Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Κεντρικής Μακεδονίας - Σέρρες
Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής

Γραμμικός Προγραμματισμός & Βελτιστοποίηση

Δρ. Δημήτρης Βαρσάμης
Καθηγητής Εφαρμογών

ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ & ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Δίνεται το παρακάτω πρόβλημα μεταφοράς

	Λ_1	Λ_2	Λ_3	Λ_1	
A_1	800	600	1000	900	35
A_2	900	1200	1300	700	50
A_3	1400	900	1600	500	40
	45	20	30	30	

Το πρόβλημα είναι να προσδιορίσουμε πως θα γίνει η μεταφορά από τους σταθμούς προέλευσης A_1, A_2 και A_3 στους σταθμούς προορισμού Λ_1, Λ_2, Λ_3 και Λ_4 έτσι ώστε το συνολικό κόστος της μεταφοράς να είναι ελάχιστο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

	Λ_1	Λ_2	Λ_3	Λ_1	
A_1	800	600	1000	900	35
A_2	900	1200	1300	700	50
A_3	1400	900	1600	500	40
	45	20	30	30	

Έστω x_{ij} η ποσότητα που μεταφέρεται από τον σταθμό προέλευσης A_i με $(i = 1, 2, 3)$ στον σταθμό προορισμού Λ_j με $(j = 1, 2, 3, 4)$. Θα έχουμε 12 μεταβλητές και αντικειμενική συνάρτηση την εξής:

$$\begin{aligned} \min\ z = 800x_{11} + 600x_{12} + 1000x_{13} + 900x_{14} \\ + 900x_{21} + 1200x_{22} + 1300x_{23} + 700x_{24} \\ + 1400x_{31} + 900x_{32} + 1600x_{33} + 500x_{34} \end{aligned}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

	Λ_1	Λ_2	Λ_3	Λ_1	
A_1	800	600	1000	900	35
A_2	900	1200	1300	700	50
A_3	1400	900	1600	500	40
	45	20	30	30	

Το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού θα έχει τους εξής περιορισμούς

$$\begin{array}{ccccccccc} x_{11} & + & x_{12} & + & x_{13} & + & x_{14} & \leq & 35 \\ x_{21} & + & x_{22} & + & x_{23} & + & x_{24} & \leq & 50 \\ x_{31} & + & x_{32} & + & x_{33} & + & x_{34} & \leq & 40 \end{array}$$

ανά γραμμή.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

	Λ_1	Λ_2	Λ_3	Λ_1	
A_1	800	600	1000	900	35
A_2	900	1200	1300	700	50
A_3	1400	900	1600	500	40
	45	20	30	30	

Το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού θα έχει τους εξής περιορισμούς

$$
\begin{array}{ccccccc}
x_{11} & + & x_{21} & + & x_{31} & \geq & 45 \\
x_{12} & + & x_{23} & + & x_{32} & \geq & 20 \\
x_{13} & + & x_{23} & + & x_{33} & \geq & 30 \\
x_{14} & + & x_{24} & + & x_{34} & \geq & 30
\end{array}
$$

ανά στήλη.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

- Το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού μπορεί να λυθεί με την μέθοδο Simplex αλλά έχει πολλές μεταβλητές (12) και αρκετούς περιορισμούς (8)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

- Το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού μπορεί να λυθεί με την μέθοδο Simplex αλλά έχει πολλές μεταβλητές (12) και αρκετούς περιορισμούς (8)
- Οι πιθανές λύσεις θα είναι

$$\binom{12}{8} = \frac{12!}{8!(12-8)!} = 495$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

- Το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού μπορεί να λυθεί με την μέθοδο Simplex αλλά έχει πολλές μεταβλητές (12) και αρκετούς περιορισμούς (8)
- Οι πιθανές λύσεις θα είναι

$$\binom{12}{8} = \frac{12!}{8!(12-8)!} = 495$$

- Η επίλυση με την μέθοδο Simplex θα είναι μια επίπονη διαδικασία λόγω των πολλών λύσεων

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

- Το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού του παραδείγματος μπορεί να διατυπωθεί και με τον παρακάτω τρόπο, αλλά και μπορεί να λυθεί με μια διαφορετική μέθοδο

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

- Το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού του παραδείγματος μπορεί να διατυπωθεί και με τον παρακάτω τρόπο, αλλά και μπορεί να λυθεί με μια διαφορετική μέθοδο
- Το πρόβλημα μπορεί να σχεδιαστεί ως ένα δίκτυο με κόμβους που παριστάνουν τους σταθμούς προέλευσης και τους σταθμούς προορισμού και ακμές που παριστάνουν τις διαδρομές

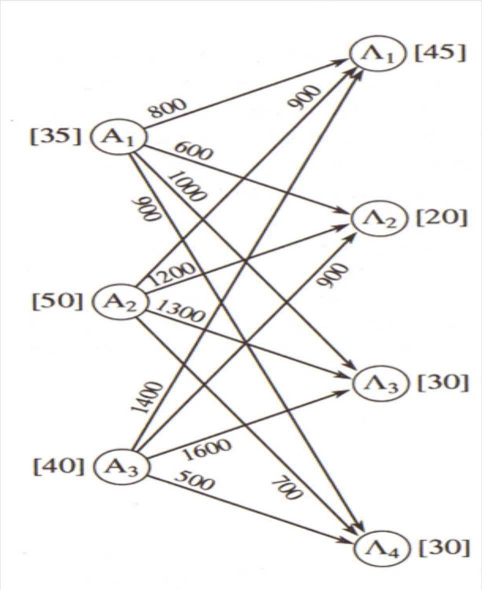
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

- Το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού του παραδείγματος μπορεί να διατυπωθεί και με τον παρακάτω τρόπο, αλλά και μπορεί να λυθεί με μια διαφορετική μέθοδο
- Το πρόβλημα μπορεί να σχεδιαστεί ως ένα δίκτυο με κόμβους που παριστάνουν τους σταθμούς προέλευσης και τους σταθμούς προορισμού και ακμές που παριστάνουν τις διαδρομές
- Δίπλα σε κάθε κόμβο έχουμε τις ποσότητες που μεταφέρονται

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

- Το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού του παραδείγματος μπορεί να διατυπωθεί και με τον παρακάτω τρόπο, αλλά και μπορεί να λυθεί με μια διαφορετική μέθοδο
- Το πρόβλημα μπορεί να σχεδιαστεί ως ένα δίκτυο με κόμβους που παριστάνουν τους σταθμούς προέλευσης και τους σταθμούς προορισμού και ακμές που παριστάνουν τις διαδρομές
- Δίπλα σε κάθε κόμβο έχουμε τις ποσότητες που μεταφέρονται
- Πάνω σε κάθε ακμή υπάρχει το κόστος μεταφοράς

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ



[35] A1
[50] A2
[40] A3
Λ1 [45]
Λ2 [20]
Λ3 [30]
Λ4 [30]
800
600
1000
900
900
1200
1300
900
1400
1600
500
700

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

	Λ_1	Λ_2	Λ_3	Λ_4	
A_1	800 x_{11}	600 x_{12}	1000 x_{13}	900 x_{14}	35
A_2	900 x_{21}	1200 x_{22}	1300 x_{23}	700 x_{24}	50
A_3	1400 x_{31}	900 x_{32}	1600 x_{33}	500 x_{34}	40
	45	20	30	30	

ΒΗΜΑΤΑ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ

Βήμα 1

Διαμόρφωσε το πρόβλημα ως ένα ισορροπημένο πρόβλημα μεταφοράς.

ΒΗΜΑΤΑ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ

Βήμα 1

Διαμόρφωσε το πρόβλημα ως ένα ισορροπημένο πρόβλημα μεταφοράς.

Βήμα 2

Υπολόγισε τις ποινές για κάθε γραμμή και στήλη:

ΒΗΜΑΤΑ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ

Βήμα 1

Διαμόρφωσε το πρόβλημα ως ένα ισορροπημένο πρόβλημα μεταφοράς.

Βήμα 2

Υπολόγισε τις ποινές για κάθε γραμμή και στήλη:

1. η ποινή για κάθε γραμμή i είναι η απόλυτη τιμή της διαφοράς των δύο μικρότερων κοστών της συγκεκριμένης γραμμής,

ΒΗΜΑΤΑ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ

Βήμα 1

Διαμόρφωσε το πρόβλημα ως ένα ισορροπημένο πρόβλημα μεταφοράς.

Βήμα 2

Υπολόγισε τις ποινές για κάθε γραμμή και στήλη:

1. η ποινή για κάθε γραμμή i είναι η απόλυτη τιμή της διαφοράς των δύο μικρότερων κοστών της συγκεκριμένης γραμμής,
2. η ποινή για κάθε στήλη j είναι η απόλυτη τιμή της διαφοράς των δύο μικρότερων κοστών της συγκεκριμένης στήλης.

ΒΗΜΑΤΑ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ

Βήμα 3

Επέλεξε τη γραμμή ή στήλη με τη μεγαλύτερη ποινή (σε περίπτωση ισοπαλίας η επιλογή γίνεται τυχαία).

ΒΗΜΑΤΑ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ

Βήμα 3

Επέλεξε τη γραμμή ή στήλη με τη μεγαλύτερη ποινή (σε περίπτωση ισοπαλίας η επιλογή γίνεται τυχαία).

Βήμα 4

Εκχώρησε όσο περισσότερες μονάδες γίνεται στο κελί με το μικρότερο κόστος μεταφοράς της επιλεγείσης γραμμής ή στήλης.
Έστω (i, j) το συγκεκριμένο κελί.
Αναπροσάρμοσε την απαίτηση του j σταθμού προορισμού και την προσφορά του i σταθμού προέλευσης, κατά την εκχωρηθείσα ποσότητα.

ΒΗΜΑΤΑ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ

ΒΗΜΑΤΑ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ

Βήμα 5

Βήμα 5

1. Εάν εξαντλήθηκε η προσφορά του i σταθμού προέλευσης διέγραψε τον.

Βήμα 5

1. Εάν εξαντλήθηκε η προσφορά του i σταθμού προέλευσης διέγραψε τον.
2. Εάν εξαντλήθηκε η ζήτηση του j σταθμού προορισμού διέγραψε τον.

ΒΗΜΑΤΑ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ

Βήμα 5

1. Εάν εξαντλήθηκε η προσφορά του i σταθμού προέλευσης διέγραψε τον.
2. Εάν εξαντλήθηκε η ζήτηση του j σταθμού προορισμού διέγραψε τον.
3. Εάν εξαντλήθηκε τόσο η προσφορά του i σταθμού προέλευσης όσο και η ζήτηση του j σταθμού προορισμού διέγραψε ή τον i σταθμό προέλευσης ή τον j σταθμό ζήτησης, αλλά όχι και τους δύο.

Βήμα 5

1. Εάν εξαντλήθηκε η προσφορά του i σταθμού προέλευσης διέγραψε τον.
2. Εάν εξαντλήθηκε η ζήτηση του j σταθμού προορισμού διέγραψε τον.
3. Εάν εξαντλήθηκε τόσο η προσφορά του i σταθμού προέλευσης όσο και η ζήτηση του j σταθμού προορισμού διέγραψε ή τον i σταθμό προέλευσης ή τον j σταθμό ζήτησης, αλλά όχι και τους δύο.

Βήμα 6

Εάν απόμεινε μόνον μία γραμμή ή μόνον μία στήλη, τότε εκχώρησε όλες τις εναπομείνασες ποσότητες στα κελιά της. Σιγούρεψε ότι σε κάθε κελί θα εκχωρηθεί ποσότητα (έστω και μηδενική).
Αλλιώς, Επέστρεψε στο Βήμα 2.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Υπολόγισε τις ποινές για κάθε γραμμή και στήλη:

	100	300	300	200	
200	800 x_{11}	600 x_{12}	1000 x_{13}	900 x_{14}	35
200	900 x_{21}	1200 x_{22}	1300 x_{23}	700 x_{24}	50
400	1400 x_{31}	900 x_{32}	1600 x_{33}	500 x_{34}	40
	(45)	(20)	(30)	(30)	

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Επέλεξε τη γραμμή ή στήλη με τη μεγαλύτερη ποινή (σε περίπτωση ισοπαλίας η επιλογή γίνεται τυχαία).

	100	300	300	200	
200	800 x_{11}	600 x_{12}	1000 x_{13}	900 x_{14}	35
200	900 x_{21}	1200 x_{22}	1300 x_{23}	700 x_{24}	50
400	1400 x_{31}	900 x_{32}	1600 x_{33}	500 x_{34}	40
	(45)	(20)	(30)	(30)	

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Εκχώρησε όσο περισσότερες μονάδες γίνεται στο κελί με το μικρότερο κόστος μεταφοράς της επιλεγείσης γραμμής ή στήλης.

	100	300	300	200	
200	800 x_{11}	600 x_{12}	1000 x_{13}	900 x_{14}	35
200	900 x_{21}	1200 x_{22}	1300 x_{23}	700 x_{24}	50
400	1400 x_{31}	900 x_{32}	1600 x_{33}	500 x_{34}	40 — 30
	(45)	(20)	(30)	(30) 30	

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Εάν εξαντλήθηκε η ζήτηση του j σταθμού προορισμού διέγραψε τον.

	—	—	—	
—	800 x_{11}	600 x_{12}	1000 x_{13}	35
—	900 x_{21}	1200 x_{22}	1300 x_{23}	50
—	1400 x_{31}	900 x_{32}	1600 x_{33}	10
	(45)	(20)	(30)	

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Εάν απόμεινε μόνον μία γραμμή ή μόνον μία στήλη,
τότε εκχώρησε όλες τις εναπομείνασες ποσότητες στα κελιά της.
Σιγούρεψε ότι σε κάθε κελί θα εκχωρηθεί ποσότητα (έστω και μηδενική).
Αλλιώς, Επέστρεψε στο Βήμα 2.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Υπολόγισε τις ποινές για κάθε γραμμή και στήλη:

	100	300	300	
200	800 x_{11}	600 x_{12}	1000 x_{13}	35
300	900 x_{21}	1200 x_{22}	1300 x_{23}	50
500	1400 x_{31}	900 x_{32}	1600 x_{33}	10
	(45)	(20)	(30)	

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Επέλεξε τη γραμμή ή στήλη με τη μεγαλύτερη ποινή (σε περίπτωση ισοπαλίας η επιλογή γίνεται τυχαία).

	100	300	300	
200	800 x_{11}	600 x_{12}	1000 x_{13}	35
300	900 x_{21}	1200 x_{22}	1300 x_{23}	50
500	1400 x_{31}	900 x_{32}	1600 x_{33}	10
	(45)	(20)	(30)	

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Εκχώρησε όσο περισσότερες μονάδες γίνεται στο κελί με το μικρότερο κόστος μεταφοράς της επιλεγείσης γραμμής ή στήλης.

	100	300	300	
200	800 x_{11}	600 x_{12}	1000 x_{13}	35
300	900 x_{21}	1200 x_{22}	1300 x_{23}	50
500	1400 x_{31}	**900** x_{32}	1600 x_{33}	10 — 10
	(45)	(20) 10	(30)	

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Εάν εξαντλήθηκε η προσφορά του i σταθμού προέλευσης διέγραψε τον.

	—	—	—	
—	800 x_{11}	600 x_{12}	1000 x_{13}	35
—	900 x_{21}	1200 x_{22}	1300 x_{23}	50
	(45)	(10)	(30)	

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Εάν απόμεινε μόνον μία γραμμή ή μόνον μία στήλη,
τότε εκχώρησε όλες τις εναπομείνασες ποσότητες στα κελιά της.
Σιγούρεψε ότι σε κάθε κελί θα εκχωρηθεί ποσότητα (έστω και μηδενική).
Αλλιώς, Επέστρεψε στο Βήμα 2.

Υπολόγισε τις ποινές για κάθε γραμμή και στήλη:

	100	600	300	
200	800 x_{11}	600 x_{12}	1000 x_{13}	35
300	900 x_{21}	1200 x_{22}	1300 x_{23}	50
	(45)	(10)	(30)	

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Επέλεξε τη γραμμή ή στήλη με τη μεγαλύτερη ποινή (σε περίπτωση ισοπαλίας η επιλογή γίνεται τυχαία).

	100	600	300	
200	800 x_{11}	600 x_{12}	1000 x_{13}	35
300	900 x_{21}	1200 x_{22}	1300 x_{23}	50
	(45)	(10)	(30)	

Εκχώρησε όσο περισσότερες μονάδες γίνεται στο κελί με το μικρότερο κόστος μεταφοράς της επιλεγείσης γραμμής ή στήλης.

	100	600	300	
200	800 x_{11}	600 x_{12}	1000 x_{13}	35 − 10
300	900 x_{21}	1200 x_{22}	1300 x_{23}	50
	(45)	(10) 10	(30)	

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Εάν εξαντλήθηκε η ζήτηση του j σταθμού προορισμού διέγραψε τον.

	—	—	
—	800 x_{11}	1000 x_{13}	25
—	900 x_{21}	1300 x_{23}	50
	(45)	(30)	

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Εάν απόμεινε μόνον μία γραμμή ή μόνον μία στήλη,
τότε εκχώρησε όλες τις εναπομείνασες ποσότητες στα κελιά της.
Σιγούρεψε ότι σε κάθε κελί θα εκχωρηθεί ποσότητα (έστω και μηδενική).
Αλλιώς, Επέστρεψε στο Βήμα 2.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Υπολόγισε τις ποινές για κάθε γραμμή και στήλη:

	100	300	
200	800 x_{11}	1000 x_{13}	25
400	900 x_{21}	1300 x_{23}	50
	(45)	(30)	

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Επέλεξε τη γραμμή ή στήλη με τη μεγαλύτερη ποινή (σε περίπτωση ισοπαλίας η επιλογή γίνεται τυχαία).

	100	300	
200	800 x_{11}	1000 x_{13}	25
400	900 x_{21}	1300 x_{23}	50
	(45)	(30)	

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Εκχώρησε όσο περισσότερες μονάδες γίνεται στο κελί με το μικρότερο κόστος μεταφοράς της επιλεγείσης γραμμής ή στήλης.

	100	300	
200	800 x_{11}	1000 x_{13}	25
400	900 x_{21}	1300 x_{23}	50 – 45
	(45) 45	(30)	

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Εάν εξαντλήθηκε η ζήτηση του j σταθμού προορισμού διέγραψε τον.

	—	
—	1000 x_{13}	25
—	1300 x_{23}	5
	(30)	

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Εάν απόμεινε μόνον μία γραμμή ή μόνον μία στήλη,τότε εκχώρησε όλες τις εναπομείνασες ποσότητες στα κελιά της.
Σιγούρεψε ότι σε κάθε κελί θα εκχωρηθεί ποσότητα (έστω και μηδενική).

	—	
—	1000 x_{13}	25
—	1300 x_{23}	5
	(30)	

Επομένως, η λύση του προβλήματος είναι:

$$\begin{aligned} x_{34} &= 30 \\ x_{32} &= 10 \\ x_{12} &= 10 \\ x_{21} &= 45 \\ x_{13} &= 25 \\ x_{23} &= 5 \end{aligned}$$

Οι υπόλοιπες μεταβλητές είναι ίσες με το μηδέν.
Η αντικειμενική συνάρτηση θα γίνει

$$\begin{aligned} z &= 800x_{11} + 600x_{12} + 1000x_{13} + 900x_{14} + 900x_{21} + 1200x_{22} \\ &\quad +1300x_{23} + 700x_{24} + 1400x_{31} + 900x_{32} + 1600x_{33} + 500x_{34} \\ &= 600 \cdot 10 + 1000 \cdot 45 + 900 \cdot 45 + 1300 \cdot 5 + 900 \cdot 10 + 500 \cdot 30 \\ &= 122000 \end{aligned}$$