



ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ

Ενότητα 7&8: ΦΑΣΜΑΤΑ ΑΠΟΚΡΙΣΗΣ

Διδάσκων: Κολιόπουλος
Παναγιώτης
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Κεντρικής Μακεδονίας» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Ενότητα 7&8

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ

Διδάσκων: Κολιόπουλος Παναγιώτης

Περιεχόμενα ενότητας

1. ΦΑΣΜΑΤΑ ΑΠΟΚΡΙΣΗΣ
2. ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΦΑΣΜΑΤΩΝ ΑΠΟΚΡΙΣΗΣ
3. ΟΡΙΑΚΕΣ ΤΙΜΕΣ ΦΑΣΜΑΤΩΝ
4. ΧΡΗΣΗ ΦΑΣΜΑΤΩΝ ΣΤΟΝ ΑΝΤΙΣΕΙΣΜΙΚΟ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟ
5. Υπολογισμός τέμνουσας βάσης με δυναμική φασματική ανάλυση (άνω – ακριβής) και με στατική ανάλυση (κάτω - λανθασμένη).
6. Παράδειγμα
7. Επίλυση

Σκοποί ενότητας



ΦΑΣΜΑΤΑ ΑΠΟΚΡΙΣΗΣ

Σε πολλές εφαρμογές της δυναμικής των κατασκευών – ιδιαίτερα σε περιπτώσεις περιβαλλοντικών διεγέρσεων – η διεγερση είναι:

- **πολύπλοκη,**
- **ραγδαία μεταβαλλόμενη και**
- **(συχνά) διαθέσιμη μόνο σε ψηφιακή μορφή.**

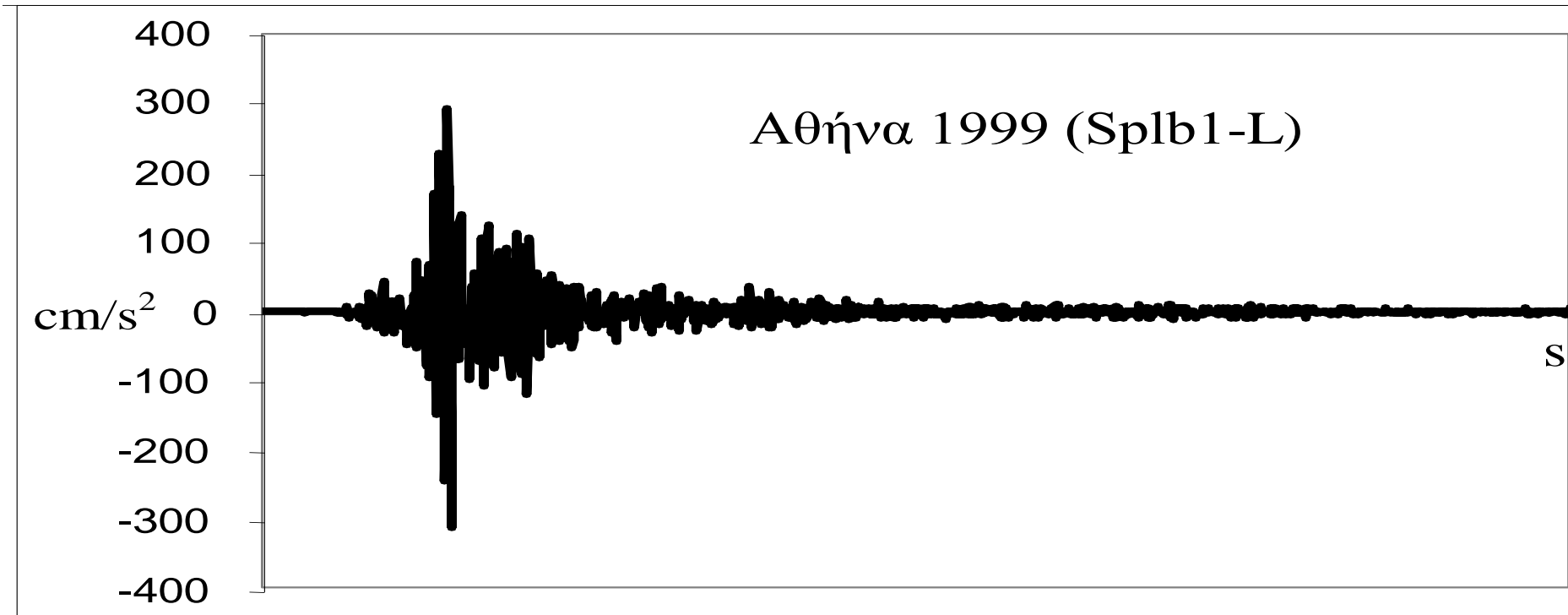
Κατά συνέπεια, δεν είναι δυνατός ο προσδιορισμός της απόκρισης των φορέων με την εφαρμογή αναλυτικών λύσεων και ο μελετητής καλείται να καταφύγει σε αριθμητικές μεθόδους υπολογισμού

Επιπλέον, για να αντιμετωπισθεί η **τυχειότητα** και το **απρόβλεπτο** του συμβάντος, ο μηχανικός καλείται να εξασφαλίσει έναν αριθμό ‘αντιπροσωπευτικών’ ψηφιακών καταγραφών της υπό μελέτη διέγερσης και να προχωρήσει σε επαναληπτική εφαρμογή της μεθοδολογίας.

Είναι προφανές ότι για εφαρμογές ρουτίνας, η όλη διαδικασία αποτελεί ένα σύνθετο εγχείρημα με υψηλό υπολογιστικό κόστος, ιδιαίτερα στη φάση προκαταρκτικών μελετών όπου απαιτείται συχνή επανάληψη της ανάλυσης για διάφορα σενάρια διέγερσης ή/και φορέα.

Έστω, για παράδειγμα, ότι μας ενδιαφέρει η εκτίμηση της σεισμικής συμπεριφοράς κατασκευής η οποία πρόκειται να κατασκευαστεί στην περιοχή των Σεπολίων της Αθήνας.

Προς τον σκοπό αυτό επιλέγουμε, ως αντιπροσωπευτική, την χρήση της καταγραφής της εδαφικής επιτάχυνσης στην περιοχή αυτή κατά τον σεισμό της 7^{ης} Σεπτεμβρίου 1999. Ενδεικτικά, μία οριζόντια της καταγραφής παρουσιάζεται στο σχήμα που ακολουθεί.



Οριζόντια συνιστώσα εδαφικής επιτάχυνσης του σεισμού της 7/9/1999 (ΙΤΣΑΚ, καταγραφικός σταθμός Σεπολίων).

Με την προϋπόθεση ότι ο φορέας μπορεί να θεωρηθεί ως μονοβάθμιος ταλαντωτής, η εξίσωση δυναμικής ισορροπίας δίνεται ως

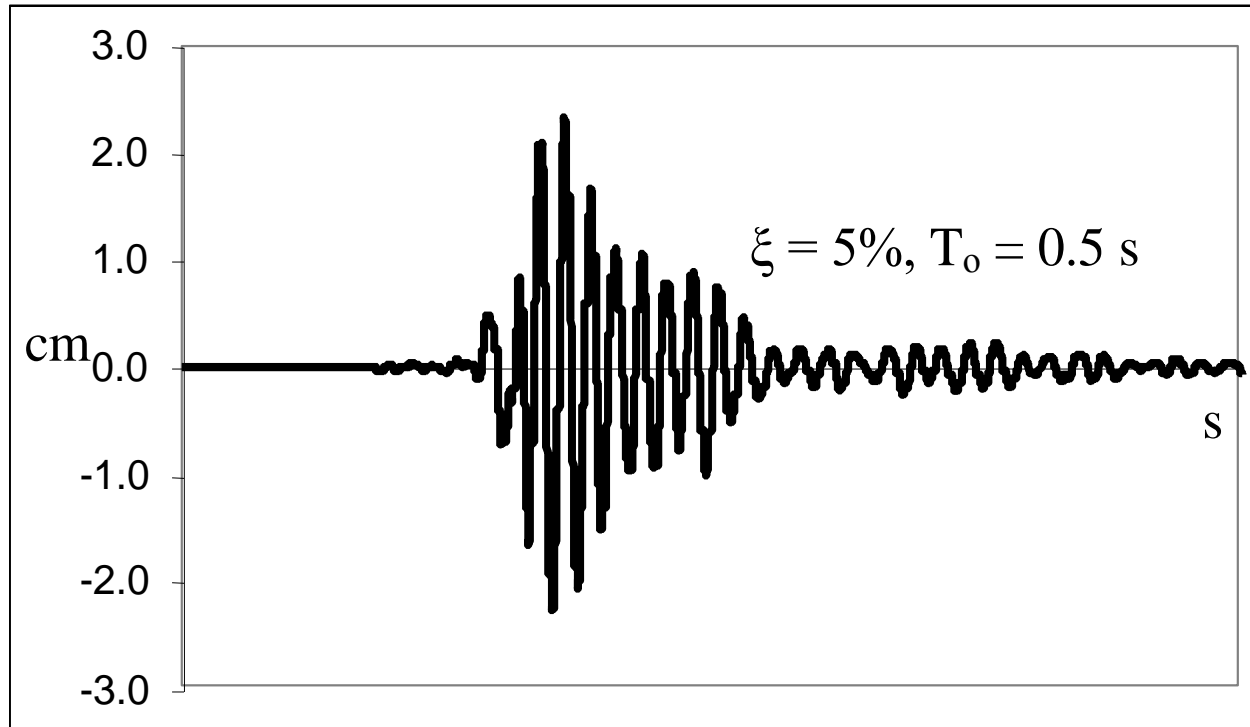
$$m u''(t) + c u'(t) + k u(t) = -m a_g(t) = f_g(t)$$

Εφαρμόζοντας είτε αριθμητική επίλυση της εξίσωσης είτε τον αριθμητικό υπολογισμό του **ολοκληρώματος Duhamel** για το σεισμικό φορτίο f_g προκύπτει:

$$u(t) = \int_0^t h(t - \tau) f_g(\tau) d\tau = \frac{1}{\omega_d} \int_0^t a_g(\tau) e^{-\xi\omega_0(t-\tau)} \sin[\omega_d(t-\tau)] d\tau$$

Με δεδομένη την εδαφική επιτάχυνση $a_g(t)$, η λύση εξαρτάται από το ποσοστό κρίσιμης απόσβεσης ξ και την ιδιοσυχνότητα ω_0 (ή την ιδιοπερίοδο $T_0 = 2\pi/\omega_0$) του ταλαντωτή.

Έτσι, για έναν μονοβάθμιο ταλαντωτή με $\xi = 5\%$ και ιδιοπερίοδο $T_0 = 0.5 \text{ s}$ ($\omega_0 = 12.57 \text{ rad/s}$) η απόκριση υπολογίσθηκε αριθμητικά και παρουσιάζεται στο Σχήμα.



Λαμβάνοντας υπόψη ότι τα επιταχυνσιογράμματα υπόκεινται σε πυκνή ψηφιοποίηση (συνήθως ανά 0.005 s), τα αρχεία αποτελεσμάτων που προκύπτουν περιέχουν δεκάδες χιλιάδες σημεία.

Η διαχείριση και επεξεργασία τους διευκολύνεται από το γεγονός ότι από άποψη απαιτήσεων σχεδιασμού το ενδιαφέρον του μελετητή εστιάζεται στις μέγιστες τιμές (τιμές αιχμής), οι οποίες κυρίως προσδιορίζουν τις ροπές και τέμνουσες σχεδιασμού.

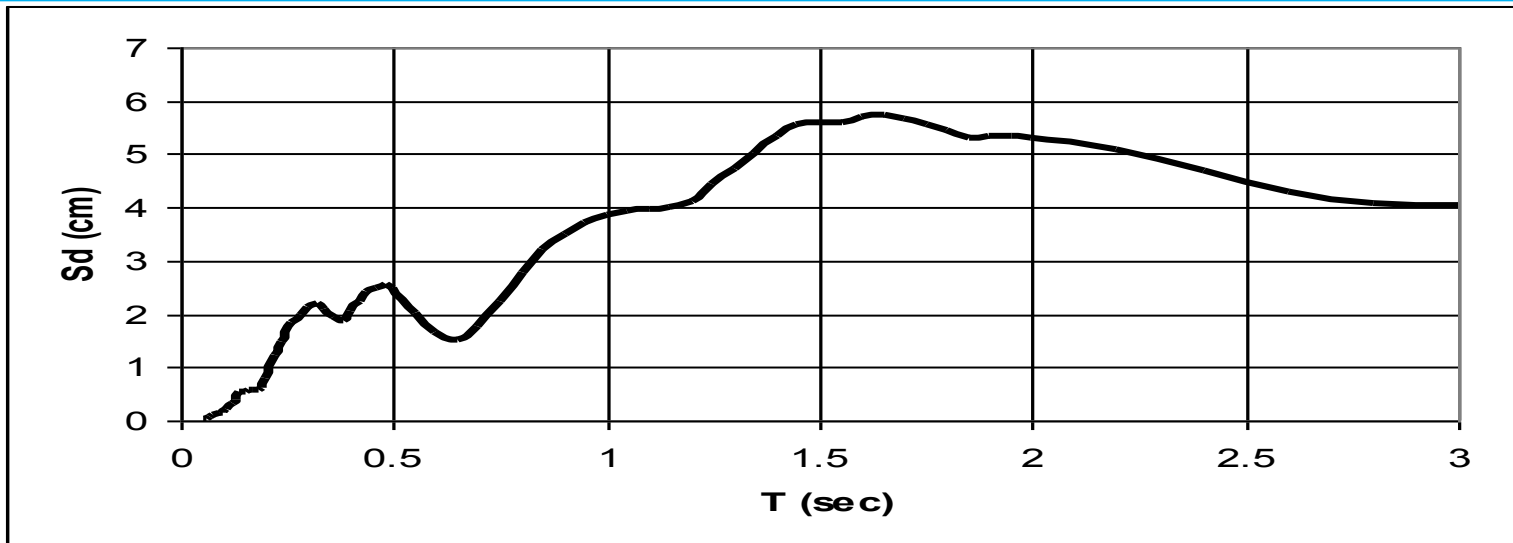
Κατά συνέπεια, από κάθε επίλυση θα μπορούσαν να αποθηκευτούν μόνον οι τιμές αιχμής, και όχι το σύνολο των τιμών της ιστορίας απόκρισης του φορέα.

Πρέπει να σημειωθεί ότι κατά τη διάρκεια των υπολογισμών, πέραν της μετατόπισης $u(t)$, μπορούν εύκολα να αποθηκευτούν και πρόσθετες παραμέτροι απόκρισης (όπως ταχύτητα $u'(t)$ και επιτάχυνση $u''(t)$).

ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΦΑΣΜΑΤΩΝ ΑΠΟΚΡΙΣΗΣ

Με δεδομένο ότι συνήθη επαγγελματικά προγράμματα ανάλυσης και διαστασιολόγησης κατασκευών δεν παρέχουν την δυνατότητα εν-χρόνω ολοκλήρωσης, στην Δυναμική των Κατασκευών – ιδιαίτερα στην Σεισμική Μηχανική – έχει επικρατήσει η χρήση των **Φασμάτων Απόκρισης (S)**.

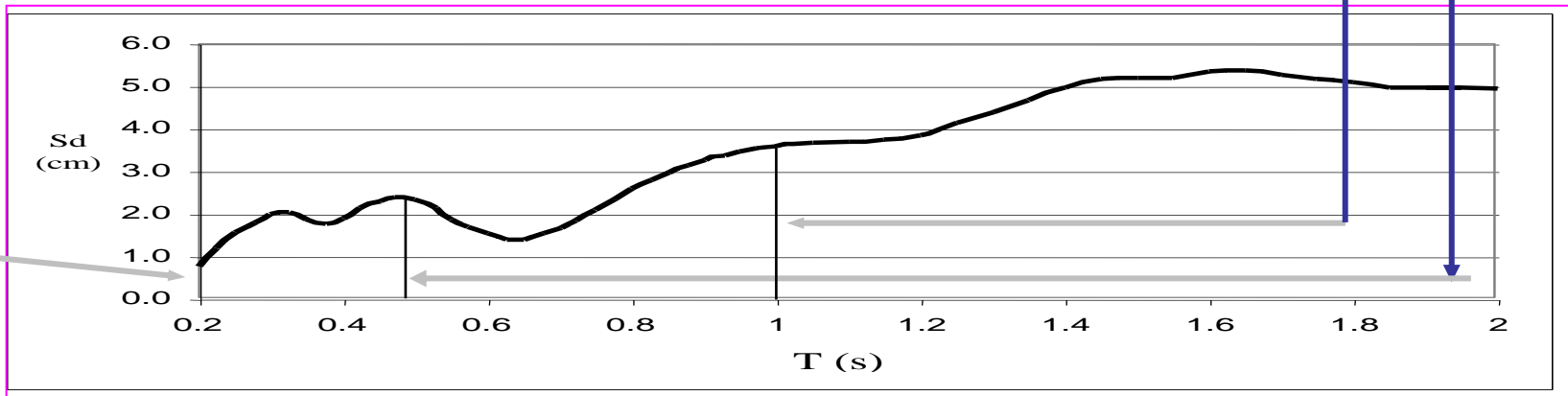
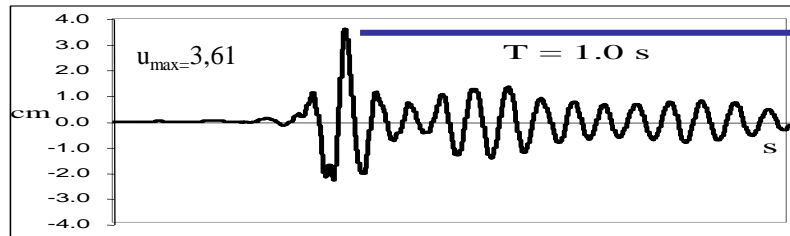
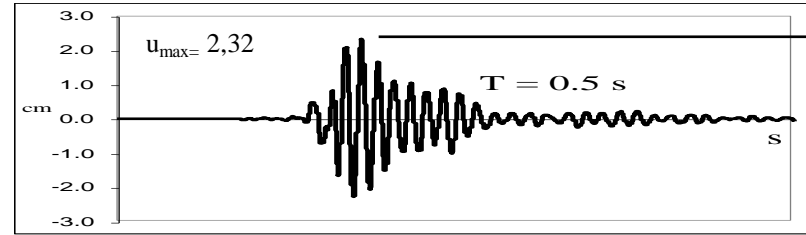
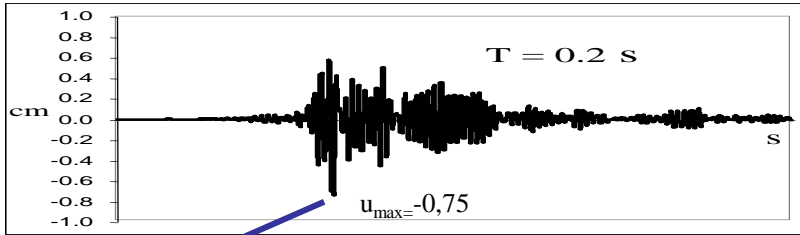
Με τον όρο φάσμα, εννοείται η γραφική παράσταση του μέγιστου της απόκρισης της κατασκευής στη δράση συγκεκριμένης διέγερσης, για διάφορες τιμές της ιδιοπεριόδου T και του ποσοστού κρίσιμης απόσβεσης ξ του ταλαντωτή $S(\xi, T)$.

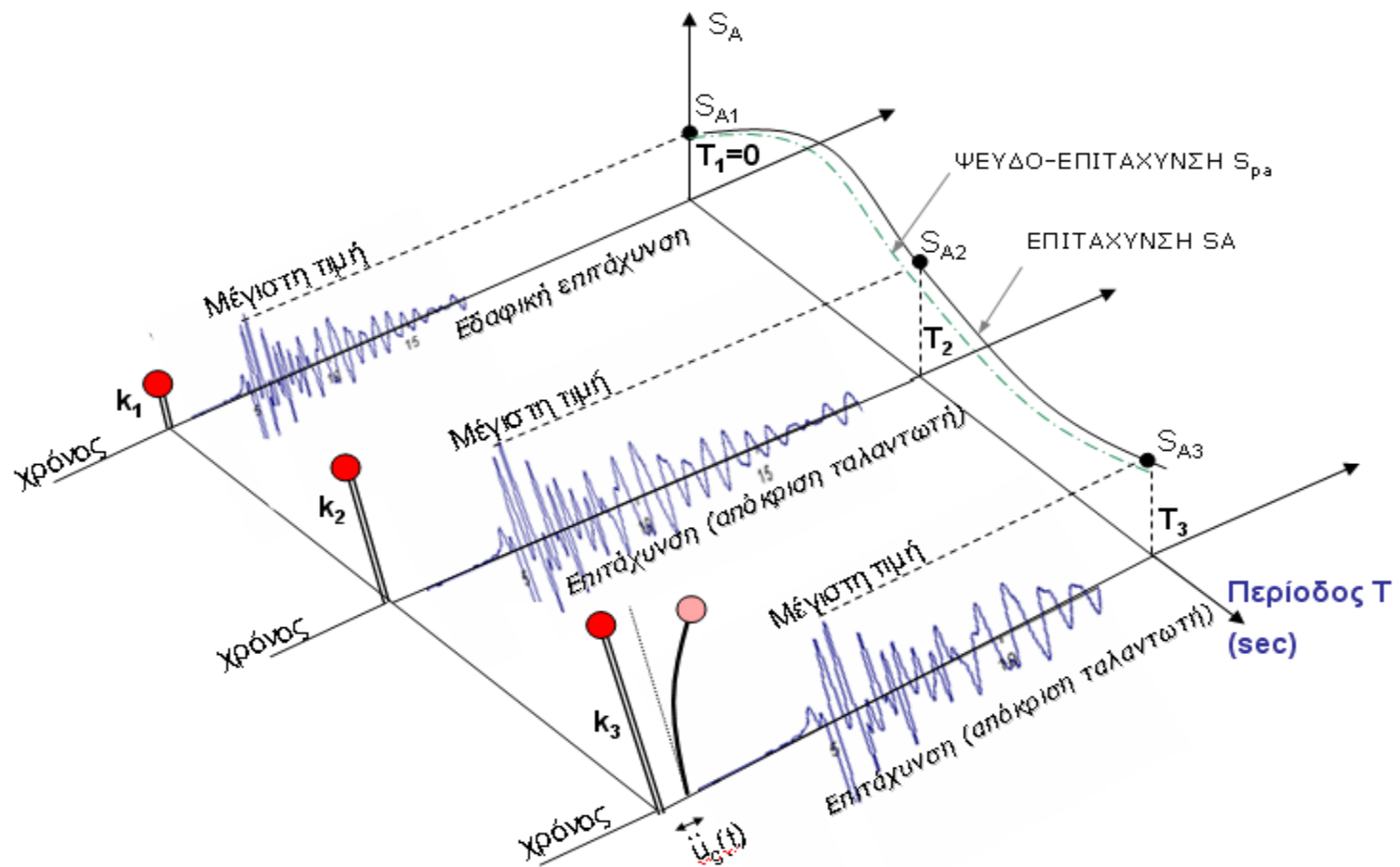


Είναι προφανές ότι για την δεδομένη σεισμική διέγερση, η προκύπτουσα φασματική τιμή χαρακτηρίζει ένα σύνολο συστημάτων με διαφορετικά χαρακτηριστικά (m , c , k) αλλά με ίδιες τιμές T και ξ . Κατά συνέπεια, τα διαγράμματα αυτά μπορούν να θεωρηθούν ως η ‘**υπογραφή**’ του συγκεκριμένου εδαφικού κραδασμού και απεικονίζουν την επίδρασή του στο δομημένο περιβάλλον.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι τα φάσματα απόκρισης αποτελούν εξαιρετικά εύχρηστο εργαλείο σχεδιασμού καθώς παρέχουν την δυνατότητα άμεσου υπολογισμού των αναγκαίων μεγεθών σχεδιασμού, καθιστώντας περιττές τόσο την εξασφάλιση επιταχυνσιογραμμάτων όσο και την εν χρόνω ολοκλήρωση της εξίσωσης κίνησης.

Κατασκευή φάσματος απόκρισης για $\xi = 5\%$, της οριζόντιας συνιστώσας Splb1-L (Σεπόλια, 7/9/1999).





Στη διεθνή βιβλιογραφία, τα φάσματα απόκρισης συνήθως καλύπτουν ένα μεγαλύτερο εύρος ιδιοπεριόδων από 0.05 s ως 5.0 s, για να συμπεριλάβουν και κατασκευές πολύ μεγάλης περιόδου (πολύ υψηλά κτίρια).

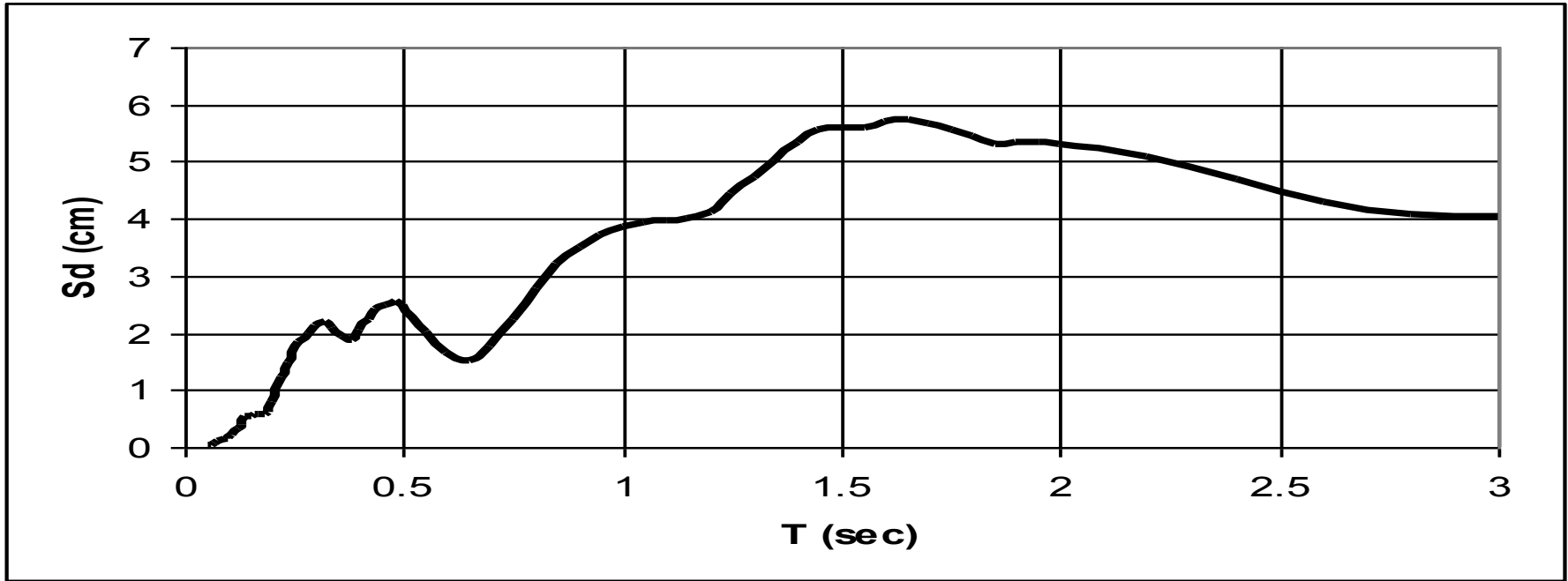
Για τον Ελληνικό χώρο και για συνήθη κτιριακά έργα το άνω όριο μπορεί να περιορισθεί στα 2.0 – 3.0 s

Για κάθε τιμή της περιόδου, το φάσμα απεικονίζει **μόνο την μέγιστη τιμή** απόκρισης χωρίς να παρέχει πληροφορίες για τις υπόλοιπες τιμές της χρονοϊστορίας

Παρά ταύτα, η πληροφορία αυτή είναι **επαρκής** για τον σχεδιασμό συστημάτων με κριτήρια τα οποία δεν περιλαμβάνουν σωρευτικούς μηχανισμούς αστοχίας (κόπωση, βρόχοι υστέρησης, κλπ).

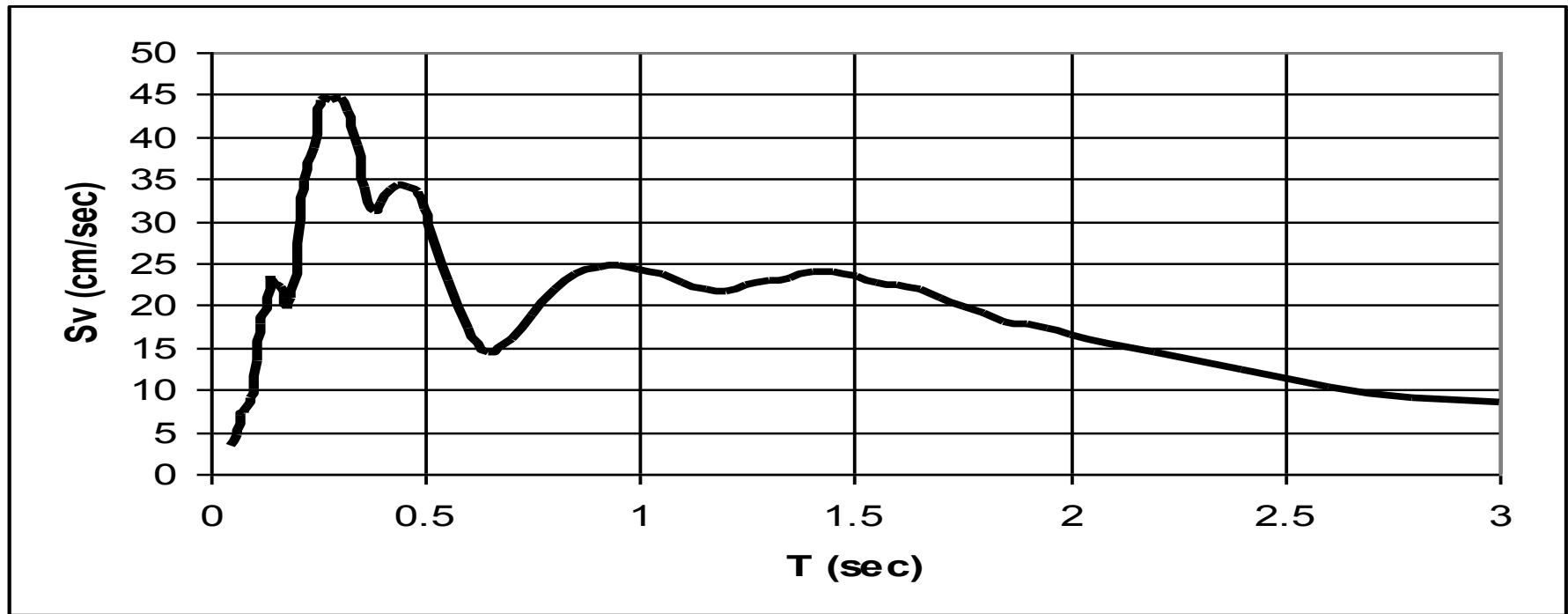
Ανάλογα με το πεδίο εφαρμογής, η κρίσιμη ποσότητα σχεδιασμού μπορεί να είναι η ταχύτητα ή η επιτάχυνση απόκρισης. Για τον λόγο αυτό στα φάσματα η απόκριση είναι δυνατόν να εκφράζεται σε όρους μετατόπισης u_{\max} (φάσμα μετατοπίσεων S_d), σε όρους ταχύτητας u'_{\max} (φάσμα ταχυτήτων S_v) ή σε όρους επιτάχυνσης u''_{\max} (φάσμα επιταχύνσεων S_a).

Στα Σχήματα που ακολουθούν φαίνονται τα τρία φάσματα (μετατόπισης, ταχύτητας και επιτάχυνσης) για $\xi = 5\%$, της οριζόντιας συνιστώσας S_{plb1-L} (Σεπόλια, 7/9/1999).

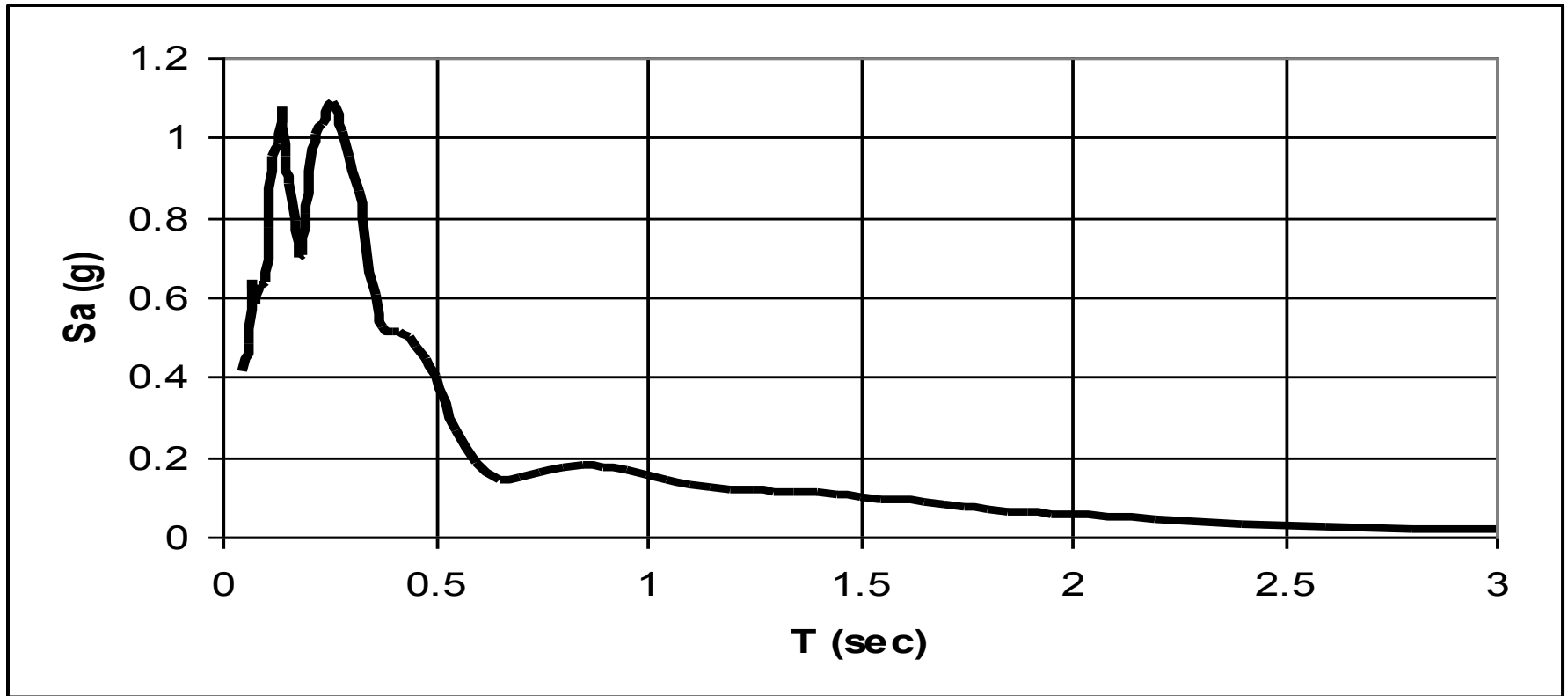


Παρατηρούμε ότι οι τιμές του **φάσματος μετατόπισης S_d** αυξάνουν με την αύξηση της ιδιοπεριόδου.

Αυτό ερμηνεύεται από το γεγονός ότι μεγαλύτερες ιδιοπεριόδου αντιστοιχούν σε πιο εύκαμπτες κατασκευές και είναι αναμενόμενο η μετατόπισή τους να αυξάνει.



Ανάλογη διαπίστωση (δηλαδή αύξηση των φασματικών τιμών με την αύξηση της ιδιοπεριόδου) δεν προκύπτει από το **φάσματα ταχυτήτων S_v** στο οποίο παρατηρείται μια σταθεροποίηση και μετά πτώση των τιμών για μεγάλες περιόδους.



Ακόμα πιο έντονο είναι το φαινόμενο στο **φάσμα επιταχύνσεων S_a** για το οποίο, πέρα από κάποιο σημείο, παρατηρούμε μείωση των φασματικών τιμών στις μεγάλες ιδιοπεριόδους.

Για την κατανόηση αυτής της ‘συμπεριφοράς’ των φασμάτων, θα πρέπει να λάβουμε υπόψη μας ότι τα μεγέθη της ταχύτητας και επιτάχυνσης αφορούν σε χρονικές παραγώγους της κίνησης και συνεπώς, στη διαμόρφωση των τιμών τους παίζει σημαντικό ρόλο και το συχνοτικό περιεχόμενο της απόκρισης

Αυτό μπορεί να γίνει άμεσα αντιληπτό στην **οριακή** περίπτωση **αρμονικής** ταλάντωσης, για την οποία ισχύει:

$$u(t) = u_{\max} \sin \omega t, \quad u'(t) = u_{\max} \omega \cos \omega t, \quad u''(t) = -u_{\max} \omega^2 \sin \omega t$$

Είναι προφανές ότι οι μέγιστες τιμές της ταχύτητας και της επιτάχυνσης διαμορφώνονται τόσο από τη μέγιστη μετατόπιση u_{\max} αλλά και από την συχνότητα ταλάντωσης ω , η οποία είναι αντιστρόφως ανάλογη της περιόδου.

Φυσικά, η απόκριση λόγω εδαφικού κραδασμού δεν είναι αρμονική καθώς η διέγερση περιλαμβάνει ταυτόχρονα πολλές συχνότητες.

Ο ταλαντωτής, όμως, δρα ως ένα είδος ‘φίλτρου’ και η απόκρισή του περιλαμβάνει πολύ λιγότερες συχνότητες, με κυρίαρχη την ιδιοσυχνότητά του ω_0 .

Στο όριο, λοιπόν, θα μπορούσαμε να προσεγγίσουμε την απόκριση ως αρμονική θέτοντας στην σχέση όπου $\omega = \omega_0$.

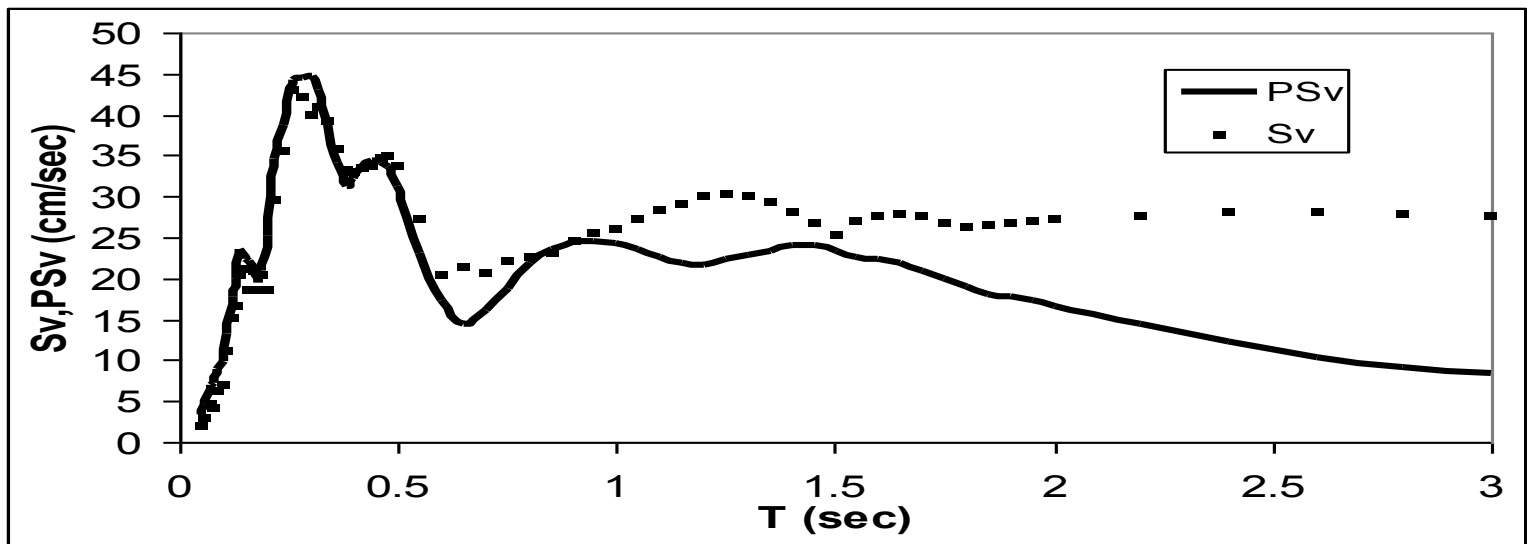
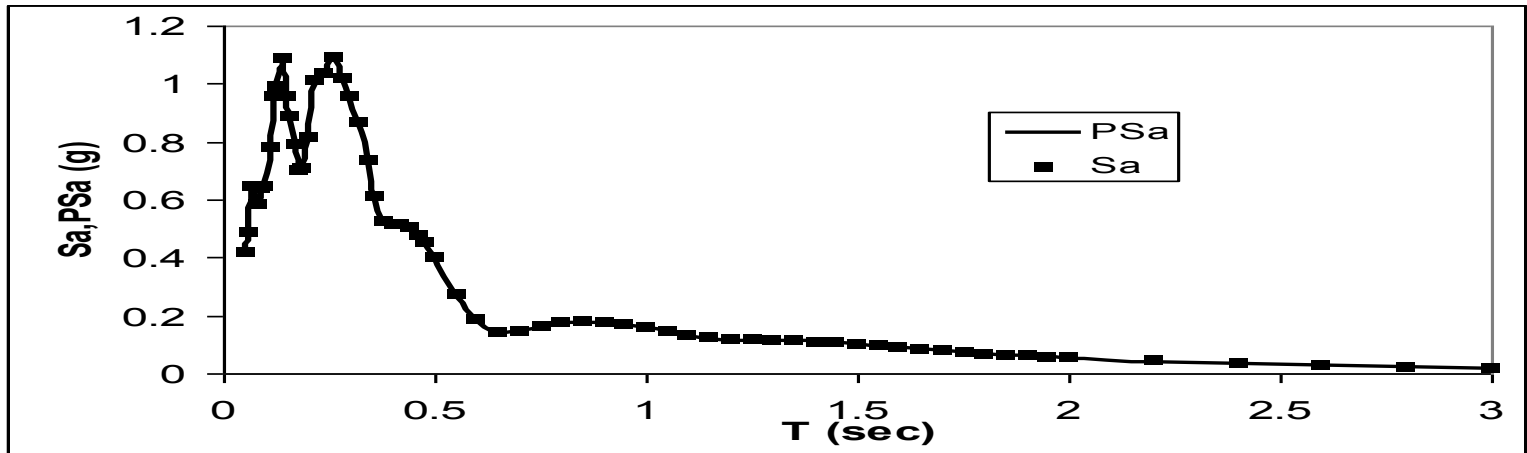
Η προηγούμενη απλοποιητική θεώρηση της απόκρισης ως αρμονικής, παρέχει την δυνατότητα προσεγγιστικής εκτίμησης των φασμάτων ταχύτητας και επιτάχυνσης.

Λόγω του προσεγγιστικού τους χαρακτήρα τα φάσματα αυτά καλούνται φάσμα ψευδο-ταχύτητας (PS_v) και φάσμα ψευδο-επιτάχυνσης (PS_a), και ορίζονται ως:

$$PS_v = \omega_0 * S_d, \quad PS_a = \omega_0^2 * S_d$$

Συγκρίσεις μεταξύ φασμάτων (S_v, S_a) και ψευδο-φασμάτων (PS_v, PS_a) για την οριζόντια συνιστώσα S_{plb1-L} και για $\xi = 5\%$ (επόμενο Σχήμα) αποδεικνύουν ότι η παραπάνω προσεγγιστική σχέση :

- Είναι ιδιαίτερα ακριβής για το φάσμα επιτάχυνσης,
- Ενώ παρουσιάζονται σημαντικές διαφορές μεταξύ PS_v και S_v για περιόδους άνω του 1.5 s. Συνεπώς η προσέγγιση είναι επαρκής για κτίρια μέχρι 15 ορόφους.



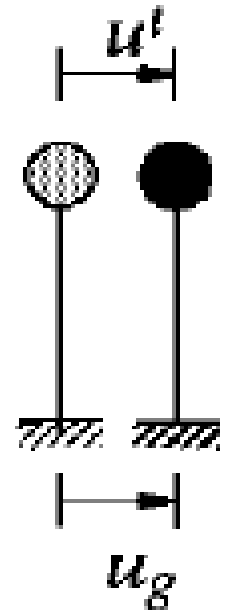
ΟΡΙΑΚΕΣ ΤΙΜΕΣ ΦΑΣΜΑΤΩΝ

$$\begin{aligned} m [a_g(t) + u''(t)] + c u'(t) + k u(t) &= 0 \rightarrow \\ [a_g(t) + u''(t)] + 2\xi\omega u'(t) + \omega^2 u(t) &= 0 \rightarrow \\ u_t''(t) + 2\xi\omega u'(t) + \omega^2 u(t) &= 0 \end{aligned}$$

(α) Πολύ δύσκαμπτοι ταλαντωτές ($k, \omega \rightarrow \infty, T \rightarrow 0$)

Επειδή $\omega \rightarrow \infty$, θα πρέπει $u, u', u'' \rightarrow 0$
(μηδενική σχετική κίνηση). Οπότε:

$$\begin{aligned} u_t''(t) = a_g(t) + u''(t) &\approx a_g(t) \rightarrow \\ \max[u_t''(t)] &= Pga \end{aligned}$$



$$[a_g(t) + u''(t)] + 2\xi\omega u'(t) + \omega^2 u(t) = 0$$

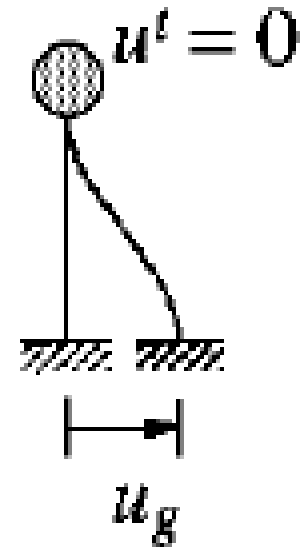
(β) Πολύ εύκαμπτοι ταλαντωτές ($k, \omega \rightarrow 0, T \rightarrow \infty$)

Επειδή $\omega \rightarrow 0$, θα πρέπει :

$$u_t''(t) = a_g(t) + u''(t) = 0 \rightarrow$$

$$u''(t) = -a_g(t) \rightarrow (\text{μετά από ολοκλήρωση})$$

$$u(t) = -u_g(t) \rightarrow S_d = \max[u(t)] = Pgd$$



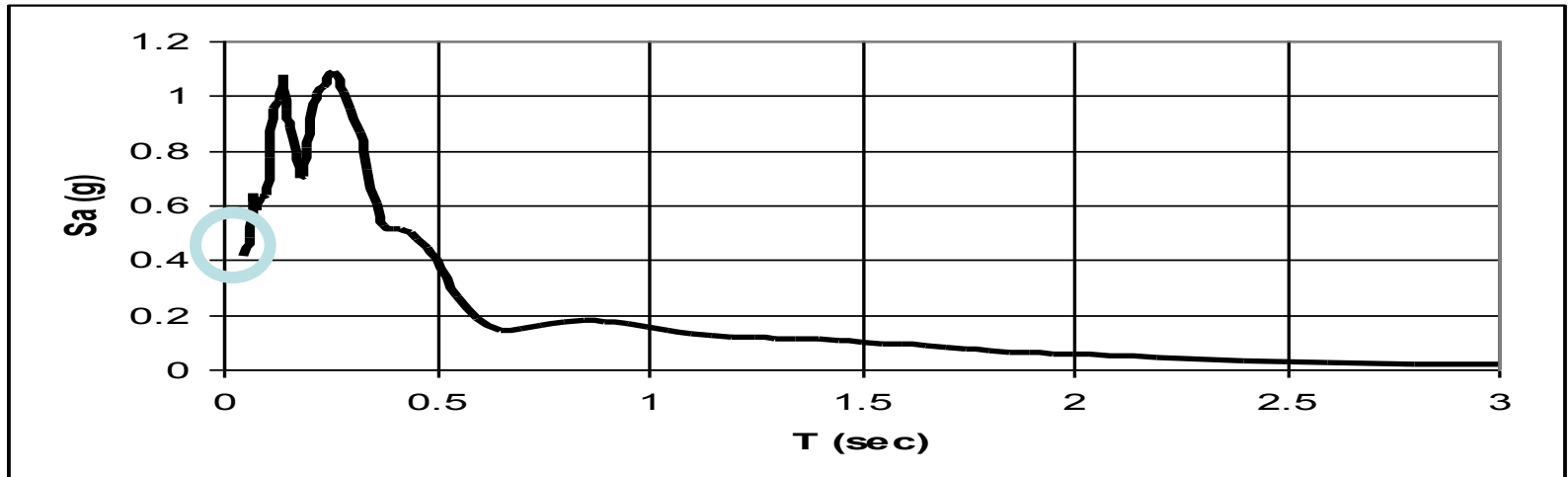
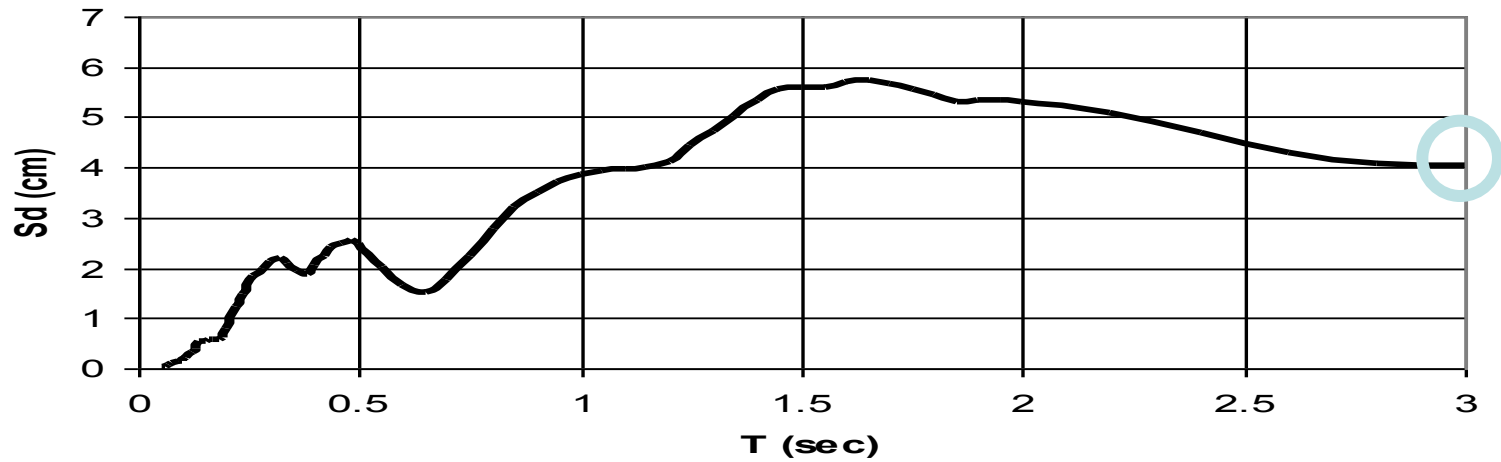
$$[a_g(t) + u''(t)] + 2\xi\omega u'(t) + \omega^2 u(t) = 0$$

(γ) Αναπόσβεστοι ταλαντωτές ($\xi \rightarrow 0$)

$$[a_g(t) + u''(t)] + \omega^2 u(t) = 0 \rightarrow u_t''(t) + \omega^2 u(t) = 0 \rightarrow$$
$$u_t''(t) = -\omega^2 u(t)$$

Άρα, κατ' απόλυτη τιμή

$$S_{a,t} = \max[u_t''(t)] = \omega^2 \max[u(t)] = \omega^2 S_d$$

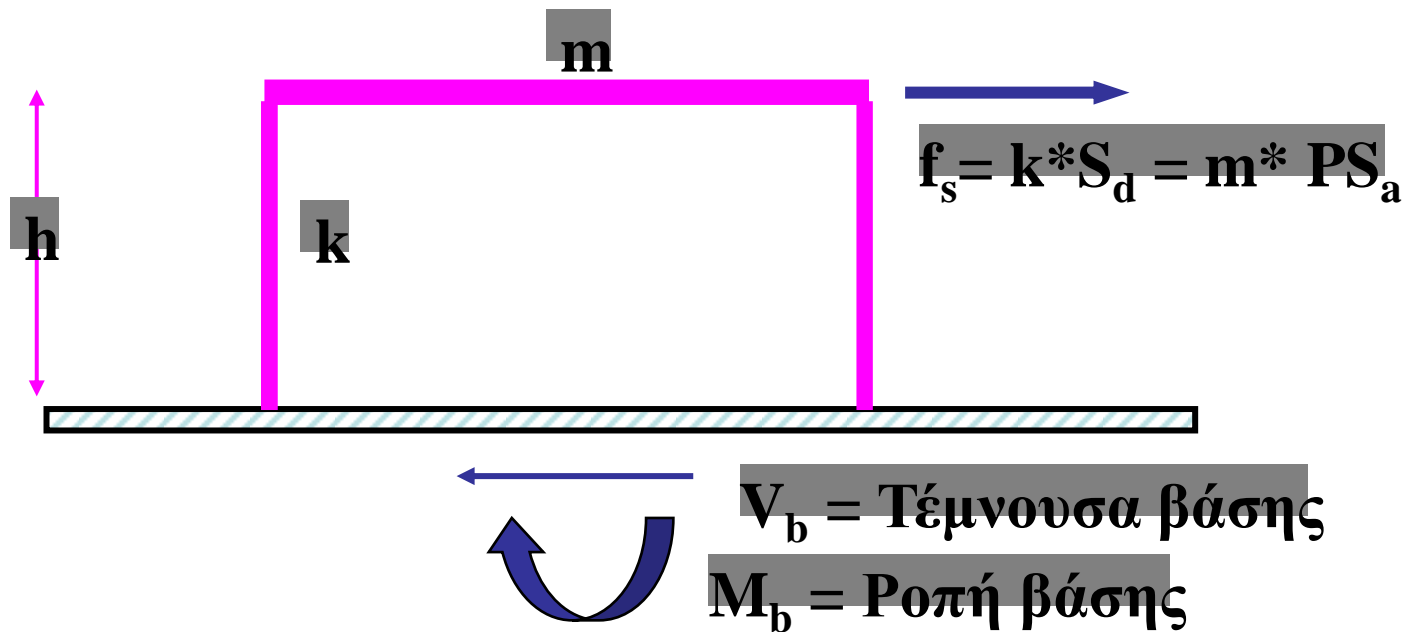


ΧΡΗΣΗ ΦΑΣΜΑΤΩΝ ΣΤΟΝ ΑΝΤΙΣΕΙΣΜΙΚΟ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟ

Τα συνήθη μεγέθη σχεδιασμού περιλαμβάνουν τις μέγιστες τιμές της τέμνουσας (V_b) και ροπής (M_b) βάσης καθώς και της ροπής υποστυλώματος (M_c).

Το φάσμα απόκρισης επιτρέπει την εισαγωγή της έννοιας του **στατικού φασματικού φορτίου** f_s με την χρήση του οποίου ο σχεδιασμός μεταπίπτει από ένα δυναμικό σε ένα ισοδύναμο στατικό πρόβλημα.

Το ισοδύναμο φασματικό φορτίο αντιστοιχεί σε ένα **ιδεατό** μεταφορικό φορτίο το οποίο όταν εφαρμοσθεί **στατικά** στον φορέα, προκαλεί απόκριση ίση με την μέγιστη δυναμική απόκριση u_{max} που προκαλεί ο πραγματικός εδαφικός κραδασμός.



Η μέγιστη αυτή τιμή προκύπτει άμεσα από το διαθέσιμο φάσμα ψευδο-επιτάχυνσης ως $u_{\max} = S_d = (PS_a / \omega_0^2)$. Το στατικό φασματικό φορτίο ισούται με:

$$f_s = k * S_d = m * \omega_0^2 * S_d = m * PS_a = (W/g) * PS_a = \varepsilon * W$$

όπου $W =$ το βάρος της κατασκευής, $g =$ η επιτάχυνση της βαρύτητας και $\varepsilon = PS_a/g =$ σεισμικός συντελεστής.

Ο συντελεστής αυτός ουσιαστικά ταυτίζεται με το φάσμα ψευδο-επιταχύνσεων εκφρασμένου ως ποσοστό του g .

Τα ζητούμενα εντατικά μεγέθη σχεδιασμού υπολογίζονται με την μέθοδο της φασματικής ανάλυσης, ως:

$$\text{Τέμνουσα βάσης: } V_b = f_s = \varepsilon * W$$

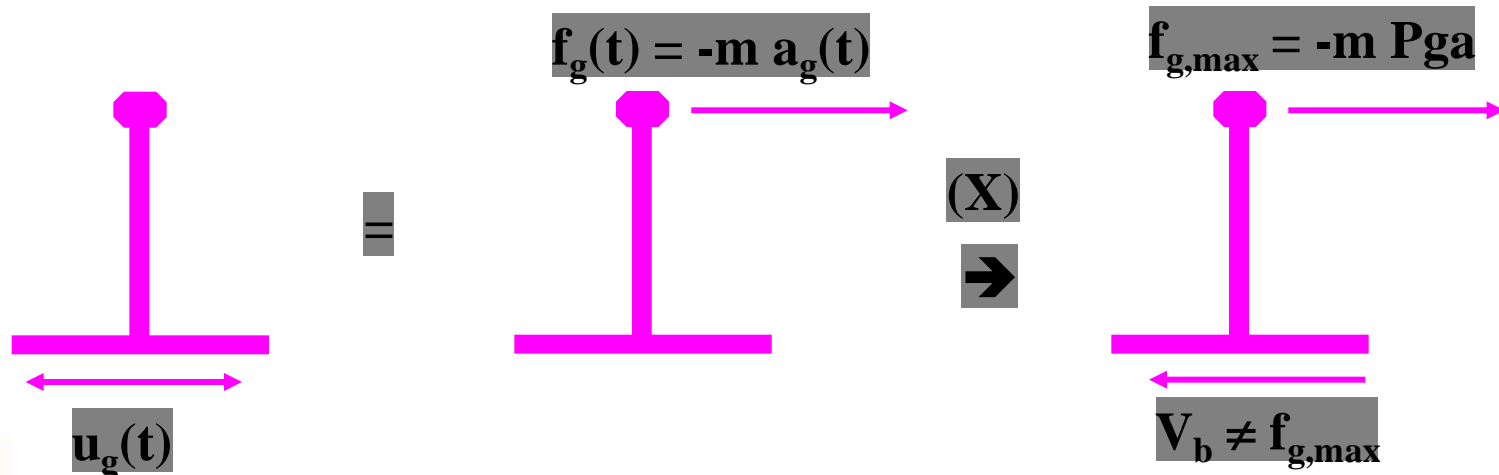
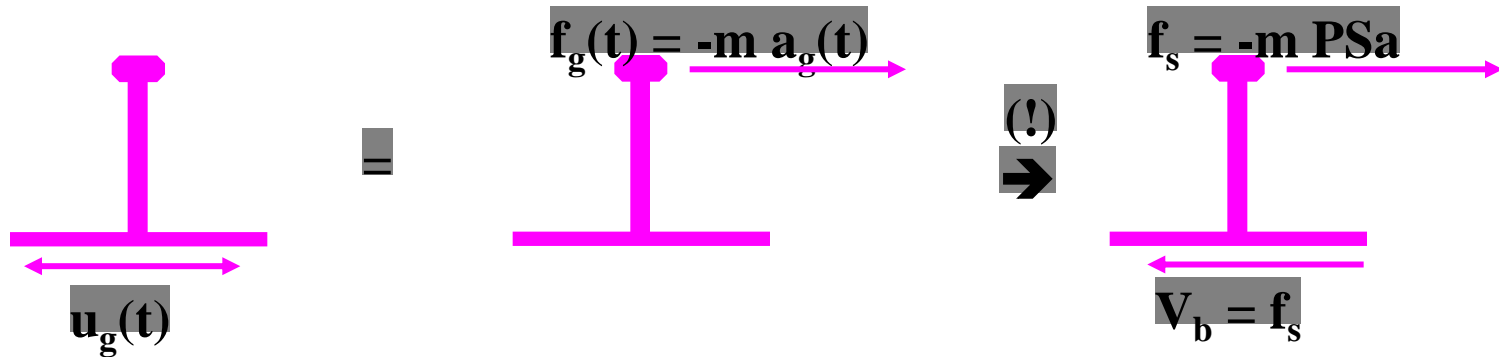
$$\text{Ροπή βάσης: } M_b = h * f_s = h * \varepsilon * W \quad (\text{για σταθερό } h)$$

$$\text{Ροπή υποστυλώματος: } M_c = \frac{\nu EI}{h^2} * S_d = \frac{\nu EI}{h^2} * \frac{PS_a}{\omega_o^2}$$

όπου $\nu = 3$ για μονόπακτα υποστυλώματα και $\nu = 6$ για αμφίπακτα.

Αντισεισμικός αρμός δ

Υπολογισμός τέμνουσας βάσης με δυναμική φασματική ανάλυση (άνω – ακριβής) και με στατική ανάλυση (κάτω - λανθασμένη).

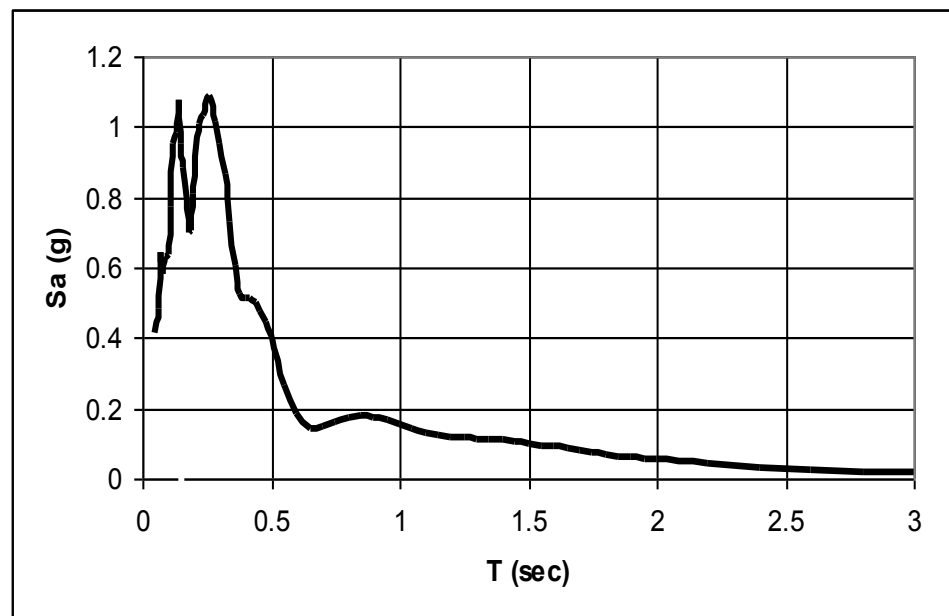
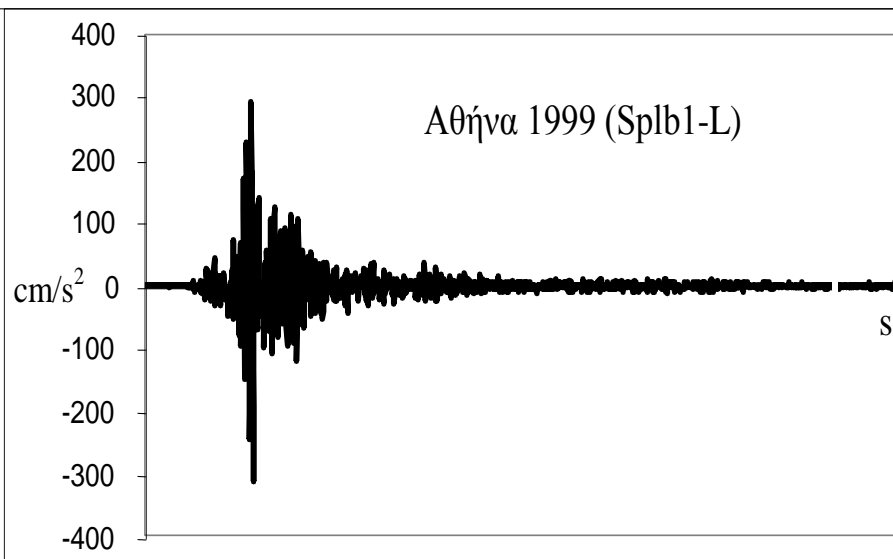


Παράδειγμα

Υδατόπυργος, υπόκειται στη δράση της συνιστώσας Splb1-L (Σεπόλια, 1999) για την οποία δίνονται:

(i) Μέγιστη εδαφική επιτάχυνση $Pga = 320 \text{ cm/s}^2$

(ii) Ενδεικτικές τιμές του φάσματος για $\xi=5\%$ \rightarrow
 $PS_a(T=0.3) = 935 \text{ cm/s}^2$ και $PS_a(T=1.0) = 153 \text{ cm/s}^2$.



Θεωρώντας $\xi = 5\%$, να υπολογισθούν οι τέμνουσες βάσης που προκύπτουν από την φασματική δυναμική ανάλυση όταν ο υδατόπυργος είναι:

(α) γεμάτος με νερό με ταλαντούμενη μάζα $m_{\text{tot}} = 55 \text{ tn}$ και ιδιοπερίοδο $T_0 = 0.989 \text{ s} \approx 1.0 \text{ s}$

(β) άδειος από νερό με ταλαντούμενη μάζα $m_b = 5 \text{ tn}$ και ιδιοπερίοδο $T_0 = 0.298 \text{ s} \approx 0.3 \text{ s}$.

Ποια η διαφορά αν η διέγερση θεωρηθεί εξ' αρχής στατική;

Επίλυση

(α) Όταν είναι γεμάτος, η τέμνουσα βάσης που προκύπτει από την φασματική ανάλυση είναι:

$$V_b = f_s = m_{\text{tot}} * P S_a(5\%, 1.0s) = 55 * 1.53 = 84.15 \text{ kN}$$

Το, μεταβαλλόμενο με τον χρόνο, μεταφορικό σεισμικό φορτίο είναι ίσο με $f_g(t) = -m a_g(t)$ και παρουσιάζει μέγιστο όταν $a_g(t) = P g_a$.

Η θεώρησή του φορτίου ως στατικού με τιμή ίση με την μέγιστη $f_{g,\text{max}}$, οδηγεί σε τέμνουσα βάσης:

$$V_{b,\text{st}} = f_{g,\text{max}} = m_{\text{tot}} * P g_a = 55 * 3.2 = 176 \text{ kN}$$

Η σύγκριση των δύο αποτελεσμάτων φανερώνει ότι εδώ ο

συντελεστής δυναμικής ενίσχυσης είναι: $D = \frac{V_b}{V_{b,\text{st}}} = 0.48$

(β) Όταν η δεξαμενή είναι άδεια, η τέμνουσα βάσης που προκύπτει από την φασματική ανάλυση είναι:

$$V_b = f_s = m_b * PS_a(5\%, 0.3s) = 5 * 9.35 = 46.75 \text{ kN}$$

Η αντίστοιχη τέμνουσα βάσης που προκύπτει από την στατική ανάλυση είναι:

$$V_{b,st} = f_{g,max} = m_b * Pga = 5 * 3.2 = 16 \text{ kN}$$

Η σύγκριση των δύο αποτελεσμάτων φανερώνει ότι, στην περίπτωση αυτή, ο συντελεστής δυναμικής ενίσχυσης είναι:

$$D = \frac{V_b}{V_{b,st}} = 2.92$$

Τέλος Ενότητας

