ΤΕΙ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟΥ Ι

κ. ΠΕΤΑΛΙΔΗΣ

***ΤΜΗΜΑ* ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΤΕ**

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Κεντρικής Μακεδονίας» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής

Αριθμητικές Μέθοδοι σε Προγραμματιστικό Περιβάλλον

Δρ. Δημήτρης Βαρσάμης
Επίκουρος Καθηγητής

Οκτώβριος 2015

Αριθμητικές Μέθοδοι σε Προγραμματιστικό Περιβάλλον
Τρίτη Σειρά Διαφανειών

Εισαγωγή

- Αριθμητική επίλυση εξισώσεων (μη γραμμικές)
  - Μέθοδοι με διαδοχικές δοκιμές σε διάστημα:
    - Μέθοδος Διχοτόμησης
    - Μέθοδος Εσφαλμένης Θέσης (Regula-Falsi)
  - Μέθοδοι με επαναληπτικούς αναδρομικούς τύπους:
    - Μέθοδος Τέμνουσας
    - Μέθοδος Newton
    - Μέθοδος Muller

Αριθμητική επίλυση εξισώσεων

- Παραδείγματα μη γραμμικών εξισώσεων

$$f(x) = x^5 + x + 1 = 0$$

$$f(x) = \sqrt[3]{2x} + \sqrt{x} - 5 = 0$$

$$f(x) = sin(x^2) - x^2 + x + 1 = 0$$

- Είναι φανερό ότι οι παραπάνω εξισώσεις δεν μπορούν να επιλυθούν με τις γνωστές αναλυτικές μεθόδους.

Σύγκλιση - Τάξη σύγκλισης

- Μια μέθοδος συγκλίνει, όταν μετά από ένα πεπερασμένο πλήθος βημάτων η προσεγγιστική λύση τείνει στον ίδιο αριθμό (αποτέλεσμα).
- *Τάξη σύγκλισης* είναι ο ρυθμός με τον οποίο η μέθοδος συγκλίνει (ταχύτητα).
- Η μέθοδος συγκλίνει με τάξη σύγκλισης a όταν

$$\lim_{x\to\infty} \frac{|x_{k+1} - x|}{|x_k - x|^a} = c$$

όπου c μια σταθερά.

- Αν $a = 1$ γραμμική σύγκλιση
  Αν $a \geq 1$ υπεργραμμική
  Αν $a = 2$ τετραγωνική

Μέθοδοι σε Διάστημα

Theorem (Θεώρημα Bolzano)

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$ και ισχύει ότι $f(a) \cdot f(b) < 0$, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένας πραγματικός αριθμός x_0 μέσα στο διάστημα (a, b) ο οποίος θα είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x_0) = 0$.

- Βασιζόμενοι στο Θ. Bolzano μπορούμε να προσεγγίσουμε τη ρίζα με διαδοχικές δοκιμές.

Μέθοδοι σε Διάστημα

- Να βρεθεί η ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ με

$$f(x) = x^3 + x + 1$$

στο διάστημα $(-1, 1)$.

x	-1	1
$+$		$f(1) = 3$
$-$	$f(-1) = -1$	

Επειδή $f(-1) \cdot f(1) = -3 < 0$ ισχύει το Θ. Bolzano και υπάρχει ρίζα στο διάστημα $[-1, 1]$.
Επιλέγουμε ως πρώτη προσέγγιση $x_1 = -0.5$.

Μέθοδοι σε Διάστημα

x	-1	-0.5	1
$+$		$f(-0.5) = 0.375$	$f(1) = 3$
$-$	$f(-1) = -1$		

Επειδή $f(-1) \cdot f(-0.5) < 0$ ισχύει το Θ. Bolzano και υπάρχει ρίζα στο διάστημα $[-1, -0.5]$.
Επιλέγουμε ως δεύτερη προσέγγιση $x_2 = -0.7$.

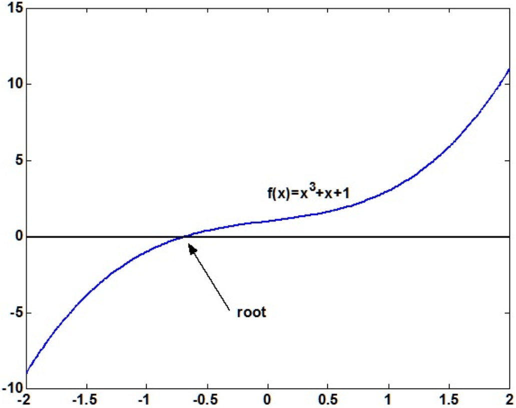
Μέθοδοι σε Διάστημα

x	-1	-0.7	-0.5	1
$+$			$f(-0.5) = 0.375$	$f(1) = 3$
$-$	$f(-1) = -1$	$f(-0.7) = -0.043$		

Επειδή $f(-0.7) \cdot f(-0.5) < 0$ ισχύει το Θ. Bolzano και υπάρχει ρίζα στο διάστημα $[-0.7, -0.5]$.
Επιλέγουμε ως τρίτη προσέγγιση $x_3 = -0.68$ με $f(-0.68) = 0.005568$.

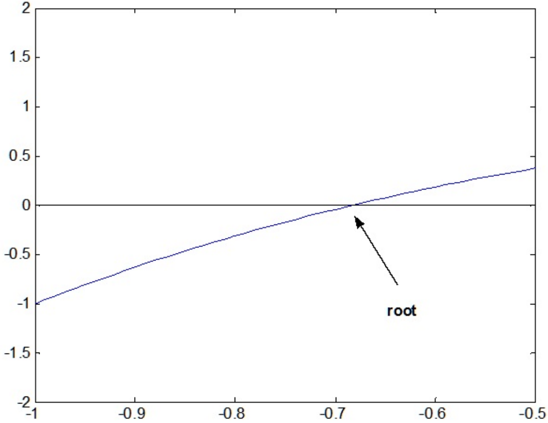
- Είναι φανερό ότι η παραπάνω "μέθοδος", στην πραγματικότητα βασίζεται στη διαίσθησή μας να μαντέψουμε σωστά τις διαδοχικές δοκιμές οι οποίες προσεγγίζουν όλο και περισσότερο την επιθυμητή ρίζα.

Μέθοδοι σε Διάστημα



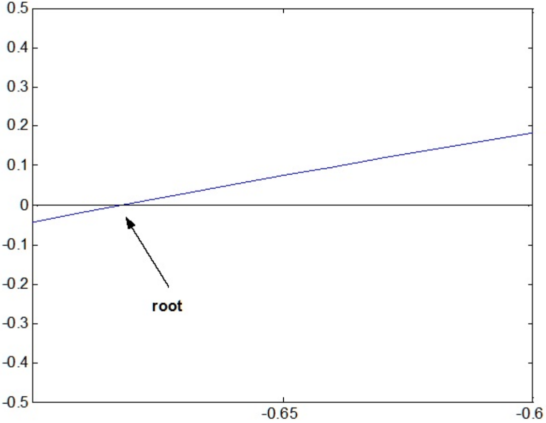
Σχήμα: Διάστημα $[-2, 2]$

Μέθοδοι σε Διάστημα



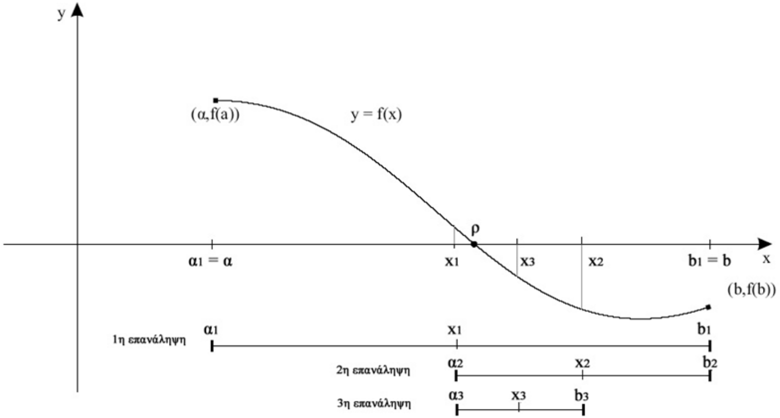
Σχήμα: Διάστημα $[-1, -0.5]$

Μέθοδοι σε Διάστημα



Σχήμα: Διάστημα $[-0.7, -0.6]$

Μέθοδος Διχοτόμησης



Σχήμα: Γραφική αναπαράσταση της μεθόδου Διχοτόμησης

Μέθοδος Διχοτόμησης - Υλοποίηση

ΒΗΜΑ 1^o Επιλέγουμε ένα διάστημα $[a, b]$ τέτοιο ώστε

$$f(a) \cdot f(b) < 0$$

δηλαδή, υπάρχει ρίζα στο διάστημα (a, b) με βάση το θεώρημα Bolzano.

ΒΗΜΑ 2^o Ορίζουμε ως $i \leftarrow 1$.

ΒΗΜΑ 3^o Ορίζουμε ως x_i την τιμή που αντιστοιχεί στο μέσο του διαστήματος $[a, b]$ δηλαδή, $x_i = \dfrac{a+b}{2}$.

ΒΗΜΑ 4^o Αν $f(x_i) = 0$ τότε το x_i είναι η ζητούμενη ρίζα και σταματάει η διαδικασία. Αυτή η περίπτωση όμως σπάνια συμβαίνει στην πράξη.

Μέθοδος Διχοτόμησης - Υλοποίηση

ΒΗΜΑ 5^o Αν $f(x_i) \neq 0$ τότε ελέγχουμε το πρόσημο του γινομένου $f(a) \cdot f(x_i)$ και στην συνέχεια καθορίζουμε το νέο μας διάστημα.

Επομένως, θα έχουμε:

$$\text{Αν } f(a) \cdot f(x_i) < 0 \text{ τότε νέο διάστημα } [a, x_i]$$
$$\text{Αν } f(a) \cdot f(x_i) > 0 \text{ τότε νέο διάστημα } [x_i, b]$$

Άρα, ορίζουμε το νέο διάστημα $[a, b]$ σύμφωνα με τον προηγούμενο τύπο.

ΒΗΜΑ 6^o Επιστρέφουμε στο 3^o βήμα ορίζοντας $i \leftarrow i+1$ και επαναλαμβάνουμε την διαδικασία με το νέο διάστημα που έχει προκύψει, για να βρούμε τη νέα προσέγγιση x_i μέχρι να εκπληρωθεί ένα από τα κριτήρια τερματισμού.

Μέθοδος Διχοτόμησης - Υλοποίηση

Κριτήρια τερματισμού:

- Όταν η απόλυτη τιμή της διαφοράς μεταξύ της τρέχουσας προσεγγιστικής ρίζας (x_i) και της προηγούμενης προσεγγιστικής ρίζας (x_{i-1}) είναι μικρότερη από την ακρίβεια λύσης *tol* που έχει δηλώσει ο χρήστης, δηλαδή θα έχουμε ταύτιση των σημείων.
  Επομένως θα ισχύει:
  $$|x_i - x_{i-1}| < tol \quad \text{όπου} \quad tol = \frac{1}{2} \cdot 10^{-k}$$
  με k τον αριθμό των δεκαδικών ψηφίων της επιθυμητής ακρίβειας.
- Η τιμή x_i να είναι ρίζα της συνάρτησης $f(x)$, δηλαδή να ισχύει ότι $f(x_i) = 0$.
- Οι επαναλήψεις που έχει δηλώσει ο χρήστης για την εύρεση της ρίζας εξαντλήθηκαν.

Μέθοδος Διχοτόμησης - Παράδειγμα

Να βρεθεί η ρίζα της συνάρτησης

$$f(x) = x^3 + x + 1$$

με τη μέθοδο Διχοτόμησης στο διάστημα $[-1, 1]$, με ακρίβεια 10 δεκαδικών ψηφίων και με μέγιστο αριθμό επαναλήψεων 50.

i	a	b	x_i	$f(x_i)$	Αλλαγή ορίου
1	-1	1	0	1	$b = x_1$
2	-1	0	-0.5	0.375	$b = x_2$
3	-1	-0.5	-0.75	-0.171875	$a = x_3$
4	-0.75	-0.5	-0.625	0.130859375	$b = x_4$
5	-0.75	-0.625	-0.6875	-0.0124511718	$a = x_5$

η προσεγγιστική λύση βρέθηκε μετά από 19 επαναλήψεις και είναι $x_{19} = -0.682331085205078$.

Ακρίβεια - Πλήθος Επαναλήψεων

Για την ακρίβεια έχουμε

- Στο πρώτο βήμα έχουμε

$$|x - a| = |x - b| = \left|\frac{b - a}{2}\right| < tol = \frac{1}{2} \cdot 10^{-k}$$

- Στο δεύτερο βήμα έχουμε

$$\left|\frac{b_2 - a_2}{2}\right| = \left|\frac{b_1 - a_1}{4}\right| < tol$$

- Γενικά στο n βήμα έχουμε

$$\left|\frac{b_n - a_n}{2}\right| = \left|\frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2^2}\right| = \cdots = \left|\frac{b_1 - a_1}{2^n}\right| < tol \Leftrightarrow$$

$$\frac{|b - a|}{2^n} < tol$$

Ακρίβεια - Πλήθος Επαναλήψεων

- Το πλήθος των επαναλήψεων (n) της μεθόδου Διχοτόμησης συνδέεται με την ακρίβεια της λύσης σε δεκαδικά ψηφία (k) με τον τύπο

$$\frac{b-a}{2^n} < tol \Longrightarrow \frac{b-a}{2^n} < \frac{1}{2} \cdot 10^{-k}$$

- Επομένως, μπορούμε να βρούμε είτε το n γνωρίζοντας το k, είτε το k γνωρίζοντας το n.

Ακρίβεια - Πλήθος Επαναλήψεων

- Για υπολογίσουμε το πλήθος των επαναλήψεων (n) της μεθόδου Διχοτόμησης με ακρίβεια k δεκαδικών ψηφίων στο διάστημα $[a, b]$, λύνουμε ως προς n, επομένως έχουμε

$$\frac{b-a}{2^n} < \frac{1}{2} \cdot 10^{-k} \Longrightarrow \frac{2^n}{b-a} > 2 \cdot 10^k \Longrightarrow$$

$$2^n > (b-a) \cdot 2 \cdot 10^k \Longrightarrow$$

$$n > \log_2 \left((b-a) \cdot 2 \cdot 10^k \right)$$

Ακρίβεια - Πλήθος Επαναλήψεων

- Ενώ, για υπολογίσουμε την ακρίβεια των δεκαδικών ψηφίων (k) της μεθόδου Διχοτόμησης αν εκτελεστούν n επαναλήψεις στο διάστημα $[a, b]$, λύνουμε ως προς k, επομένως έχουμε

$$\frac{b-a}{2^n} < \frac{1}{2} \cdot 10^{-k} \Longrightarrow 2 \cdot 10^k < \frac{2^n}{b-a} > \Longrightarrow$$

$$10^k < \frac{2^n}{2 \cdot (b-a)} \Longrightarrow$$

$$k < \log\left(\frac{2^n}{2 \cdot (b-a)}\right)$$

Ακρίβεια - Πλήθος Επαναλήψεων - Παράδειγμα

Να βρεθεί το πλήθος των επαναλήψεων που θα εκτελέσει η μέθοδος Διχοτόμησης στο διάστημα $[-1, 1]$ με ακρίβεια 5 δεκαδικών ψηφίων.

- Επειδή

$$\begin{aligned} n > \log_2\left((b-a)\cdot 2\cdot 10^k\right) &= \log_2\left((1-(-1))\cdot 2\cdot 10^5\right) \\ &= 18.6096404744368 \end{aligned}$$

- θα έχουμε $n = 19$ επαναλήψεις.

Ακρίβεια - Πλήθος Επαναλήψεων - Παράδειγμα

Να βρεθεί η ακρίβεια των δεκαδικών ψηφίων της μεθόδου Διχοτόμησης αν εκτελεστούν 19 επαναλήψεις στο διάστημα $[-1, 1]$.

- Επειδή

$$\begin{aligned} k < \log\left(\frac{2^n}{2\cdot(b-a)}\right) &= \log\left(\frac{2^{19}}{2\cdot(1-(-1))}\right) \\ &= 5.11750992628768 \end{aligned}$$

- θα έχουμε ακρίβεια $k = 5$ δεκαδικά ψηφία.

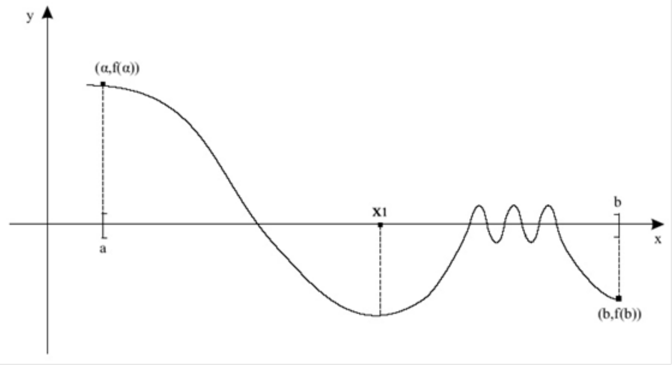
Μέθοδος Διχοτόμησης - Σύνοψη

- Πλεονεκτήματα:
  1. Η μέθοδος διχοτόμησης συγκλίνει πάντα, γιατί σε κάθε βήμα πρέπει να ισχύει το θεώρημα Bolzano.
  2. Ο ρυθμός σύγκλισης είναι $\frac{1}{2}$ και μπορούμε να γνωρίζουμε, είτε το πλήθος των επαναλήψεων σε δοσμένη ακρίβεια, είτε την ακρίβεια σε δοσμένο πλήθος επαναλήψεων.
- Μειονεκτήματα:
  1. Ύπαρξη ρίζας στο αρχικό διάστημα $[a, b]$.
  2. Υλοποιείται με διχοτόμηση διαστημάτων και έτσι είναι η πιο αργή από όλες τις άλλες μεθόδους.
  3. Όταν έχουμε άρτιο αριθμό ριζών τότε έχουμε πρόβλημα γιατί δεν ισχύει το Θ. Bolzano. Αυτό που μπορούμε να κάνουμε είναι να χωρίσουμε το αρχικό διάστημα σε μικρότερα.

Μέθοδος Διχοτόμησης - Σύνοψη

- Η μέθοδος Διχοτόμησης πρέπει να εφαρμόζεται σε διαστήματα στα οποία υπάρχει ακριβώς μια ρίζα.
- Αν εφαρμόσουμε τη μέθοδο Διχοτόμησης σε διάστημα με καμία ή 2 ή 4 ρίζες (γενικά άρτιο αριθμό ριζών) θα σταματήσει από το Βήμα 1.
- Αν εφαρμόσουμε τη μέθοδο Διχοτόμησης σε διάστημα με 3 ή 5 ρίζες (γενικά περιττό αριθμό ριζών) θα βρει μια από όλες τις ρίζες.

Μέθοδος Διχοτόμησης - Σύνοψη



Σχήμα: Γραφική αναπαράσταση της μεθόδου Διχοτόμησης με περιττό αριθμό ριζών

Μέθοδος Διχοτόμησης - Αλγόριθμος

ΕΙΣΟΔΟΣ: $f(x)$, a, b, tol, n

ΒΗΜΑ 1^o	Αν $f(a) \cdot f(b) < 0$ πήγαινε στο βήμα 2 διαφορετικά ΕΞΟΔΟΣ: Δεν ισχύει το Θ. Bolzano στο αρχικό διάστημα, τερμάτισε
ΒΗΜΑ 2^o	Θέσε $i = 1$
ΒΗΜΑ 3^o	Όταν $i \leq n$ εκτέλεσε τα βήματα 3-7
ΒΗΜΑ 4^o	Θέσε $x = a + (b - a)/2$
ΒΗΜΑ 5^o	Αν $f(x) = 0$ ή $(b - a)/2 < tol$ τότε ΕΞΟΔΟΣ: Το x είναι η λύση και τερμάτισε
ΒΗΜΑ 6^o	Αν $f(a) * f(x) > 0$ τότε θέσε $a = x$ διαφορετικά $b = x$
ΒΗΜΑ 7	Θέσε $i = i + 1$
ΒΗΜΑ 8	ΕΞΟΔΟΣ: Η μέθοδος εξάντλησε όλες τις επαναλήψεις και τερμάτισε

Μέθοδος Διχοτόμησης - Αλγόριθμος

Υλοποίηση της μεθόδου Διχοτόμησης σε συνάρτηση Matlab

```
function out=bisect(f, a, b, tol, n)
if f(a)*f(b)>0.0
   error('function has same sign at end points')
end
a(1)=a;
b(1)=b;
i=1;
while i<=n
    x(i)=(a(i)+b(i))/2;
    if f(x(i))==0 || (b(i)-a(i))/2<tol
        break;
    end
    if f(a(i))*f(x(i))>0
        a(i+1)=x(i);
        b(i+1)=b(i);
    else
        a(i+1)=a(i);
        b(i+1)=x(i);
    end
    i=i+1;
end
if i>n
    k=1:n;
else
    k=1:i;
end
out=[k', a(k)', b(k)', x(k)', f(x(k))'];
```

Μέθοδος Διχοτόμησης - Αλγόριθμος

Command Window

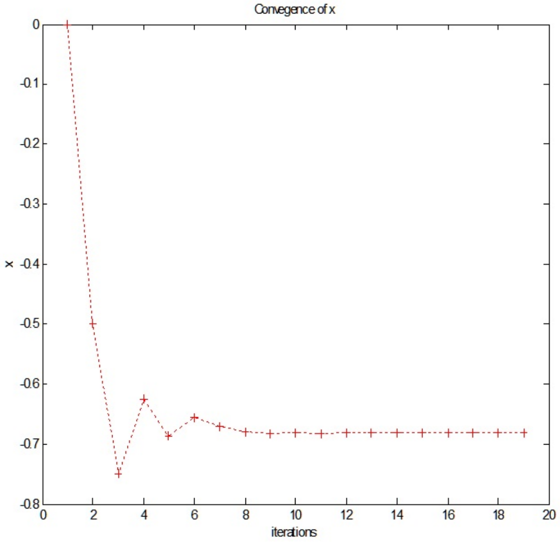
File Edit View Web Window Help

Bisection method has converged

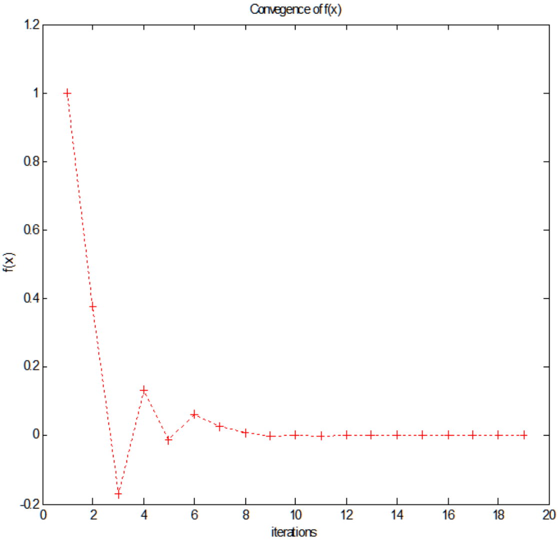
step	a	b	x	y
1	-1.0000000	1.0000000	0.0000000	1.0000000
2	-1.0000000	0.0000000	-0.5000000	0.3750000
3	-1.0000000	-0.5000000	-0.7500000	-0.1718750
4	-0.7500000	-0.5000000	-0.6250000	0.1308594
5	-0.7500000	-0.6250000	-0.6875000	-0.0124512
6	-0.6875000	-0.6250000	-0.6562500	0.0611267
7	-0.6875000	-0.6562500	-0.6718750	0.0248299
8	-0.6875000	-0.6718750	-0.6796875	0.0063138
9	-0.6875000	-0.6796875	-0.6835938	-0.0030374
10	-0.6835938	-0.6796875	-0.6816406	0.0016460
11	-0.6835938	-0.6816406	-0.6826172	-0.0006937
12	-0.6826172	-0.6816406	-0.6821289	0.0004766
13	-0.6826172	-0.6821289	-0.6823730	-0.0001084
14	-0.6823730	-0.6821289	-0.6822510	0.0001841
15	-0.6823730	-0.6822510	-0.6823120	0.0000378
16	-0.6823730	-0.6823120	-0.6823425	-0.0000353
17	-0.6823425	-0.6823120	-0.6823273	0.0000013
18	-0.6823425	-0.6823273	-0.6823349	-0.0000170
19	-0.6823349	-0.6823273	-0.6823311	-0.0000079

>>

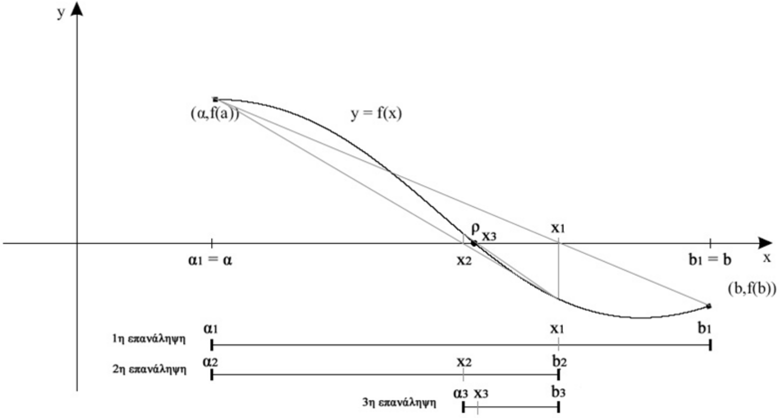
Μέθοδος Διχοτόμησης - Αλγόριθμος



Μέθοδος Διχοτόμησης - Αλγόριθμος



Μέθοδος Εσφαλμένης Θέσης (Regula Falsi)



Σχήμα: Γραφική αναπαράσταση της μεθόδου Εσφαλμένης Θέσης (Regula Falsi)

Μέθοδος Εσφαλμένης Θέσης - Υλοποίηση

ΒΗΜΑ 1^o Επιλέγουμε ένα διάστημα $[a,b]$ τέτοιο ώστε

$$f(a)\cdot f(b) < 0$$

δηλαδή, υπάρχει ρίζα στο διάστημα (a,b) με βάση το θεώρημα Bolzano.

ΒΗΜΑ 2^o Ορίζουμε ως $i \leftarrow 1$.

ΒΗΜΑ 3^o Υπολογίζουμε το σημείο τομής της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $(a,f(a))$, $(b,f(b))$ με τον άξονα $x'x$ το οποίοι δίνεται από τον τύπο $x_i = b - \dfrac{b-a}{f(b)-f(a)}\cdot f(b)$.

ΒΗΜΑ 4^o Αν $f(x_i) = 0$ τότε το x_i είναι η ζητούμενη ρίζα και σταματάει η διαδικασία. Αυτή η περίπτωση όμως σπάνια συμβαίνει στην πράξη.

Μέθοδος Εσφαλμένης Θέσης - Υλοποίηση

ΒΗΜΑ 5^o Αν $f(x_i) \neq 0$ τότε ελέγχουμε το πρόσημο του γινομένου $f(a) \cdot f(x_i)$ και στην συνέχεια καθορίζουμε το νέο μας διάστημα.
Επομένως, θα έχουμε:

$$\text{Αν } f(a) \cdot f(x_i) < 0 \text{ τότε νέο διάστημα } [a, x_i]$$
$$\text{Αν } f(a) \cdot f(x_i) > 0 \text{ τότε νέο διάστημα } [x_i, b]$$

Άρα, ορίζουμε το νέο διάστημα $[a, b]$ σύμφωνα με τον προηγούμενο τύπο.

ΒΗΜΑ 6^o Επιστρέφουμε στο 3^o βήμα ορίζοντας $i \leftarrow i + 1$ και επαναλαμβάνουμε την διαδικασία με το νέο διάστημα που έχει προκύψει, για να βρούμε τη νέα προσέγγιση x_i μέχρι να εκπληρωθεί ένα από τα κριτήρια τερματισμού.

Μέθοδος Εσφαλμένης Θέσης - Υλοποίηση

Κριτήρια τερματισμού:

- Όταν η απόλυτη τιμή της διαφοράς μεταξύ της τρέχουσας προσεγγιστικής ρίζας (x_i) και της προηγούμενης προσεγγιστικής ρίζας (x_{i-1}) είναι μικρότερη από την ακρίβεια λύσης *tol* που έχει δηλώσει ο χρήστης, δηλαδή θα έχουμε ταύτιση των σημείων.
  Επομένως θα ισχύει:
  $$|x_i - x_{i-1}| < tol \quad \text{όπου} \quad tol = \frac{1}{2} \cdot 10^{-k}$$
  με k τον αριθμό των δεκαδικών ψηφίων της επιθυμητής ακρίβειας.
- Η τιμή x_i να είναι ρίζα της συνάρτησης $f(x)$, δηλαδή να ισχύει ότι $f(x_i) = 0$.
- Οι επαναλήψεις που έχει δηλώσει ο χρήστης για την εύρεση της ρίζας εξαντλήθηκαν.

Μέθοδος Εσφαλμένης Θέσης - Παράδειγμα

Να βρεθεί η ρίζα της συνάρτησης

$$f(x) = x^3 + x + 1$$

με τη μέθοδο Εσφαλμένης Θέσης στο διάστημα $[-1, 1]$, με ακρίβεια 5 δεκαδικών ψηφίων και με μέγιστο αριθμό επαναλήψεων 50.

i	a	b	x_i	$f(x_i)$	Αλλαγή ορίου
1	-1	1	-0.5	0.375	$b = x_1$
2	-1	-0.5	-0.636363	0.105935	$b = x_2$
3	-1	-0.636363	-0.671195	0.026428	$b = x_3$
4	-1	-0.671195	-0.679661	0.006375	$b = x_4$
5	-1	-0.679661	-0.681691	0.001525	$b = x_5$

η προσεγγιστική λύση βρέθηκε μετά από 10 επαναλήψεις και είναι $x_{10} = -0.68232731094651$6.

Μέθοδος Εσφαλμένης Θέσης - Σύνοψη

- Πλεονεκτήματα:
  1. Η μέθοδος Regula - Falsi συγκλίνει πάντα, γιατί σε κάθε βήμα πρέπει να ισχύει το θεώρημα Bolzano.
  2. Είναι σαφώς ταχύτερη από την μέθοδο της διχοτόμησης.
- Μειονεκτήματα:
  1. Ύπαρξη ρίζας στο αρχικό διάστημα $[a, b]$.
  2. Όταν έχουμε άρτιο αριθμό ριζών τότε έχουμε πρόβλημα γιατί δεν ισχύει το Θ. Bolzano. Αυτό που μπορούμε να κάνουμε είναι να χωρίσουμε το αρχικό διάστημα σε μικρότερα.

Μέθοδος Εσφαλμένης Θέσης - Αλγόριθμος

ΕΙΣΟΔΟΣ: $f(x)$, a, b, tol, n

ΒΗΜΑ 1^o	Αν $f(a) \cdot f(b) < 0$ πήγαινε στο βήμα 2 διαφορετικά ΕΞΟΔΟΣ: Δεν ισχύει το Θ. Bolzano στο αρχικό διάστημα, τερμάτισε
ΒΗΜΑ 2^o	Θέσε $i = 1$
ΒΗΜΑ 3^o	Όταν $i \leq n$ εκτέλεσε τα βήματα 3-7
ΒΗΜΑ 4^o	Θέσε $x = b - (b-a)/(f(b) - f(a)) * f(b)$
ΒΗΜΑ 5^o	Αν $f(x) = 0$ ή $\lvert x_i - x_{i-1} \rvert < tol$ τότε ΕΞΟΔΟΣ: Το x είναι η λύση και τερμάτισε
ΒΗΜΑ 6^o	Αν $f(a) * f(x) > 0$ τότε θέσε $a = x$ διαφορετικά $b = x$
ΒΗΜΑ 7	Θέσε $i = i + 1$
ΒΗΜΑ 8	ΕΞΟΔΟΣ: Η μέθοδος εξάντλησε όλες τις επαναλήψεις και τερμάτισε

Μέθοδος Εσφαλμένης Θέσης - Αλγόριθμος

Υλοποίηση της μεθόδου Εσφαλμένης Θέσης σε συνάρτηση Matlab

```
function out=falsi(f,a,b,tol,n)
if f(a)*f(b)>0.0
    error('function has same sign at end points')
end
a(1)=a;
b(1)=b;
i=1;
while i<=n
    x(i)=b(i)-f(b(i))*(b(i)-a(i))/(f(b(i))-f(a(i)));
    if f(x(i))==0 || ((i>1) && (abs(x(i)-x(i-1))<tol))
        break;
    end
    if f(a(i))*f(x(i))>0
        a(i+1)=x(i);
        b(i+1)=b(i);
    else
        a(i+1)=a(i);
        b(i+1)=x(i);
    end
    i=i+1;
end
if i>n
    k=1:n;
else
    k=1:i;
end
out=[k', a(k)', b(k)', x(k)', f(x(k))'];
```

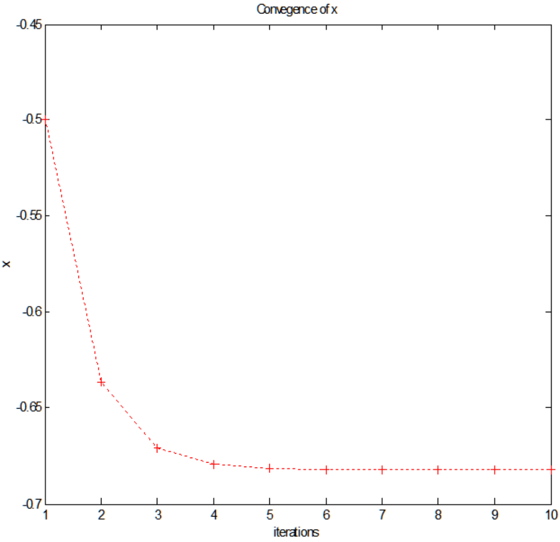
Μέθοδος Εσφαλμένης Θέσης - Αλγόριθμος

Command Window

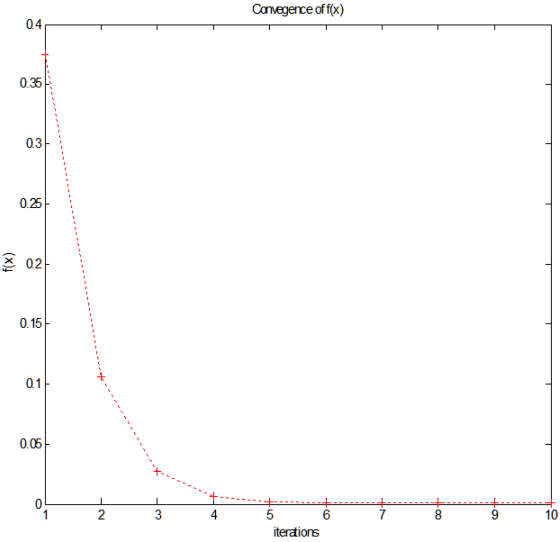
File Edit View Web Window Help

```
Falsi method has converged
step          a           b           x           y
  1  -1.0000000   1.0000000  -0.5000000   0.3750000
  2  -1.0000000  -0.5000000  -0.6363636   0.1059354
  3  -1.0000000  -0.6363636  -0.6711957   0.0264283
  4  -1.0000000  -0.6711957  -0.6796616   0.0063755
  5  -1.0000000  -0.6796616  -0.6816910   0.0015254
  6  -1.0000000  -0.6816910  -0.6821758   0.0003642
  7  -1.0000000  -0.6821758  -0.6822915   0.0000869
  8  -1.0000000  -0.6822915  -0.6823191   0.0000207
  9  -1.0000000  -0.6823191  -0.6823257   0.0000050
 10  -1.0000000  -0.6823257  -0.6823273   0.0000012
>>
```

Μέθοδος Εσφαλμένης Θέσης - Αλγόριθμος



Μέθοδος Εσφαλμένης Θέσης - Αλγόριθμος



Παραδείγματα - Ασκήσεις

- Να βρεθεί η ρίζα (ρίζες) της συνάρτησης

  $$f(x) = 64x^3 - 176x^2 + 140x - 25$$

  στο διάστημα $[0, 2]$ με ακρίβεια 5 δεκαδικά ψηφία.

- Να βρεθεί η ρίζα (ρίζες) της συνάρτησης

  $$f(x) = 64x^3 - 144x^2 + 92x - 15$$

  στο διάστημα $[0, 2]$ με ακρίβεια 5 δεκαδικά ψηφία.