ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟΥ Ι

κ. ΠΕΤΑΛΙΔΗΣ

***ΤΜΗΜΑ* ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΤΕ**

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Κεντρικής Μακεδονίας» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής

Αριθμητικές Μέθοδοι σε Προγραμματιστικό Περιβάλλον (Εργαστήριο 8)

Δρ. Δημήτρης Βαρσάμης
Επίκουρος Καθηγητής

Σκοπός Εργαστηρίου - Περιεχόμενα

Σκοπός του εργαστηρίου είναι η γνωριμία του φοιτητή με την έννοια της αριθμητικής ολοκλήρωσης και τις διάφορες μεθόδους υλοποίησης της αριθμητικής ολοκλήρωσης μέσα από το Matlab. Ειδικότερα, ο φοιτητής θα ασχοληθεί με τα παρακάτω αντικείμενα

1. Αριθμητική Ολοκλήρωση
2. Κανόνας Τραπεζίου
   - Κανόνας Τραπεζίου - Υλοποίηση
   - Κανόνας Τραπεζίου - Παραδείγματα
3. Κανόνας Simpson
   - Κανόνας Simpson - Υλοποίηση
4. Συνδυαστική Άσκηση

Αριθμητική Ολοκλήρωση

- Με την αριθμητική ολοκλήρωση υπολογίζεται η τιμή ενός ορισμένου ολοκληρώματος.
- Η αριθμητική ολοκλήρωση μπορεί να εφαρμοστεί είτε σε συνάρτηση είτε σε ένα σύνολο σημείων που προέρχονται από δειγματοληψία.

Αριθμητική Ολοκλήρωση

Στην πρώτη προσέγγιση έχουμε

- Είσοδος
  - τη συνάρτηση
  - το διάστημα
  - το πλήθος των υποδιαστημάτων που θα εφαρμοστεί η αριθμητική ολοκλήρωση
- Έξοδος
  - η τιμή του ορισμένου ολοκληρώματος

Στην δεύτερη προσέγγιση έχουμε

- Είσοδος
  - τις τετμημένες και τις τεταγμένες των σημείων
- Έξοδος
  - η τιμή του ορισμένου ολοκληρώματος

Κανόνας Τραπεζίου

Έστω μια συνάρτηση f. Η τιμή του ορισμένου ολοκληρώματος

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

προσεγγίζεται από τον κανόνα του τραπεζίου σύμφωνα με τον τύπο

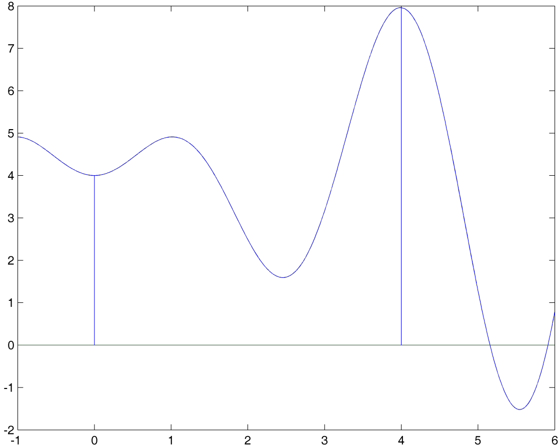
$$I = \frac{h}{2}(f_0 + 2 \cdot f_1 + \ldots + 2 \cdot f_{n-1} + f_n) = \frac{h}{2}\left(f_0 + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} f_i + f_n\right)$$

όπου n το πλήθος των υποδιαστημάτων που θα εφαρμοστεί ο τύπος και

$$h = \frac{b-a}{n}$$

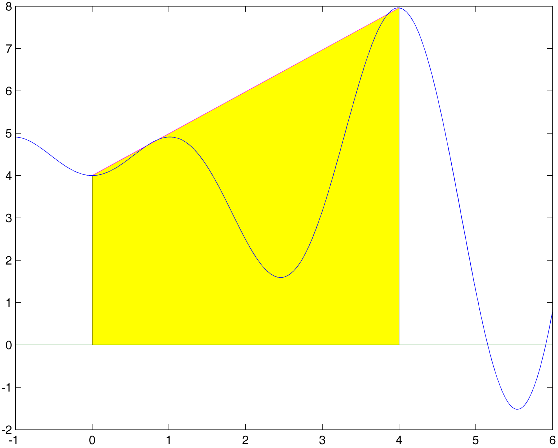
το βήμα των ισαπεχόντων σημείων.

Κανόνας Τραπεζίου



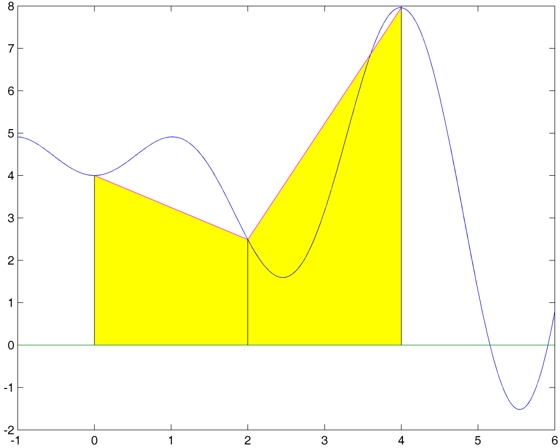
Σχήμα: Υπολογισμός του ολοκληρώματος $\int_0^4 f(x)dx$

Κανόνας Τραπεζίου



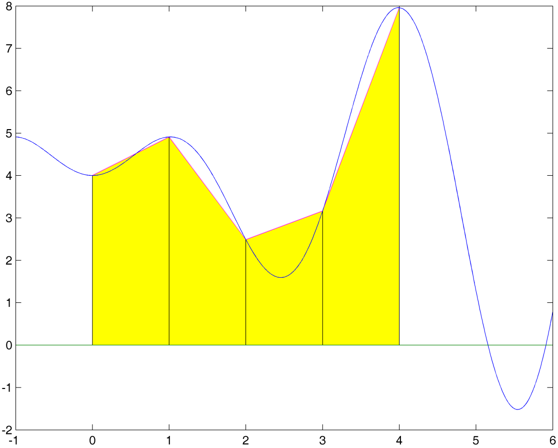
Σχήμα: Κανόνας Τραπεζίου για $n = 1$

Κανόνας Τραπεζίου



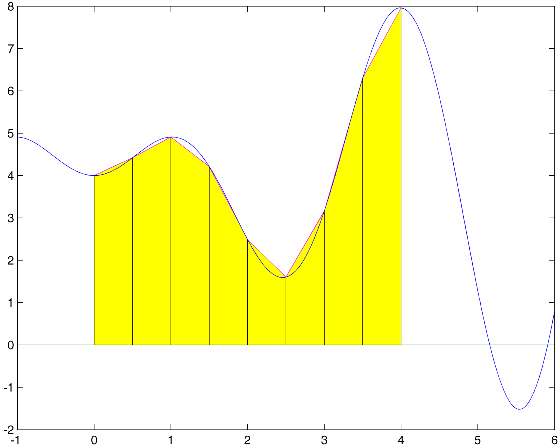
Σχήμα: Κανόνας Τραπεζίου για $n = 2$

Κανόνας Τραπεζίου



Σχήμα: Κανόνας Τραπεζίου για $n = 4$

Κανόνας Τραπεζίου



Σχήμα: Κανόνας Τραπεζίου για $n = 8$

Κανόνας Τραπεζίου - Υλοποίηση

- Υλοποίηση πρώτης προσέγγισης σε συνάρτηση Matlab

```
function I=trapeziou(f,a,b,n)
h=(b-a)/n;
S=f(a);
for i=1:n-1
   x=a+h*i;
   S=S+2*f(x);
end
S=S+f(b);
I=h*S/2;
```

Κανόνας Τραπεζίου - Παράδειγμα 1

Να υπολογιστεί η τιμή του ορισμένου ολοκληρώματος

$$I = \int_0^4 (x \cdot \sin(2x) + 4)dx$$

με τον κανόνα του τραπεζίου για $n = 1$, $n = 2$, $n = 4$, $n = 100$, $n = 1000$.

Σε MATLAB θα έχουμε

```
>> f=inline('x.*sin(2*x)+4')

f =

     Inline function:
     f(x) = x.*sin(2*x)+4
```

Κανόνας Τραπεζίου - Παράδειγμα 1

```
>> trapeziou(f,0,4,1)

ans =
          23.9148659729871

>> trapeziou(f,0,4,2)

ans =
          16.9302230052618

>> trapeziou(f,0,4,4)

ans =
          16.5361624348598
```

Κανόνας Τραπεζίου - Παράδειγμα 1

```
>> trapeziou(f,0,4,100)

ans =
          16.5383163693361

>> trapeziou(f,0,4,1000)

ans =
          16.5383393964196
```

Κανόνας Τραπεζίου - Παράδειγμα 2

Να υπολογιστεί η τιμή του ορισμένου ολοκληρώματος

$$I = \int_0^4 (x \cdot \sin(2x) + 4)dx$$

με τον κανόνα του τραπεζίου για $n = 500$ και να βρεθεί η ακρίβεια του αποτελέσματος σε δεκαδικά ψηφία.
Σε MATLAB θα έχουμε

```
>> f=inline('x.*sin(2*x)+4')

f =


     Inline function:
     f(x) = x.*sin(2*x)+4

```

Κανόνας Τραπεζίου - Παράδειγμα 2

```
>> I1=trapeziou(f,0,4,500)

I1 =

            16.53833869789

>> I2=trapeziou(f,0,4,499)

I2 =

          16.5383386941534
```

Κανόνας Τραπεζίου - Παράδειγμα 2

- συγκρίνουμε τις τιμές ως προς τα δεκαδικά ψηφία τους σύμφωνα με τον τύπο

$$|x_n - x_{n-1}| < \frac{1}{2}10^{-k} \Longrightarrow k < -\log\left(2 \cdot |x_n - x_{n-1}|\right)$$

όπου k το πλήθος των δεκαδικών ψηφίων.

- ```
  >> -log10(2*abs(I1-I2))

  ans =

                8.12649686259270
  ```
  ```

Κανόνας Τραπεζίου - Παράδειγμα 2

επειδή

$$k < -\log\left(2 \cdot |I_{500} - I_{499}|\right) = 8.1264968625927$$

θα έχουμε

$$k = 8$$

Επομένως, η προσεγγιστική λύση I_{500} έχει ακρίβεια 8 δεκαδικών ψηφίων.

Κανόνας Τραπεζίου - Άσκηση

- Να υπολογιστεί η τιμή του ορισμένου ολοκληρώματος

$$I = \int_0^3 e^{x^2} dx$$

  με τον κανόνα του τραπεζίου για $n = 100$.

  - *Απάντηση (1448.18921586593)*

- Να βρεθεί η ακρίβεια του αποτελέσματος σε δεκαδικά ψηφία.

  - *Απάντηση (0 δ.ψ.)*

Κανόνας Simpson

Έστω μια συνάρτηση f. Η τιμή του ορισμένου ολοκληρώματος

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

προσεγγίζεται από τον κανόνα του Simpson σύμφωνα με τον τύπο

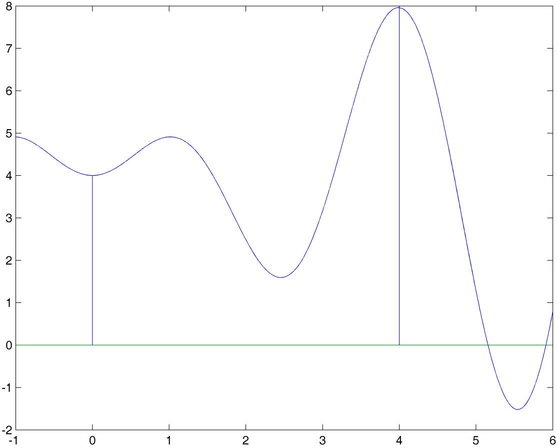
$$\begin{aligned} I &= \frac{h}{3}\big(f_0 + 4 \cdot f_1 + 2 \cdot f_2 + \ldots + 2 \cdot f_{2n-2} + 4 \cdot f_{2n-1} + f_n\big) \\ &= \frac{h}{3}\left(f_0 + 4 \cdot \sum_{i=1}^{n} f_{2i-1} + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} f_{2i} + f_n\right) \end{aligned}$$

όπου n το πλήθος των υποδιαστημάτων που θα εφαρμοστεί ο τύπος και

$$h = \frac{b-a}{2n}$$

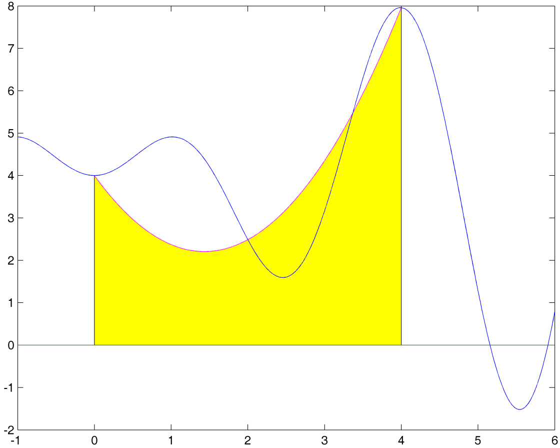
το βήμα των ισαπέχοντων σημείων.

Κανόνας Simpson



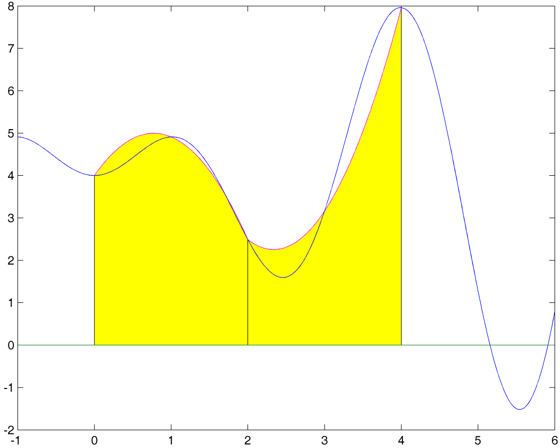
Σχήμα: Υπολογισμός του ολοκληρώματος $\int_0^4 f(x)dx$

Κανόνας Simpson



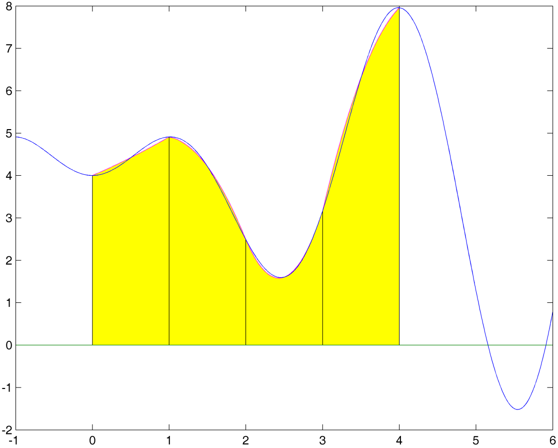
Σχήμα: Κανόνας Simpson για $n = 1$

Κανόνας Simpson



Σχήμα: Κανόνας Simpson για $n = 2$

Κανόνας Simpson



Σχήμα: Κανόνας Simpson για $n = 4$

Κανόνας Simpson - Υλοποίηση

- Υλοποίηση πρώτης προσέγγισης σε συνάρτηση MATLAB

```
function I=simpson(f,a,b,n)
h=(b-a)/(2*n);
S=f(a);
for i=1:n
    x=a+h*(2*i-1);
    S=S+4*f(x);
end
for i=1:n-1
    x=a+h*(2*i);
    S=S+2*f(x);
end
S=S+f(b);
I=h*S/3;
```

Κανόνας Simpson - Παράδειγμα 1

Να υπολογιστεί η τιμή του ορισμένου ολοκληρώματος

$$I = \int_0^4 (x \cdot \sin(2x) + 4)dx$$

με τον κανόνα του Simpson για $n = 1$, $n = 2$, $n = 4$, $n = 100$, $n = 1000$.
Σε MATLAB θα έχουμε

```
>> f=inline('x.*sin(2*x)+4')

f =

     Inline function:
     f(x) = x.*sin(2*x)+4

```

Κανόνας Simpson - Παράδειγμα 1

```
>> simpson(f,0,4,1)

ans =
          14.6020086826867

>> simpson(f,0,4,2)

ans =
          16.4048089113925

>> simpson(f,0,4,4)

ans =
          16.5350927538544
```

Κανόνας Simpson - Παράδειγμα 1

```
>> simpson(f,0,4,100)

ans =
           16.538339622856

>> simpson(f,0,4,1000)

ans =
          16.5383396292724
```

Κανόνας Simpson - Παράδειγμα 2

Να υπολογιστεί η τιμή του ορισμένου ολοκληρώματος

$$I = \int_0^4 (x \cdot \sin(2x) + 4)dx$$

με τον κανόνα του Simpson για $n = 500$ και να βρεθεί η ακρίβεια του αποτελέσματος σε δεκαδικά ψηφία.
Σε MATLAB θα έχουμε

```
>> f=inline('x.*sin(2*x)+4')

f =

     Inline function:
     f(x) = x.*sin(2*x)+4
```

Κανόνας Simpson - Παράδειγμα 2

```
>> I1=simpson(f,0,4,500)

I1 =

          16.5383396292628

>> I2=simpson(f,0,4,499)

I2 =

          16.5383396292627
```

Κανόνας Simpson - Παράδειγμα 2

- συγκρίνουμε τις τιμές ως προς τα δεκαδικά ψηφία τους σύμφωνα με τον τύπο

  $$|x_n - x_{n-1}| < \frac{1}{2}10^{-k} \Longrightarrow k < -\log\left(2 \cdot |x_n - x_{n-1}|\right)$$

  όπου k το πλήθος των δεκαδικών ψηφίων.
-
```
>> -log10(2*abs(I1-I2))

ans =

          12.6712885414875
```

Κανόνας Simpson - Παράδειγμα 2

επειδή

$$k < -\log\left(2 \cdot |I_{500} - I_{499}|\right) = 12.6712885414875$$

θα έχουμε

$$k = 12$$

Επομένως, η προσεγγιστική λύση I_{500} έχει ακρίβεια 12 δεκαδικών ψηφίων.

Κανόνας Simpson - Άσκηση

- Να υπολογιστεί η τιμή του ορισμένου ολοκληρώματος

$$I = \int_0^3 e^{x^2} dx$$

με τον κανόνα του Simpson για $n = 100$.

  - *Απάντηση (1444.54569643943)*

- Να βρεθεί η ακρίβεια του αποτελέσματος σε δεκαδικά ψηφία.

  - *Απάντηση (3 δ.ψ.)*

Συνδυαστική Άσκηση

- Να υπολογιστεί η τιμή του ορισμένου ολοκληρώματος

$$I = \int_0^3 e^{x^2}\, dx$$

  με τον κανόνα του τραπεζίου και του Simpson για $n = 500$.
  - *Απάντηση:*
    - *Μέθοδος τραπεζίου: 1444.69097472801*
    - *Μέθοδος simpson: 1444.54512381156*
- Να βρεθεί η ακρίβεια των αποτελεσμάτων σε δεκαδικά ψηφία.
  - *Απάντηση:*
    - *Μέθοδος τραπεζίου: 2.93170469768348 (2 δ.ψ)*
    - *Μέθοδος simpson: 7.8305603204051 (7 δ.ψ)*
- Ποια είναι η πιο ακριβής μέθοδος;
  - *Απάντηση: Η μέθοδος sipmson*