



ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

ΠΕΡΣΕΦΟΝΗ ΠΟΛΥΧΡΟΝΙΔΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΤΕ



Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Κεντρικής Μακεδονίας» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



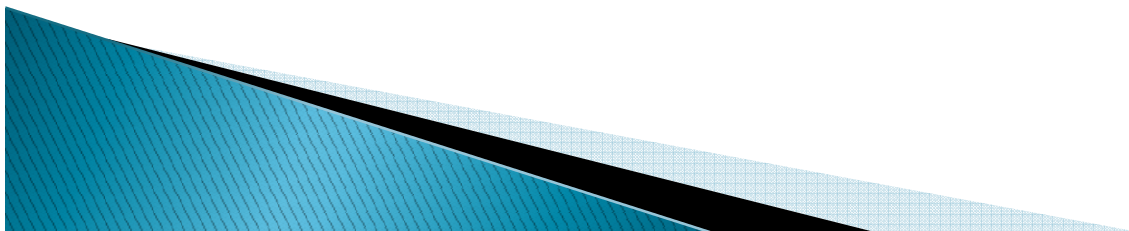
Αρχικός πίνακας Simplex

Συντ. Κέρδους C_j →		140	100	0	0	0	Ποσότητα
↓	Βασικές μεταβλητές	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B_i
0	S_1	8	8	1	0	0	960
0	S_2	4	2	0	1	0	400
0	S_3	4	3	0	0	1	420
	Z_j	0	0	0	0	0	
	$C_j - Z_j$	140	100	0	0	0	


Κάθε πίνακας Simplex αντιστοιχεί σε μία εφικτή λύση με βασικές μεταβλητές (μη μηδενικές τιμές) – βάση και με μη βασικές μεταβλητές (μηδενικές τιμές).

Οικονομική ερμηνεία του πίνακα

- ▶ Τα στοιχεία της στήλης X_1 καλούνται συντελεστές μετατροπής μεταξύ της μεταβλητής και των S_1, S_2, S_3 .
- ▶ Για να αυξηθεί η τιμή της X_1 κατά μία μονάδα, απαιτείται να μειωθούν οι τιμές των S_1, S_2, S_3 κατά 8, 4 και 4 μονάδες αντίστοιχα.
- ▶ Η σειρά C_j περιέχει τους συντελεστές κέρδους της αντικειμενικής συνάρτησης. Ερμηνεύουν τη μικτή αύξηση που προκύπτει στο συνολικό κέρδος, αν η τιμή της κάθε μεταβλητής αυξηθεί κατά μία μονάδα.



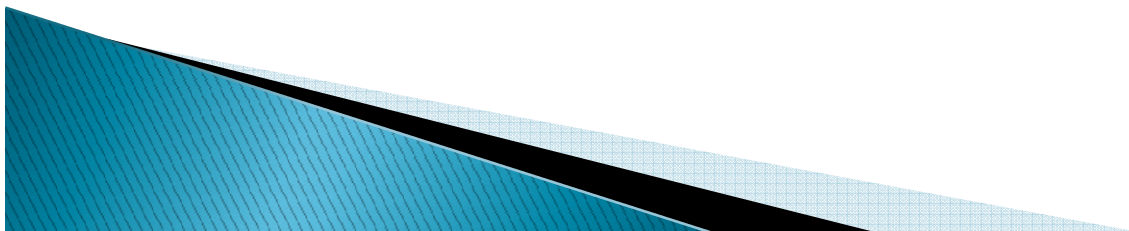
Οικονομική ερμηνεία του πίνακα

- ▶ Τα στοιχεία της Z_j δηλώνουν το κατά πόσο θα μειώνονταν το συνολικό κέρδος, αν η τιμή της αντίστοιχης μεταβλητής αυξηθεί κατά μία μονάδα.
 - ▶ Η σειρά $C_j - Z_j$ δηλώνει την καθαρή επίπτωση στο συνολικό κέρδος, αν η τιμή της αντίστοιχης μεταβλητής αυξηθεί κατά μία μονάδα.
 - ▶ Αυτή καθορίζει τη βέλτιστη λύση ή όχι.
 - ▶ $C_j - Z_j < 0$, αν αυξηθεί η τιμή της μεταβλητής, θα υπάρξει μείωση κέρδους.
 - ▶ $C_j - Z_j > 0$, αν αυξηθεί η τιμή της μεταβλητής, θα υπάρξει αύξηση κέρδους.
- 

Επαναληπτική διαδικασία

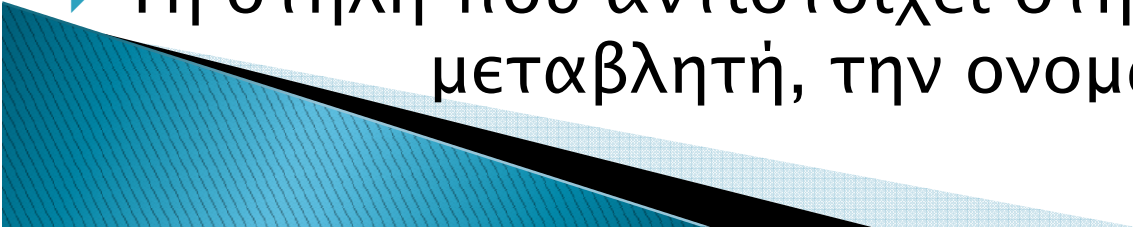
Βήμα 1 - Έλεγχος κριτηρίου βελτιστοποίησης.

- ▶ Ελέγχουμε αν η βέλτιστη λύση δίνεται από τον τρέχοντα πίνακα Simplex. Είναι βέλτιστη αν όλα τα στοιχεία της σειράς $C_j - Z_j$ είναι αρνητικά ή μηδέν σε προβλήματα μεγιστοποίησης, ή θετικά ή μηδέν σε προβλήματα ελαχιστοποίησης.
- ▶ Αν η λύση είναι βέλτιστη, σταματάμε, αλλιώς εκτελούμε ξανά τα βήματα 2-5.




Επαναληπτική διαδικασία

Βήμα 2 – Επιλογή νέας βασικής μεταβλητής.

- ▶ Βελτίωση σημαίνει ότι το ακραίο σημείο που αντιστοιχεί στην τρέχουσα λύση πρέπει να μετακινηθεί σε ένα γειτονικό ακραίο σημείο.
 - ▶ Αντικατάσταση μίας βασικής με μία από τις μη βασικές μεταβλητές.
 - ▶ Επιλέγουμε εκείνη τη μη βασική μεταβλητή που αντιστοιχεί στο μεγαλύτερο θετικό στοιχείο της σειράς $C_j - Z_j$ για να συμπεριληφθεί στη βάση. Έτσι έχουμε μεγαλύτερη αύξηση της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης.
 - ▶ Τη στήλη που αντιστοιχεί στη νέα βασική μεταβλητή, την ονομάζουμε οδηγό στήλη.
- 

Επαναληπτική διαδικασία

Βήμα 3 – Επιλογή βασικής μεταβλητής.

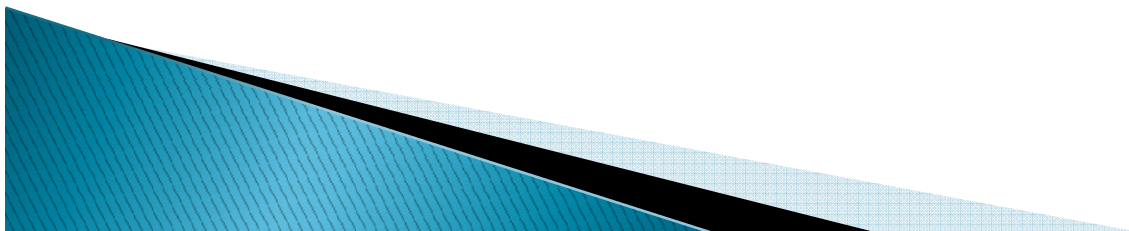
- ▶ Εφόσον μία νέα μεταβλητή εισέρχεται στη βάση, μία άλλη πρέπει να εξέλθει.
 - ▶ Για να προσδιορίσουμε ποια μεταβλητή θα αντικατασταθεί, διαιρούμε όλα τα στοιχεία της τελευταίας στήλης με τα αντίστοιχα θετικά της οδηγού στήλης.
 - ▶ Το μικρότερο θετικό κλάσμα προσδιορίζει τη μεταβλητή που θα αντικατασταθεί (οι αρνητικές τιμές αγνοούνται).
 - ▶ Η σειρά της μεταβλητής που θα αντικατασταθεί, καλείται οδηγός σειρά.
 - ▶ Το στοιχείο που βρίσκεται στην τομή της σειράς και της στήλης, καλείται οδηγός στοιχείο.
- 

Επαναληπτική διαδικασία

Βήμα 4 - Υπολογισμός νέων τιμών οδηγού σειράς.

- ▶ Οι νέες τιμές υπολογίζονται με διαίρεση όλων των στοιχείων της οδηγού σειράς με το οδηγό στοιχείο.

Νέα οδηγός σειρά =
Προηγούμενη οδηγός σειρά / Οδηγό στοιχείο

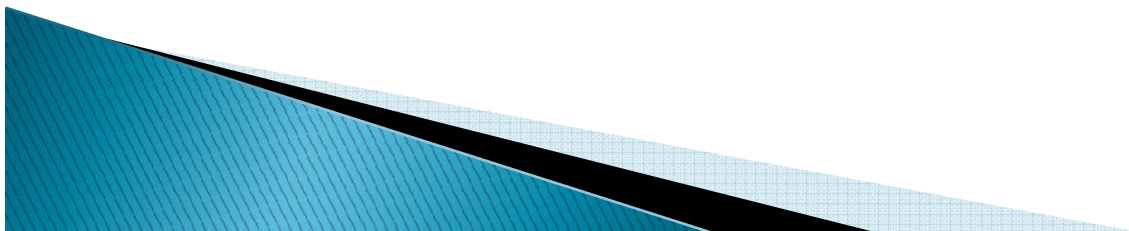


Επαναληπτική διαδικασία

Βήμα 5 - Υπολογισμός νέων τιμών για τις υπόλοιπες σειρές του πίνακα.

- ▶ Οι νέες τιμές (εκτός της οδηγού σειράς) υπολογίζονται ως εξής:

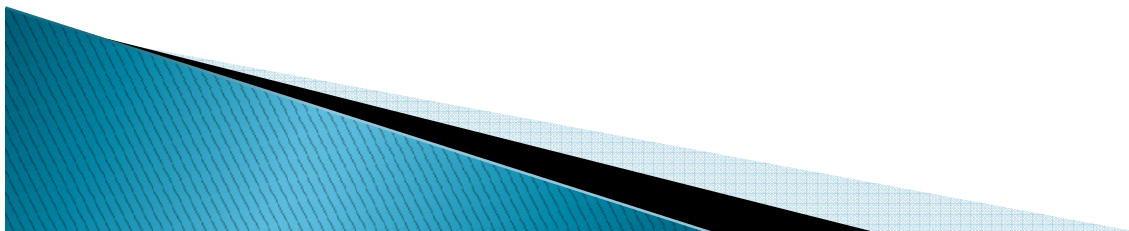
Νέες τιμές σειράς =
Προηγούμενες τιμές - Στοιχείο σειράς στην
οδηγό στήλη x Νέα οδηγό σειρά



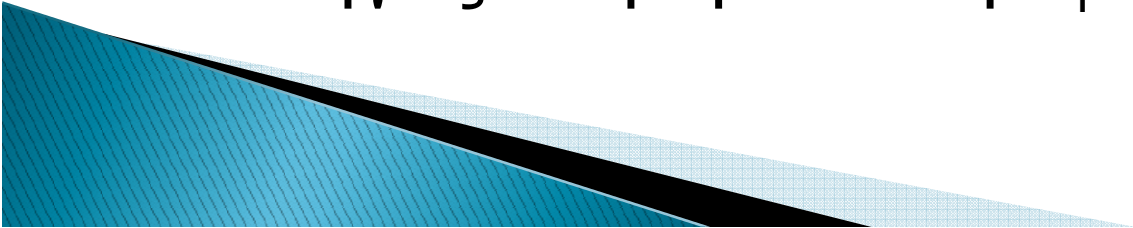
Επαναληπτική διαδικασία

Βήμα 6 - Υπολογισμός νέων τιμών για τις σειρές Z_j και $C_j - Z_j$.

- ▶ Οι τιμές της Z_j υπολογίζονται με πολλαπλασιασμό των στοιχείων κάθε στήλης με τους αντίστοιχους συντελεστές κέρδους των βασικών μεταβλητών.
- ▶ Οι τιμές της σειράς $C_j - Z_j$ προκύπτουν από την αφαίρεση των τιμών των αντίστοιχων σειρών.



Δεύτερος πίνακας Simplex

- ❖ Βήμα 1 - Όλα τα στοιχεία της σειράς $C_j - Z_j$ του πίνακα Simplex είναι μεγαλύτερα ή ίσα με μηδέν. Επομένως, η λύση που δίνει ο πρώτος πίνακας Simplex δεν είναι βέλτιστη λύση και προχωράμε στα βήματα 2-5.
 - ❖ Βήμα 2 - Η επιλογή της μεταβλητής που θα συμπεριληφθεί στη βάση, γίνεται με βάση τη μεγαλύτερη θετική τιμή στη σειρά $C_j - Z_j$. Επιλέγουμε τη μεταβλητή X_1 γιατί έχει τιμή $C_j - Z_j = 140$, ενώ η X_2 έχει τιμή $C_j - Z_j = 100$.
 - ❖ Η οδηγός στήλη είναι η X_1 .
- 

Δεύτερος πίνακας Simplex

- ❖ Βήμα 3 – Ποια από τις S_1, S_2, S_3 θα αντικατασταθεί από την X_1 ;
- ❖ Υπολογίζουμε τα πηλίκια των ποσοτήτων της τελευταίας στήλης του πίνακα προς τους συντελεστές της οδηγού στήλης και έχουμε:

S_1 : 960 ώρες ξυλουργείου / 8 ώρες ανά τραπέζι = 120 τραπέζια

S_2 : 400 ώρες βαφείου / 4 ώρες ανά τραπέζι = 100 τραπέζια

S_3 : 420 ώρες στιλβωτηρίου / 4 ώρες ανά τραπέζι = 105 τραπέζια

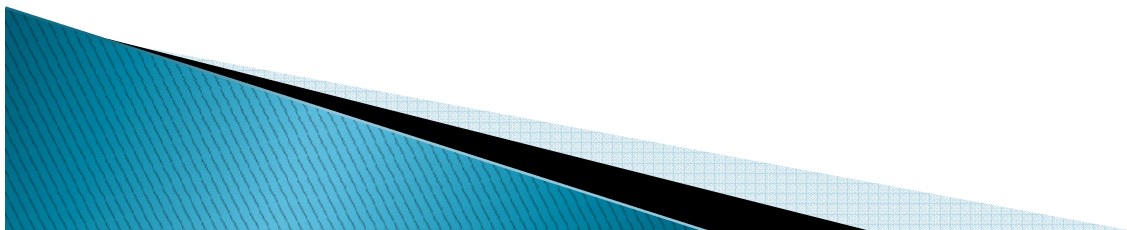
Επομένως, η S_2 είναι η οδηγός σειρά, που θα αντικατασταθεί και το στοιχείο 4, στη διασταύρωση, είναι το στοιχείο οδηγός.

Δεύτερος πίνακας Simplex

Συντ. Κέρδους C_j →		140	100	0	0	0	Ποσότητα α
↓	Βασικές μεταβλητές	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B_i
0	S_1	8	8	1	0	0	960
0	S_2	4	2	0	1	0	400
0	S_3	4	3	0	0	1	420
	Z_j	0	0	0	0		0
	$C_j - Z_j$	140	100	0	0	0	

Αντικατάσταση:

140	X_1	$4/4=1$	$2/4=1/2$	$0/4=0$	$1/4=1/4$	$0/4=0$	$400/4=100$
-----	-------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-------------------------------



Δεύτερος πίνακας Simplex

Συντ. Κέρδους C_j →		140	100	0	0	0	Ποσότητα α
↓	Βασικές μεταβλητές	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B_i
0	S_1	0	4	1	-2	0	160
140	X_1	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0	100
0	S_3	0	1	0	-1	1	20
	Z_j						
	$C_j - Z_j$						

Πράξεις:

0	S_1	$8 - 8 \cdot 1$	$8 - 8 \cdot \frac{1}{2}$	$1 - 8 \cdot 0$	$0 - 8 \cdot \frac{1}{4}$	$0 - 8 \cdot 0$	$960 - 8 \cdot 100$
0	S_3	$4 - 4 \cdot 1$	$3 - 4 \cdot \frac{1}{2}$	$0 - 4 \cdot 0$	$0 - 4 \cdot \frac{1}{4}$	$1 - 4 \cdot 0$	$420 - 4 \cdot 100$

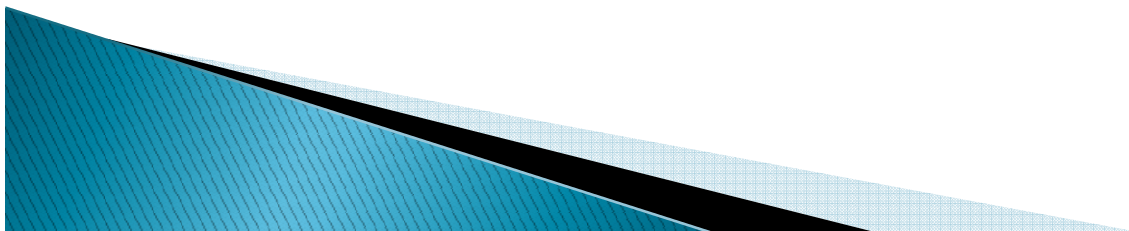
Δεύτερος πίνακας – Βήμα 5

Συντ. Κέρδους C_j →		140	100	0	0	0	Ποσότητ α
↓	Βασικές μεταβλητές	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B_i
0	S_1	0	4	1	-2	0	160
140	X_1	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0	100
0	S_3	0	1	0	-1	1	20
	Z_j	$0*0+1*14+0+0*0=140$	$4*0+1/2*140+1*0=70$	$1*0+0*140+0=0$	- $2*0+1/4*140+1*0=35$	$1*0+0*14+0+1*0=0$	
	C_j-Z_j	0	30	0	-35	0	

$$\text{Κέρδος} = 160 * 0 + 100 * 140 + 20 * 0 = 14000$$

Τρίτος πίνακας Simplex

- ❖ Βήμα 1 - Η σειρά C_j-Z_j έχει και θετικούς αριθμούς, αλλά η λύση δεν είναι βέλτιστη και προχωράμε στα βήματα 2-5.
- ❖ Βήμα 2 - Η επιλογή της μεταβλητής που θα συμπεριληφθεί στη βάση, είναι η X_2 γιατί είναι η μόνη με θετική τιμή 30 στη σειρά C_j-Z_j . Αυτό σημαίνει ότι για κάθε καρέκλα που θα παραχθεί, το κέρδος αυξάνεται κατά 30 ευρώ.
- ❖ Η οδηγός στήλη είναι η X_2 .



Τρίτος πίνακας Simplex

❖ Βήμα 3 – Ποια από τις S_1 , X_1 , S_3 θα αντικατασταθεί από την X_2 ;

❖ Υπολογίζουμε τα πηλίκια των ποσοτήτων της τελευταίας στήλης του πίνακα προς τους συντελεστές της οδηγού στήλης και έχουμε:

S_1 : 160 ώρες ξυλουργείου / 4 ώρες ανά καρέκλα = 40 καρέκλες

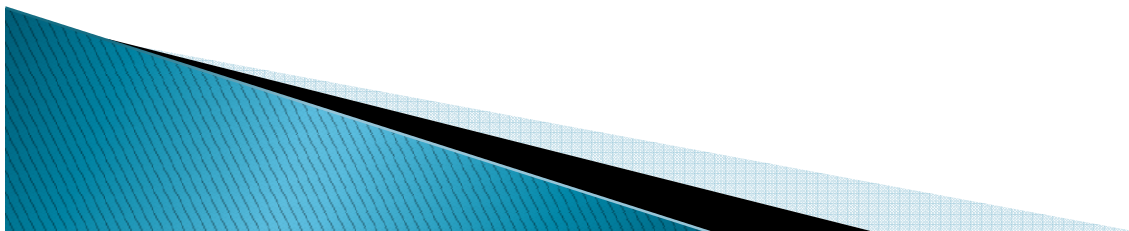
X_1 : 100 τραπέζια / $\frac{1}{2}$ τραπέζια ανά καρέκλα = 200 καρέκλες

S_3 : 20 ώρες στιλβωτηρίου / 1 ώρα ανά καρέκλα = 20 καρέκλες

Επομένως, η S_3 είναι η οδηγός σειρά, που θα αντικατασταθεί και το στοιχείο 1, στη διασταύρωση, είναι το στοιχείο οδηγός.

Τρίτος πίνακας Simplex

Συντ. Κέρδους C_j →		140	100	0	0	0	Ποσότητ α
↓	Βασικές μεταβλητές	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B_i
0	S_1	0	4	1	-2	0	160
140	X_1	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0	100
0	S_3	0	1	0	-1	1	20
	Z_j	140	70	0	35	0	14000
	$C_j - Z_j$	0	30	0	-35	0	



Τρίτος πίνακας Simplex

Συντ. Κέρδους C_j →		140	100	0	0	0	Ποσότητα α
↓	Βασικές μεταβλητές	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B_i
0	S_1	0	0	1	2	-4	80
140	X_1	1	0	0	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	90
100	X_2	0	1	0	-1	1	20
	Z_j						
	$C_j - Z_j$						

Πράξεις:

0	S_1	$0 - 4 \cdot 0$	$4 - 4 \cdot 1$	$1 - 4 \cdot 0$	$-2 - 4 \cdot (-1)$	$0 - 4 \cdot 1$	$160 - 4 \cdot 20$
0	X_1	$1 - \frac{1}{2} \cdot 0$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 1$	$0 - \frac{1}{2} \cdot 0$	$\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cdot (-1)$	$0 - \frac{1}{2} \cdot 1$	$100 - \frac{1}{2} \cdot 20$

Τρίτος πίνακας Simplex – τελικός

Συντ. Κέρδους C_j →		140	100	0	0	0	Ποσότητ α
↓	Βασικές μεταβλητές	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B_i
0	S_1	0	0	1	2	-4	80
140	X_1	1	0	0	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	90
100	X_2	0	1	0	-1	1	20
	Z_j	$0*0$ $+1*$ 140 $+0*$ 100 $=14$ 0	$0*0+0$ $*140+$ $1*100$ $=100$	$1*0+0$ $*140+$ $0*100$ $=0$	- $2*0+3$ $/4*14$ 0- $1*100$ $=5$	- $4*0-$ $1/2*$ 140 $+1*$ 100 $=30$	14600
	C_j-Z_j	0	0	0	-5	-30	

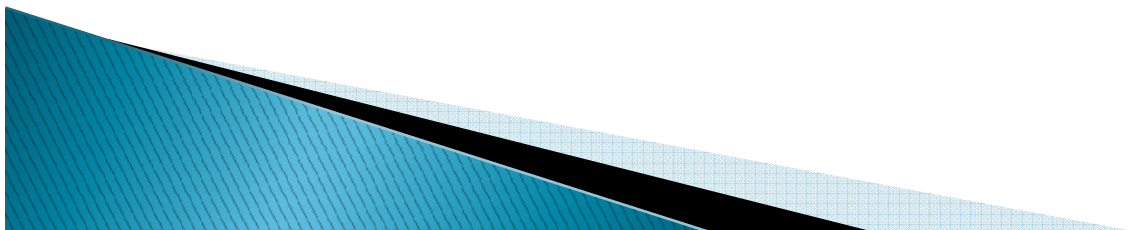
$$\text{Κέρδος} = 90 * 140 + 20 * 100 = 14600$$

Κριτήριο Βελτιστοποίησης

- ▶ Η σειρά $C_j - Z_j$ δεν περιέχει θετικά στοιχεία, συνεπώς δεν είναι δυνατό να επιτευχθεί περαιτέρω αύξηση κέρδους.
- ▶ Ο τρίτος πίνακας είναι και ο τελικός.
- ▶ Η βέλτιστη λύση είναι:

$X_1 = 90$ τραπέζια
 $X_2 = 20$ καρέκλες

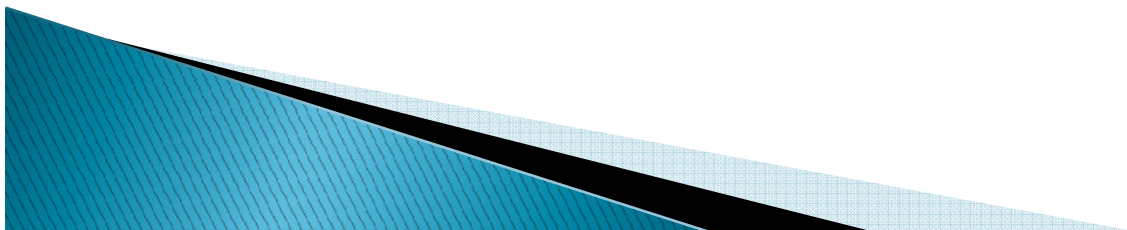
$S_1 : 80$ ώρες διαθέσιμες στο ξυλουργείο
 $S_2 : 0$ ώρες διαθέσιμες στο βαφείο
 $S_3 : 0$ ώρες διαθέσιμες στο σιλβωτήριο




Οικονομική ερμηνεία

- ▶ Φυσική ερμηνεία Βέλτιστης λύσης:

Παραγωγή	Διαθέσιμοι πόροι
$X_1 = 90$ τραπέζια $X_2 = 20$ καρέκλες	S_1 : 80 ώρες διαθέσιμες στο ξυλουργείο S_2 : 0 ώρες διαθέσιμες στο βαφείο S_3 : 0 ώρες διαθέσιμες στο στιλβωτήριο
Κέρδος	14600 ευρώ

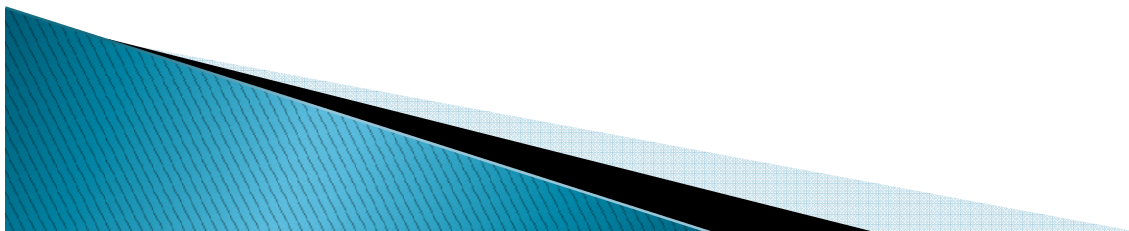


Ερωτήματα

- ▶ Θα μπορούσε να μετακινηθεί προσωπικό από το ξυλουργείο που περισσεύουν 80 ώρες εργασίας σε κάποιο άλλο;
 - ▶ Αν χρειαστεί να αυξηθεί η παραγωγή με υπερωριακή απασχόληση, σε ποια τμήματα και πόσες ώρες μπορούν να προστεθούν;
 - ▶ Θα προκύψει κέρδος από το παραπάνω;
 - ▶ Αν αλλάξουν οι συντελεστές κέρδους, θα προσαρμοστούν και οι ποσότητες παραγωγής και με ποιον τρόπο;
- 

Δεσμευτικοί και Μη δεσμευτικοί περιορισμοί

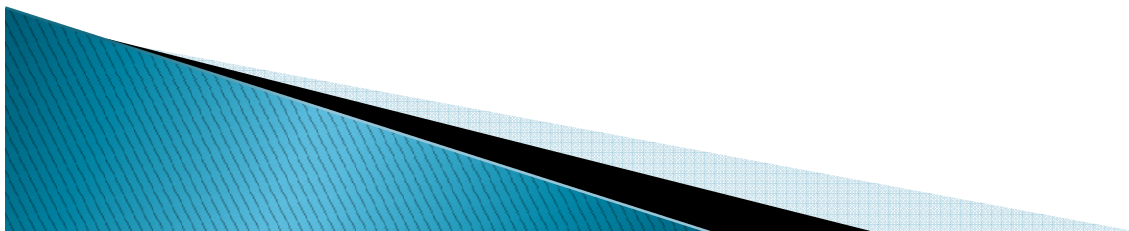
- ▶ Οι περιορισμοί (B) και (Σ) είναι δεσμευτικοί, γιατί καθορίζουν τις τιμές των μεταβλητών και η τομή τους προσδιορίζει το σημείο της βέλτιστης λύσης.
- ▶ Ο περιορισμός (Ξ) είναι μη δεσμευτικός, γιατί δεν προσδιορίζει τη βέλτιστη λύση.
- ▶ Επομένως η βέλτιστη λύση δεν επηρεάζεται από αλλαγές στις διαθέσιμες ώρες του ξυλουργείου.



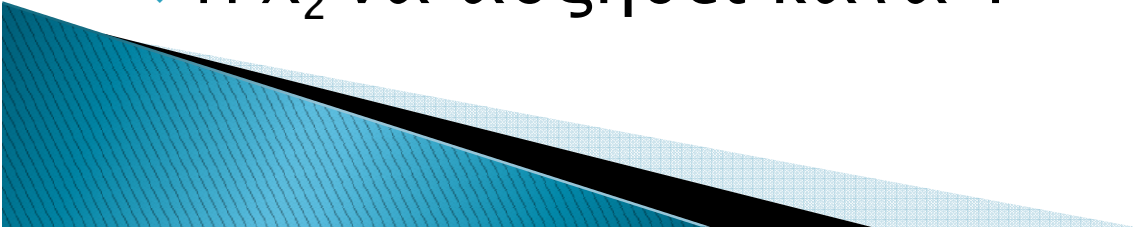
Συντελεστές μετατροπής

- ▶ Οι συντελεστές των στηλών του πίνακα που αντιστοιχούν στις μη βασικές μεταβλητές, καλούνται συντελεστές μετατροπής και η οικονομική τους ερμηνεία είναι ότι αντιστοιχούν στις ποσότητες από τις βασικές μεταβλητές που πρέπει να αναλωθούν για να αυξηθεί η τιμή της συγκεκριμένης μη βασικής μεταβλητής κατά μία μονάδα.

Μη βασικές είναι οι S_2 και S_3 .

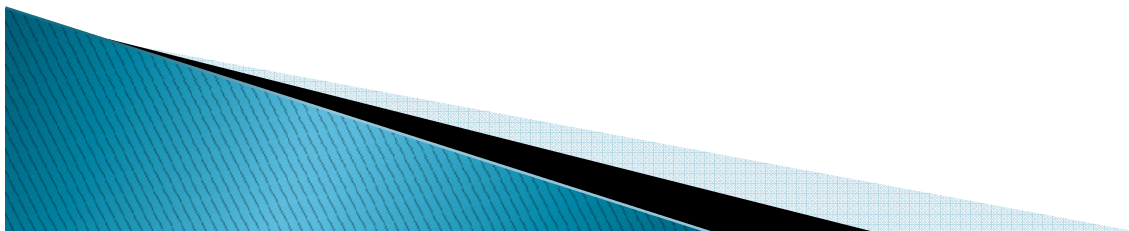


ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ ΜΕΤΑΤΡΟΠΗΣ S_2

- ▶ Η μεταβλητή περιθωρίου S_2 συμβολίζει τις μη χρησιμοποιηθείσες ώρες στο βαφείο.
 - ▶ Η τιμή της στον τελικό πίνακα είναι 0. Δηλαδή, οι 400 ώρες που ήταν διαθέσιμες, έχουν χρησιμοποιηθεί.
 - ▶ Για να αυξηθεί η S_2 κατά μία μονάδα, πρέπει:
 - ❖ Η S_1 να μειωθεί κατά 2
 - ❖ Η X_1 να μειωθεί κατά $\frac{3}{4}$
 - ❖ Η X_2 να αυξηθεί κατά 1
- 

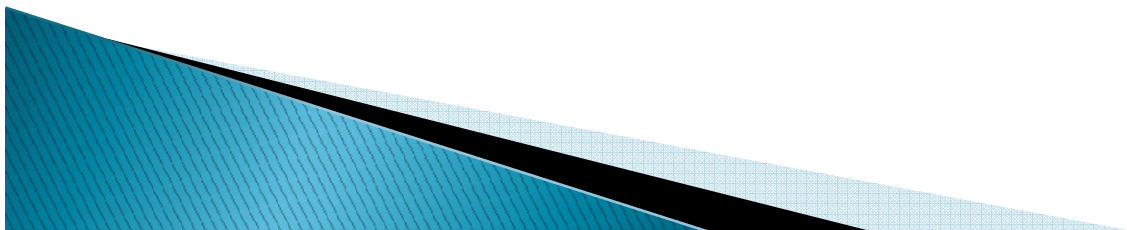
Συντελεστές μετατροπής S_2

- ▶ Αύξηση όμως της S_2 κατά μία μονάδα σημαίνει μία ώρα εργασίας λιγότερη για το βαφείο.
- ▶ Αλλαγές στη βέλτιστη λύση, αν οι ώρες εργασίας μειωθούν κατά μία ώρα:



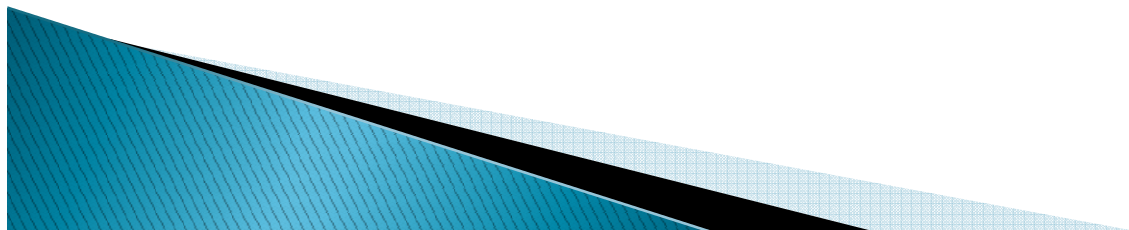
Οι ώρες εργασίας μειώνονται κατά μία ώρα

	Από		Σε
Ώρες εργασίας στο βαφείο	400	(S_2)	399
Μη χρησιμοποιηθείσες ώρες εργασίας στο ξυλουργείο	80	$(S_1 - 2)$	78
Παραγωγή τραπεζιών	90	$(X_1 - 3/4)$	$89 \frac{1}{4}$
Παραγωγή καρεκλών	20	$(X_2 + 1)$	21
Κέρδος	14600	-5	14595



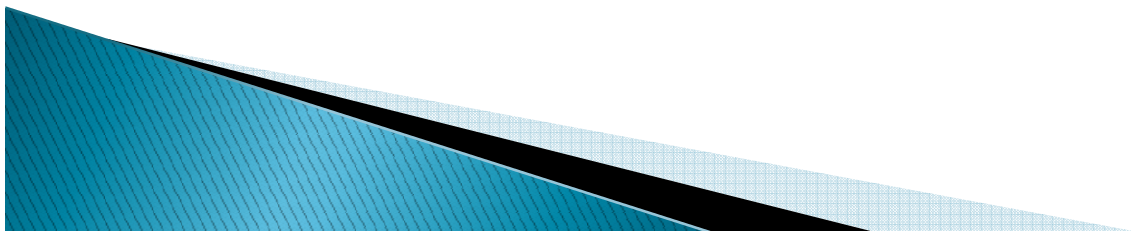
Οι ώρες εργασίας αυξάνονται κατά μία ώρα

	Από		Σε
Ώρες εργασίας στο βαφείο	400	(S_2)	401
Μη χρησιμοποιηθείσες ώρες εργασίας στο ξυλουργείο	80	$(S_1 + 2)$	82
Παραγωγή τραπεζιών	90	$(X_1 + 3/4)$	$90 \frac{3}{4}$
Παραγωγή καρεκλών	20	$(X_2 - 1)$	19
Κέρδος	14600	+5	14605



Σκιώδεις τιμές περιορισμών

- ▶ Αύξηση ωρών εργασίας στο βαφείο κατά μία ώρα, επιφέρει αύξηση κερδών κατά 5 ευρώ.
- ▶ Αύξηση ωρών εργασίας στο σπιλωτήριο κατά μία ώρα, επιφέρει αύξηση κερδών κατά 30 ευρώ.
- ▶ Αύξηση ωρών εργασίας στο ξυλουργείο κατά μία ώρα, δεν επιφέρει αλλαγές στο κέρδος.
- ▶ Αυτές είναι οι τιμές τις σειράς $C_j - Z_j$.



Σκιώδεις τιμές περιορισμών

- ▶ Καλούνται σκιώδεις τιμές των περιορισμών.
- ▶ Εκφράζουν την οριακή αξία (marginal value) κάθε επιπλέον μονάδας στις ποσότητες των περιορισμών.
- ▶ Ο όρος «σκιώδεις» εξηγεί το γεγονός ότι οι τιμές αυτές δεν είναι προφανείς.
- ▶ Προκύπτουν μέσω της μεθοδολογίας του γραμμικού προγραμματισμού κι όχι μέσω μίας οικονομικής ανάλυσης!!!

