ΑΝΟΙΚΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

ΤΕΙ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ

Ενότητα 6: ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΣΕ ΤΥΧΟΥΣΑ ΔΙΕΓΕΡΣΗ – ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ DUHAMEL

Διδάσκων: Κολιόπουλος Παναγιώτης

ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Κεντρικής Μακεδονίας» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Ενότητα 6

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ

Διδάσκων: Κολιόπουλος Παναγιώτης

Περιεχόμενα ενότητας

Σκοποί ενότητας

ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΣΕ ΤΥΧΟΥΣΑ ΔΙΕΓΕΡΣΗ – ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ DUHAMEL

Πέρα από την αρμονική διέγερση υπάρχουν και άλλες περιπτώσεις διεγέρσεων οι οποίες έχουν σχετικά απλή μορφή και οι ταλαντώσεις που προκαλούν μπορούν να περιγραφούν με συγκεκριμένες μαθηματικές εκφράσεις.

Υπάρχουν όμως πολλές περιπτώσεις κατά τις οποίες η διέγερση εμφανίζει εξαιρετικά πολύπλοκη μορφή

- **ανεμο-φορτία,**
- **κυματο-φορτία**
- **σεισμικά φορτία**

η οποία δεν μπορεί να περιγραφεί με αναλυτική μαθηματική σχέση.

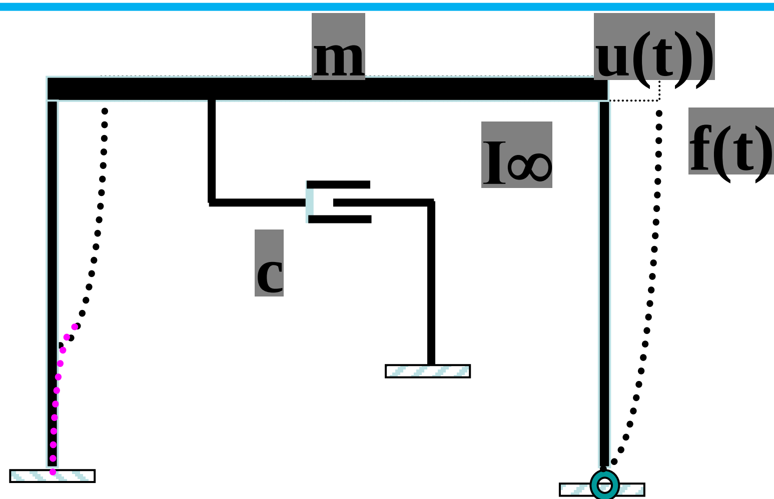
Η περιγραφή τους μπορεί να γίνει μόνο σε ψηφιακή μορφή κάνοντας χρήση καταγραφών προηγούμενων συμβάντων.

Για την αντιμετώπιση αυτών των προβλημάτων, είναι αναγκαίο να διατυπωθεί μια μεθοδολογία επίλυσης της δυναμικής απόκρισης φορέων, η οποία να έχει ΓΕΝΙΚΗ εφαρμογή (ανεξάρτητα από τη μορφή διέγερσης).

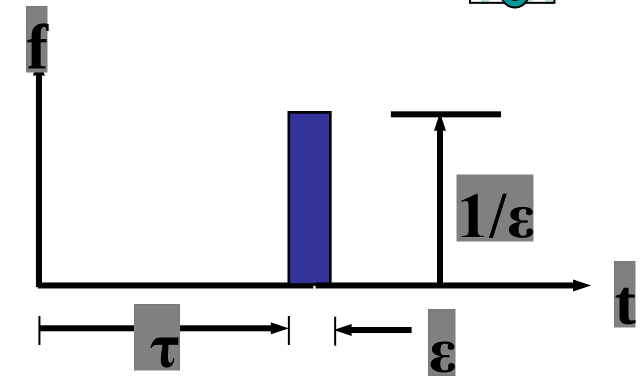
Υπάρχουν 2 τέτοιες μεθοδολογίες:
Η (αναλυτική) μεθοδολογία που στηρίζεται στην απόκριση μονοβάθμιου ταλαντωτή σε ακαριαίο ορθογωνικό πλήγμα, (ολοκλήρωμα του Duhamel).
Η μεθοδολογία που στηρίζεται στην αριθμητική ολοκλήρωση της διαφορικής εξίσωσης ταλάντωσης.

Ταλάντωση σε δράση μοναδιαίου (ακαριαίου) πλήγματος

Ο φορέας του σχήματος υπόκειται την στιγμή t = τ, στη δράση πλήγματος απειροστής διάρκειας ε και μοναδιαίου εμβαδού.



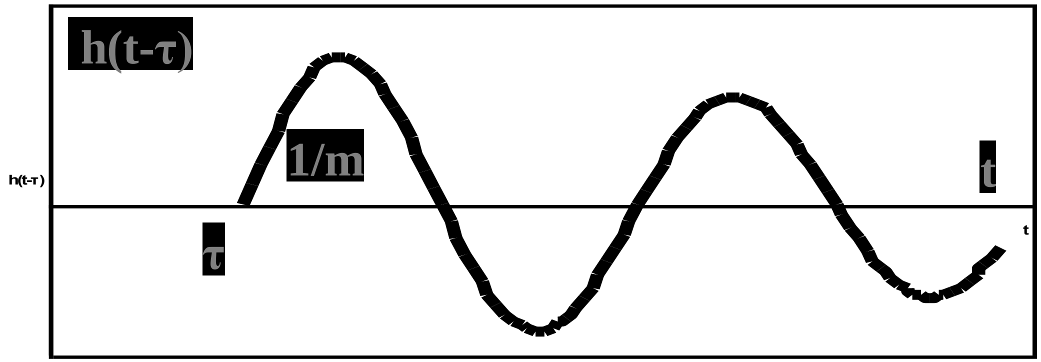
Λόγω της ακαριαίας δράσης του πλήγματος δεν προλαβαίνουν να ενεργοποιηθούν οι δυνάμεις επαναφοράς και απόσβεσης κατά την διάρκειά του.



Αυτό σημαίνει ότι η απόκριση περιλαμβάνει μία φάση ελεύθερης ταλάντωσης με αρχικές συνθήκες u(τ) = 0, u'(τ) = 1/m, (αρχή της διατήρησης της ορμής).

Με αυτές τις αρχικές συνθήκες, η εξίσωση αποσβεσμένης ελεύθερης ταλάντωσης προσδιορίζει την απόκριση μοναδιαίου πλήγματος h(t-τ) ως (γιατί ??):

$$\mathbf{u(t) = h(t-\tau) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin[\omega_d(t-\tau)]}$$



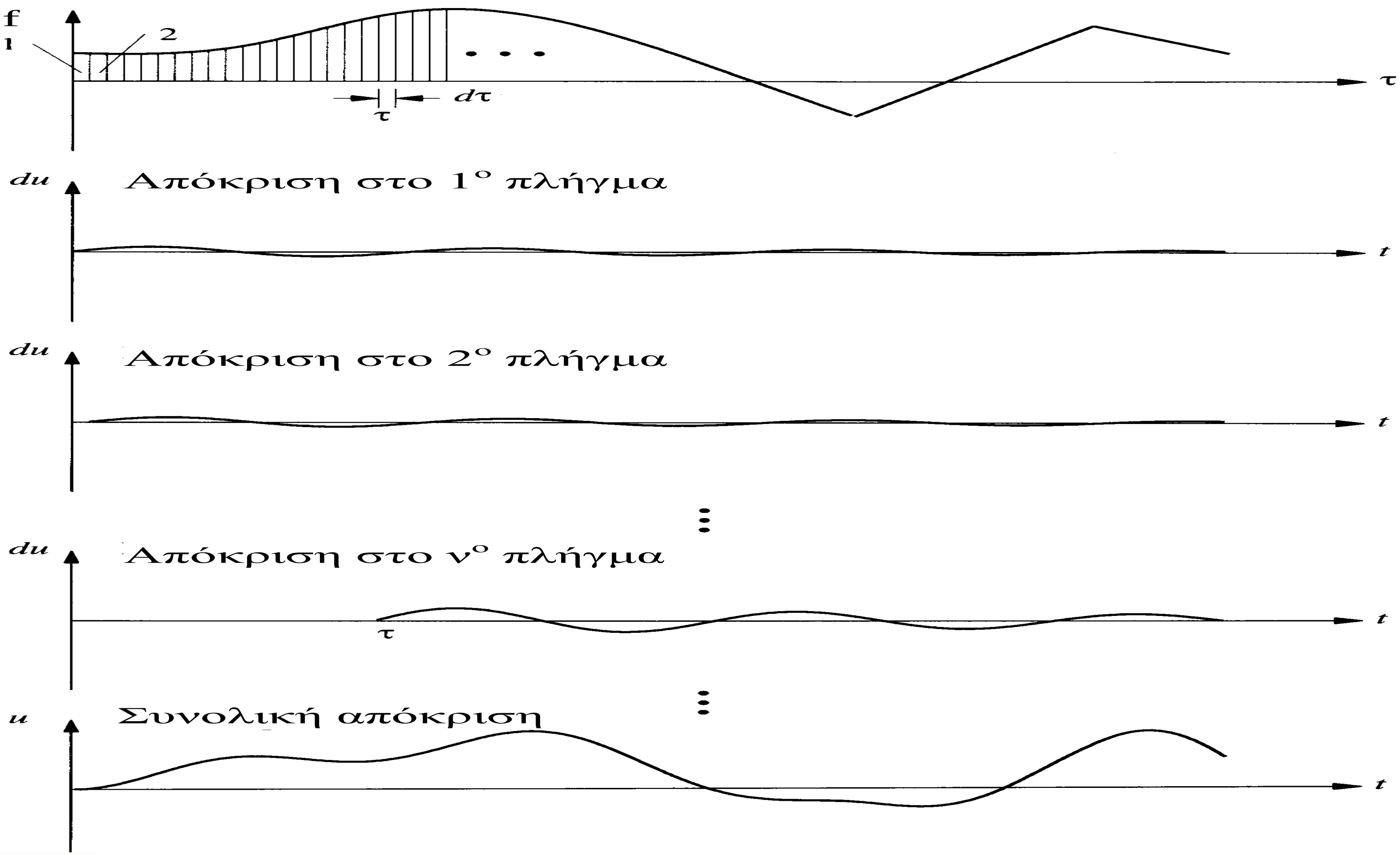
Προφανώς κάθε πλήγμα με χρόνο εμφάνισης τ, διαμορφώνει την απόκριση σε μεταγενέστερο χρόνο (t ≥ τ). Λόγω της απόσβεσης, η επίδραση του πλήγματος εξασθενεί όσο απομακρυνόμαστε από την δράση του.

Καταναγκασμένη ταλάντωση σε τυχούσα διέγερση (ολοκλήρωμα Duhamel)

Σε περιπτώσεις μη μοναδιαίου πλήγματος, η απόκριση του συστήματος είναι αυτή που προκύπτει από την εφαρμογή της προηγούμενης σχέσης, πολλαπλασιασμένης επί το εμβαδόν του υπόψη πλήγματος.

Συνεπώς, η δράση μοναδιαίου πλήγματος μπορεί να αποτελέσει την βάση μελέτης πιο σύνθετων μορφών διέγερσης εάν θεωρηθούν ότι συντίθενται από διαδοχικά (μη-μοναδιαία) πλήγματα.

Το άθροισμα της επίδρασης όλων των πληγμάτων, συνθέτει την συνολική απόκριση του συστήματος στην τυχούσα φόρτιση.


f
1
2
τ
dτ
τ
du
Απόκριση στο 1° πλήγμα
t
du
Απόκριση στο 2° πλήγμα
t
du
Απόκριση στο ν° πλήγμα
τ
t
u
Συνολική απόκριση
t

Στο όριο, για απειροστή διάρκεια δράσης κάθε πλήγματος, το προηγούμενο άθροισμα (επαλληλία) μετατρέπεται σε ολοκλήρωμα και η απόκριση προκύπτει ως:

$$\mathbf{u(t)} = \int_0^t h(t-\tau)\, f(\tau)\, d\tau = \frac{1}{m\,\omega_d} \int_o^t \mathbf{f(\tau)\, e^{-\xi\omega o(t-\tau)} \sin[\omega_d(t-\tau)]d\tau}$$

Η σχέση αυτή είναι γνωστή ως ολοκλήρωμα του Duhamel και παρέχει την δυνατότητα υπολογισμού της απόκρισης μονοβάθμιου ταλαντωτή σε τυχούσα διέγερση (προσδιορισμένης είτε αναλυτικά είτε ψηφιακά).

Αριθμητική ολοκλήρωση διαφορικής εξίσωσης κίνησης

$$\boxed{m\, u''(t) + c\, u'(t) + k\, u(t) = f(t)}$$

Κερδίζει έδαφος, έναντι Duhamel, καθώς

- Μπορεί να εφαρμοσθεί και σε μη-γραμμικά συστήματα.
- Έχει γενική εφαρμογή για οποιοδήποτε είδος φόρτισης (σε αναλυτική ή ψηφιακή μορφή)
- Είναι εύκολος ο προγραμματισμός της

Διακριτή μορφή διαφορικής εξίσωσης κίνησης

$$m\,u''(t) + c\,u'(t) + k\,u(t) = p(t)$$

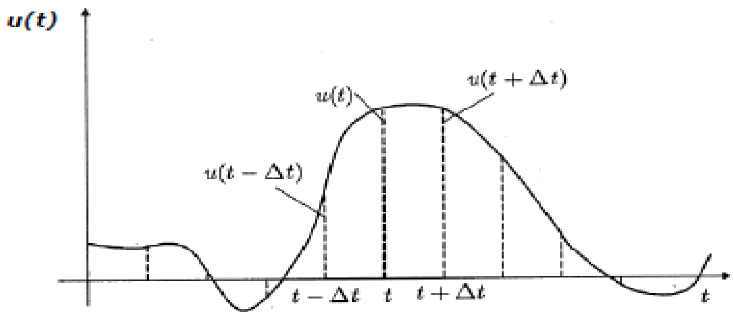
Για $t = t_i \rightarrow \quad m\,u_i'' + c\,u_i' + k\,u_i = p_i$

Για $t = t_{i+1} \rightarrow \quad m\,u_{i+1}'' + c\,u_{i+1}' + k\,u_{i+1} = p_{i+1}$

Μέθοδος κεντρικής διαφοράς

(για σταθερό $\Delta t = t_{i+1} - t_i$)

- Οι μετατοπίσεις u_{i+1} και u_{i-1} μπορούν να προσεγγιστούν με τη βοήθεια του αναπτύγματος σειράς Taylor, παραλείποντας όρους τρίτης τάξης και άνω:



$$u_{i+1} = u_i + \Delta t \dot{u}_i + \frac{1}{2}\Delta t^2 \ddot{u}_i + \ldots$$
$$u_{i-1} = u_i - \Delta t \dot{u}_i + \frac{1}{2}\Delta t^2 \ddot{u}_i + \ldots \qquad (4)$$

Αφαιρώντας τις πιο πάνω σχέσεις κατά μέλη παίρνουμε την ταχύτητα:

$$\boxed{\dot{u}_i \approx \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta t}} \qquad (5)$$

ενώ προσθέτοντας τις ίδιες εξισώσεις κατά μέλη παίρνουμε την επιτάχυνση:

$$\boxed{\ddot{u}_i \approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta t^2}} \qquad (6)$$

- Αντικαθιστώντας τις προσεγγιστικές εκφράσεις της ταχύτητας και επιτάχυνσης στην εξίσωση (2), έχουμε

$$m\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{\Delta t^2}+c\frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2\Delta t}+ku_i=p_i \qquad (7)$$

Στην εξίσωση (7) οι μετατοπίσεις u_i και u_{i-1} είναι γνωστές (με εφαρμογή της διαδικασίας της μεθόδου) ενώ η μετατόπιση u_{i+1} είναι άγνωστη. Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους στην εξίσωση (7) οπότε

$$\left[\frac{m}{\Delta t^2}+\frac{c}{2\Delta t}\right]u_{i+1}=p_i-\left[\frac{m}{\Delta t^2}-\frac{c}{2\Delta t}\right]u_{i-1}-\left[k-\frac{2m}{\Delta t^2}\right]u_i$$

ή (8)

$$\hat{k}u_{i+1}=\hat{p}_i$$

όπου

$$\boxed{\hat{k} = \frac{m}{\Delta t^2} + \frac{c}{2\Delta t} \quad \text{και} \qquad \hat{p}_i = p_i - \left[\frac{m}{\Delta t^2} - \frac{c}{2\Delta t}\right]u_{i-1} - \left[k - \frac{2m}{\Delta t^2}\right]u_i}$$

Η άγνωστη μετατόπιση u_{i+1} δίνεται από τη σχέση

$$\boxed{u_{i+1} = \frac{\hat{p}_i}{\hat{k}}} \qquad (9)$$

Η σχέση (9) επιτρέπει τον προσδιορισμό της λύσης τη χρονική στιγμή $i+1$, όταν αυτή είναι γνωστή τις αμέσως προηγούμενες στιγμές i και i-1.

- Για να υπολογίσουμε τη μετατόπιση u_1, απαιτείται ο υπολογισμός των μετατοπίσεων u_0 και u_{-1}. Η μετατόπιση u_0 δίνεται ως μία από τις αρχικές συνθήκες και συνεπώς είναι γνωστή. Για να υπολογίσουμε το u_{-1} θέτουμε $t=0$ στις εξισώσεις (5) και (6)

$$\boxed{\dot{u}_i \approx \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta t}}$$

$$\dot{u}_0 \approx \frac{u_1 - u_{-1}}{2\Delta t} \quad \text{και} \quad \ddot{u}_0 \approx \frac{u_1 - 2u_0 + u_{-1}}{\Delta t^2} \tag{10}$$

από τις οποίες προκύπτει η u_{-1} ως

$$\boxed{\ddot{u}_i \approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta t^2}}$$

$$u_{-1} = u_0 - \Delta t \dot{u}_0 + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{u}_0 \tag{11}$$

Η αρχική επιτάχυνση $\ddot{u}_0$ υπολογίζεται από την εξίσωση (1) για $t=0$

$$\ddot{u}_0 = \frac{p_0 - c\dot{u}_0 - ku_0}{m} \tag{12}$$

- Βήματα αριθμητικής ολοκλήρωσης της εξίσωσης κίνησης με τη μέθοδο Κεντρικών Διαφορών

Βήματα	Διαδικασία
1. Δεδομένα	Διάβασε ω (ή k), m, ζ, $t_{o\lambda}$, $u(0)$, $\dot{u}(0)$
2. Αρχικοί υπολογισμοί	$k= m\omega^2$, $c=2m\omega\zeta$, $T=2\pi/\omega$ $\ddot{u}_0 = (p_0 - c\dot{u}_0 - ku_0)/m$ Επέλεξε $\Delta t < T_n/\pi$ και υπολόγισε: $u_{-1} = u_0 - \Delta t\dot{u}_0 + \frac{\Delta t^2}{2}\ddot{u}_0$, $\hat{k} = \frac{m}{\Delta t^2} + \frac{c}{2\Delta t}$, $a = \frac{m}{\Delta t^2} - \frac{c}{2\Delta t}$, $b = k - \frac{2m}{\Delta t^2}$
3. Για κάθε βήμα	Υπολόγισε το ισοδύναμο φορτίο $\hat{p}_i = p_i - au_{i-1} - bu_i$ Υπολόγισε τη μετατόπιση $u_{i+1} = \hat{p}_i/\hat{k}$ Υπολόγισε την ταχύτητα και επιτάχυνση τη στιγμή i $\dot{u}_i = (u_{i+1} - u_{i-1})/2\Delta t$, $\ddot{u}_i = (u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1})/\Delta t^2$ Αύξησε το χρόνο κατά Δt, από i σε $i+1$ Έλεγξε αν $t \geq t_{o\lambda}$ ⇨ τέλος. Αλλιώς θέσε $u_{i-1}= u_i$ και $u_i= u_{i+1}$ και πήγαινε στην αρχή του βήματος 3.

Τέλος Ενότητας