



ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

ΠΕΡΣΕΦΟΝΗ ΠΟΛΥΧΡΟΝΙΔΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΤΕ



Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Κεντρικής Μακεδονίας» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Μαθηματική διατύπωση προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού Simplex

Δρ. Περσεφόνη Πολυχρονίδου

ppolychr@gmail.com



ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

- Μεγιστοποίηση ή ελαχιστοποίηση αντικειμενικής συνάρτησης:

$$Z = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \dots + C_n X_n$$

- n – μεταβλητές και m – περιορισμοί
- Υπό τους περιορισμούς:

$$1^{\text{ος}} \text{ περιορισμός: } A_{11} X_1 + A_{12} X_2 + \dots + A_{1n} X_n \leq \acute{\eta} \geq B_1$$

$$2^{\text{ος}} \text{ περιορισμός: } A_{21} X_1 + A_{22} X_2 + \dots + A_{2n} X_n \leq \acute{\eta} \geq B_2$$

...

$$m^{\text{ος}} \text{ περιορισμός: } A_{m1} X_1 + A_{m2} X_2 + \dots + A_{mn} X_n \leq \acute{\eta} \geq B_m$$

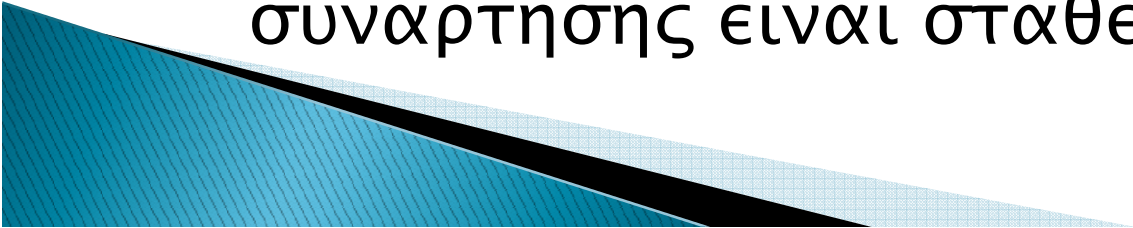
όπου C_j , $j = 1, \dots, n$ οι συντελεστές κέρδους/κόστους,

$A_{i,j}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ οι τεχνολογικοί συντελεστές των

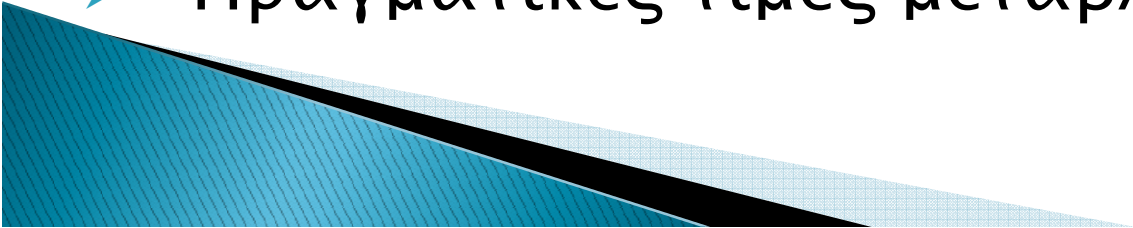
περιορισμών και B_i , $i = 1, \dots, m$ οι σταθερές ποσότητες των

περιορισμών

Βασικές Παραδοχές

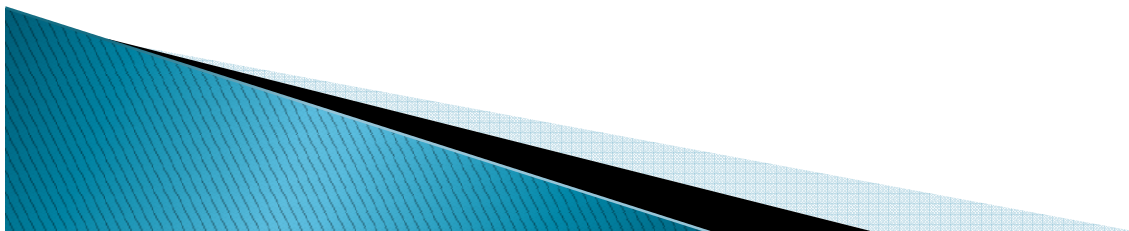
- Στόχος είναι η βελτιστοποίηση του συγκεκριμένου αποτελέσματος. Η γραμμική μορφή της αντικειμενικής συνάρτησης δηλώνει ότι η οριακή συνεισφορά κάθε μεταβλητής είναι σταθερή και ίση με τον αντίστοιχο συντελεστή.
 - Υποθέτουμε ότι οι τεχνολογικοί συντελεστές των περιορισμών, καθώς και οι συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης είναι σταθεροί.
- 

Βασικές Παραδοχές

- Υποθέτουμε ότι οι συντελεστές λειτουργούν αναλογικά και αθροιστικά. Π.χ. αν μία μονάδα παραγωγής απαιτεί 3 ώρες παραγωγής τότε οι 20 μονάδες παραγωγής, απαιτούν 60 ώρες.
 - Ιδιότητα γραμμικότητας. Π.χ. Αν μία μονάδα προϊόντος απαιτεί 4 ώρες εργασίας και μία μονάδα ενός άλλου προϊόντος απαιτεί 3 ώρες, για να παράγουμε μία μονάδα από κάθε προϊόν θα χρειαστούμε 7 ώρες.
 - Πραγματικές τιμές μεταβλητών.
- 

...διαφορετικά

- ▶ Οι παραδοχές αυτές είναι αποδεκτές ή όχι, ανάλογα με το πρόβλημα που μελετάται.
- ▶ Αν δεν ισχύουν, τότε έχουν αναπτυχθεί άλλες μεθοδολογίες, π.χ. Μη-Γραμμικού Προγραμματισμού (η αντικειμενική συνάρτηση ή οι περιορισμοί του προβλήματος είναι μη γραμμικές συναρτήσεις), Ακέραιου Προγραμματισμού (ακέραιες τιμές μεταβλητών).




Simplex

- ▶ Αλγοριθμική μέθοδος, καθώς ακολουθεί μία καθορισμένη σειρά επαναλαμβανόμενων διαδοχικών βημάτων υπολογισμών. Ξεκινάμε κάθε φορά από ένα αρχικό ακραίο σημείο της περιοχής των εφικτών λύσεων και οδηγούμαστε σε ένα άλλο γειτονικό, για το οποίο αντιστοιχεί καλύτερη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης. Επαναλαμβάνουμε έως ότου εντοπιστεί η βέλτιστη λύση.
- ▶ Πλεονέκτημα: παρέχει πληροφορίες οικονομικής φύσεως που δεν δίνουν άλλες μέθοδοι

Μίξη παραγωγής ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ

Η βιοτεχνία ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ παράγει 2 βασικά προϊόντα: τραπέζια και καρέκλες υψηλής ποιότητας. Η διαδικασία παραγωγής και για τα 2 προϊόντα περιλαμβάνει την επεξεργασία τους στα ίδια στάδια παραγωγής, αλλά απαιτεί διαφορετικές ώρες εργασίας για το κάθε προϊόν στα 3 τμήματα της επιχείρησης: το ξυλουργείο, το βαφείο και το στιλβωτήριο. Το τμήμα παραγωγής έχει τυποποιήσει τη διαδικασία κατασκευής των προϊόντων της και έχει προσδιορίσει το μέσο χρόνο εργασίας ανά παραγόμενη μονάδα σε κάθε τμήμα.



...Μίξη παραγωγής ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ

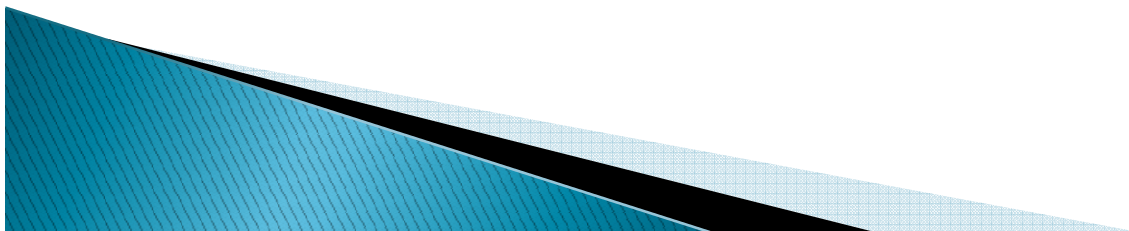
Η κατασκευή κάθε τραπεζιού απαιτεί 8 ώρες εργασίας στο ξυουργείο, 4 ώρες στο βαφείο και 4 ώρες στο σιλβωτήριο, ενώ αντίστοιχα οι ώρες που απαιτούνται για κάθε καρέκλα είναι 8, 2 και 3, αντίστοιχα.

Για τον επόμενο μήνα, ο υπεύθυνος παραγωγής έχει προσδιορίσει ότι οι διαθέσιμες ώρες εργασίας στο ξυουργείο ανέρχονται συνολικά σε 960, στο βαφείο σε 400 και στο σιλβωτήριο σε 420. Από τα στοιχεία που διαθέτει η διεύθυνση οικονομικών υπηρεσιών της εταιρείας, προκύπτει ότι

...Μίξη παραγωγής ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ

το μικτό κέρδος της επιχείρησης με βάση τις τρέχουσες τιμές πώλησης, ανέρχεται σε 140 ευρώ για κάθε τραπέζι και 100 ευρώ για κάθε καρέκλα.

Το πρόβλημα της ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ είναι ο καθορισμός των ποσοτήτων παραγωγής τραπεζιών και καρεκλών για τον επόμενο μήνα, ώστε να πετύχει το μεγαλύτερο δυνατό κέρδος.



Μαθηματικό Μοντέλο

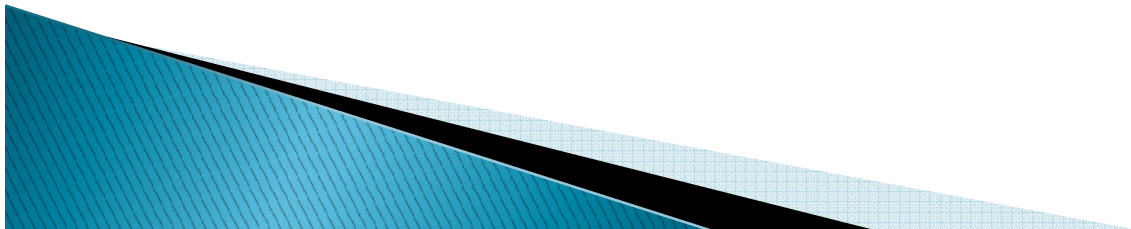
- ▶ Μεταβλητές

X_1 = Ποσότητα παραγόμενων τραπεζιών

X_2 = Ποσότητα παραγόμενων καρεκλών

Αντικειμενική Συνάρτηση – Μεγιστοποίηση κέρδους:

$$140 X_1 + 100 X_2$$



Μαθηματικό Μοντέλο

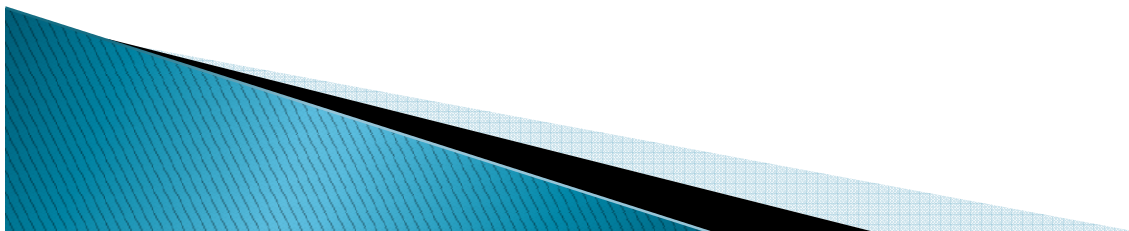
► Περιορισμοί

$$8 X_1 + 8 X_2 \leq 960 \quad \text{Ώρες ξυλουργείου}$$

$$4 X_1 + 2 X_2 \leq 400 \quad \text{Ώρες βαφείου}$$

$$4 X_1 + 3 X_2 \leq 420 \quad \text{Ώρες στιλβωτηρίου}$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$



Μετατροπή ανισοτήτων σε ισότητες – Μεταβλητές περιθωρίου

Όλοι οι περιορισμοί πρέπει να εκφραστούν ως ισότητες. Η μετατροπή αυτή επιτυγχάνεται με την εισαγωγή μεταβλητών περιθωρίου (slack variables), οι οποίες αντιπροσωπεύουν τις ποσότητες των πόρων που δεν χρησιμοποιούνται. Ορίζουμε 3 μεταβλητές περιθωρίου:

S_1 = Ώρες ξυλουργείου που δεν θα χρησιμοποιηθούν στην παραγωγή,

S_2 = Ώρες βαφείου που δεν θα χρησιμοποιηθούν στην παραγωγή και

S_3 = Ώρες στιλβωτηρίου που δεν θα χρησιμοποιηθούν στην παραγωγή.



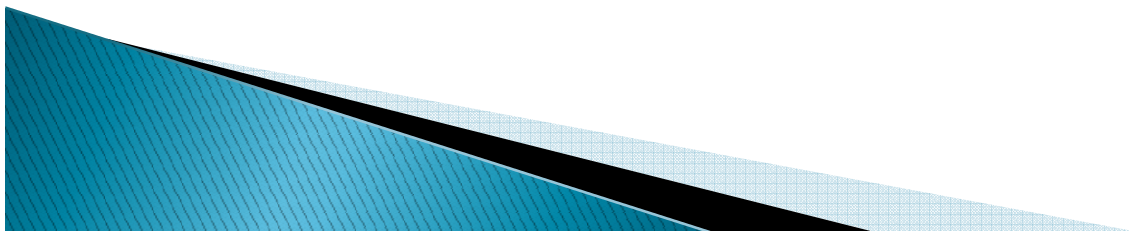
Μετατροπή ανισοτήτων σε ισότητες – Μεταβλητές περιθωρίου

Οι περιορισμοί του προβλήματος με την προσθήκη των μεταβλητών περιθωρίου γράφονται ως εξής:

$$8 X_1 + 8 X_2 + S_1 = 960 \quad \text{Περιορισμός ξυλουργείου}$$

$$4 X_1 + 2 X_2 + S_2 = 400 \quad \text{Περιορισμός βαφείου}$$

$$4 X_1 + 3 X_2 + S_3 = 420 \quad \text{Περιορισμός στιλβωτηρίου}$$



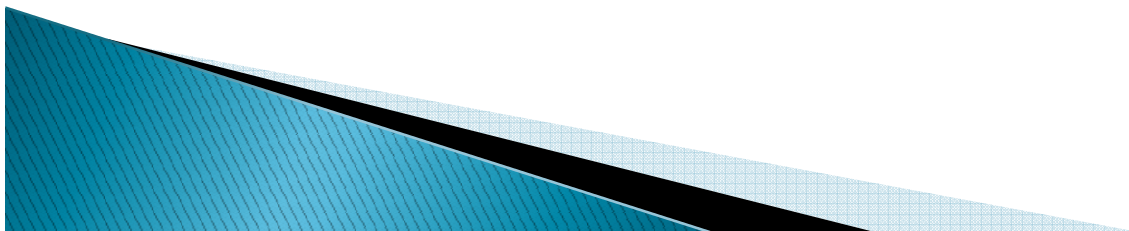
Μετατροπή ανισοτήτων σε ισότητες – Μεταβλητές περιθωρίου

ή αν συμπεριλάβουμε όλες τις μεταβλητές σε όλους τους περιορισμούς, όπου έχουμε ένα σύστημα 3 εξισώσεων με 5 αγνώστους:

$$8 X_1 + 8 X_2 + 1 S_1 + 0 S_2 + 0 S_3 = 960 \text{ Περ. Ξυλουργείου}$$

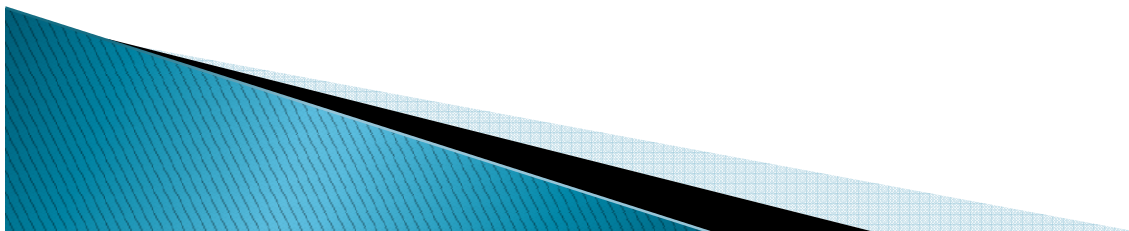
$$4 X_1 + 2 X_2 + 0 S_1 + 1 S_2 + 0 S_3 = 400 \text{ Περ. βαφείου}$$

$$4 X_1 + 3 X_2 + 0 S_1 + 0 S_2 + 1 S_3 = 420 \text{ Περ.στιλβωτηρίου}$$



Πλήρης κανονική μορφή

- ▶ Εφόσον οι μεταβλητές περιθωρίου εκφράζουν τις ποσότητες των πόρων που δεν θα χρησιμοποιηθούν στην παραγωγή, δεν υπάρχει καμία συνεισφορά τους στο κέρδος. Επομένως, μπορούν να συμπεριληφθούν και στην αντικειμενική συνάρτηση.
- ▶ Πλήρης κανονική μορφή Γ.Π.:



Πλήρης κανονική μορφή

Μεγιστοποίηση:

$$140 X_1 + 100 X_2 + 0 S_1 + 0 S_2 + 0 S_3$$

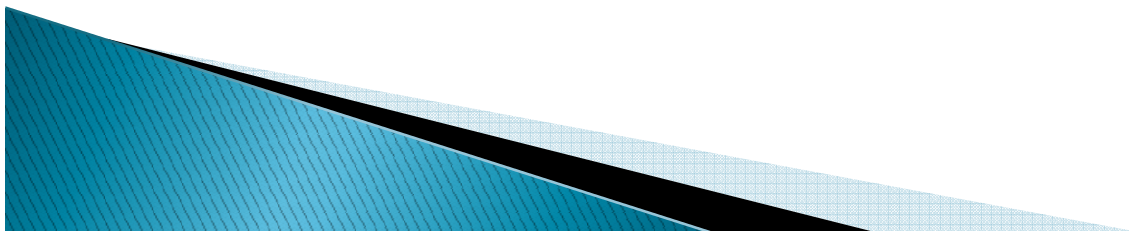
Υπό τους περιορισμούς:

$$(\Xi) 8 X_1 + 8 X_2 + 1 S_1 + 0 S_2 + 0 S_3 = 960$$

$$(B) 4 X_1 + 2 X_2 + 0 S_1 + 1 S_2 + 0 S_3 = 400$$

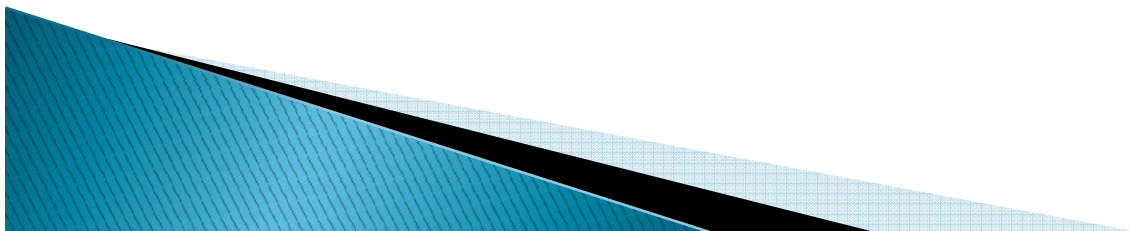
$$(\Sigma) 4 X_1 + 3 X_2 + 0 S_1 + 0 S_2 + 1 S_3 = 420$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$



Αλγεβρικός προσδιορισμός λύσεων

- ▶ 3 εξισώσεις – 5 μεταβλητές, άρα άπειρες λύσεις.
- ▶ Θέτουμε 2 μεταβλητές ίσες με 0 και υπολογίζουμε τις άλλες 3. Οι λύσεις είναι τα ακραία σημεία, που ορισμένα ορίζουν την περιοχή των εφικτών λύσεων.
- ▶ Μία εύκολη υπολογιστική λύση είναι να θέσουμε $x_1 = x_2 = 0$, επομένως $S_1 = 960$, $S_2 = 400$, $S_3 = 420$.



Αλγεβρικός προσδιορισμός λύσεων

- ▶ Η λύση αυτή δεν είναι ιδιαίτερα ελκυστική, καθώς αντιπροσωπεύει την παραγωγή 0 τεμαχίων για καρέκλες και τραπέζια. Το ακραίο σημείο είναι το $(0,0)$, η αρχή των αξόνων.
 - ▶ Είναι όμως, μία λύση που μπορούμε να παράγουμε εύκολα για τα περισσότερα προβλήματα.
 - ▶ Τα επαναληπτικά βήματα της Simplex υλοποιούνται μέσω αλγεβρικών πράξεων στα δεδομένα, που απεικονίζονται σε διάταξη πίνακα, του πίνακα Simplex.
- 