ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟΥ Ι

κ. ΠΕΤΑΛΙΔΗΣ

ΤΜΗΜΑ **ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΤΕ**

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Κεντρικής Μακεδονίας» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα
Κεντρικής Μακεδονίας - Σέρρες
Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής

Αριθμητικές Μέθοδοι σε Προγραμματιστικό Περιβάλλον

Δρ. Δημήτρης Βαρσάμης
Επίκουρος Καθηγητής

Αριθμητικές Μέθοδοι σε Προγραμματιστικό Περιβάλλον
Δεύτερη Σειρά Διαφανειών

Τύποι σφαλμάτων

- Απόλυτο σφάλμα

$$\varepsilon = |x^* - x|$$

- Απόλυτο σχετικό σφάλμα

$$\varepsilon_r = \left| \frac{x^* - x}{x} \right| \cdot 100\%$$

όπου

$$x^* \quad \text{Προσεγγιστική Λύση}$$

και

$$x \quad \text{Πραγματική Λύση}$$

Τύποι σφαλμάτων

Διαφορές των τύπων σφαλμάτων

- Παράδειγμα 1
  έστω $x^* = 101m$ *και* $x = 100m$ επομένως θα έχουμε

$$\varepsilon = 101 - 100 = 1 \quad \textit{και} \quad \varepsilon_r = \frac{101 - 100}{100} = 0.01 = 1\%$$

- Παράδειγμα 2
  έστω $x^* = 10001m$ *και* $x = 10000m$ επομένως θα έχουμε

$$\varepsilon = 10001 - 10000 = 1$$

και

$$\varepsilon_r = \frac{10001 - 10000}{10000} = 0.0001 = 0.01\%$$

Σφάλματα αποκοπής

- Σφάλμα αποκοπής (*truncation error*) είναι το σφάλμα που δημιουργείται από την αποκοπή όρων σε αλγοριθμικές διαδικασίες
- Παραδείγματα (Τύπος Taylor)

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) + \ldots + \frac{h^m}{m!}f^{(m)}(x_0) + \ldots$$

με εφαρμογή στους υπολογισμούς των

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$$

$$sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \ldots$$

Σφάλματα αποκοπής

- Για τον υπολογισμό του $e^1 = e \simeq 2.71828182845905$ έχουμε

$$e^1 = 1 + 1 + \frac{1^2}{2!} + \frac{1^3}{3!} = \frac{16}{6} = 2.666666666$$

με τρεις όρους,

$$e^1 = 1 + 1 + \frac{1^2}{2!} + \frac{1^3}{3!} + \frac{1^4}{4!} = \frac{65}{24} = 2.70833333333333$$

με τέσσερις όρους,

$$e^1 = 1 + 1 + \frac{1^2}{2!} + \frac{1^3}{3!} + \frac{1^4}{4!} + \frac{1^5}{5!} = \frac{326}{120} = 2.71666666666667$$

με πέντε όρους.

Σφάλματα στρογγυλοποίησης

- Σφάλμα στρογγυλοποίησης (*round-off error*) είναι το σφάλμα που δημιουργείται από την στρογγυλοποίηση k δεκαδικών ψηφίων
- Παραδείγματα

$$\pi = 3.1215923\ldots$$
$$\frac{4}{3} = 1.3333333\ldots$$

Ακρίβεια Δεκαδικών ψηφίων

- Το άνω φράγμα του σφάλματος στρογγυλοποίησης *(round-off error)* είναι

$$\varepsilon = |x^* - x| \leq \frac{1}{2}10^{-k} \tag{1}$$

  όπου k ο αριθμός των δεκαδικών ψηφίων.
- Δυο αριθμοί που η διαφορά τους είναι μικρότερη από το παραπάνω σφάλμα, έχουν ακρίβεια μεταξύ τους k δεκαδικά ψηφία.

Ακρίβεια Δεκαδικών ψηφίων - Παράδειγμα

- Να βρεθεί η ακρίβεια σε δεκαδικά ψηφία που έχουν οι τιμές $x = 3.141592$ και $y = 3.14$.

Λύνουμε την σχέση (1) ως προς k και έχουμε

$$|x^* - x| < \frac{1}{2}10^{-k} \Rightarrow 2 \cdot |x^* - x| < 10^{-k} \Rightarrow$$
$$\log\left(2 \cdot |x^* - x|\right) < \log\left(10^{-k}\right) \Rightarrow \log\left(2 \cdot |x^* - x|\right) < -k \Rightarrow$$
$$k < -\log\left(2 \cdot |x^* - x|\right) \tag{2}$$

Επομένως,

$$k < -\log\left(2 \cdot |3.141592 - 3.14|\right) = 2.49702694093436$$

Επειδή $k \in \mathbb{N}$, θα έχουμε $k = 2$.

Ακρίβεια Σημαντικών ψηφίων

- Δυο αριθμοί έχουν ακρίβεια k σημαντικών ψηφίων όταν η διαφορά τους (αφού στρογγυλοποιηθούν σε k σημαντικά ψηφία) είναι ίση με μηδέν.
- Δηλαδή, όταν για το σχετικό σφάλμα των δύο αριθμών ισχύει

$$\varepsilon_r = \left| \frac{x^* - x}{x} \right| \leq 0.5 \times 10^{-(k-1)} \tag{3}$$

Ακρίβεια Σημαντικών ψηφίων -Παράδειγμα

- Να βρεθεί η ακρίβεια σε σημαντικά ψηφία που έχουν οι τιμές $x = 3.141592$ και $y = 3.14$.

Λύνουμε τη σχέση (3) ως προς k και έχουμε

$$\left|\frac{x^* - x}{x}\right| < \frac{1}{2}10^{-(k-1)} \Rightarrow 2 \cdot \left|\frac{x^* - x}{x}\right| < 10^{-(k-1)} \Rightarrow$$

$$\log\left(2 \cdot \left|\frac{x^* - x}{x}\right|\right) < \log\left(10^{-(k-1)}\right) \Rightarrow$$

$$\log\left(2 \cdot \left|\frac{x^* - x}{x}\right|\right) < -(k-1) \Rightarrow$$

$$k - 1 < -\log\left(2 \cdot \left|\frac{x^* - x}{x}\right|\right) \Rightarrow$$

$$k < -\log\left(2 \cdot \left|\frac{x^* - x}{x}\right|\right) + 1 \tag{4}$$

Ακρίβεια Σημαντικών ψηφίων -Παράδειγμα

Επομένως,

$$k < -\log\left(2 \cdot \left|\frac{3.14 - 3.141592}{3.141592}\right|\right) + 1 = 3.99395658900758$$

Επειδή $k \in \mathbb{N}$, θα έχουμε $k = 3$.

Αριθμητική Ακρίβεια - Παράδειγμα

- Να βρεθεί η ακρίβεια σε δεκαδικά και σημαντικά ψηφία που έχουν οι τιμές $x = 999999$ και $y = 999996$.

Από τον (2) έχουμε

$$k < -\log\left(2 \cdot |999996 - 999999|\right) = -0.778151250383644$$

Επειδή $k \in \mathbb{N}$, δεν έχουμε ακρίβεια σε δεκαδικά ψηφία.
Από τον (4) έχουμε

$$k < -\log\left(2 \cdot \left|\frac{999996 - 999999}{999999}\right|\right) + 1 = 6.22184831532166$$

Επειδή $k \in \mathbb{N}$, έχουμε ακρίβεια 6 σημαντικά ψηφία.

Αριθμητική Ακρίβεια - Παράδειγμα

- Να βρεθεί η ακρίβεια σε δεκαδικά και σημαντικά ψηφία που έχουν οι τιμές $x = 0.000012$ και $y = 0.000009$.

Από τον (2) έχουμε

$$k < -\log\left(2 \cdot |0.000009 - 0.000012|\right) = 5.22184874961636$$

Επειδή $k \in \mathbb{N}$, έχουμε ακρίβεια 5 δεκαδικά ψηφία.
Από τον (4) έχουμε

$$k < -\log\left(2 \cdot \left|\frac{0.000009 - 0.000012}{0.000012}\right|\right) + 1 = 1.30102999566398$$

Επειδή $k \in \mathbb{N}$, έχουμε ακρίβεια 1 σημαντικό ψηφίο.

Διαδιδόμενο σφάλμα

Το Διαδιδόμενο σφάλμα

- έχει καταστροφική ακύρωση σημαντικών ψηφίων.
- παρατηρείται στις περιπτώσεις υπολογισμού πράξεων μικρών θετικών αριθμών με μεγάλους θετικούς αριθμούς.
- παρατηρείται στις περιπτώσεις υπολογισμού πράξεων με μεγάλους κατά απόλυτη τιμή αριθμούς.

Διαδιδόμενο σφάλμα - Παράδειγμα

- Έστω το σύστημα $(b, t, L, U) = (10, 5, -10, 10)$ και οι αριθμοί $x = 451852000$ και $y = -451851000$. Να υπολογιστεί το άθροισμα τους στο παραπάνω σύστημα.

Το άθροισμα των δυο είναι $x + y = 1000$.
Μετατρέπουμε τους αριθμούς στο σύστημα

$$fl(x) = (.45185) \times 10^9, \quad fl(y) = -(.45185) \times 10^9$$

επομένως,

$$fl(x) + fl(y) = 0 \text{ !!!!}$$

άρα και το άθροισμα

$$z = fl\big(fl(x) + fl(y)\big) = 0$$

Διαδιδόμενο σφάλμα - Παράδειγμα

- Έστω το σύστημα $(b, t, L, U) = (10, 10, -10, 10)$ και οι αριθμοί $x = \sqrt{7892}$ με $fl(x) = .8883692926 \times 10^2$ και $y = \sqrt{7891}$ με $fl(y) = .8883130079 \times 10^2$. Να υπολογιστεί η διαφορά τους στο παραπάνω σύστημα.

Η διαφορά τους ισούται με

$$fl(x) - fl(y) = .5628470000 \times 10^{-2}$$

Μπορούμε να αποφύγουμε το πρόβλημα με χρήση ταυτοτήτων, δηλαδή,

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

επομένως θα έχουμε

$$x - y = .5628468294 \times 10^{-2}$$

Διαδιδόμενο σφάλμα - Παράδειγμα

- Υπολογισμός ημιαθροίσματος δυο αριθμών. Έστω, $a = 0.981$, $b = 0.983$ και $t = 3$.

Για να υπολογίσουμε το ημιάθροισμα $x = \frac{1}{2}(a+b)$ αρχικά υπολογίζουμε το άθροισμα

$$a + b = 0.981 + 0.983 = 1.964 \quad \text{άρα} \quad fl(a+b) = 0.196 \times 10^1$$

επομένως

$$x = \frac{1}{2} fl(a+b) = 0.980 \text{ !!!!!}$$

Διαδιδόμενο σφάλμα - Παράδειγμα

- Υπολογισμός ημιαθροίσματος δυο αριθμών. Έστω, $a = 0.981$, $b = 0.983$ *και* $t = 3$.

Μπορούμε να αποφύγουμε το πρόβλημα που παρουσιάζεται στον τύπο $x = \frac{1}{2}(a + b)$ υπολογίζοντάς το με άλλο τρόπο, δηλαδή, $x = a + \frac{1}{2}(b - a)$. Αρχικά υπολογίζουμε τη διαφορά

$$b - a = 0.983 - 0.981 = 0.002 \quad \text{άρα} \quad fl(b - a) = 0.2 \times 10^{-2}$$

επομένως

$$x = a + \frac{1}{2} fl(b - a) = 0.981 + 0.001 = 0.982$$

Παράδειγμα σε Matlab

- Έστω ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} 10^{10} & 10^{11} & 10^{-10} & 10^{-11} & -11 \times 10^{10} \end{bmatrix}$$

Να βρεθεί το άθροισμα των στοιχείων του.

Στον Editor του Matlab γράφουμε

```
n=10;
a=[10^(n),10^(n+1),10^(-n),10^(-n-1),-11*10^(n)]
sum(a)
```

εκτελούμε και μας επιστρέφει

```
ans =

     0
```

Παράδειγμα σε Matlab

Αν γράψουμε τα στοιχεία του πίνακα με διαφορετική σειρά θα έχουμε διαφορετικό αποτέλεσμα.
Στον Editor του Matlab γράφουμε

```
n=10;
a=[10^(n),10^(n+1),-11*10^(n),10^(-n),10^(-n-1)]
sum(a)
```

εκτελούμε και μας επιστρέφει

```
ans =


                    1.1e-010
```

Παράδειγμα

- Υπολογισμός αθροίσματος

$$S_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k}$$

- Το παραπάνω άθροισμα μπορεί να γραφεί

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1}\right) = 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k-1} = \\ &= 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) = \\ &= 2 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Επομένως,

$$S_9 = 2 - \frac{1}{9+1} = 1.9\,, \quad S_{99} = 2 - \frac{1}{99+1} = 1.99\,, \quad S_{99999} = 1.99999$$

Παράδειγμα

- Υπολογισμός αθροίσματος

$$S_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 + k}$$

n	$S_n(t = 10)$
9	1.900000000
99	1.990000003
999	1.999000003
9999	1.999899972

n	$\tilde{S}_n(t = 10)$
9	1.900000000
99	1.990000000
999	1.999000000
9999	1.999900000

Παράδειγμα σε Matlab

- Δημιουργούμε δυο συναρτήσεις σε Matlab

```
function y=sn1(n)
y=1;
for k=1:n
     y=y+1/(k^2+k);
end
```

και

```
function y=sn2(n)
y=0;
for k=n:-1:1
     y=y+1/(k^2+k);
end
y=y+1;
```

Παράδειγμα σε Matlab I

τις καλούμε και μας επιστρέφουν

```
>> sn1(9999)
ans =

                    1.9999
>> sn2(9999)
ans =

                    1.9999
>> sn1(999999)
ans =

          1.99999899999991
>> sn2(999999)
```

Παράδειγμα σε Matlab II

```
ans =

                    1.999999
>> sn1(99999999)
ans =

            1.99999999098622
>> sn2(99999999)
ans =

                  1.99999999
```

Κατάσταση προβλημάτων

- Καλής κατάστασης
  - Ένα πρόβλημα χαρακτηρίζεται ως καλής κατάστασης, όταν για οποιαδήποτε διαταραχή στα δεδομένα του προβλήματος έχουμε ανάλογη διαταραχή στη λύση του προβλήματος.
- Κακής κατάστασης
  - Ένα πρόβλημα χαρακτηρίζεται ως κακής κατάστασης, όταν για οποιαδήποτε διαταραχή στα δεδομένα του προβλήματος έχουμε δυσανάλογη διαταραχή στη λύση του προβλήματος.

Κατάσταση προβλημάτων

- Κακής κατάστασης
  - Πολυωνυμική εξίσωση του Wilkinson

$$f(x) = (x-1)(x-2)\cdots(x-20) = 0 \Rightarrow$$
$$x^{20} + a_{19}x^{19} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

  - Συστήματα εξισώσεων

$$\begin{array}{l|l} x + 2y = 3 & x + 2y = 3 \\ 0.5x + 1.001y = 1.5 & 0.499x + 1.001y = 1.5 \\ (x, y) = (3, 0) & (x, y) = (1, 1) \end{array}$$

Ευστάθεια αλγορίθμων

- Ευσταθή (stable)
  - Ένας αλγόριθμος είναι ευσταθής όταν για οποιαδήποτε δεδομένα συγκλίνει στη λύση.
- Ασταθή (unstable)
  - Ένας αλγόριθμος είναι ασταθής όταν υπάρχουν δεδομένα για τα οποία δεν συγκλίνει στη λύση