



# ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

ΠΕΡΣΕΦΟΝΗ ΠΟΛΥΧΡΟΝΙΔΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΤΕ



# Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



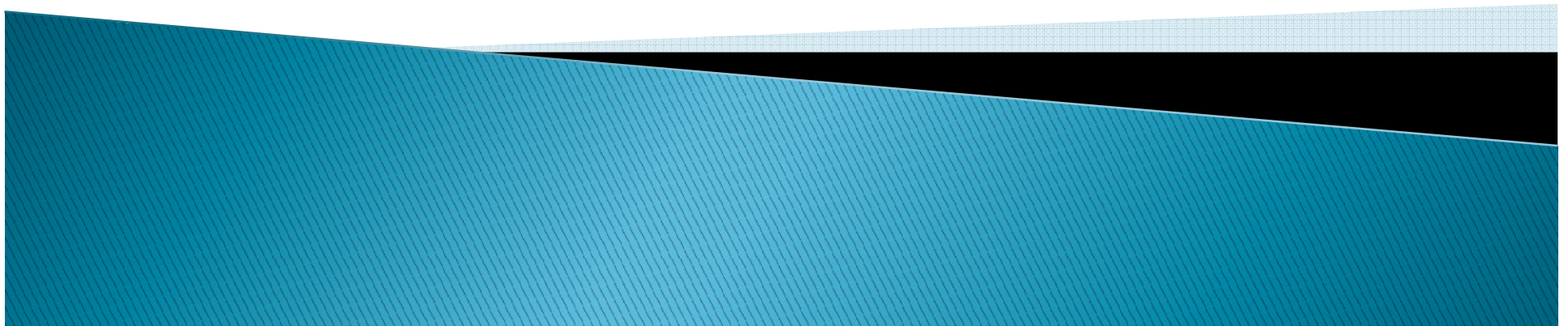
# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Κεντρικής Μακεδονίας» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



# Προβλήματα Ελαχιστοποίησης

Δρ. Περσεφόνη Πολυχρονίδου



# Π.χ. Ελαχιστοποίηση κόστους διατροφής

Η επιχείρηση ζωοτροφών ΒΙΟΤΡΟΦΕΣ εξασφάλισε μία ειδική παραγγελία από έναν πελάτη της για την παρασκευή 1000 κιλών ζωοτροφής, η οποία θα πρέπει να περιέχει τουλάχιστον 30% πρωτεΐνες και 40% υδατάνθρακες. Για την παραγωγή της συγκεκριμένης παρτίδας, ο υπεύθυνος παραγωγής της εταιρείας αποφάσισε να αναμείξει μία εισαγόμενη πλούσια σε θρεπτικά υλικά τροφή με ιχθυάλευρο και δημητριακά, ώστε να μειώσει το κόστος, ικανοποιώντας όμως τις ελάχιστες διαιτητικές απαιτήσεις του πελάτη σε περιεκτικότητα πρωτεϊνών και υδατανθράκων.

## ...Ελαχιστοποίηση κόστους διατροφής

Η εισαγόμενη τροφή έχει περιεκτικότητα 40% σε πρωτεΐνες και 40% σε υδατάνθρακες και κοστίζει 1 ευρώ το κιλό. Το ιχθυάλευρο έχει περιεκτικότητα 25% σε πρωτεΐνες και 20% σε υδατάνθρακες και κοστίζει 0,7 ευρώ το κιλό, ενώ τα δημητριακά με περιεκτικότητα 20% σε πρωτεΐνες και 40% σε υδατάνθρακες και κοστίζει 0,8 ευρώ το κιλό.

Να προσδιοριστούν οι ποσότητες που θα πρέπει να αναμείξει ο υπεύθυνος παραγωγής, ώστε να επιτύχει το μικρότερο δυνατό κόστος, ικανοποιώντας ταυτόχρονα τις ελάχιστες απαιτήσεις του πελάτη σε θρεπτικά υλικά.

# Δεδομένα προβλήματος

	Περ. σε πρωτεΐνες (%)	Περ. σε υδατάνθρακες (%)	Κόστος (ευρώ/κιλό)
Εισαγόμενη τροφή	40	40	1
Ιχθυάλευρο	25	20	0,7
Δημητριακά	20	40	0,8

$X_1$  = Ποσότητα εισαγόμενης τροφής

$X_2$  = Ποσότητα ιχθυάλευρου

$X_3$  = Ποσότητα δημητριακών

Στόχος είναι η ελαχιστοποίηση του κόστους παραγωγής των 1000 κιλών ζωοτροφής.

# Μαθηματικό Μοντέλο

Αντικειμενική Συνάρτηση - Ελαχιστοποίηση  
κόστους:

$$1 X_1 + 0,7 X_2 + 0,8 X_3$$

Υπό τους περιορισμούς:

Ποσότητα:  $X_1 + X_2 + X_3 = 1000$

Πρωτεΐνες:  $0,4 X_1 + 0,25 X_2 + 0,2 X_3 \geq 300$

Υδατάνθρακες:  $0,4 X_1 + 0,2 X_2 + 0,4 X_3 \geq 400$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

Οι περιορισμοί του προβλήματος με την προσθήκη των μεταβλητών πλεονασμού γράφονται ως εξής:



# Κανονική μορφή Γ.Π.

Ελαχιστοποίηση της:  $X_1 + 0,7X_2 + 0,8X_3$

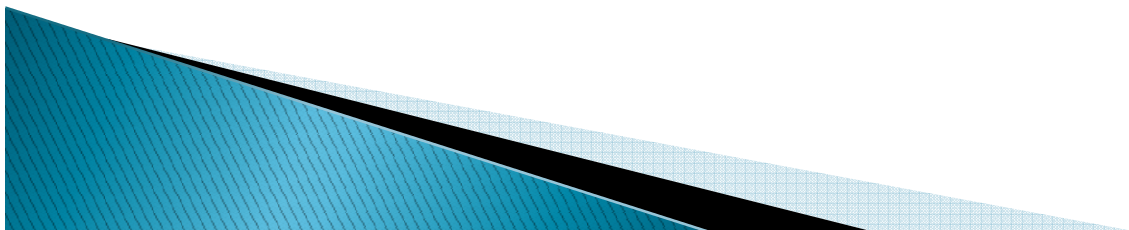
υπό τους περιορισμούς:

Ποσότητα:  $X_1 + X_2 + X_3 = 1000$

Πρωτεΐνες:  $0,4X_1 + 0,25X_2 + 0,2X_3 - S_2 = 300$

Υδατάνθρακες:  $0,4X_1 + 0,2X_2 + 0,4X_3 - S_3 = 400$

$$X_1, X_2, X_3, S_2, S_3 \geq 0$$



## Αρχική εφικτή λύση

Αν θεωρήσουμε αρχική λύση την:

$X_1 = X_2 = X_3 = 0$ , τότε ο πρώτος περιορισμός είναι αδύνατος, εφόσον προκύπτει  $0=1000$ , ομοίως και οι επόμενοι δύο περιορισμοί.

Για να ακολουθήσουμε τη μεθοδολογία των προβλημάτων βελτιστοποίησης, πρέπει να δημιουργήσουμε ανισότητες με  $\geq$ .

Για κάθε περιορισμό, ισότητα ή ανισότητα εισάγουμε μία τεχνητή μεταβλητή, για την οποία δεν υπάρχει καμία φυσική ερμηνεία. Επομένως, θα πρέπει στο τέλος να πάρει την τιμή 0. Αυτό θα συμβεί μόνο αν το αντίστοιχο κόστος της μεταβλητής είναι πάρα πολύ μεγάλο, έστω  $M$  αυτός ο αριθμός.

# Πλήρης κανονική μορφή

Ελαχιστοποίηση της:  $X_1 + 0,7X_2 + 0,8X_3 + 0S_2 + 0S_3 + MA_1 + MA_2 + MA_3$

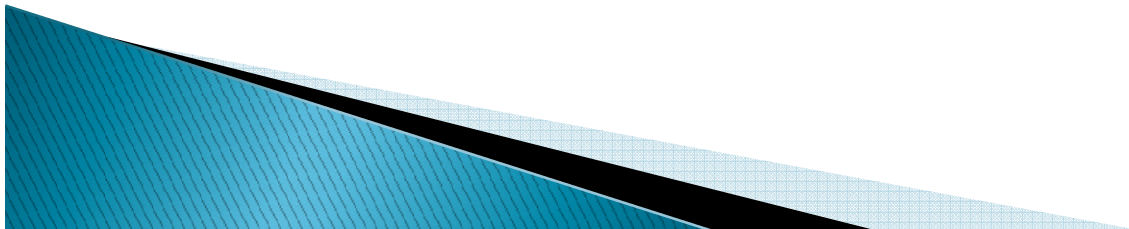
υπό τους περιορισμούς:

Ποσότητα:  $X_1 + X_2 + X_3 + A_1 = 1000$

Πρωτεΐνες:  $0,4X_1 + 0,25X_2 + 0,2X_3 - S_2 + A_2 = 300$

Υδατάνθρακες:  $0,4X_1 + 0,2X_2 + 0,4X_3 - S_3 + A_3 = 400$

$$X_1, X_2, X_3, S_2, S_3, A_1, A_2, A_3 \geq 0$$



# Αρχικός πίνακας Simplex

ΣΥΝΤ. ΚΟΣΤΟΥΣ $C_j \rightarrow$		1	0,7	0,8	0	0	M	M	M	Ποσ.	
↓ Βασ. Μετ.		$X_1$	$X_2$	$X_3$	$S_2$	$S_3$	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$B_i$	
M	$A_1$	1	1	1	0	0	1	0	0	1000	$1000/1 = 1000$
M	$A_2$	0,4	0,25	0,2	-1	0	0	1	0	300	$300/0,4 = 750$
M	$A_3$	0,4	0,2	0,4	0	-1	0	0	1	400	$400/0,4 = 1000$
	$Z_j$	1,8M	1,45M	1,6M	-M	-M	M	M	M		1700
	$C_j - Z_j$	1-1,8M	0,7-1,45M	0,8-1,6M	M	M	0	0	0		

## ... ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΟΥ ΠΙΝΑΚΑ

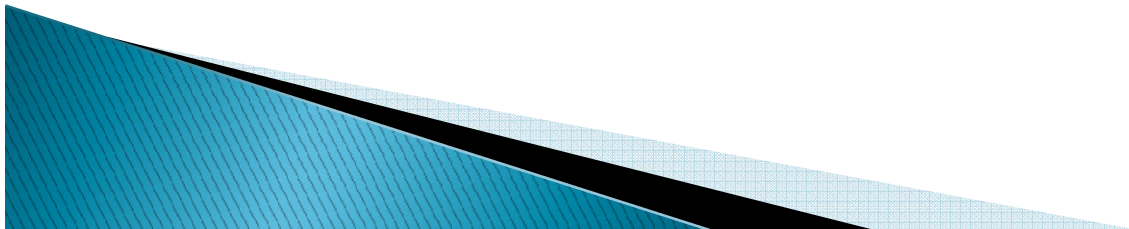
- ▶ Αν θεωρήσουμε ότι η τιμή της  $X_1$  αυξηθεί κατά μία μονάδα, τότε οι τιμές των  $A_1, A_2, A_3$  θα μειωθούν κατά 1, 0.4 και 0.4, αντίστοιχα.
- ▶ Η συνολική μείωση κόστους θα είναι  $M + 0,4M + 0,4M = 1,8M$ , όπως φαίνεται στη γραμμή Z.
- ▶ Επειδή το  $M$  είναι ένας μεγάλος αριθμός, τότε η ποσότητα  $1 - 1,8M$  είναι αρνητική.
- ▶ Μικρότερη ποσότητα της τελευταίας γραμμής είναι αυτή που αντιστοιχεί στην τιμή  $X_1$  (οδηγός στήλη).
- ▶ Οδηγός γραμμή, η  $A_2$ , μικρότερο πηλίκο της  $B$  με τις τιμές της  $X_1$ .

# Δεύτερος πίνακας Simplex

ΣΥΝΤ. ΚΟΣΤΟΥΣ $C_j \rightarrow$		1	0,7	0,8	0	0	M	M	M	Ποσ.	
↓	Βασ. Μετ.	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$S_2$	$S_3$	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$B_i$	
M	$A_1$	0	0,375	0,5	2,5	0	1		0	250	$250/2,5=100$
1	$X_1$	1	0,625	0,5	-2,5	0	0		0	750	
M	$A_3$	0	-0,05	0,2	1	-1	0		1	100	$100/1=100$
	$Z_j$	1	0,625 + 0,325 M	0,5+ 0,7M	-2,5 +3,5M	- M	M		M		
	$C_j-Z_j$	0	0,7- 1,45M	0,3- 0,7M	2,5 - 3,5M	M	0		0		

# Επαναληπτική διαδικασία

- ▶ Επειδή η τεχνητή μεταβλητή  $A_2$  δε συμπεριλαμβάνεται στη βάση, μετά την αντικατάστασή της από τη  $X_1$ , και δεν υπάρχει περίπτωση να επανέλθει λόγω του μεγάλου κόστους  $M$ , δεν είναι ανάγκη να συνεχίσουμε τους υπολογισμούς των τιμών για την αντίστοιχη στήλη.
- ▶ Η  $S_2$  στη τελευταία γραμμή έχει το μικρότερο αρνητικό συντελεστή (οδηγός στήλη) και θα αντικαταστήσει την  $A_3$  (οδηγός γραμμή).



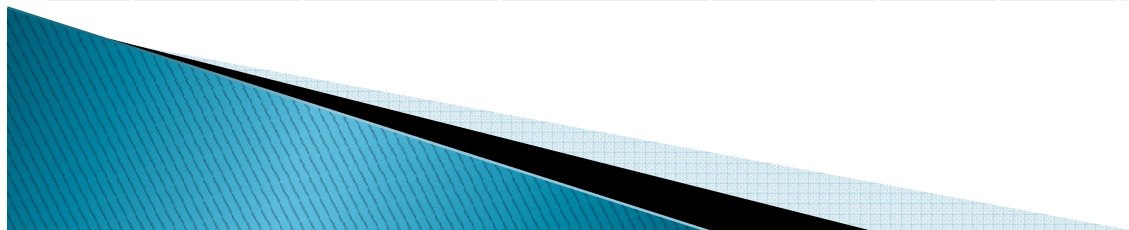
# Τρίτος πίνακας Simplex

ΣΥΝΤ. ΚΟΣΤΟΥΣ $C_j \rightarrow$		1	0,7	0,8	0	0	M	M	M	Ποσ	
↓	Βασ. Μετ.	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$S_2$	$S_3$	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$B_i$	
M	$A_1$	0	0,5	0	0	2,5	1			0	$0/2,5=0$
1	$X_1$	1	0,5	1	0	-2,5	0			100 0	
0	$S_2$	0	-0,05	0,2	1	-1	0			100	
	$Z_j$	10	0,5- 0,5M	1	0	-2,5 +2,5 M	M				
	$C_j-Z_j$	0	0,2+0, 5M	-0,2	0	2,5 - 2,5M	0				



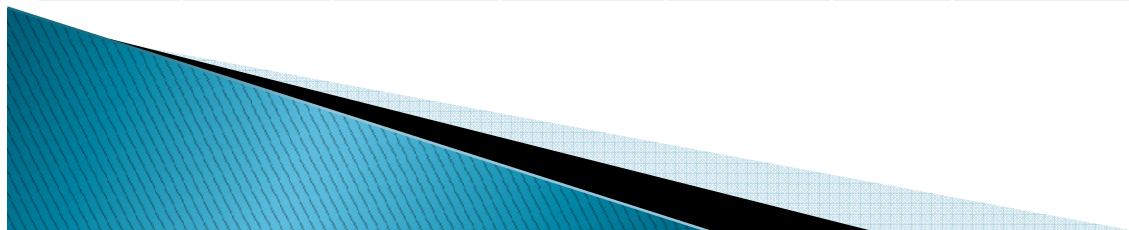
# Τέταρτος πίνακας Simplex

ΣΥΝΤ. ΚΟΣΤΟΥΣ $C_j \rightarrow$		1	0,7	0,8	0	0	M	M	M	Ποσ.	
↓	Βασ. Μετ.	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$S_2$	$S_3$	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$B_i$	
0	$S_3$	0	0,2	0	0	1				0	$0/0,2=0$
1	$X_1$	1	1	1	0	0				1000	$1000/1=1000$
0	$S_2$	0	0,15	0,2	1	0				100	$100/0,15=6667$
	$Z_j$	1	1	1	0	0					
	$C_j - Z_j$	0	-0,3	-0,2	0	0					



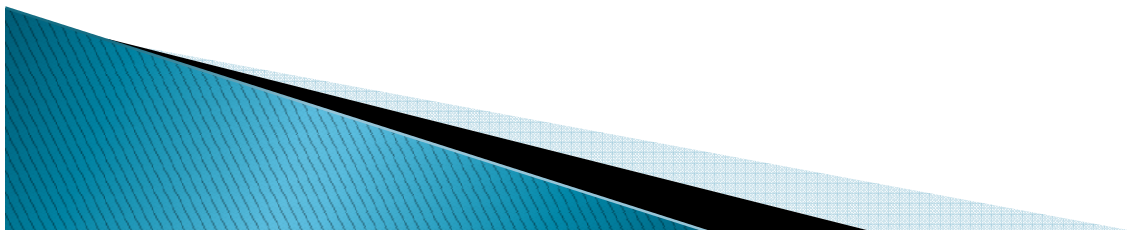
# Πέμπτος πίνακας Simplex

Συντ. Κόστους $C_j \rightarrow$		1	0,7	0,8	0	0	M	M	M	Ποσ.	
↓	Βασ. Μετ.	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$S_2$	$S_3$	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$B_i$	
0,7	$X_2$	0	1	0	0	5				0	
1	$X_1$	1	0	1	0	-5				1000	$1000/1 = 1000$
0	$S_2$	0	0	0,2	1	-0,75				100	$100/0,2 = 500$
	$Z_j$	1	0,7	1	0	-1,5					
	$C_j - Z_j$	0	0	-0,2	0	1,5					



# Τελικός πίνακας Simplex

ΣΥΝΤ. Κόστους $C_j \rightarrow$		1	0,7	0,8	0	0	M	M	M	Ποσ.
↓	Βασ. Μετ.	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$S_2$	$S_3$	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$B_i$
0,7	$X_2$	0	1	0	0	5				0
1	$X_1$	1	0	0	-5	-1,25				500
0	$X_3$	0	0	1	5	-3,75				500
	$Z_j$	1	0,7	0,8	-1	-0,75				
	$C_j - Z_j$	0	0	0	1	0,75				



# Βέλτιστη λύση

Ποσότητες/Μεταβλητές:

Ποσότητα εισαγόμενης τροφής  $X_1$  :

Ποσότητα ιχθυάλευρου  $X_2$  :

Ποσότητα δημητριακών  $X_3$  :

500 κιλά

0 κιλά

500 κιλά

Αντικειμενική συνάρτηση:

Συνολικό κόστος:

$500 \cdot 1 + 500 \cdot 0,8 = 900$  ευρώ

Περιορισμοί:

Συνολική ποσότητα:

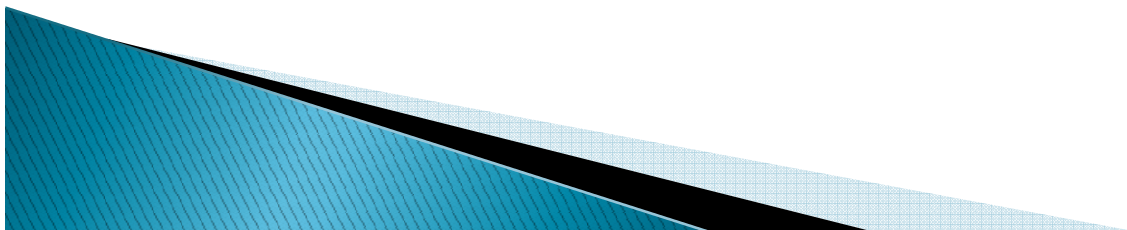
Περιεκτικότητα σε πρωτεΐνες  $S_2$

Περιεκτικότητα σε υδατάνθρακες  $S_3$

1 000 κιλά

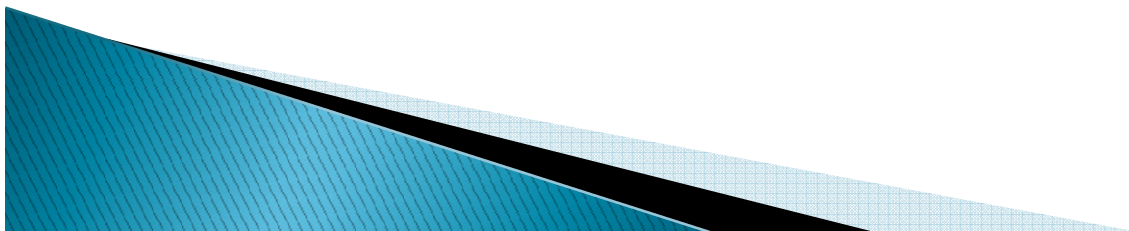
300 κιλά

400 κιλά



# Σκιώδεις τιμές

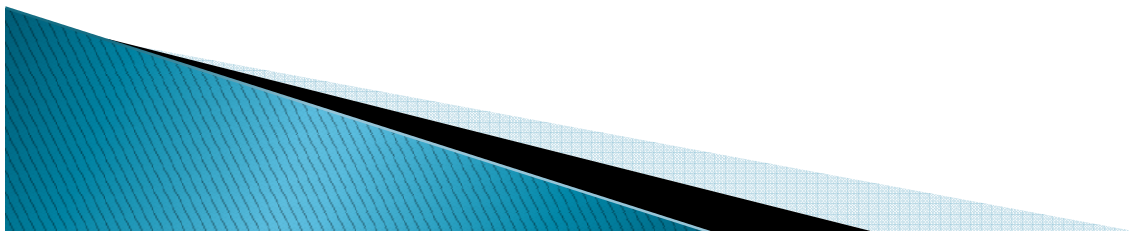
- ▶ Η σκιώδης τιμή του περιορισμού των υδατανθράκων είναι 0,75.
- ▶ Η μείωση είναι δυνατή, όχι όμως και η αύξηση. Οι συντελεστές της στήλης  $S_3$ .
- ▶ Για αύξηση κατά μία μονάδας της  $S_2$ , θα πρέπει να αυξήσουμε την τιμή της  $X_1$  κατά 5 κιλά και ταυτόχρονα να μειώσουμε την  $X_3$  κατά 1 κιλό. Η  $X_2$  είναι ήδη μηδέν και δεν μπορεί να μειωθεί περαιτέρω.



# Προβλήματα με Μη εφικτές λύσεις

Είναι δυνατό σε προβλήματα Γ.Π. να μην υπάρχουν εφικτές λύσεις:

- ▶ Να μην ικανοποιούνται όλοι οι περιορισμοί. Εξετάζουμε τη δυνατότητα χαλάρωσης κάποιων περιορισμών.
- ▶ Λανθασμένη διατύπωση περιορισμών ή δεδομένων.



# Π.χ. προβλήματος Γ.Π. με μη εφικτή λύση

Θεωρούμε στο π.χ. της επιχείρησης ΒΙΟΤΡΟΦΕΣ ότι οι απαιτήσεις του πελάτη είναι 30% και 50% σε πρωτεΐνες και υδατάνθρακες, αντίστοιχα. Από τον πίνακα, προκύπτει ότι με οποιονδήποτε τρόπο και αναλογία αν αναμειχθούν τα 3 συστατικά, είναι αδύνατο να περιέχει το μείγμα 50% υδατάνθρακες, αφού όλα τα συστατικά έχουν το πολύ 40% περιεκτικότητα.

	Περ. σε πρωτεΐνες (%)	Περ. σε υδατάνθρακες (%)	Κόστος (ευρώ/κιλό)
Εισαγόμενη τροφή	40	40	1
Ιχθυάλευρο	25	20	0,7
Δημητριακά	20	40	0,8