Λογισμός ΙΙ

Χρήστος Θ. Αναστασίου
Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής ΤΕ

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Κεντρικής Μακεδονίας» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Εισαγωγή

- Ποιο είναι το περιεχόμενο του μαθήματος Λογισμός ΙΙ
- Ποια είναι η σχέση του με το μάθημα του Λογισμού Ι

Διανύσματα, συστήματα συντεταγμένων

- Διανύσματα (βασικές έννοιες)
- Καρτεσιανό (x,y) και πολικό (ρ,φ) σύστημα συντεταγμένων (2 διαστάσεις)
- Μοναδιαία διανύσματα

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y}\,.$$

Διανύσματα, συστήματα συντεταγμένων

- Καρτεσιανό (x,y,z) και κυλινδρικό (ρ,φ,z) σύστημα συντεταγμένων (3 διαστάσεις)
    - Μοναδιαία διανύσματα

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$

Διανύσματα, συστήματα συντεταγμένων

- Σφαιρικό (ρ,θ,φ) σύστημα συντεταγμένων (3 διαστάσεις)
- Μοναδιαία διανύσματα

Διανύσματα, συστήματα συντεταγμένων

- Μετασχηματισμοί μεταξύ συστημάτων συντεταγμένων

$$
\begin{aligned}
x &= r cos\theta \\
y &= r sin\theta \\
z &= z, \;\; r > 0, \;\; 0 \leq \theta < 2\pi
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
x &= r sin\theta cos\phi \\
y &= r sin\theta sin\phi \\
z &= r cos\theta
\end{aligned}
$$

Διανύσματα, συστήματα συντεταγμένων

- Πράξεις μεταξύ διανυσμάτων: εσωτερικό γινόμενο

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3$$

Διανύσματα, συστήματα συντεταγμένων

- Πράξεις μεταξύ διανυσμάτων:

εξωτερικό γινόμενο

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x}, & \hat{y}, & \hat{z} \\ A_1, & A_2, & A_3 \\ B_1, & B_2, & B_3 \end{vmatrix} = \hat{x}(A_2 B_3 - A_3 B_2) +$$

$$+ \quad \hat{y}(A_3 B_1 - A_1 B_3) + \hat{z}(A_x B_y - A_y B_x)$$

Διανύσματα, συστήματα συντεταγμένων

- Πράξεις μεταξύ διανυσμάτων:

μικτό γινόμενο

$$(\vec{A},\vec{B},\vec{C}) := \vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \begin{vmatrix} A_1, & A_2, & A_3 \\ B_1, & B_2, & B_3 \\ C_1, & C_2, & C_3 \end{vmatrix}$$

Αναλυτική Γεωμετρία 3 διαστάσεων

- Η σφαίρα και το ελλειψοειδές

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Αναλυτική Γεωμετρία 3 διαστάσεων

- Το μονόχωνο υπερβολοειδές

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Αναλυτική Γεωμετρία 3 διαστάσεων

- Το δίχωνο υπερβολοειδές

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

Αναλυτική Γεωμετρία 3 διαστάσεων

- Ο κώνος

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2$$

Αναλυτική Γεωμετρία 3 διαστάσεων

- Το παραβολοειδές

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2\gamma z \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2\gamma z$$

Αναλυτική Γεωμετρία 3 διαστάσεων

- Ο κύλινδρος

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Συναρτήσεις 2 μεταβλητών

- Πεδίο ορισμού
- Η έννοια της περιοχής

Συναρτήσεις 2 μεταβλητών

- Εσωτερικά σημεία συνόλων
- Ανοιχτά και κλειστά σύνολα
- Συναφή σύνολα

Συναρτήσεις 2 μεταβλητών

- Όρια (μαθηματικός ορισμός)

$$\lim_{P \to P_0} f(x, y) = k$$

Συναρτήσεις 2 μεταβλητών

- Όρια (υπολογισμός)
- Χρήση πολικών συντεταγμένων

Συναρτήσεις 2 μεταβλητών

- Συνέχεια συναρτήσεων

Συναρτήσεις 2 μεταβλητών

- Ασκήσεις ορίων

Μερική παραγώγιση

- Ορισμός
- Τρόπος υπολογισμού
- Βασικά θεωρήματα

$$f_x'(P_0) = f_x'(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \qquad f_x'(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$$

$$f_y'(P_0) = f_y'(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} \qquad f_y'(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

Μερική παραγώγιση

- Η δεύτερη παράγωγος

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Μερική παραγώγιση

- Αρμονικές συναρτήσεις

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Μερική παραγώγιση

- Σύνθετες συναρτήσεις

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial r} \\
\frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial s}
\end{aligned}
$$

Μερική παραγώγιση

- Πεπλεγμένες συναρτήσεις

$$
\begin{aligned}
y'(x) &= -\frac{F_x}{F_y} \\
y''(x) &= -\frac{(F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2)}{F_y^3}
\end{aligned}
$$

Μερική παραγώγιση

- Ιακωβιανή ορίζουσα

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} u_x, & u_y \\ v_x, & v_y \end{vmatrix} \qquad dudv = \frac{D(u,v)}{D(x,y)}dxdy$$

Μερική παραγώγιση

- Ολικό διαφορικό

$$df = dz = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0} dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0} dy$$

Μερική παραγώγιση

- Αντίστροφο ολικό διαφορικό

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \quad f(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(t,y)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,u)du + C$$

Μερική παραγώγιση

- Γενικές ασκήσεις

Μερική παραγώγιση

- Ανάπτυγμα Taylor

$$
\begin{aligned}
f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) &+ (h\partial_x + k\partial_y) f(x_0, y_0) + \\
&+ \frac{1}{2!}(h\partial_x + k\partial_y)^2 f(x_0, y_0) + \\
&+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots + \\
&+ \frac{1}{n!}(h\partial_x + k\partial_y)^n f(x_0, y_0) + R_{n+1}(
\end{aligned}
$$

Μερική παραγώγιση

- Ακρότατα και σαγματικά σημεία

$\Delta < 0$ και $A > 0 (C > 0)$	Τοπικό Ελάχιστο
$\Delta < 0$ και $A < 0 (C < 0)$	Τοπικό Μέγιστο

$\Delta > 0$	Σαγματικό σημείο
$\Delta = 0$	Απροσδιόριστο

Διπλά ολοκληρώματα

- Ορισμός
- Τρόπος υπολογισμού

$$I = \int\int_D f(x,y)dxdy$$

Διπλά ολοκληρώματα

- Χρήση πολικών συντεταγμένων

$$\int\int_D \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{R}{\sqrt{R^2 - r^2}} r\,dr\,d\theta$$

Τριπλά ολοκληρώματα

- Ορισμός
- Τρόποι υπολογισμού

$$\int\int\int_V f(x,y,z)dxdydz =$$

Διανυσματική ανάλυση

- Διανυσματικές συναρτήσεις

$$\vec{a}(t) = a_1(t)\hat{x} + a_2(t)\hat{y} + a_3(t)\hat{z} = (a_1(t), a_2(t), a_3(t))$$

Διανυσματική ανάλυση

- Κλίση

$$\nabla f = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\hat{z}$$

Διανυσματική ανάλυση

- Απόκλιση

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z}$$

Διανυσματική ανάλυση

- Περιστροφή

$$\nabla \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \hat{x}, & \hat{y}, & \hat{z} \\ \partial_x, & \partial_y, & \partial_z \\ V_1, & V_2, & V_3 \end{vmatrix}$$

Διανυσματική ανάλυση

- Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$
\begin{aligned}
I_C &= \oint_A^B \vec{V}\cdot d\vec{a} = \int_{t_1}^{t_2}\left[V_1(a_1(t),a_2(t),a_3(t))\frac{da_1}{dt} + \right. \\
&+ \left. V_2(a_1(t),a_2(t),a_3(t))\frac{da_2}{dt} + V_3(a_1(t),a_2(t),a_3(t))\frac{da_3}{dt}\right] dt
\end{aligned}
$$

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: <Όνομα Συνεργάτη>

Θεσσαλονίκη, <Ημερομηνία>