ΤΕΙ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΑΝΟΙΚΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟΥ Ι

κ. ΠΕΤΑΛΙΔΗΣ

***ΤΜΗΜΑ* ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΤΕ**

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Κεντρικής Μακεδονίας» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής

Αριθμητικές Μέθοδοι σε Προγραμματιστικό Περιβάλλον (Εργαστήριο 5)

Δρ. Δημήτρης Βαρσάμης
Επίκουρος Καθηγητής

Αριθμητικές Μέθοδοι σε Προγραμματιστικό Περιβάλλον

Σκοπός του εργαστηρίου είναι η γνωριμία του φοιτητή με την έννοια της αριθμητικής επίλυσης εξισώσεων και ειδικότερα με την μέθοδο Διχοτόμησης, η οποία υλοποιείται προγραμματιστικά σε Matlab. Ειδικότερα, ο φοιτητής θα ασχοληθεί με τα παρακάτω αντικείμενα

1. Αριθμητική Επίλυση Εξισώσεων
   - Μέθοδος Διχοτόμησης
   - Μέθοδος Διχοτόμησης - Αλγόριθμος
   - Μέθοδος Διχοτόμησης - Υλοποίηση
   - Μέθοδος Διχοτόμησης - Βελτίωση προγράμματος
   - Μέθοδος Διχοτόμησης - Παραδείγματα
   - Πλήθος Επαναλήψεων - Ακρίβεια

Μέθοδος Διχοτόμησης

- Υπολογισμός μιας ρίζας της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο διάστημα $[a, b]$ οπού ισχύει $f(a) \cdot f(b) < 0$.
- Είσοδος
  - Η συνάρτηση f
  - Το διάστημα $[a, b]$
  - Η ακρίβεια σε δεκαδικά ψηφία (tol)
  - Ο μέγιστος αριθμός επαναλήψεων
- Έξοδος
  - Η προσεγγιστική ρίζα
  - Μήνυμα αποτυχίας

Μέθοδος Διχοτόμησης - Αλγόριθμος

ΕΙΣΟΔΟΣ: $f(x)$, a, b, tol, n

ΒΗΜΑ 1 Θέσε $i = 1$

ΒΗΜΑ 2 Όταν $i <= n$ εκτέλεσε τα βήματα $3 - 6$

ΒΗΜΑ 3 Θέσε $x = \dfrac{a+b}{2}$

ΒΗΜΑ 4 Αν $f(x) = 0$ ή $\dfrac{b-a}{2} < tol$ τότε

ΕΞΟΔΟΣ: το x είναι η λύση, τερμάτισε

ΒΗΜΑ 5 Αν $f(a) \cdot f(x) > 0$ τότε

Θέσε $a = x$

Διαφορετικά

Θέσε $b = x$

ΒΗΜΑ 6 Θέσε $i = i + 1$

ΒΗΜΑ 7 ΕΞΟΔΟΣ: Η μέθοδος εξάντλησε όλες τις επαναλήψεις, τερμάτισε

Μέθοδος Διχοτόμησης - Υλοποίηση

- Υλοποίηση της μεθόδου Διχοτόμησης σε συνάρτηση MATLAB με while και break

```
function bisection(f,a,b,tol,n)
i = 1;
while i<=n
    x=(a+b)/2;
    if f(x)==0 || (b-a)/2<tol
        disp('The solution found')
        disp(x)
        break;
    end
    if f(a)*f(x)>0
        a=x;
    else
```

Μέθοδος Διχοτόμησης - Υλοποίηση

```
            b=x;
        end
        i = i + 1;
end
```

Μέθοδος Διχοτόμησης - Βελτίωση προγράμματος

- Είσοδος παραμέτρων από τον χρήστη - Δημιουργία συνάρτησης

  ```
  function out=bisect(f, a, b, tol, n)
  ```

  χρήση μεταβλητών - πινάκων.
  - Η συνάρτηση $f(x)$
  - Το διάστημα $[a, b]$
  - Η ακρίβεια σε δεκαδικά ψηφία (tol)
  - Ο μέγιστος αριθμός επαναλήψεων (n)
- Περισσότερες πληροφορίες στην έξοδο
  - Αριθμό βημάτων
  - Νέο διάστημα σε κάθε βήμα
  - Τιμή της ρίζας και της συνάρτησης $f(x)$ σε κάθε βήμα

Μέθοδος Διχοτόμησης - Υλοποίηση

- Υλοποίηση της μεθόδου Διχοτόμησης σε συνάρτηση Matlab

```
function out=bisect(f, a, b, tol, n)
a(1)=a;
b(1)=b;
i=1;
while i<=n
    x(i)=(a(i)+b(i))/2;
    if f(x(i))==0 || (b(i)-a(i))/2<tol
        break;
    end
    if f(a(i))*f(x(i))>0
        a(i+1)=x(i);
        b(i+1)=b(i);
```

Μέθοδος Διχοτόμησης - Υλοποίηση

```
    else
        a(i+1)=a(i);
        b(i+1)=x(i);
    end
    i=i+1;
end
if i>n
    k=1:n;
else
    k=1:i;
end
out=[k', a(k)', b(k)', x(k)', f(x(k))'];
```

Μέθοδος Διχοτόμησης - Παράδειγμα 1

Να βρεθεί η ρίζα της συνάρτησης $f(x) = x^3 - 2x - 5$ με τη μέθοδο Διχοτόμησης, στο διάστημα $[1, 3]$ με ακρίβεια 4 δεκαδικών ψηφίων και με μέγιστο αριθμό επαναλήψεων 50.

Σε Matlab θα έχουμε

- ορίζουμε την συνάρτηση $f(x)$
  ```
  f=inline('x.^3-2*x-5')
  ```
- καλούμε την συνάρτηση `bisect` με τα κατάλληλα ορίσματα
  ```
  out=bisect(f, 1, 3, 1/2*10^-4, 50)
  ```

Μέθοδος Διχοτόμησης - Παράδειγμα 1

```
>> f=inline('x.^3-2*x-5')

f =

     Inline function:
     f(x) = x.^3-2*x-5

>> out=bisect(f, 1, 3, 1/2*10^-4, 50)

out =

     1                1                  3                  2                    -1
     2                2                  3                2.5                 5.625
     3                2                2.5               2.25              1.890625
     4                2               2.25              2.125           0.345703125
     5                2              2.125             2.0625       -0.351318359375
     6           2.0625              2.125            2.09375    -0.008941650390625
     7          2.09375              2.125           2.109375     0.166835784912109
     8          2.09375           2.109375          2.1015625     0.078562259674072
     9          2.09375          2.1015625         2.09765625     0.034714281558990
    10          2.09375         2.09765625        2.095703125     0.012862332165241
    11          2.09375        2.095703125       2.0947265625    0.0019543478265404
    12          2.09375       2.0947265625      2.09423828125   -0.0034951491979882
    13    2.09423828125       2.0947265625     2.094482421875  -0.00077077520836610
    14   2.094482421875       2.0947265625     2.094604492187   0.00059169267296965
    15   2.094482421875     2.094604492187     2.094543457031  -8.9564676045483e-005
    16  2.0945434570312     2.094604492187    2.0945739746093   0.00025105814629000
```

Μέθοδος Διχοτόμησης - Παράδειγμα 1

Από τον πίνακα `out` τον οποίο επιστρέφει η συνάρτηση `bisect` παρατηρούμε τα εξής:

- Για τον υπολογισμό της ρίζας εκτελέστηκαν 16 επαναλήψεις (πρώτη στήλη)
- Το αριστερό άκρο του διαστήματος $a_{16} = 2.09454345703125$ (δεύτερη στήλη)
- Το δεξιό άκρο του διαστήματος $b_{16} = 2.0946044921875$ (τρίτη στήλη)
- Η προσεγγιστική τιμή της ρίζας είναι $x_{16} = 2.09457397460938$ (τέταρτη στήλη)
- Η τιμή της συνάρτησης είναι $f(x_{16}) = 0.000251058146290006$ (πέμπτη στήλη)

- Επομένως, η λύση στο πρόβλημα είναι $x_{16} = 2.09457397460938$

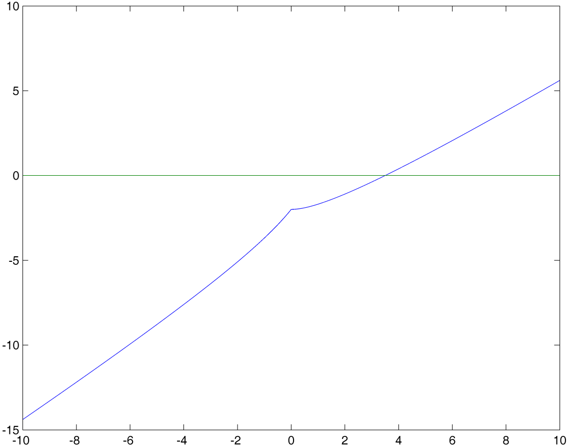
Μέθοδος Διχοτόμησης - Παράδειγμα 2

Να βρεθεί η ρίζα της συνάρτησης $f(x) = x - \ln(|x| + 1) - 2$ με τη μέθοδο Διχοτόμησης, με ακρίβεια 4 δεκαδικών ψηφίων και με μέγιστο αριθμό επαναλήψεων 50.

- Για να βρούμε τη ρίζα της συνάρτησης θα πρέπει πρώτα να βρούμε ένα κατάλληλο διάστημα με την βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης.
- Σχεδιάζουμε την την γραφική παράσταση της συνάρτησης στο διάστημα $[-10, 10]$ και επιλέγουμε το κατάλληλο διάστημα[1].
- Από την γραφική παράσταση της συνάρτησης επιλέγουμε το διάστημα $[3, 4]$.

[1] Στα πλαίσια του εργαστηρίου κατάλληλο διάστημα θα θεωρούμε το διάστημα $[a, a + 1]$ με $a \in \mathbb{Z}$

Μέθοδος Διχοτόμησης - Παράδειγμα 2



Σχήμα: Γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x - \ln(|x| + 1) - 2$

Μέθοδος Διχοτόμησης - Παράδειγμα 2

Σε Matlab θα έχουμε

- ορίζουμε την συνάρτηση $f(x)$
```
f=inline('x-log(abs(x)+1)-2')
```
- σχεδιάζουμε την συνάρτηση $f(x)$ και τον άξονα $x'x$
```
x=-10:0.001:10;
plot(x, f(x), x, zeros(1,length(x)))
```
- καλούμε την συνάρτηση `bisect` με τα κατάλληλα ορίσματα
```
out=bisect(f, 3, 4, 1/2*10^-4, 50)
```
- η λύση είναι $x_{15} = 3.50521850585938$

Πλήθος Επαναλήψεων - Ακρίβεια

- Το πλήθος των επαναλήψεων (n) της μεθόδου Διχοτόμησης συνδέεται με την ακρίβεια της λύσης σε δεκαδικά ψηφία (k) με τον τύπο

$$\frac{b-a}{2^n} < tol \Longrightarrow \frac{b-a}{2^n} < \frac{1}{2} \cdot 10^{-k}$$

- Επομένως, μπορούμε να βρούμε είτε το n γνωρίζοντας το k, είτε το k γνωρίζοντας το n.

Πλήθος Επαναλήψεων - Ακρίβεια

- Για υπολογίσουμε το πλήθος των επαναλήψεων (n) της μεθόδου Διχοτόμησης με ακρίβεια k δεκαδικών ψηφίων στο διάστημα $[a, b]$, λύνουμε ως προς n, επομένως έχουμε

$$\frac{b-a}{2^n} < \frac{1}{2} \cdot 10^{-k} \Longrightarrow \frac{2^n}{b-a} > 2 \cdot 10^k \Longrightarrow$$

$$2^n > (b-a) \cdot 2 \cdot 10^k \Longrightarrow$$

$$n > \log_2 \left((b-a) \cdot 2 \cdot 10^k \right)$$

Πλήθος Επαναλήψεων - Ακρίβεια

- Ενώ, για υπολογίσουμε την ακρίβεια των δεκαδικών ψηφίων (k) της μεθόδου Διχοτόμησης αν εκτελεστούν n επαναλήψεις στο διάστημα $[a, b]$, λύνουμε ως προς k, επομένως έχουμε

$$\frac{b-a}{2^n} < \frac{1}{2} \cdot 10^{-k} \Longrightarrow 2 \cdot 10^k < \frac{2^n}{b-a} > \Longrightarrow$$

$$10^k < \frac{2^n}{2 \cdot (b-a)} \Longrightarrow$$

$$k < \log\left(\frac{2^n}{2 \cdot (b-a)}\right)$$

Πλήθος Επαναλήψεων - Παράδειγμα

Να βρεθεί το πλήθος των επαναλήψεων που θα εκτελέσει η μέθοδος Διχοτόμησης στο διάστημα $[1,3]$ με ακρίβεια 4 δεκαδικών ψηφίων.

- Σε Matlab θα έχουμε

```
>> log2((3-1)*2*10^4)
ans =

          15.2877123795494
```

- επειδή $n > \log_2\left((b-a)\cdot 2\cdot 10^k\right) = \log_2\left((3-1)\cdot 2\cdot 10^4\right) = 15.2877123795494$
- θα έχουμε $n = 16$.

Ακρίβεια - Παράδειγμα

Να βρεθεί η ακρίβεια των δεκαδικών ψηφίων της μεθόδου Διχοτόμησης αν εκτελεστούν 10 επαναλήψεις στο διάστημα $[1,3]$.

- Σε Matlab θα έχουμε

```
>> log10(2^10/(2*(3-1)))
ans =

             2.40823996531185
```

- επειδή $k < \log\left(\frac{2^n}{2\cdot(b-a)}\right) = \log\left(\frac{2^{10}}{2\cdot(3-1)}\right) = 2.40823996531185$
- θα έχουμε $k = 2$.

Άσκηση

- Να βρεθεί η ρίζα της συνάρτησης $f(x) = e^x - 5x + 1$ με τη μέθοδο Διχοτόμησης, στο διάστημα $[0, 4]$ με ακρίβεια 6 δεκαδικών ψηφίων και με μέγιστο αριθμό επαναλήψεων 50.
- Να βρεθεί το πλήθος των επαναλήψεων που θα εκτελέσει η μέθοδος Διχοτόμησης στο διάστημα $[0, 4]$ με ακρίβεια 10 δεκαδικών ψηφίων.
- Να βρεθεί η ακρίβεια των δεκαδικών ψηφίων της μεθόδου Διχοτόμησης αν εκτελεστούν 20 επαναλήψεις στο διάστημα $[0, 4]$.
- Να βρεθεί η ακρίβεια σε δεκαδικά ψηφία που έχουν οι τιμές x_{10} και x_{20}.
- Να βρεθεί η ακρίβεια σε σημαντικά ψηφία που έχουν οι τιμές x_{10} και x_{20}.

Άσκηση - Λύση

Να βρεθεί η ρίζα της συνάρτησης $f(x) = e^x - 5x + 1$ με τη μέθοδο Διχοτόμησης, στο διάστημα $[0, 4]$ με ακρίβεια 6 δεκαδικών ψηφίων και με μέγιστο αριθμό επαναλήψεων 50.

- Απάντηση:
  Στο Command Window έχουμε

```
>> f=inline('exp(x)-5*x+1')

f =

     Inline function:
     f(x) = exp(x)-5*x+1

>> out=bisect(f,0,4,1/2*10^-6,50)

out =

 1                   0                   4                   2        -1.61094390106935
 2                   0                   2                   1        -1.28171817154095
 3                   0                   1                 0.5         0.148721270700128
 4                 0.5                   1                0.75        -0.632999983387325
 5                 0.5                0.75               0.625        -0.256754042567778
 6                 0.5               0.625              0.5625       -0.0574453430397015
 7                 0.5              0.5625             0.53125        0.0448073018484008
```

Άσκηση - Λύση

8	0.53125	0.5625	0.546875	-0.00652994347283675
9	0.53125	0.546875	0.5390625	0.0190863596205357
10	0.5390625	0.546875	0.54296875	0.00626507703887991
11	0.54296875	0.546875	0.544921875	-0.000135722390487647
12	0.54296875	0.544921875	0.5439453125	0.00306385583364355
13	0.5439453125	0.544921875	0.54443359375	0.00146386124864795
14	0.54443359375	0.544921875	0.544677734375	0.000664018048305737
15	0.544677734375	0.544921875	0.5447998046875	0.000264134982147279
16	0.5447998046875	0.544921875	0.54486083984375	6.42030839435037e-005
17	0.54486083984375	0.544921875	0.544891357421875	-3.57604562681857e-005
18	0.54486083984375	0.544891357421875	0.544876098632813	1.42211130915726e-005
19	0.544876098632813	0.544891357421875	0.544883728027344	-1.07697217752722e-005
20	0.544876098632813	0.544883728027344	0.544879913330078	1.72568311151977e-006
21	0.544879913330078	0.544883728027344	0.544881820678711	-4.52202246847833e-006
22	0.544879913330078	0.544881820678711	0.544880867004395	-1.39817046251878e-006
23	0.544879913330078	0.544880867004395	0.544880390167236	1.63756128435111e-007

Η λύση είναι το $x_{23} = 0.544880390167236$

Άσκηση - Λύση

Να βρεθεί το πλήθος των επαναλήψεων που θα εκτελέσει η μέθοδος Διχοτόμησης στο διάστημα $[0, 4]$ με ακρίβεια 10 δεκαδικών ψηφίων.

- Απάντηση:
  Στο Command Window έχουμε

```
>> log2((4-0)*2*10^10)
ans =

          36.2192809488736
```

Άρα, $n = 37$ *επαναλήψεις.*

Άσκηση - Λύση

Να βρεθεί η ακρίβεια των δεκαδικών ψηφίων της μεθόδου Διχοτόμησης αν εκτελεστούν 20 επαναλήψεις στο διάστημα $[0, 4]$.

- Απάντηση:
  Στο Command Window έχουμε

```
>> log10(2^20/(2*(4-0)))
ans =

          15.2877123795494
```

Άρα, $k = 15$ *η ακρίβεια των δεκαδικών ψηφίων.*

Άσκηση - Λύση

Να βρεθεί η ακρίβεια σε δεκαδικά ψηφία που έχουν οι τιμές x_{10} και x_{20}.

- Απάντηση:
  Στο Command Window έχουμε για x_{15} και x_{20}

```
>> -log10(2*abs(out(10,4)-out(9,4)))

ans =

          2.10720996964787

>> -log10(2*abs(out(20,4)-out(19,4)))

ans =

          5.11750992628768
```

Άσκηση - Λύση

Άρα, 2 και 5 δεκαδικά ψηφία αντίστοιχα.

Άσκηση - Λύση

Να βρεθεί η ακρίβεια σε σημαντικά ψηφία που έχουν οι τιμές x_{10} και x_{20}.

- Απάντηση:
  Στο Command Window έχουμε για x_{15} *και* x_{20}

```
>> -log10(2*abs((out(10,4)-out(9,4))/out(9,4)))+1

ans =

          2.83884909073726

>> -log10(2*abs((out(20,4)-out(19,4))/out(19,4)))+1

ans =

          5.85381376496174
```

Άσκηση - Λύση

Άρα, 2 και 5 σημαντικά ψηφία αντίστοιχα.