερικές πακτώσεις (κόμβοι αρχής - τέλους) που στρέφονται αλλά η (αξονική) ισόποση μετακίνησή τους <u>δεν δημιουργεί</u> πρόσθετη καμπτική ροπή.

<u>Σχόλιο-2</u>: Στην περίπτωση (a) μόνο ο αριστερά στύλος αναπτύσσει τέμνουσα (= P) και ροπή → συνδυασμός μετατόπισης + στροφής κόμβων δεξιού στύλου οδηγεί σε μηδενισμό τέμνουσας + ροπής. Στις περιπτώσεις (b) & (c) οι στύλοι αναπτύσσουν ίσες τέμνουσες (= P/2) και αντισυμμετρικές ροπές



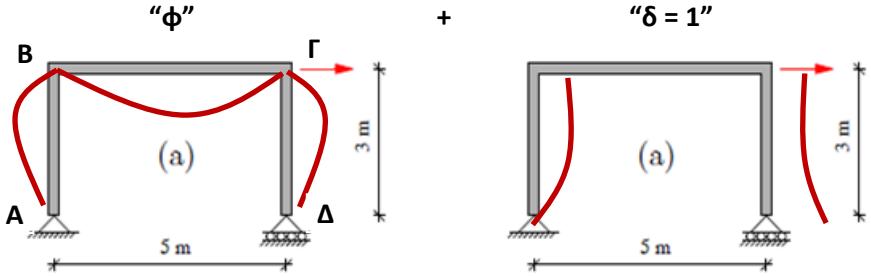
$$M_{AB}=\frac{6EI}{L^2}(\delta_A-\delta_B)$$
$$M_{BA}=\frac{6EI}{L^2}(\delta_B-\delta_A)$$
$$M_{AB}=\frac{2EI}{L}(2\varphi_A-\varphi_B)$$
$$M_{BA}=\frac{2EI}{L}(2\varphi_B-\varphi_A)$$
$$M_{AB}=\frac{3EI}{L^2}\delta_A$$
$$M_{AB}=\frac{3EI}{L}\varphi_A$$

Π.χ. Απόδειξη περίπτωσης αμφιαρθρωτού (b): Ζητούμενη δυσκαμψία K = P που προκαλεί μετακίνηση $\delta_x = 1$



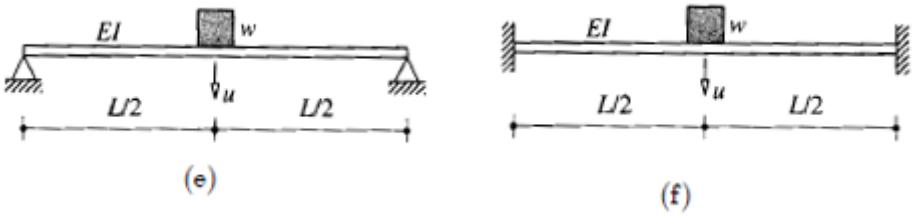
$M_{BA} = -3EI\phi_B/3 + 3EI\cdot 1/3^2$ $M_{B\Gamma} = (2EI/5)\cdot(2\phi_B-\phi_\Gamma)$ $M_{\Gamma B} = (2EI/5)\cdot(2\phi_\Gamma-\phi_B)$ $M_{\Gamma\Delta} = -3EI\phi_\Gamma/3 - 3EI\cdot 1/3^2$
Ισορροπία ζυγώματος $\Sigma F_\chi = 0 \rightarrow V_{BA} = V_{\Gamma\Delta} = P/2 \rightarrow M_{BA} = -M_{\Gamma\Delta} = 3P/2 \rightarrow M_{B\Gamma} = -M_{\Gamma B} \rightarrow EI\phi_B = -EI\phi_\Gamma = 5P/4$
$M_{BA} = -5P/4+EI/3 = 3P/2 \rightarrow P/EI = 4/33 = 0.121$

Π.χ. Απόδειξη περίπτωσης ισιστατικού (a): Ζητούμενη δυσκαμψία K = P που προκαλεί μετακίνηση $\delta_x = 1$



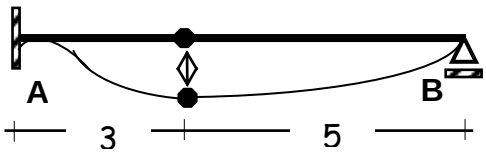
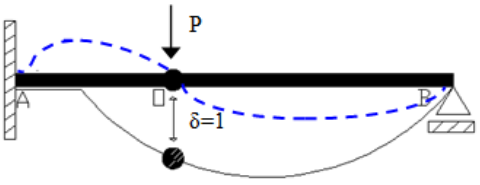
Ισορροπία ζυγώματος $\Sigma F_\chi = 0 \rightarrow V_{BA} = P,\ V_{\Gamma\Delta} = 0 \rightarrow\ M_B = 3P,\ M_\Gamma = 0$
$M_{\Gamma B} = 0 = (2EI/5)\cdot(2\phi_\Gamma-\phi_B) \rightarrow \phi_\Gamma = \phi_B/2 \rightarrow M_{B\Gamma} = (2EI/5)\cdot(2\phi_B-\phi_B/2) = 3P \rightarrow EI\phi_B = 5P$
$M_{BA} = 3P = -3\cdot 5P/3 + 3EI\cdot 1/3^2 \rightarrow P/EI = 3/72 = 0.0417$

(VII)



(e) $K = 48\cdot EI/L^3 = 2\cdot 3EI/(L/2)^3$ **(f) $K = 192\cdot EI/L^3 = 2\cdot 12EI/(L/2)^3$**

<u>Σχόλιο-1</u>: K → ανεξάρτητο βάρους / φόρτισης,
<u>Σχόλιο-2</u>: λόγω <u>συμμετρίας</u> ο εσωτερικός μεσαίος κόμβος = πάκτωση <u>χωρίς στροφή</u> →
(e) = 2 άστρεπτες μονόπακτες μήκους L/2, (f) = 2 άστρεπτες αμφίπακτες μήκους L/2.

<u>Σχόλιο-3</u>: Χωρίς συμμετρία έχουμε <u>και στροφή</u> (→ πιο ενδόσιμο).

Π.χ. **K = 0.314·EI** < $12EI/3^3+3EI/5^3 = 0.468\cdot EI$