Δυναμική των Κατασκευών

Ασκήσεις Πράξης

Διδάσκων: Κολιόπουλος Παναγιώτης
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

ΤΕΙ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Κεντρικής Μακεδονίας» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΣΕΡΡΩΝ ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΙΑΣ

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ

Διδάσκων: Κολιόπουλος Παναγιώτης

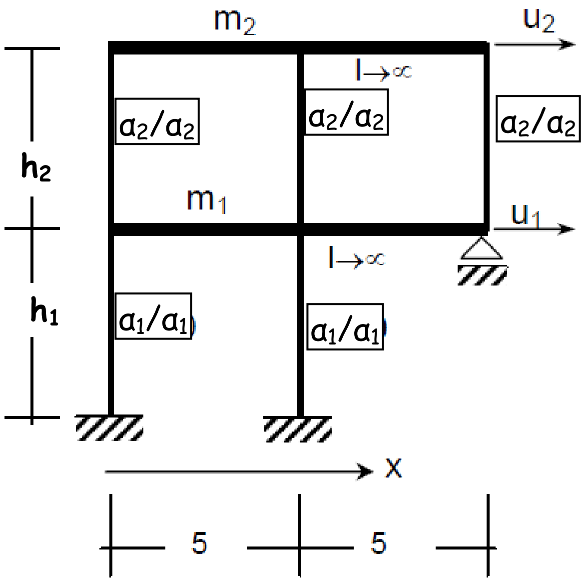
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΑΞΗΣ

ΤΕΙ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

Άσκηση 8

Για το αναπόσβεστο διώροφο διατμητικό πλαίσιο του σχήματος, ζητούνται:
(α) Ο υπολογισμός των μητρώων μάζας [M] και δυσκαμψίας [K]
(β) Ο υπολογισμός ιδιοσυχνοτήτων (σύγκριση με τις ιδιοσυχνότητες ανεξάρτητων μονοβάθμιων μάζας και δυσκαμψίας που αντιστοιχούν στους επιμέρους ορόφους – εξαγωγή συμπερασμάτων)
(γ) Ο υπολογισμός και η σχεδίαση των ιδιομορφών (<u>κανονικοποίηση ως προς το άνω ζύγωμα</u>)
(δ) Ο υπολογισμός των γενικευμένων μητρώων μάζας M* και δυσκαμψίας K* (σύγκριση με τα μητρώα μάζας του φυσικού συστήματος – εξαγωγή συμπερασμάτων)



<u>Να ληφθούν:</u>
$E = 30x10^6$ kN/m^2, $h_1(m) = 4$, $h_2(m) = 3$, $m_1(tn) = 40$, $m_2(tn) = 25$, $a_1(cm)= 40$, $a_2(cm)= 30$

Λύση

(α)

Εξισώσεις ισορροπίας ($k_1 = k_{ισογ}$, $k_2 = k_{οροφ}$):

$$m_1 \rightarrow m_1u_1'' + k_1\, u_1 + k_2\, (u_1\text{-}u_2) = 0, \quad m_2 \rightarrow m_2u_2'' + k_2\, (u_2\text{-}u_1) = 0$$

$k_1 = 2*12E*I_{40/40}/h_1^3 = 2*12*(30x10^6)*(0.4^4/12)/4^3 = 24000kN/m$

$k_2 = 3*12E*I_{30/30}/h_2^3 = 3*12*(30x10^6)*(0.3^4/12)/3^3 = 27000kN/m$

Σε μητρωική μορφή:

$$M= \begin{vmatrix} 40 & 0 \\ 0 & 25 \end{vmatrix} \qquad K= \begin{vmatrix} 51000 & -27000 \\ -27000 & 27000 \end{vmatrix}$$

Εναλλακτικά,

$$M= 5* \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \qquad K=10^3* \begin{vmatrix} 51 & -27 \\ -27 & 27 \end{vmatrix}$$

(β)

Υπολογισμός ιδιοσυχνοτήτων, $|K-\omega^2 M| = 0$:

(i) Αρχική εκδοχή K, M

$$\begin{vmatrix} 51000 - 40\omega^2 & -27000 \\ -27000 & 27000 - 25\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

→ $1000\omega^4 - 2355000\omega^2 + 648000000 = 0$ → …. Τριώνυμο ως προς $\lambda = \omega^2$ (αλλά, πολύ μεγάλοι αριθμοί → αυξημένη πιθανότητα σφάλματος)

(ii) Εναλλακτική εκδοχή K, M

$$1000 * \begin{vmatrix} 51 - 8*(5\omega^2/1000) & -27 \\ -27 & 27 - 5*(5\omega^2/1000) \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} 51 - 8*\lambda & -27 \\ -27 & 27 - 5*\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ όπου } \lambda = 5\omega^2/1000 = \omega^2/200$$

$(51-8\lambda)*(27-5\lambda)-27^2 = 0$ → $40\lambda^2 - 471\lambda + 648 = 0$ → $\Delta^{1/2} = 118161^{1/2} = 343.75$ →
$\lambda_1 = 1.591$, $\lambda_2 = 10.184$ → $\omega_1^2 = 318.14$, $\omega_2^2 = 2036.86$ → $\omega_1 = 17.836$rad/s, $\omega_2 = 45.132$rad/s →
$T_1 = 0.352$s, $T_2 = 0.139$s

<u>Προσοχή</u> την διάταξη των ιδιοσυχνοτήτων: πρέπει $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \ldots$..

Σύγκριση με την (<u>εντελώς λανθασμένη</u>) θεώρηση των ορόφων ως ανεξάρτητων ταλαντωτών:
$\tilde{\omega}_1 = (k_1/m_1)^{1/2} = (24000/40)^{1/2} = 24.5$rad/s, $\tilde{\omega}_2 = (k_2/m_2)^{1/2} = (27000/30)^{1/2} = 30$rad/s
Στην πραγματικότητα, ο φορέας ταλαντώνεται ως ένα ενιαίο <u>συζευγμένο</u> σύστημα.. Οι μάζες <u>αλληλεπιδρούν</u> μεταξύ τους..!!!

<u>Οριακές περιπτώσεις</u>:
Τι θα γινόταν αν $k_1 \rightarrow \infty$??
Το τελείως άκαμπτο ισόγειο, θα αποτελούσε βάση/θεμελίωση για τον ‘μονοβάθμιο΄ όροφο με $\omega = 30$rad/s

Τι θα γινόταν αν $k_2 \rightarrow \infty$??
Οι 2 μάζες συνδέονται μονολιθικά – απαραμόρφωτο ‘κουτί - και συνθέτουν μια συνολική ταλαντούμενη μάζα $m = 40+25 = 65$tn, με ενιαία μετάθεση. Η δυσκαμψία ταυτίζεται με αυτήν των στύλων ισογείου.
Οπότε θα έχουμε εκφυλισμό σε μονοβάθμιο σύστημα με $\omega = (24000/65)^{1/2} = 19.22$rad/s

(γ)

Υπολογισμός ιδιομορφών $[K-\omega_j^2 M]\cdot[\Phi_j] = [0]$:

$$\begin{bmatrix} 51 - 8*\lambda_j & -27 \\ -27 & 27 - 5*\lambda_j \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \Phi_{1,j} \\ \Phi_{2,j} \end{bmatrix} = 0$$

Για $\lambda_1 = 1.591$ → $(51-8*1.591)\,\Phi_{11} - 27\Phi_{21} = 0$ → $38.27\Phi_{11} - 27\Phi_{21} = 0$.
Θέτουμε αυθαίρετα $\Phi_{21} = 1$ (κανονικοποίηση στον άνω όροφο) → $38.27\Phi_{11} = 27$ → $\Phi_{11} = 0.705$

Η ίδια ακριβώς σχέση προκύπτει και με την εκτέλεση πολλαπλασιασμού της 2ης σειράς. Πράγματι $-27\Phi_{11} + (27\text{-}5*1.591)\Phi_{21} = 0 \rightarrow -27\Phi_{11} + 19.05\Phi_{21} = 0 \rightarrow \ldots \rightarrow \Phi_{11} = 0.705$!!!

Για $\lambda_2 = 10.184 \rightarrow (51\text{-}8*10.184)\ \Phi_{12} - 27\Phi_{22} = 0 \rightarrow -30.47\Phi_{12} - 27\Phi_{22} = 0$.
Θέτουμε ξανά $\Phi_{22} = 1$ (κανονικοποίηση στον άνω όροφο) $\rightarrow -30.47\Phi_{11} = 27 \rightarrow \Phi_{12} = -0.886$
Η ίδια ακριβώς σχέση προκύπτει και με την εκτέλεση πολλαπλασιασμού της 2ης σειράς….

Ιδιομορφικό μητρώο

$$\Phi = \begin{vmatrix} 0{,}705 & -0{,}886 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

(δ)
Υπολογισμός των <u>διαγώνιων</u> γενικευμένων μητρώων $M^* = \Phi^T \cdot M \cdot \Phi$, $K^* = \Phi^T \cdot K \cdot \Phi$:

$$\Phi^T = \begin{vmatrix} 0{,}705 & 1 \\ -0{,}886 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Phi^T M = \begin{vmatrix} 28{,}2 & 25 \\ -35{,}44 & 25 \end{vmatrix} \qquad \Phi^T M \Phi = \begin{vmatrix} 44{,}88 & 0{,}01 \\ 0{,}01 & 56{,}40 \end{vmatrix}$$

$$\Phi^T K = \begin{vmatrix} 8955 & 7965 \\ -72186 & 50922 \end{vmatrix} \qquad \Phi^T K \Phi = \begin{vmatrix} 14278{,}3 & 30{,}9 \\ 30{,}9 & 114878{,}8 \end{vmatrix}$$

Οι μη διαγώνιοι όροι είναι αμελητέοι συγκρινόμενοι με τους διαγώνιους (με απόλυτη ακρίβεια υπολογισμών, θα προέκυπταν μηδενικοί)
<u>Έλεγχος:</u>
$(14278.3/44.88)^{1/2} = 17.836\text{rad/s} = \omega_1$!! $\qquad (114878.8/56.40)^{1/2} = 45.132\text{rad/s} = \omega_2$!!
Οι γενικευμένες μάζες & δυσκαμψίες, διαφέρουν από τις αντίστοιχες των ορόφων του φυσικού συστήματος, καθώς στον προσδιορισμό της κάθε γενικευμένης μάζας/δυσκαμψίας:
(1) συμμετέχουν <u>όλες</u> οι μάζες/δυσκαμψίες του συστήματος
(2) συμμετέχουν (εν είδη συντελεστών βαρύτητας) οι ιδιομορφές που, λόγω κανονικοποίησης, έχουν αυθαίρετες αριθμητικές τιμές (αλλά με σωστές αναλογίες).