ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ - ΣΕΡΡΕΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

Γραμμικός Προγραμματισμός & Βελτιστοποίηση

Δρ. Δημήτρης Βαρσάμης
Καθηγητής Εφαρμογών

ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ & ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ

Κάθε πρόβλημα μεταφοράς μπορεί να μοντελοποιηθεί, όπως είδαμε, με δύο τρόπους:

- Ως ένα κλασικό πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού.
- Με την βοήθεια ενός συνοπτικού πίνακα (πίνακας μεταφοράς).

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ - ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Δίνεται το παρακάτω πρόβλημα μεταφοράς

	Λ_1	Λ_2	Λ_3	Λ_4	
A_1	800	600	1000	900	35
A_2	900	1200	1300	700	50
A_3	1400	900	1600	500	40
	45	20	30	30	

Το πρόβλημα είναι να προσδιορίσουμε πως θα γίνει η μεταφορά από τους σταθμούς προέλευσης A_1, A_2 και A_3 στους σταθμούς προορισμού Λ_1, Λ_2, Λ_3 και Λ_4 έτσι ώστε το συνολικό κόστος της μεταφοράς να είναι ελάχιστο.
Το παραπάνω πρόβλημα είναι διατυπωμένο με πίνακα μεταφοράς.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ

- Τα προβλήματα τα οποία είναι διατυπωμένα με πίνακα μεταφοράς μπορούν να επιλυθούν με την βοήθεια της μεθόδου Vogel .
- Η μέθοδος Vogel να επιστρέφει μια λύση η οποία είναι πολύ καλή προσέγγιση της βέλτιστης λύσης.
- Μπορούμε με μια διαδικασία να ελέγξουμε αν λύση που επιστρέφει μέθοδος Vogel είναι η βέλτιστη ή όχι.
- Στην περίπτωση που δεν είναι η βέλτιστη λύση μπορούμε να βρούμε την βέλτιστη λύση.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ

Έλεγχος βέλτιστης λύσης.

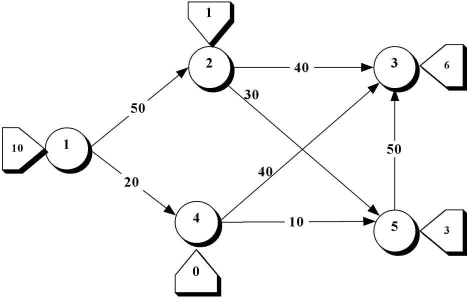
- Για κάθε μηδενικό του τελικού πίνακα μεταφοράς δημιουργούμε ένα κύκλωμα.
- Το κύκλωμα δημιουργείται με αλλαγή κατεύθυνσης σε μη μηδενικό κελί.
- Κάθε αλλαγή κατεύθυνσης συνεπάγεται και αλλαγή πρόσημου.
- Αθροίζουμε τις ποσότητες του κυκλώματος και αν όλες είναι θετικές τότε έχουμε την βέλτιστη λύση.
  Διαφορετικά εφαρμόζουμε μια διαδικασία έτσι ώστε να καταλήξουμε στην βέλτιστη λύση.

Έλεγχος βέλτιστης λύσης.

	Λ_1	Λ_2	Λ_3	Λ_4	
A_1	800 $x_{11} = 0$	600 $x_{12} = 10$	1000 $x_{13} = 25$	900 $x_{14} = 0$	35
A_2	900 $x_{21} = 45$	1200 $x_{22} = 0$	1300 $x_{23} = 5$	700 $x_{24} = 0$	50
A_3	1400 $x_{31} = 0$	900 $x_{32} = 10$	1600 $x_{33} = 0$	500 $x_{34} = 30$	40
	45	20	30	30	

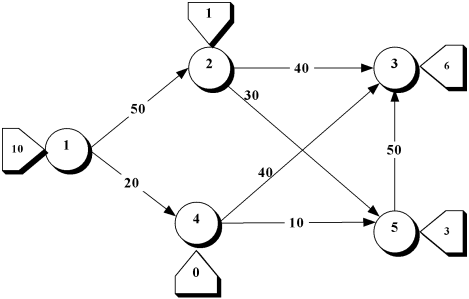
ΕΙΔΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕΤΑΦΟΡΤΩΣΗΣ

Να διαμορφώσετε τον πίνακα μεταφοράς του παρακάτω προβλήματος



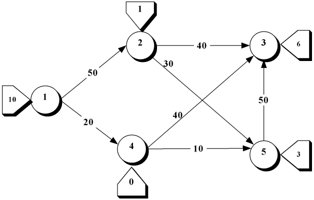
Το παραπάνω πρόβλημα είναι μια ειδική περίπτωση προβλήματος μεταφοράς που αναφέρεται ως πρόβλημα μεταφόρτωσης.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕΤΑΦΟΡΤΩΣΗΣ



- Ο κόμβος (1) είναι σταθμός προέλευσης
- Ο κόμβος (3) είναι σταθμός προορισμού
- Ο κόμβος (4) είναι σταθμός μεταφόρτωσης
- Οι κόμβοι (2) και (5) είναι σταθμοί μεταφόρτωσης και προορισμού

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕΤΑΦΟΡΤΩΣΗΣ



Ο πίνακας μεταφοράς του προβλήματος διαμορφώνεται ως εξής:

	(2)	(3)	(4)	(5)	
(1)	50	–	20	–	10
(2)	–	40	–	30	$0+10$
(4)	–	40	–	10	$0+10$
(5)	–	50	–	–	$0+10$
	$1+10$	6	$0+10$	$3+10$	

Στον πίνακα μεταφοράς θέτουμε στις κενές διαδρομές ένα πολύ μεγάλο κόστος (M) και εφαρμόζουμε την μέθοδο Vogel

	(2)	(3)	(4)	(5)	
(1)	50	M	20	M	10
(2)	0	40	M	30	10
(4)	M	40	0	10	10
(5)	M	50	M	0	10
	11	6	10	13	

ΕΙΔΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΑΝΑΘΕΣΗΣ

Ένας προπονητής κολύμβησης πρέπει να επιλέξει τους 4 αθλητές που θα αγωνιστούν στη σκυταλοδρομία 4×100 μικτή.
Οι χρόνοι των αθλητών δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

	Ελεύθερο	Ύπτιο	Πρόσθιο	Πεταλούδα
A_1	61	63	57	58
A_2	58	65	59	60
A_3	53	61	56	56
A_4	54	57	61	55

Το πρόβλημα είναι να προσδιορίσουμε πως θα γίνει η ανάθεση των αθλητών A_1, A_2, A_3 και A_4 στα αγωνίσματα *Ελεύθερο*, *Ύπτιο*, *Πρόσθιο* και *Πεταλούδα* έτσι ώστε ο συνολικός χρόνος της ομάδας στη σκυταλοδρομία να είναι ελάχιστος.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΑΝΑΘΕΣΗΣ

	Ελεύθερο	Ύπτιο	Πρόσθιο	Πεταλούδα
A_1	61	63	57	58
A_2	58	65	59	60
A_3	53	61	56	56
A_4	54	57	61	55

Έστω x_{ij} μεταβλητές με

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Ο αθλητής } A_i \text{ επιλέγεται στο στυλ } j \\ 0 & \text{Ο αθλητής } A_i \text{ δεν επιλέγεται στο στυλ } j \end{cases}$$

Θα έχουμε 16 μεταβλητές και αντικειμενική συνάρτηση την εξής:

$$\min \; z = 61x_{11} + 63x_{12} + 57x_{13} + 85x_{14} + 58x_{21} + 65x_{22} + 59x_{23} + 60x_{24}$$
$$+ 53x_{31} + 61x_{32} + 56x_{33} + 56x_{34} + 54x_{41} + 57x_{42} + 61x_{43} + 55x_{44}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΑΝΑΘΕΣΗΣ

	Ελεύθερο	Ύπτιο	Πρόσθιο	Πεταλούδα
A_1	61	63	57	58
A_2	58	65	59	60
A_3	53	61	56	56
A_4	54	57	61	55

Το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού θα έχει τους εξής περιορισμούς

$$\begin{array}{ccccccccc} x_{11} & + & x_{12} & + & x_{13} & + & x_{14} & = & 1 \\ x_{21} & + & x_{22} & + & x_{23} & + & x_{24} & = & 1 \\ x_{31} & + & x_{32} & + & x_{33} & + & x_{34} & = & 1 \\ x_{41} & + & x_{42} & + & x_{43} & + & x_{44} & = & 1 \end{array}$$

ανά γραμμή, δηλαδή ανά κολυμβητή.

	Ελεύθερο	Ύπτιο	Πρόσθιο	Πεταλούδα
A_1	61	63	57	58
A_2	58	65	59	60
A_3	53	61	56	56
A_4	54	57	61	55

Το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού θα έχει τους εξής περιορισμούς

$$\begin{array}{ccccccccc} x_{11} & + & x_{21} & + & x_{31} & + & x_{41} & = & 1 \\ x_{12} & + & x_{22} & + & x_{32} & + & x_{42} & = & 1 \\ x_{13} & + & x_{23} & + & x_{33} & + & x_{43} & = & 1 \\ x_{14} & + & x_{24} & + & x_{34} & + & x_{44} & = & 1 \end{array}$$

ανά στήλη, δηλαδή ανά στυλ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΑΝΑΘΕΣΗΣ

- Το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού μπορεί να λυθεί με την μέθοδο Simplex αλλά έχει πολλές μεταβλητές (16) και αρκετούς περιορισμούς (8)

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΑΝΑΘΕΣΗΣ

- Το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού μπορεί να λυθεί με την μέθοδο Simplex αλλά έχει πολλές μεταβλητές (16) και αρκετούς περιορισμούς (8)
- Οι πιθανές λύσεις θα είναι

$$\binom{16}{8} = \frac{16!}{8!(16-8)!} = 12780$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΑΝΑΘΕΣΗΣ

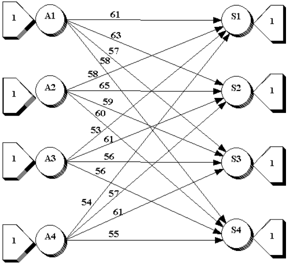
- Το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού μπορεί να λυθεί με την μέθοδο Simplex αλλά έχει πολλές μεταβλητές (16) και αρκετούς περιορισμούς (8)
- Οι πιθανές λύσεις θα είναι

$$\binom{16}{8} = \frac{16!}{8!(16-8)!} = 12780$$

- Η επίλυση με την μέθοδο Simplex θα είναι μια επίπονη διαδικασία λόγω των πολλών λύσεων

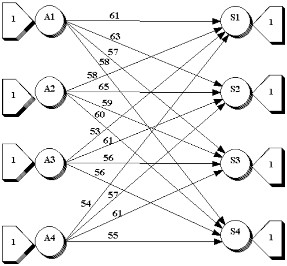
ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΑΝΑΘΕΣΗΣ

Το παραπάνω πρόβλημα μπορεί να παρασταθεί σε δίκτυο ως εξής:



Το παραπάνω πρόβλημα είναι μια ειδική περίπτωση προβλήματος μεταφοράς που αναφέρεται ως πρόβλημα ανάθεσης.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΑΝΑΘΕΣΗΣ



Ο πίνακας μεταφοράς του προβλήματος διαμορφώνεται ως εξής:

	S_1	S_2	S_3	S_4	
A_1	61	63	57	58	1
A_2	58	65	59	60	1
A_3	53	61	56	56	1
A_4	54	57	61	55	1
	1	1	1	1	

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΑΝΑΘΕΣΗΣ

- Τα προβλήματα ανάθεσης μπορούν να επιλυθούν με την βοήθεια της Ουγγρικής μεθόδου.
- Η Ουγγρική μέθοδος εφαρμόζεται σε προβλήματα ελαχιστοποίησης.
- Στην περίπτωση που το πρόβλημα ανάθεσης είναι μεγιστοποίησης τότε το μετατρέπουμε σε πρόβλημα ελαχιστοποίησης σύμφωνα με τον τύπο

$$\max(f(x)) = -\min(-f(x))$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΑΝΑΘΕΣΗΣ

Βήμα 1α

Από κάθε γραμμή επιλέγουμε τη μικρότερη ποσότητα και την αφαιρούμε από τα στοιχεία της ίδιας γραμμής.

$$\begin{array}{c|cccc} & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ \hline A_1 & 61 & 63 & 57 & 58 \\ A_2 & 58 & 65 & 59 & 60 \\ A_3 & 53 & 61 & 56 & 56 \\ A_4 & 54 & 57 & 61 & 55 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c|cccc} & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ \hline A_1 & 4 & 6 & 0 & 1 \\ A_2 & 0 & 7 & 1 & 2 \\ A_3 & 0 & 8 & 3 & 3 \\ A_4 & 0 & 3 & 7 & 1 \end{array}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΑΝΑΘΕΣΗΣ

Βήμα 1β

Από κάθε στήλη επιλέγουμε τη μικρότερη ποσότητα και την αφαιρούμε από τα στοιχεία της ίδιας στήλης.

$$\begin{array}{c|cccc} & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ \hline A_1 & 4 & 6 & 0 & 1 \\ A_2 & 0 & 7 & 1 & 2 \\ A_3 & 0 & 8 & 3 & 3 \\ A_4 & 0 & 3 & 7 & 1 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c|cccc} & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ \hline A_1 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ A_2 & 0 & 4 & 1 & 1 \\ A_3 & 0 & 5 & 3 & 2 \\ A_4 & 0 & 0 & 7 & 0 \end{array}$$

Η παραπάνω διαδικασία μετατρέπει τον πίνακα του προβλήματος σε κανονική μορφή.

Βήμα 2

Κάθε πίνακας κανονικής μορφής περιέχει τουλάχιστον n μηδενικά στοιχεία.
Ανεξάρτητα μηδενικά είναι αυτά τα οποία όπως και να επιλεγούν ανά δύο δεν ανήκουν στην ίδια γραμμή ούτε στη ίδια στήλη.
Σχεδιάζουμε ευθείες που καλύπτουν όλα τα μηδενικά.
Το πλήθος των ευθειών αυτών είναι το πλήθος των ανεξάρτητων μηδενικών.

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\
\hline
A_1 & 4 & 3 & 0 & 0 \\
A_2 & 0 & 4 & 1 & 1 \\
A_3 & 0 & 5 & 3 & 2 \\
A_4 & 0 & 0 & 7 & 0
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{c|cccc}
 & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\
\hline
A_1 & 4 & 3 & 0 & 0 \\
A_2 & 0 & 4 & 1 & 1 \\
A_3 & 0 & 5 & 3 & 2 \\
A_4 & 0 & 0 & 7 & 0
\end{array}
$$

Βήμα 2α

Εάν το πλήθος των ευθειών είναι μικρότερο από το n τότε
Επιλέγουμε την μικρότερη ποσότητα και την αφαιρούμε από τα μη καλυμμένα στοιχεία του πίνακα και την προσθέτουμε στα διπλοκαλλυμένα στοιχεία του πίνακα

	S_1	S_2	S_3	S_4
A_1	4	3	0	0
A_2	0	4	1	1
A_3	0	5	3	2
A_4	0	0	7	0

$\longrightarrow$

	S_1	S_2	S_3	S_4
A_1	5	3	0	0
A_2	0	3	0	0
A_3	0	4	2	1
A_4	1	0	7	0

Βήμα 2β

Εάν το πλήθος των ευθειών είναι μεγαλύτερο ή ίσο με το n τότε
βρέθηκε η βέλτιστη λύση.

	S_1	S_2	S_3	S_4
A_1	5	3	0	0
A_2	0	3	0	0
A_3	0	4	2	1
A_4	1	0	7	0

Βήμα 3

Επιλέγουμε n μηδενικά με τον εξής τρόπο.
Επιλέγουμε ένα μηδενικό το οποίο είναι το μοναδικό μηδενικό στη γραμμή ή στήλη που βρίσκεται.

	S_1	S_2	S_3	S_4
A_1	5	3	0	0
A_2	0	3	0	0
A_3	0	4	2	1
A_4	1	0	7	0

Κάνουμε την ανάθεση $x_{42} = 1$ και διαγράφουμε την γραμμή και την στήλη του μηδενικού.

Βήμα 3

Επιλέγουμε ένα μηδενικό το οποίο είναι το μοναδικό μηδενικό στη γραμμή ή στήλη που βρίσκεται.

	S_1	S_3	S_4
A_1	5	0	0
A_2	0	0	0
A_3	0	2	1

Κάνουμε την ανάθεση $x_{31} = 1$ και διαγράφουμε την γραμμή και την στήλη του μηδενικού.

Βήμα 3

Εδώ δεν έχουμε μηδενικό το οποίο να είναι το μοναδικό μηδενικό στη γραμμή ή στήλη που βρίσκεται.

	S_3	S_4
A_1	0	0
A_2	0	0

Επομένως, κάνουμε την ανάθεση $x_{13} = 1$ και $x_{24} = 1$ ή $x_{14} = 1$ και $x_{23} = 1$ και σταματάμε διότι πραγματοποιήσαμε $n = 4$ αναθέσεις.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΑΝΑΘΕΣΗΣ

	S_1	S_2	S_3	S_4
A_1	61	63	57	58
A_2	58	65	59	60
A_3	53	61	56	56
A_4	54	57	61	55

Η λύση του προβλήματος είναι οι αναθέσεις:

$$x_{42}, x_{31}, x_{13}, x_{24} \quad \text{ή} \quad x_{42}, x_{31}, x_{23}, x_{14}$$

με συνολικό χρόνο

$$z = 57 + 53 + 57 + 60 = 227 \quad \text{ή} \quad z = 57 + 53 + 59 + 58 = 227$$