ΤΕΙ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ

Ενότητα 3&4: ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΑΡΜΟΝΙΚΗΣ ΔΙΕΓΕΡΣΗΣ

Διδάσκων: Κολιόπουλος Παναγιώτης

ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

CC BY SA

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.

- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Κεντρικής Μακεδονίας» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Ενότητα 3&4

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ

Διδάσκων: Κολιόπουλος Παναγιώτης

Περιεχόμενα ενότητας

1. ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΑΡΜΟΝΙΚΗΣ ΔΙΕΓΕΡΣΗΣ
2. Πειραματικός προσδιορισμός δυναμικών χαρακτηριστικών υφιστάμενων κατασκευών
3. ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΛΟΓΩ ΕΔΑΦΙΚΟΥ ΚΡΑΔΑΣΜΟΥ

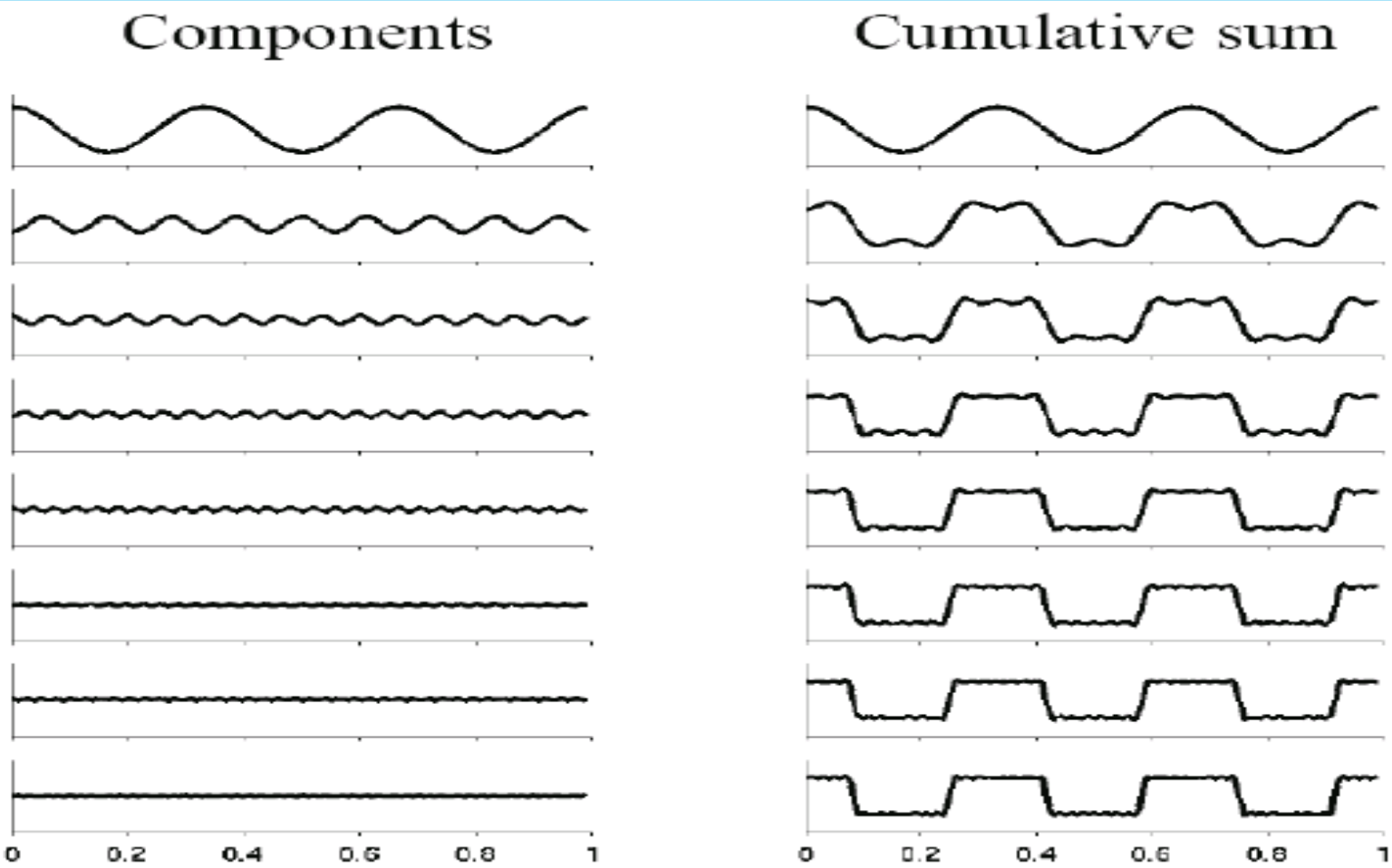
Σκοποί ενότητας

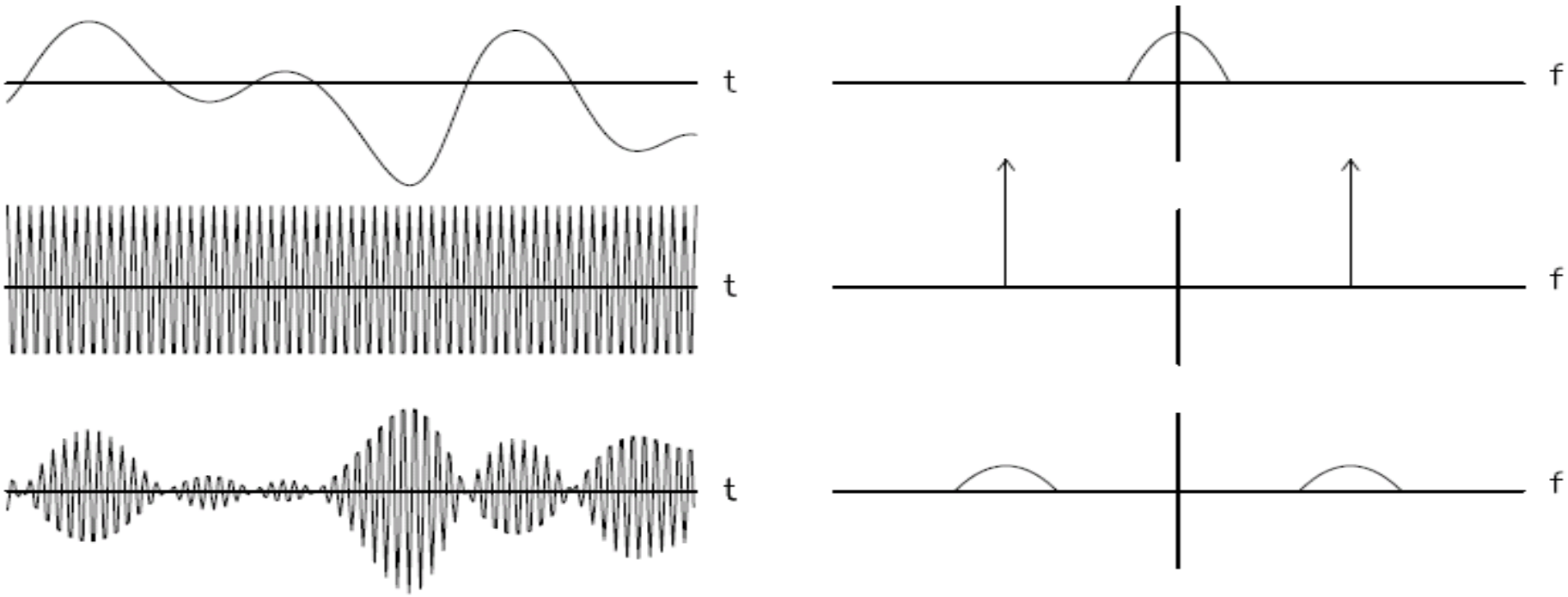
ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΑΡΜΟΝΙΚΗΣ ΔΙΕΓΕΡΣΗΣ

Αρμονική διέγερση με μοναδική (ή κυρίαρχη) συχνότητα $\overline{\omega}$ μπορεί να παρασταθεί ως: $f(t) = f_0 \sin \overline{\omega} t$,

Αρμονικές διεγέρσεις είναι σπάνιες (λειτουργία βαρέων μηχανημάτων, δράση ήπιων κυματισμών). Συνήθως συνυπάρχουν πολλές συχνότητες.

Αποτελεί θεμελιώδη μορφή διέγερσης, διότι.
(α) Λόγω της μαθηματικής της απλότητας, επιτρέπει την διερεύνηση πολύ σημαντικών παραμέτρων της καταναγκασμένης ταλάντωσης,
(β) Μέσω του μετασχηματισμού Fourier, σύνθετες μορφές διέγερσης μπορούν να αναλυθούν σε ένα άθροισμα αρμονικών συνιστωσών (αρχή επαλληλίας γραμμικών φορέων).


Components
Cumulative sum
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1



Παραδείγματα μετασχηματισμού Fourier,
Πεδίο χρόνου t (αριστερά) – πεδίο συχνοτήτων f (δεξιά)

Άθροισμα αρμονικών συνιστωσών (επαλληλία) ανασυνθέτει την αρχική χρονοιστορία (Σf ➔ t).

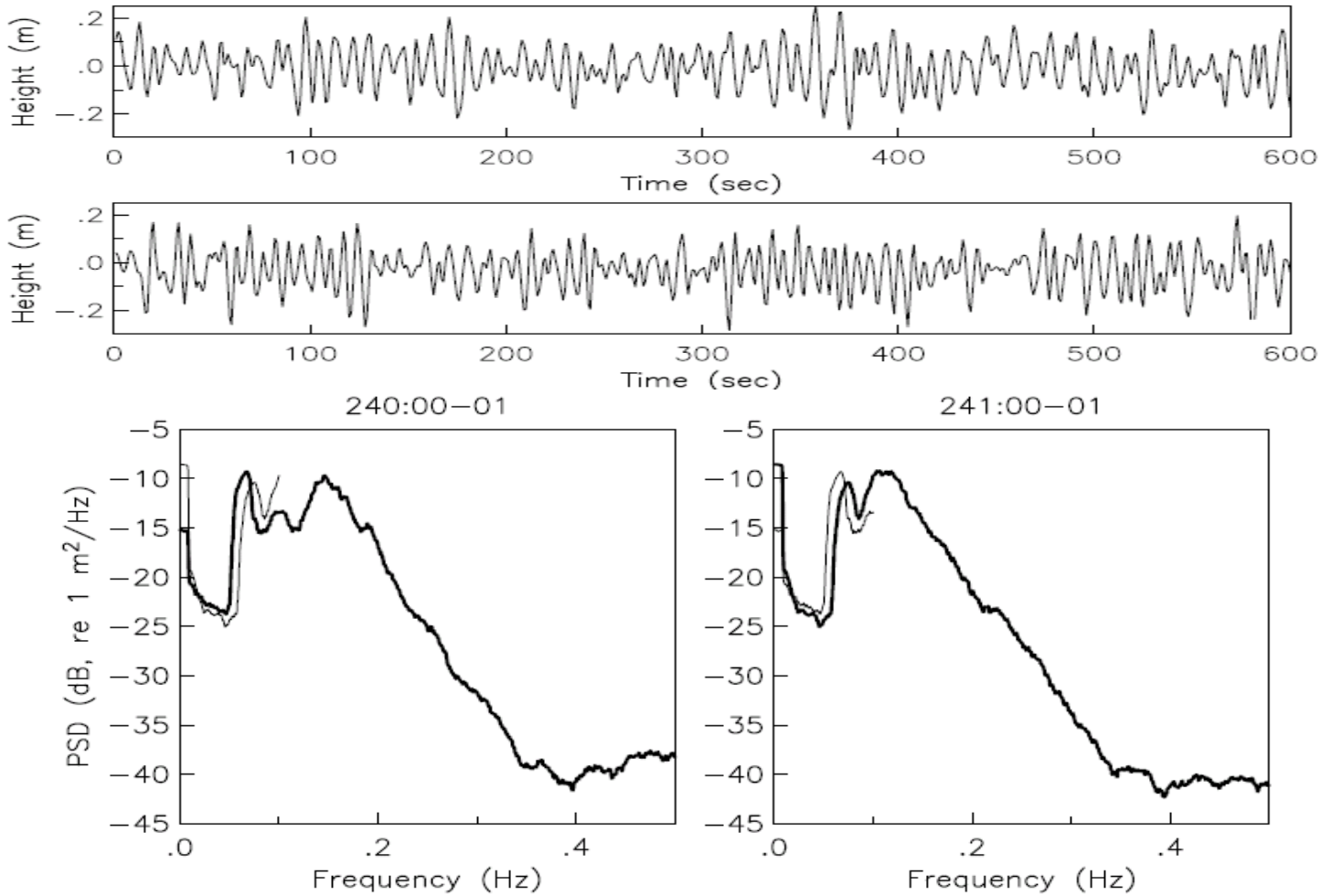
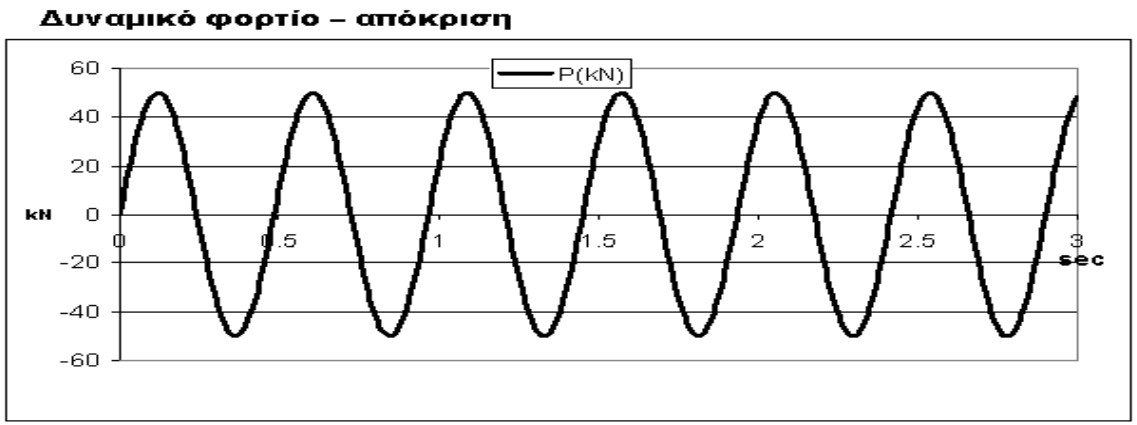
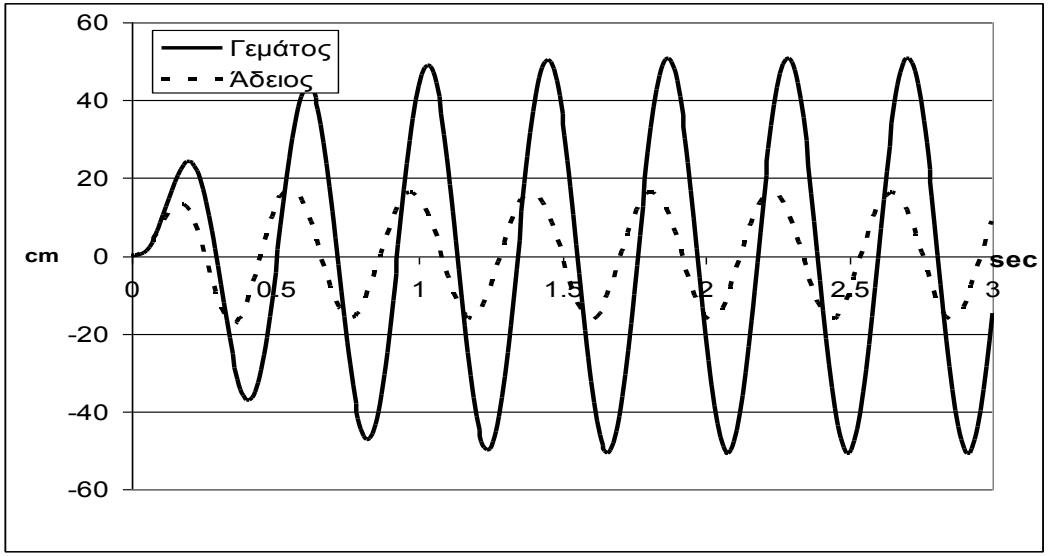


Figure 1.3: Spectrum of the wave data in Figure 1.2 (actually, of a full

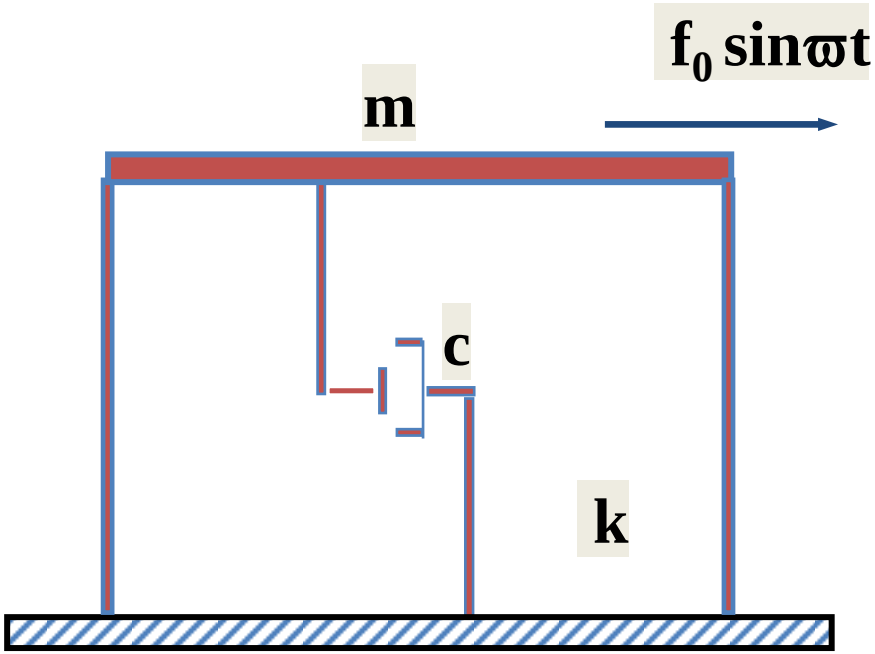
Αρμονικό Φορτίο

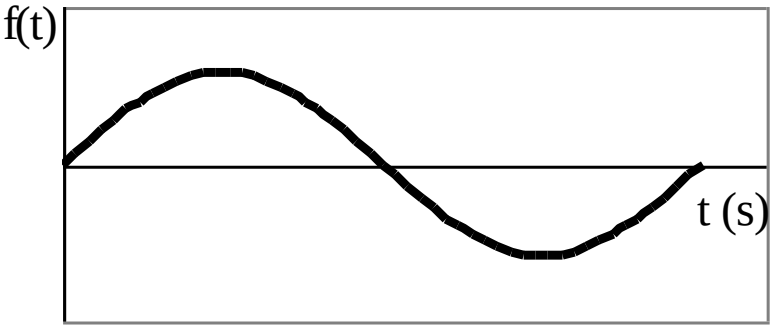


Παράδειγμα Μονοβάθμιου Ταλαντωτή



Απόκριση





$$m\ \ddot{u}(t) + c\,\dot{u}(t) + ku(t) = P_0 * \sin\overline{\omega}\,t \ \Rightarrow\ u(t) = u_c(t) + u_p(t)$$

Η πρώτη συνιστώσα $u_c(t)$ προέρχεται από το γενικό ολοκλήρωμα της ομογενούς και αντιστοιχεί στην περίπτωση της ελεύθερης αποσβεσμένης ταλάντωσης (αλλά με σταθερές που ΔΕΝ ταυτίζονται με αυτές της ελεύθερης ταλάντωσης).

$$u_c(t) = e^{-\xi\omega_0 t}\,(A\cos\omega_d t + B\sin\omega_d t)$$

Το εύρος της αποσβεσμένης ελεύθερης ταλάντωσης μέσα σε λίγους κύκλους μηδενίζεται. Κατά συνέπεια η $u_c(t)$ αποτελεί ΜΕΤΑΒΑΤΙΚΗ ταλάντωση.

Η δεύτερη συνιστώσα $u_p(t)$ προέρχεται από το ειδικό ολοκλήρωμα της εξίσωσης και εκφράζει την συμπεριφορά του συστήματος υπό συνεχή παρουσία της διέγερσης.

Η συνιστώσα $u_p(t)$ καλείται ΠΑΡΑΜΕΝΟΥΣΑ καθώς διατηρείται όσο διαρκεί η διέγερση. Η μορφή της είναι αρμονική με συχνότητα $\bar{\omega}$ίση με την συχνότητα της διέγερσης και ισούται με:

$$u_p(t) = (S_1 \sin \bar{\omega}\, t + S_2 \cos \bar{\omega}\, t)$$

με συντελεστές $S_1 = u_{st}*(1-\beta^2)*D^2$, $S_2 = u_{st}*(-2\xi\beta)*D^2$

και σταθερό εύρος $\rho = \sqrt{S_1^2+S_2^2} = u_{st}*D$

όπου $\beta = \dfrac{\bar{\omega}}{\omega_o}$ και $D = \dfrac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2*\beta\xi)^2}}$

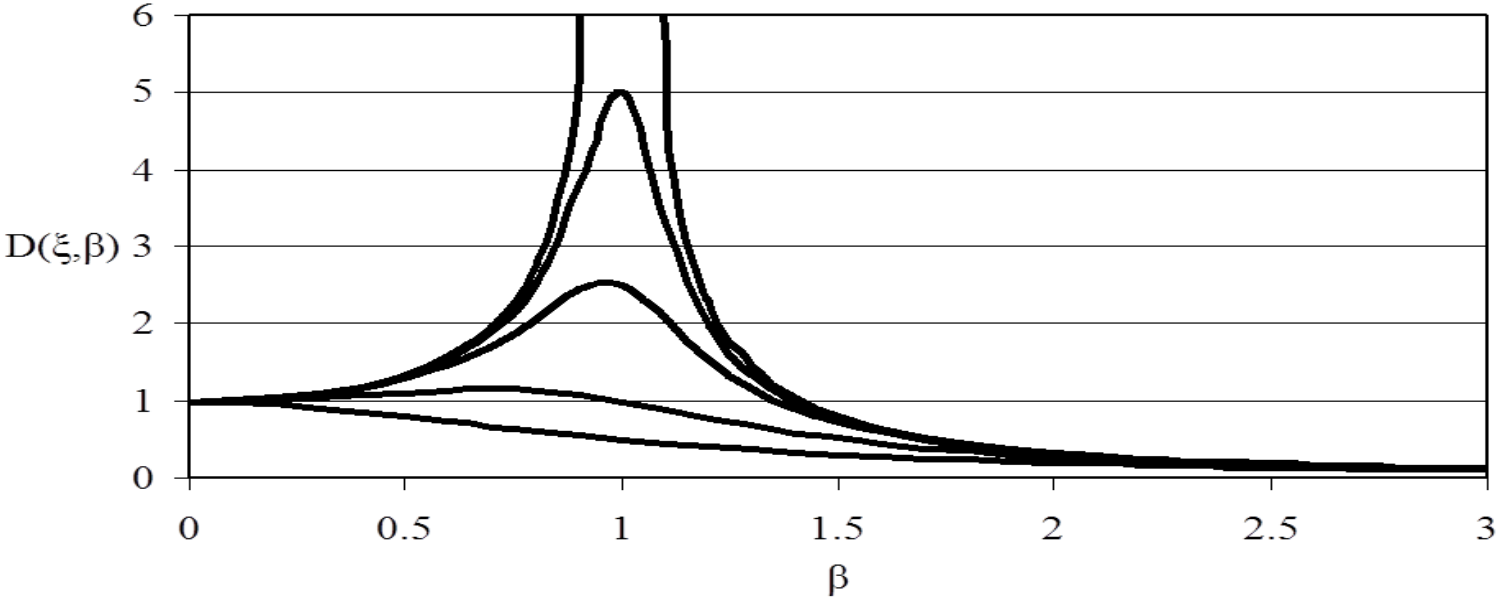
Συνεπώς, το εύρος της παραμένουσας ταλάντωσης ρ, μπορεί να συσχετιστεί με την στατική απόκριση u_{st} αν στο σύστημα δρούσε ΣΤΑΤΙΚΑ η μέγιστη τιμή διέγερσης ($P_{st} = P_0$).

$$\rho = u_{st} * D = \frac{P_0}{k} * \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2*\beta\xi)^2}}$$

Ο συντελεστής δυναμικής ενίσχυσης D(β,ξ) εκφράζει το πόσες φορές μεγαλύτερη (ή μικρότερη) είναι η μέγιστη παραμένουσα αρμονική απόκριση του συστήματος από την αντίστοιχη στατική.

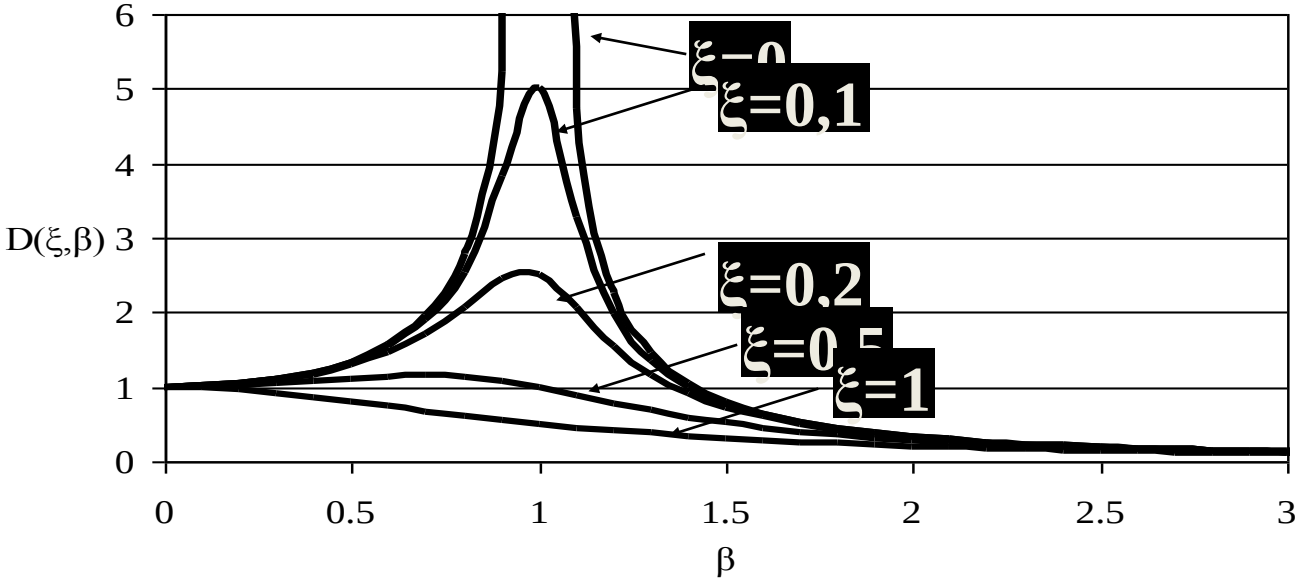
Συνεπώς, αποτελεί ταυτόχρονα και ένα δείκτη ΛΑΘΟΥΣ αν επιλύσουμε με μεθόδους Στατικής, ένα πρόβλημα που στην πραγματικότητα είναι αρμονικό.

Γραφική παράσταση του $D(\xi,\beta) = \dfrac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2*\beta\xi)^2}}$

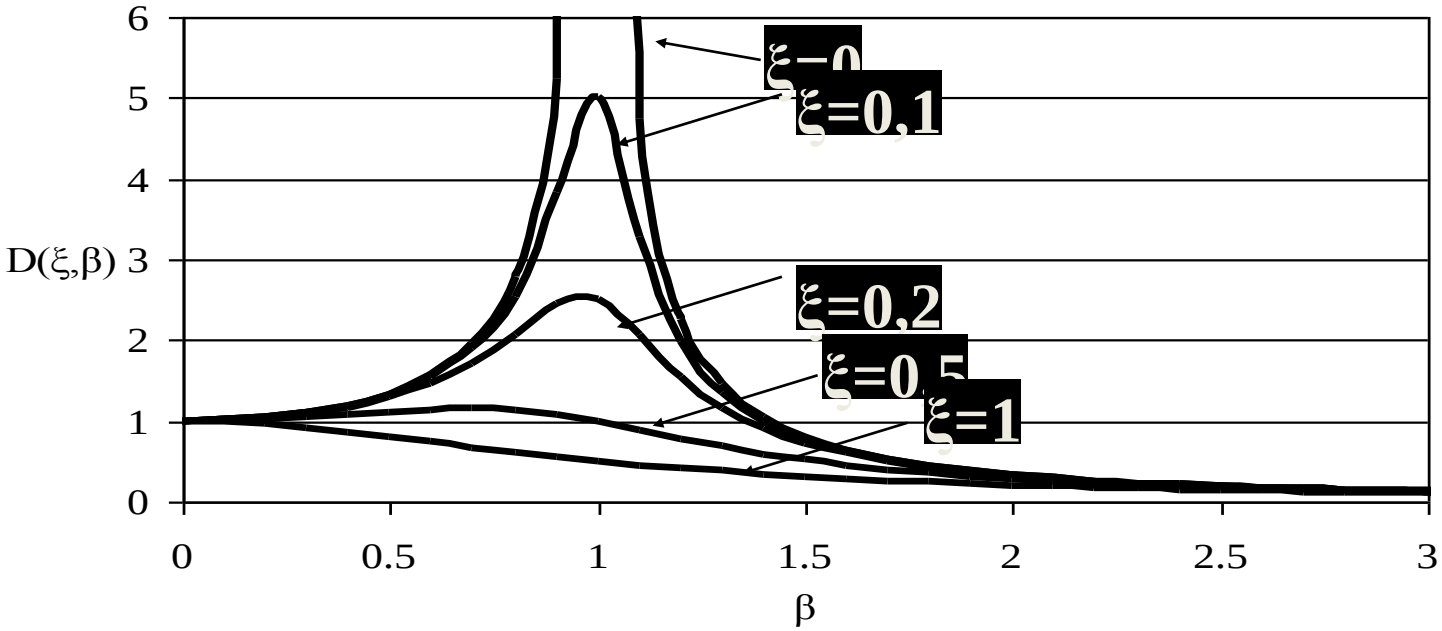


Από το σχήμα γίνονται φανερά τα ακόλουθα

- Όταν η συχνότητα διέγερσης τείνει στο μηδέν (β ➔ 0), διέγερση & απόκριση εκφυλίζονται σε στατικές (D ➔ 1).
- Όταν η συχνότητα διέγερσης προσεγγίζει την ιδιοσυχνότητα του ταλαντωτή (β ➔ 1), τότε έχουμε το φαινόμενο του συντονισμού με έντονη δυναμική ενίσχυση η οποία εξαρτάται από το διαθέσιμο ποσοστό απόσβεσης (D ➔ 1/2ξ).



➢ **Όταν η συχνότητα διέγερσης υπερβεί κατά πολύ την ιδιοσυχνότητα του ταλαντωτή (β> 2), τότε το σύστημα δεν μπορεί να 'παρακολουθήσει' τις εναλλαγές της διέγερσης με αποτέλεσμα το εύρος ταλάντωσης να γίνει μικρότερο ακόμα και της στατικής απόκρισης και για β> 3, να τείνει στο μηδέν (D ➔ 0).**



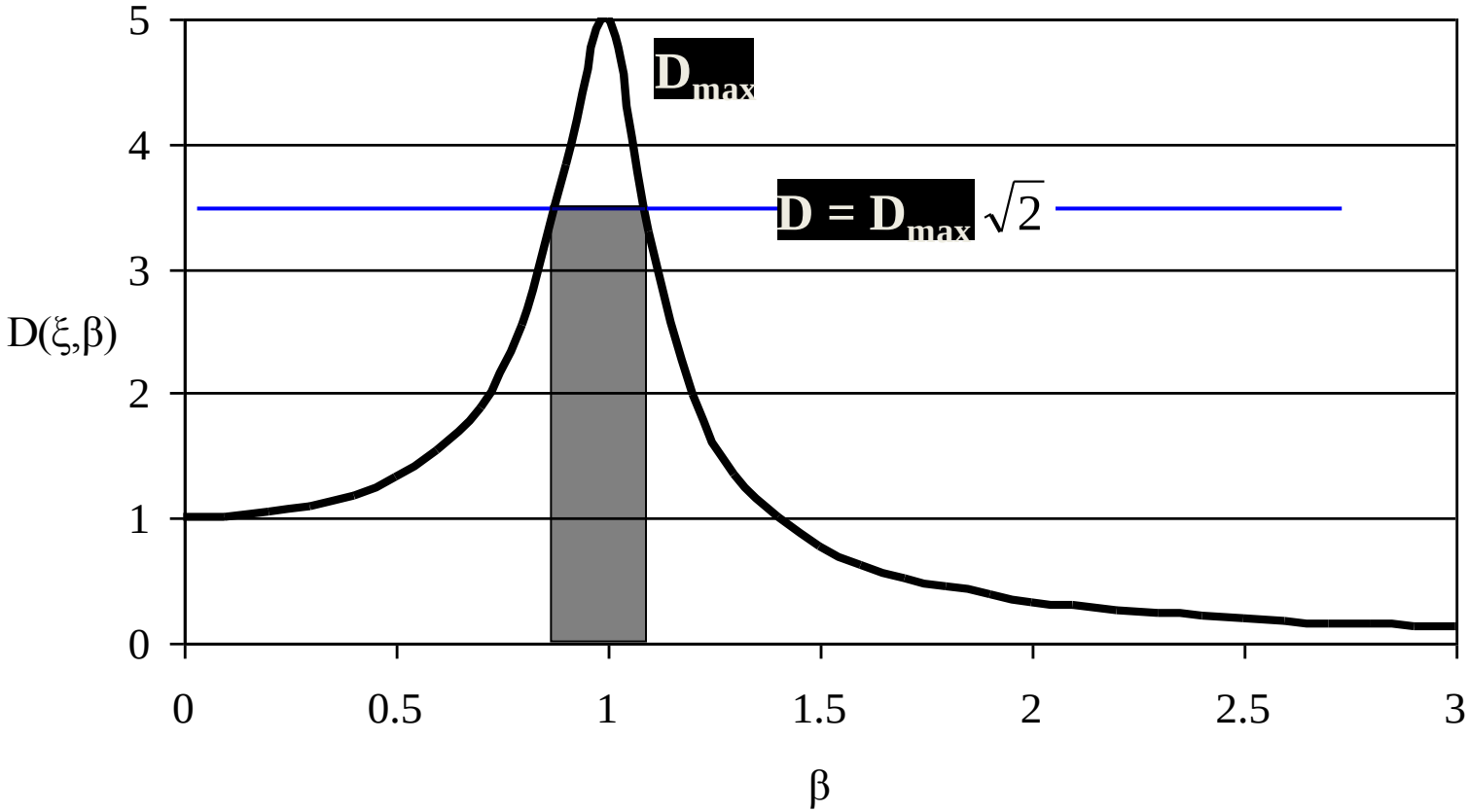
Στην πραγματικότητα η τιμή του β που μεγιστοποιεί τον συντελεστή δυναμικής ενίσχυσης δεν είναι η τιμή β = 1, αλλά:

$$\frac{\partial D(\xi,\beta)}{\partial \beta} = 0 \rightarrow \beta = \beta_0 = \sqrt{1-2\xi^2}$$

Επιπλέον, εάν $D_{max}(\xi,\beta)$ = η μέγιστη τιμή του συντελεστή δυναμικής ενίσχυσης, εύκολα αποδεικνύεται ότι οι τιμές β_1 και β_2 που αντιστοιχούν στην τιμή $D(\beta_1) = D(\beta_2) = \frac{D_{max}}{\sqrt{2}}$ (με $\beta_1 < \beta < \beta_2$), έχουν μεταξύ τους απόσταση:

$$\Delta_\beta = \beta_2 - \beta_1 = \frac{\overline{\omega}_2 - \overline{\omega}_1}{\omega_0} \approx 2\xi$$

Το ενεργειακό φορτίο αρμονικής ταλάντωσης είναι ανάλογο του τετραγώνου του εύρους και για τον λόγο αυτό η ποσότητα Δ_β καλείται διάστημα υποδιπλασιασμού ισχύος.



Πειραματικός προσδιορισμός δυναμικών χαρακτηριστικών υφιστάμενων κατασκευών

- Εγκαθίσταται καταγραφικό δίκτυο και διεγέρτης με δυνατότητα ελεγχόμενης μεταβολής της συχνότητας διέγερσης. Αρχίζοντας με την μικρότερη δυνατή συχνότητα, επιχειρείται σταδιακή σάρωση όλου του διαθέσιμου εύρους των συχνοτήτων τα διέγερσης.

- Για κάθε συχνότητα διέγερσης , το σύστημα αφήνεται να ταλαντωθεί για αρκετούς κύκλους ώστε να απαλειφθεί η παροδική συνιστώσα και καταγράφεται η παραμένουσα ταλάντωση.

Η συχνότητα που αντιστοιχεί στο μέγιστο εύρος ταλάντωσης u_{max} είναι $\overline{\omega} = \omega_0 \sqrt{1-2\xi^2}$ ενώ η διαφορά των συχνοτήτων $\overline{\omega}_2$ & $\overline{\omega}_1$ του η κάθε μία τους αντιστοιχεί σε εύρος ταλάντωσης $\frac{u_{max}}{\sqrt{2}}$, ισούται με $\Delta_{\overline{\omega}} \approx 2\xi\omega_0$.

Παρατήρηση: Όλα τα αποτελέσματα που αφορούν στην ταλάντωση λόγω αρμονικής διέγερσης μπορούν να εφαρμοσθούν και στην περίπτωση εδαφικού κραδασμού, υπό την προϋπόθεση ότι η εδαφική κίνηση $u_g(t)$ είναι αρμονική με συχνότητα $\overline{\omega}$

Παράδειγμα

Υδατόπυργος, υπόκειται σε αρμονική διέγερση f(t)= 51.83* sin(3πt). Να υπολογισθούν η μέγιστη παραμένουσα μετατόπιση και η αντίστοιχη ροπή βάσης.

m = 55 tn, ω_0 = $\sqrt{2221.23/55}$ 355 rad/s, β = 3π/6.355 = 1.483

$$D(\beta=1.483, \xi=0.15) = \frac{1}{\sqrt{(1-1.483^2)^2 + (2*0.15*1.483)^2}} \; 0.782$$

Η μέγιστη παραμένουσα απόκριση είναι u_{Pmax} = 0.782*ust

$$=0.782* \frac{51.83}{2221.23} = 0.0182 \text{ m} = 1.82 \text{ cm.}$$

Η αντίστοιχη ροπή βάσης είναι: $M_{max} = V_{max}*h$ = $(k* u_{Po})*h$ = (2221.23*0.0182)*10 = 405.31 kNm

ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΛΟΓΩ ΕΔΑΦΙΚΟΥ ΚΡΑΔΑΣΜΟΥ

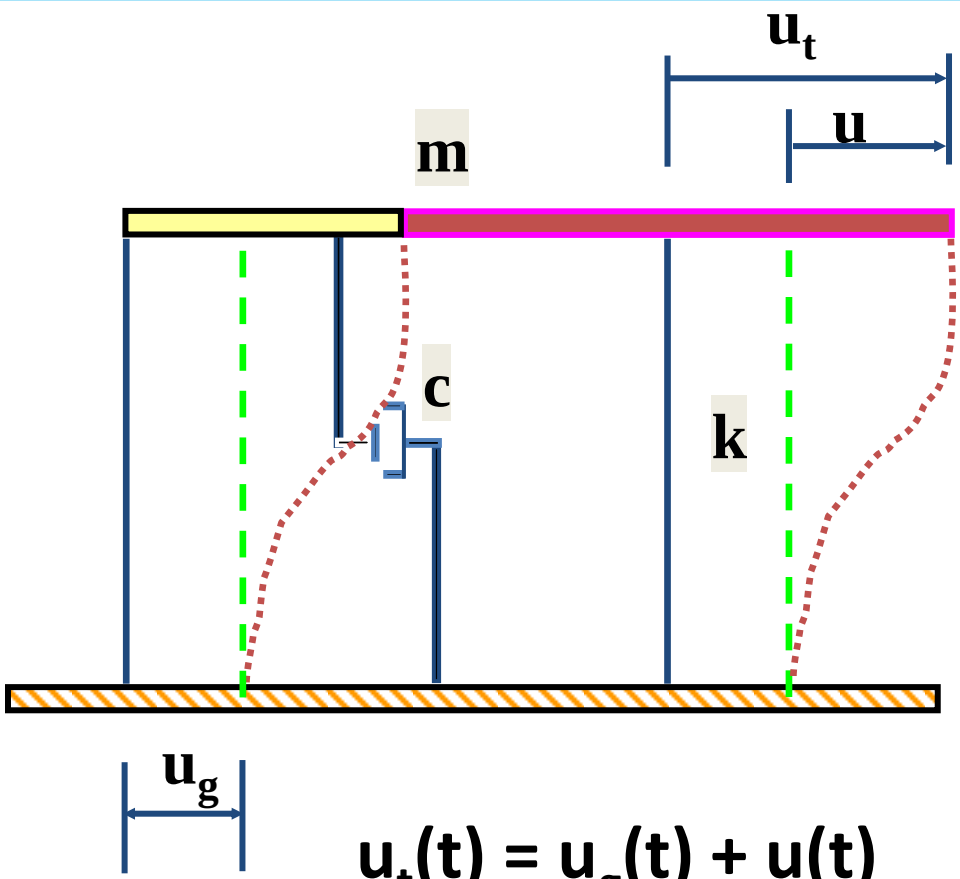
Μια από τις σημαντικότερες μορφές διέγερσης των κατασκευών αποτελεί η ΕΔΑΦΙΚΟΣ ΚΡΑΔΑΣΜΟΣ (σεισμικής δράση, υπόγειες εκρήξεις, εργασίες διάνοιξης τούνελ, κλπ).

Η υπερκείμενη κατασκευή υπόκειται σε καταναγκασμένες ταλαντώσεις χωρίς να είναι προφανής η παρουσία εξωτερικής.

Μια επαναδιατύπωση όμως της διαφορικής εξίσωσης ως προς την σχετική μετατόπιση, αποκαλύπτει ότι η εδαφική δράση μπορεί να θεωρηθεί ως μια ισοδύναμη μεταφορική διέγερση της μάζας του συστήματος.

Έστω το μοναβάθμιο πλαίσιο του σχήματος, το οποίο υπόκειται σε εδαφική κίνηση $u_g(t)$.

Σε κάθε χρονική στιγμή t, η συνολική μετατόπιση του φορέα από την αρχική θέση ισορροπίας (u_t), αποτελείται από την εδαφική μετατόπιση (u_g) και την σχετική μετατόπιση εδάφους – ζυγώματος (u).



$$u_t(t) = u_g(t) + u(t)$$

Η εξίσωση δυναμικής ισορροπίας της ταλαντούμενης μάζας του ζυγώματος είναι ανάλογη αυτής της ελεύθερης ταλάντωσης καθώς περιλαμβάνει μόνο τις δυνάμεις αδράνειας f_I, απόσβεσης f_D και επαναφοράς f_S.

$$f_I + f_D + f_S = 0$$

Οι δυνάμεις f_S και f_D οφείλονται στην σχετική μετατόπιση u και σχετική ταχύτητα u', αντίστοιχα.

Αντίθετα, η δύναμη αδράνειας εξαρτάται από την συνολική επιτάχυνση u_t'' του συστήματος σχετικά με την αρχική θέση ισορροπίας του.

Αντικαθιστώντας την κάθε δύναμη στην παραπάνω σχέση ισορροπίας, έχουμε

$$m\, u_t''(t) + c\, u'(t) + k\, u(t) = 0$$

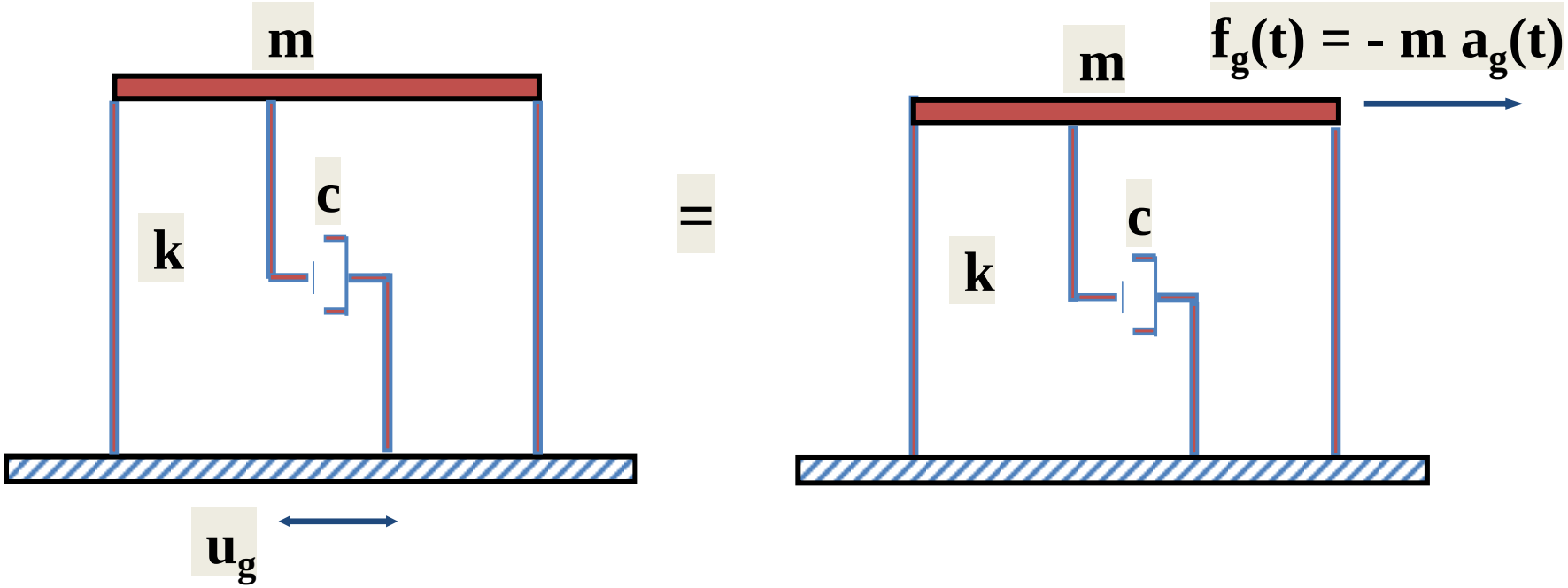
Αλλά, $u_t(t) = u_g(t) + u(t)$ ➔ $u_t''(t) = u_g''(t) + u''(t) = a_g(t) + u''(t)$,όπου $a_g(t)$ = εδαφική επιτάχυνση

Συνδυάζοντας τις δύο παραπάνω σχέσεις, η εξίσωση δυναμικής ισορροπίας του ταλαντωτή προκύπτει ως

$m\,[a_g(t) + u''(t)] + c\,u'(t) + k\,u(t) = 0$ ➔

$$m\,u''(t) + c\,u'(t) + k\,u(t) = -\,m\,a_g(t) = f_g(t)$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω, η απόκριση ενός ταλαντωτή υπό εδαφικό κραδασμό ταυτίζεται με την απόκρισή του θεωρώντας ΑΚΛΟΝΗΤΗ τη βάση του, υπό τη δράση ισοδύναμου μεταφορικού σεισμικού φορτίου $f_g(t)$ το οποίο είναι ανάλογο της ταλαντούμενης μάζας και της εδαφικής επιτάχυνσης.



Η διαπίστωση αυτή εξηγεί και τον λόγο για τον οποίο οι αντισεισμικοί κανονισμοί χρησιμοποιούν την μέγιστη εδαφική επιτάχυνση ως κύριο παράγοντα διαμόρφωσης των σεισμικών φορτίων

Το γεγονός ότι η μάζα του συστήματος δρα μόνο ως ένας βαθμωτός πολλαπλασιαστής, σημαίνει ότι το σεισμικό φορτίο μεταφέρει τα χαρακτηριστικά της ΕΔΑΦΙΚΗΣ ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗΣ ως προς την διάρκεια, τη μορφή, το συχνοτικό περιεχόμενο, κλπ.

Τα αποτελέσματα της μελέτης των καταναγκασμένων ταλαντώσεων υπό τη δράση διάφορων μορφών διεγέρσεων που θα αναφερθούν στις επόμενες ενότητες, μπορούν να εφαρμοσθούν και στην περίπτωση του εδαφικού κραδασμού υπό την προϋπόθεση ότι η μορφή της διέγερσης προσομοιάζει την μορφή της εδαφικής επιτάχυνσης.

Παράδειγμα

Ο Υδατόπυργος του προηγούμενου παραδείγματος, υπόκειται σε σεισμική δράση, με ταχύτητα εδάφους (σε cm/sec) v_g =10*cos(3π*t). Να υπολογισθούν η μέγιστη παραμένουσα μετατόπιση και η ροπή βάσης όταν ο υδατόπυργος είναι (α) γεμάτος με νερό, με την πειραματικά προσδιορισμένη τιμή του ξ και (β) άδειος από νερό, λαμβάνοντας ξ = 0.

Επίλυση:

Εδαφική ταχύτητα v_g = 0.1*cos(3πt) →
εδαφική επιτάχυνση a_g = -0.3*π* sin(3πt) →
σεισμική διέγερση: $f_g(t)$ = - m $a_g(t)$.

(α): $\omega_0 = \sqrt{2221.23/55}$ = 6.355 rad/s,

$\beta = 3\pi/6.355 = 1.483$, $m = m_t = 55$ tn

$f_g = -m_t * a_g = -55 * [-0.3*\pi* \sin(3\pi t)] = 51.83* \sin(3\pi t)$

$D(\beta=1.483, \xi=0.15) = \dfrac{1}{\sqrt{(1-1.483^2)^2+(2*0.15*1.483)^2}} = 0.782$

Η μέγιστη παραμένουσα απόκριση είναι $u_{max} = \rho =$

$0.782*u_{st} = 0.782* \dfrac{51.83}{2221.23} = 0.0182$ m = 1.82 cm.

Η αντίστοιχη ροπή βάσης είναι: $M_{max} = V_{max}*h =$
$(k* u_{Po})*h = (2221.23*0.0182)*10 = 405.31$ kNm

(β): $\omega_0 = \sqrt{2221.23/5} = 21.08$ rad/s,

$\beta = 3\pi/21.08 = 0.447$

$f_g = -m_b * a_g = -5 * [-0.3*\pi* \sin(3\pi t)] = 4.712* \sin(3\pi t)$

Πρέπει να σημειωθεί ότι εδώ (ξ = 0) → η λύση της ομογενούς δεν είναι παροδική → πρέπει να ληφθεί υπόψη στην λύση.

Αν, αγνοηθεί η συνεισφορά της ομογενούς, θα είχαμε :

$$D(\beta=0.447, \xi=0) = \frac{1}{1-0.447^2} = 1.25,$$

$$\rho = 1.25* \frac{4.712}{2221.23} = 2.65*10^{-3} \text{ m},$$

$M_{max} = 58.9$ kNm

Οι προηγούμενες τιμές είναι 34.5% μικρότερες από τις σωστές καθώς (για ξ = 0) → $u(t) = u_c(t) + u_p(t)$ →

$$u(t) = \frac{f_0}{k} * \frac{1}{1-\beta^2} * (\sin\varpi t - \beta \sin\omega_o t).$$

Μέγιστο → $u'(t) = 0$ → $t = (2\nu\pi) / (\omega_o \pm \varpi)$, για $\nu = 1,2,3,\ldots$

Π.χ. για $\nu = 1$, $t = 2\pi/(21.08+3\pi) = 0.206$ s → $u'(0.206) = 0$

→ $u(0.206) = u_{max} = 3.57$ mm (> 2.65mm)

Αντίστοιχη ροπή βάσης $M_{max} = 79.21$ kNm (> 58.9 kNm)

Τέλος Ενότητας

CC BY SA