ΤΕΙ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟΥ Ι

κ. ΠΕΤΑΛΙΔΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΤΕ

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Κεντρικής Μακεδονίας» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής

Αριθμητικές Μέθοδοι σε Προγραμματιστικό Περιβάλλον (Εργαστήριο 6)

Δρ. Δημήτρης Βαρσάμης
Επίκουρος Καθηγητής

Αριθμητικές Μέθοδοι σε Προγραμματιστικό Περιβάλλον

Σκοπός του εργαστηρίου είναι η γνωριμία του φοιτητή με την έννοια της αριθμητικής επίλυσης εξισώσεων και ειδικότερα με την επαναληπτική μέθοδο Newton, η οποία υλοποιείται προγραμματιστικά σε Matlab. Ειδικότερα, ο φοιτητής θα ασχοληθεί με τα παρακάτω αντικείμενα

1. Αριθμητική Επίλυση Εξισώσεων
   - Μέθοδος Newton
   - Μέθοδος Newton - Αλγόριθμος
   - Μέθοδος Newton - Υλοποίηση
   - Μέθοδος Newton - Παραδείγματα

Μέθοδος Newton

- Υπολογισμός μιας ρίζας της εξίσωσης $f(x) = 0$ με αρχική τιμή x_0.
- Είσοδος
  - Η συνάρτηση f
  - Η παράγωγος συνάρτηση $f'(x)$
  - Η αρχική τιμή x_0
  - Η ακρίβεια σε δεκαδικά ψηφία (tol)
  - Ο μέγιστος αριθμός επαναλήψεων
- Έξοδος
  - Η προσεγγιστική ρίζα
  - Μήνυμα αποτυχίας

Μέθοδος Newton - Αλγόριθμος

ΕΙΣΟΔΟΣ: $f(x)$, $f'(x)$, x_0, tol, n

ΒΗΜΑ 1 Θέσε $i = 2$, $x(1) = x_0$

ΒΗΜΑ 2 Όταν $i <= n$ εκτέλεσε τα βήματα $3 - 5$

ΒΗΜΑ 3 Θέσε $x(i) = x(i-1) - \dfrac{f(x(i-1))}{f'(x(i-1))}$

ΒΗΜΑ 4 Αν $f(x(i)) = 0$ ή $|x(i) - x(i-1)| < tol$ τότε
ΕΞΟΔΟΣ: το $x(i)$ είναι η λύση, τερμάτισε

ΒΗΜΑ 5 Θέσε $i = i + 1$

ΒΗΜΑ 6 ΕΞΟΔΟΣ: Η μέθοδος εξάντλησε όλες τις επαναλήψεις, τερμάτισε

Μέθοδος Newton - Υλοποίηση

- Υλοποίηση της μεθόδου Newton σε συνάρτηση MATLAB

```
function out=newton(f, df, x1, tol, n)
x(1)=x1;
i=2;
while i<=n
    x(i)=x(i-1)-f(x(i-1))/df(x(i-1));
    if f(x(i))==0 || abs(x(i)-x(i-1))<tol
        break;
    end
    i = i + 1;
end
if i>n
    k=1:n;
else
```

Μέθοδος Newton - Υλοποίηση

```
    k=1:i;
end
out=[k', x(k)', f(x(k))'];
```

Μέθοδος Newton - Παράδειγμα 1

Να βρεθεί η ρίζα της συνάρτησης $f(x) = x^3 - 2x - 5$ με τη μέθοδο Newton, με αρχική τιμή 1 με ακρίβεια 8 δεκαδικών ψηφίων και με μέγιστο αριθμό επαναλήψεων 50.

Σε Matlab θα έχουμε

- ορίζουμε την συνάρτηση $f(x)$
  ```
  f=inline('x.^3-2*x-5')
  ```
- ορίζουμε την παράγωγο συνάρτηση $f'(x)$
  ```
  df=inline('3*x.^2-2')
  ```
  [1]
- καλούμε την συνάρτηση newton με τα κατάλληλα ορίσματα
  ```
  out=newton(f, df, 1, 1/2*10^-8, 50)
  ```

[1] Την παράγωγο συνάρτηση μπορούμε να την ορίσουμε και με αυτοματοποιημένο τρόπο

Μέθοδος Newton - Παράδειγμα 1

```
>> f=inline('x.^3-2*x-5')

f =

     Inline function:
     f(x) = x.^3-2*x-5

>> df=inline('3*x.^2-2')

df =

     Inline function:
     df(x) = 3*x.^2-2

>> out=newton(f, df, 1, 1/2*10^-8, 50)

out =
```

Μέθοδος Newton - Παράδειγμα 1

1	1	-6
2	7	324
3	4.76551724137931	93.6945987125343
4	3.34870275948028	25.854311546130 1
5	2.53159964100251	6.16181457004877
6	2.17391588493923	0.925899647287488
7	2.09788368644176	0.0372620055958821
8	2.09455771585006	6.95840817304116e-005
9	2.09455148156421	2.44225084600203e-010
10	2.09455148154233	-8.88178419700125e-016

Μέθοδος Newton - Παράδειγμα 1

Από τον πίνακα `out` τον οποίο επιστρέφει η συνάρτηση `newton` παρατηρούμε τα εξής:

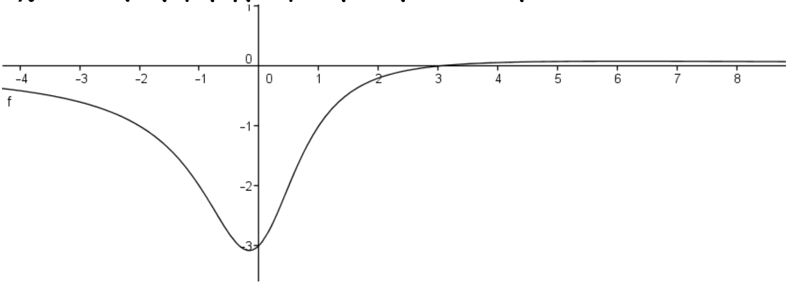
- Για τον υπολογισμό της ρίζας εκτελέστηκαν 10 επαναλήψεις (πρώτη στήλη)
- Η προσεγγιστική τιμή της ρίζας είναι $x_{10} = 2.09455148154233$ (δεύτερη στήλη)
- Η τιμή της συνάρτησης είναι $f(x_{10}) = -8.88178419700125 \times 10^{-016}$ (τρίτη στήλη)

- Επομένως, η λύση στο πρόβλημα είναι $x_{10} = 2.09455148154233$

Ειδική περίπτωση

Να βρεθεί η ρίζα της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2+1}$ με τη μέθοδο Newton, με ακρίβεια 8 δεκαδικών ψηφίων και με μέγιστο αριθμό επαναλήψεων 50.

- η παραπάνω συνάρτηση έχει προφανή ρίζα το 3
- έχει ιδιόμορφη γραφική παράσταση



- πλησιάζει στο μηδέν όταν το $x \to \infty$ και $x \to -\infty$

Μέθοδος Newton - Παράδειγμα 2

Επομένως, σε Matlab θα έχουμε

- ορίζουμε την συνάρτηση $f(x)$
  ```
  f=inline('(x-3)./(x.^2+1)')
  ```
- ορίζουμε την παράγωγο συνάρτηση $f'(x)$
  ```
  df=inline(diff(sym(f)))
  ```
  [2]
- καλούμε την συνάρτηση newton με τα κατάλληλα ορίσματα, με αρχική τιμή 2
  ```
  newton(f, df, 2, 1/2*10^-8, 50)
  ```
  $x_7 = 3$
- με αρχική τιμή 5
  ```
  newton(f, df, 5, 1/2*10^-8, 50)
  ```
  $x_{50} = -660095034734379$
  Εκτελέστηκε ο μέγιστος αριθμός των επαναλήψεων

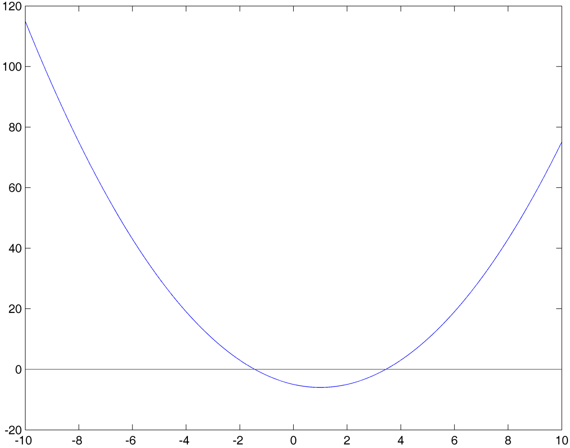
[2] Υπολογίζει την παράγωγο μιας inline function και μας επιστρέφει inline function

Μέθοδος Newton - Παράδειγμα 3

Να βρεθεί η θετική ρίζα της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 2x - 5$ με τη μέθοδο Newton, με ακρίβεια 8 δεκαδικών ψηφίων και με μέγιστο αριθμό επαναλήψεων 50.

- Για να βρούμε την θετική ρίζα της συνάρτησης θα πρέπει πρώτα να βρούμε μια κατάλληλη αρχική τιμή με την βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης.
- Σχεδιάζουμε την την γραφική παράσταση της συνάρτησης στο διάστημα $[-10, 10]$ και επιλέγουμε την κατάλληλη αρχική τιμή.
- Από την γραφική παράσταση της συνάρτησης επιλέγουμε αρχική τιμή το 4.

Μέθοδος Newton - Παράδειγμα 3



Σχήμα: Γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 2x - 5$

Μέθοδος Newton - Παράδειγμα 3

Να βρεθεί η θετική ρίζα της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 2x - 5$ με τη μέθοδο Newton, με ακρίβεια 8 δεκαδικών ψηφίων και με μέγιστο αριθμό επαναλήψεων 50.

Σε Matlab θα έχουμε

- ορίζουμε την συνάρτηση $f(x)$
  ```
  f=inline('x.^2-2*x-5')
  ```
- ορίζουμε την παράγωγο συνάρτηση $f'(x)$
  ```
  df=inline(diff(sym(f)))
  ```
- καλούμε την συνάρτηση newton με τα κατάλληλα ορίσματα
  ```
  newton(f, df, 4, 1/2*10^-8, 50)
  ```
  $x_6 = 3.44948974278318$