ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ
ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ

Μαθηματικά 2

Σταύρος Παπαϊωάννου

Ιούνιος 2015

Περιεχόμενα

7 Διαφορικές Εξισώσεις

3.1 Γενικά

Θα προσπαθήσουμε να κατανοήσουμε την εξίσωση:

$$\mathbf{y'' = 24x^2} \qquad (3.1.1)$$

Η εξίσωση αυτή δηλώνει πως η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης y (προφανώς εννοεί της y(x)) είναι ίση με την πολυωνυμική συνάρτηση $24x^2$. Επειδή συνήθως σε μία εξίσωση αναζητούμε την τιμή μιας άγνωστης ποσότητας[1], έτσι και στην εξίσωση (3.1.1) αναζητούμε την άγνωστη συνάρτηση y(x), η οποία επαληθεύει την εξίσωση αυτή.
Προφανώς, η συνάρτηση y(x) υπολογίζεται με δύο διαδοχικές ολοκληρώσεις:

$$y'(x) = \int 24x^2 dx = 8x^3 + c$$

και

$$y(x) = \int \left(8x^3 + c\right) dx = 2x^4 + cx + c_2$$

Παρατηρούμε λοιπόν πως η εξίσωση Γ.1.1, δεν έχει σαν λύση ακριβώς μία συνάρτηση, αλλά μία συνάρτηση που περιέχει δύο αυθαίρετες σταθερές, λόγω των δύο διαδοχικών αόριστων ολοκληρώσεων. Επομένως έχουμε πως:

Μία διαφορική εξίσωση (δ.ε.) είναι μία εξίσωση η οποία δίνει πληροφορίες για τις παραγώγους μιας άγνωστης συνάρτησης και ζητά τον υπολογισμό αυτής της άγνωστης συνάρτησης. Η γενική μορφή μιας δ.ε. είναι η:

$$\mathbf{F(x,y,y',y'',\ldots,y^{(\nu)}) = 0} \qquad (3.1.2)$$

όπου

- **x** είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή,
- **y=y(x)** είναι η άγνωστη συνάρτηση,
- $\mathbf{y', y'',\ldots,y^{(\nu)}}$ είναι η πρώτη, η δεύτερη, … και η ν-οστή παράγωγος της άγνωστης συνάρτησης y(x).
- **ν** είναι η τάξη της δ.ε. (η τάξη της μεγαλύτερης παραγώγου που εμφανίζεται στην δ.ε.).

Μία συνάρτηση y(x) είναι λύση της δ.ε. (3.1.2), όταν την επαληθεύει. Μία συνάρτηση y(x) επαληθεύει την (3.1.2), εάν η εν λόγω σχέση αληθεύει όταν θέσουμε σ’ αυτήν, στη θέση του y τη συνάρτηση y(x) και στη θέση των παραγώγων (y’, y’’, …, $y^{(\nu)}$) τις αντίστοιχες παραγώγους της y(x).

[1] *Για παράδειγμα η εξίσωση 3x-5=2x αναζητά την τιμή της άγνωστης ποσότητας x (η οποία είναι ίση με το 5)*

Για παράδειγμα η συνάρτηση $y(x) = e^{x^2}$ είναι λύση της δ.ε. πρώτης τάξης:

$$y' - 2xy = 0 \qquad (3.1.3)$$

Πράγματι, εάν αντικαταστήσουμε στην Γ.1.3 τις σχέσεις:

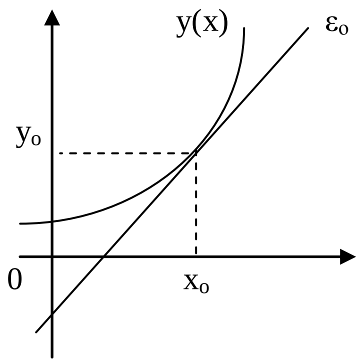
$$\left.\begin{aligned} y(x) &= e^{x^2} \\ y'(x) &= 2x\,e^{x^2} \end{aligned}\right| \qquad \Rightarrow \; 2xe^{x^2} - 2xe^{x^2} = 0 \quad (\text{αληθινή})$$

Γεωμετρική ερμηνεία της (3.1.2):

Η δοσμένη δ.ε. μπορεί να γραφεί υπό τη μορφή:

$$y' = 2xy$$

και δηλώνει πως η λύση της είναι μία συνάρτηση y(x), της οποίας η πρώτη παράγωγος (δηλαδή η κλίση) σε κάθε σημείο του επιπέδου (x,y) ισούται με το διπλάσιο γινόμενο των συντεταγμένων του σημείου. Άρα η κλίση της y(x) στο σημείο (x_o,y_o), δηλαδή η κλίση της ευθείας ε_o που εφάπτεται στην y(x) στο εν λόγω σημείο, θα είναι ίση με το $2x_oy_o$.



3.1.1 Δ.Ε. άμεσα ολοκληρώσιμες

Οι περισσότερες δ.ε. δεν λύνονται! Ιδιαίτερα οι δ.ε. 2ης τάξης και άνω[1]. Μια από τις μορφές που λύνονται εύκολα είναι αυτή των άμεσα ολοκληρώσιμων δ.ε.:

$$\mathbf{y^{(\nu)} = f(x)} \qquad (\Gamma.1.3)$$

Συγκρίνοντας την (Γ.1.1) με την (Γ.1.3) παρατηρούμε πως από στην αναλυτική έκφραση της δεύτερης λείπουν, η άγνωστη συνάρτηση (y(x)) και όλες οι ενδιάμεσοι παράγωγοί της ($y', y'', \ldots, y^{(\nu-1)}$). Έτσι όμως μπορούμε να υπολογίσουμε όλες τις παραγώγους μικρότερης τάξης και την ίδια την άγνωστη y(x), με διαδοχικές ολοκληρώσεις της (Γ.1.3).

Παράδειγμα: Να λυθεί η δ.ε.:

$$y'' = 6x - 2 \qquad (\Gamma.1.4)$$

---

[1] *Όπως αναφέρθηκε στην προηγούμενη παράγραφο, τάξη μιας δ.ε. είναι η τάξη της μεγαλύτερης παραγώγου που εμφανίζεται στη δ.ε.*

Λύση:

$$y'(x) = \int y''(x)dx = \int (6x-2)dx = 3x^2 - 2x + c$$

$$y(x) = \int y'(x)dx = \int (3x^2 - 2x + c)dx = x^3 - x^2 + cx + c_2$$

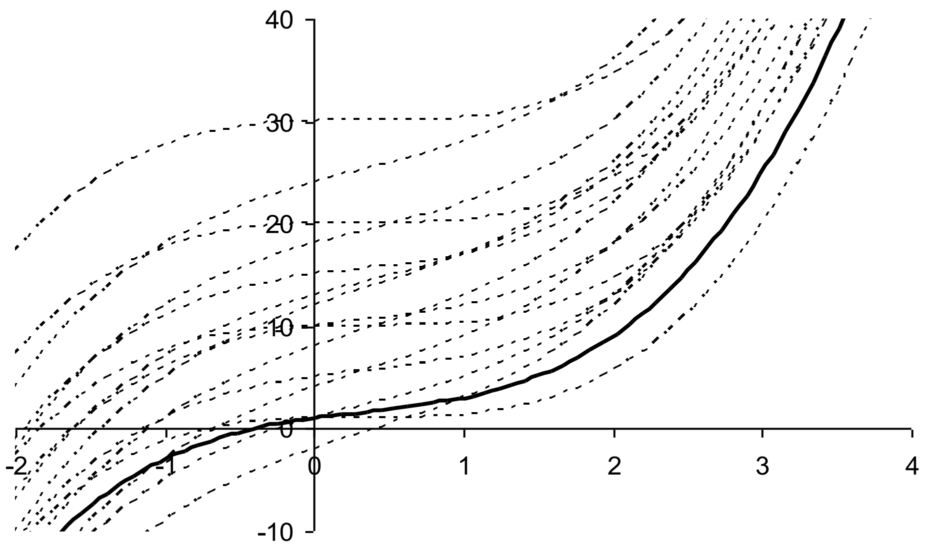
Παρατηρούμε πως η ολοκλήρωση μιας παραγώγου δεν επιτρέπει τον απόλυτο καθορισμό της αρχικής συνάρτησης, την οποία προσδιορίζει κατά προσέγγιση μιας αθροιστικής σταθερής. Εδώ μάλιστα, επειδή υπάρχουν δύο διαδοχικές ολοκληρώσεις, εισάγονται δύο αυθαίρετες σταθερές. Φθάνουμε λοιπόν στο συμπέρασμα:

Η λύση μιας δ.ε. ν-ης τάξης είναι μία συνάρτηση που εξαρτάται από ν-αυθαίρετες σταθερές, και ονομάζεται ν-παραμετρική οικογένεια καμπύλων. Η λύση αυτή καλείται <u>γενική λύση ή γενικό ολοκλήρωμα</u> της δ.ε..

Στο προηγούμενο παράδειγμα η γενική λύση είναι μια διπαραμετρική οικογένεια καμπύλων, επειδή είναι λύση μιας δ.ε. 2ης τάξης. Περιλαμβάνει άπειρες συναρτήσεις, των οποίων τα γραφήματα καταλαμβάνουν, συχνά, ολόκληρο το επίπεδο Oxy (όπως φαίνεται και στο επόμενο γράφημα). Συχνά πρέπει να καθορίσουμε την τιμή των αυθαίρετων σταθερών έτσι ώστε να ξεχωρίσουμε μία συνάρτηση από τις άπειρες της γενικής λύσης. Είναι φανερό πως για να προσδιορισθούν οι τιμές των δύο σταθερών c και c_2 θα πρέπει να δοθούν τα κατάλληλα δεδομένα, έτσι ώστε να καταλήξουμε σε ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους. Τα δεδομένα αυτά θα μπορούσαν να είναι οι συντεταγμένες δύο σημείων του επιπέδου (x_1,y_1) και (x_2,y_2), τα οποία γράφουμε: $y(x_1)=y_1$ και $y(x_2)=y_2$. Με τον τρόπο αυτό επιλέγουμε από το σύνολο των λύσεων τη συνάρτηση εκείνη που διέρχεται από τα δύο αυτά σημεία, τα οποία αποτελούν τις **αρχικές συνθήκες** του προβλήματος. Η συνάρτηση που προκύπτει μετά τον υπολογισμό της τιμής των αυθαίρετων μεταβλητών ονομάζεται **<u>μερική λύση της δ.ε. που αντιστοιχεί στις δοσμένες αρχικές συνθήκες</u>**.

Ο πιο πάνω καθορισμός των αρχικών συνθηκών είναι σπανιότατος. Συνήθως, σαν αρχικές συνθήκες προσδιορίζουμε την τιμή της συνάρτησης και της πρώτης της παραγώγου στο ίδιο σημείο:

Αρχικές συνθήκες: $y(x_o) = y_o$ και $y'(x_o) = y_o'$



Σχ. 3.1.1. Η διπαραμετρική οικογένεια καμπύλων και η μερική λύση
που αντιστοιχεί στις αρχικές συνθήκες: y(0)=1 και y'(0)=2.

Ξαναγυρίζοντας στο παράδειγμα, θα υπολογίσουμε τη μερική λύση της δ.ε. που αντιστοιχεί στις αρχικές συνθήκες: y(0)=1 και y'(0)=2

$y'(x) = 3x^2 - 2x + c$	$y'(0)=2$	$c = 2$
$y(x) = x^3 - x^2 + cx + c_2$	$y(0)=1$	$c_2 = 1$

Άρα η μερική λύση:

$$y(x) = x^3 - x^2 + 2x + 1$$
$$y'(x) = 3x^2 - 2x + 2$$

Γενικά συμπεράσματα:

1. Μια διαφορική εξίσωση περιέχει την ανεξάρτητη μεταβλητή, την άγνωστη συνάρτηση και τις παραγώγους αυτής. Η τάξη της δ.ε. είναι ίση με την τάξη της μεγαλύτερης παραγώγου που εμφανίζεται στη δ.ε.. Η γενική μορφή μιας δ.ε. ν-ης τάξης είναι η:
$$\mathbf{F(x,y,y',y'',\ldots,y^{(\nu)}) = 0}$$

2. Λύνουμε την δ.ε. υπολογίζοντας την άγνωστη συνάρτηση που αυτή περιέχει. Μία συνάρτηση y(x) είναι λύση της δ.ε. όταν την επαληθεύει.

3. Η λύση της πιο πάνω δ.ε. περιέχει ν-αυθαίρετες σταθερές και καλείται γενική λύση:
$$\mathbf{y = y(x,c_1,c_2,\ldots,c_\nu)}$$

4. Μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή των αυθαίρετων σταθερών, εάν δοθούν οι αρχικές συνθήκες, η τιμή δηλαδή της συνάρτησηςy(x) και όλων των παραγώγων της μέχρι την τάξη ν-1 (κατά μία μικρότερη από την τάξη της δ.ε.):
$$\mathbf{y(x_o) = y_o\ ,\ y'(x_o) = y_o'\ ,\ y''(x_o) = y_o''\ ,\ \ldots\ ,\ y^{(\nu-1)}(x_o) = y_o^{(\nu-1)}}$$
οπότε μιλούμε για τον υπολογισμό της μερικής λύσης που αντιστοιχεί στις δοσμένες συνθήκες:

$$y = y(x)$$

5. Έστω η δ.ε. **$F(x,y,y',y'',\dots,y^{(\nu)}) = 0$.** Μία συνάρτηση η οποία περιέχει ν αυθαίρετες και γραμμικά ανεξάρτητες σταθερές[(1)], ενώ ταυτόχρονα επαληθεύει την δ.ε., θα είναι η γενική λύση της δ.ε. αυτής.

6. Σταθερές που εμφανίζονται υπό τη μορφή c_1+c_2 ή $3c_1+5c_2$ ή $7c_1c_2$, δεν αποτελούν εκφράσεις που περιέχουν 2 αυθαίρετες σταθερές, αλλά μία. Δηλαδή: $3c_1+5c_2 = c$.

Τα παραπάνω δίνουν απάντηση και σε μία απορία που θα μπορούσε να δημιουργηθεί κατά την ανάγνωση της γεωμετρικής ερμηνείας της δ.ε. 1[ης] τάξης:

$$y' = f(x,y)$$

και του ιδιαίτερου παραδείγματος που αντιμετωπίσαμε:

$$y' = 2xy$$

Είπαμε λοιπόν πως η δ.ε. $y'=2xy$ μπορεί να διαβαστεί:

- **«Ζητούμε μία συνάρτηση της οποίας η κλίση (η παράγωγος) στο τυχαίο σημείο του επιπέδου Oxy ισούται με το διπλάσιο του γινομένου των συντεταγμένων του εν λόγω σημείου».**

Στο σημείο αυτό θα μπορούσε να δημιουργηθεί η απορία:

- «Τι είδους συνάρτηση (καμπύλη) είναι αυτή που διέρχεται από όλα τα σημεία του επιπέδου;» **[μια και το β' μέλος της δ.ε. λειτουργεί για οποιοδήποτε σημείο του $\mathbf{R}^2$]**

Η απάντηση τώρα είναι απλή.

- **«Η γενική λύση της $y'=2xy$ δεν είναι μία μόνη συνάρτηση αλλά μια μονοπαραμετρική οικογένεια καμπύλων η οποία μπορεί να καλύπτει όλο το επίπεδο…»**

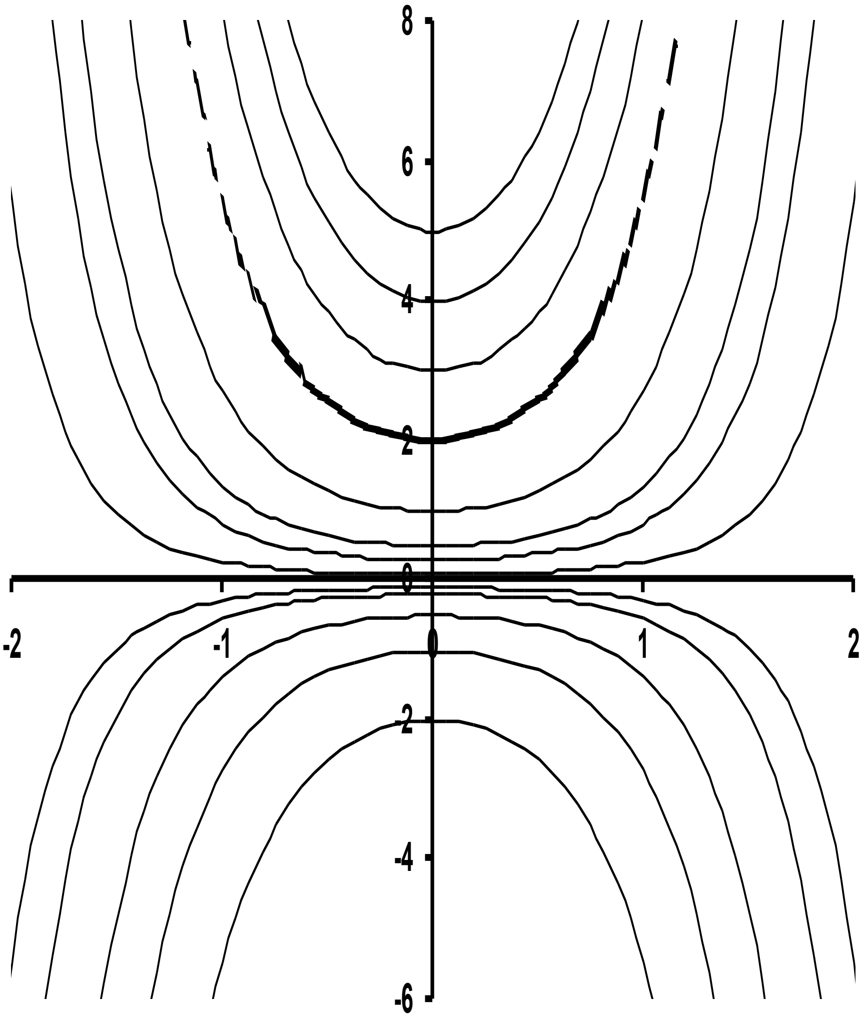
Όπως θα δούμε στην επόμενη παράγραφο η δ.ε. $y' = 2xy$ λύνεται εύκολα και η γενική της λύση δίνεται από τη σχέση:

$$y = ce^{x^2}$$

[(1)] *Οι αυθαίρετες σταθερές c_1, c_2 και c_3 λέγονται γραμμικά εξαρτημένες όταν μπορεί η μία εξ αυτών (πχ η c_3) να γραφεί υπό τη μορφή: $c_3= \kappa c_1 +\lambda c_2$, όπου κ,λ σταθερές (που μπορούν μάλιστα να είναι και μιγαδικές). Τότε λέμε πως η c_3 διατυπώνεται σαν γραμμικός συνδυασμός των c_1 και c_2. Επομένως, κάθε έκφραση της μορφής:*

$$c_1+5c_2\ ,\ c_1+\eta\mu c_2\ ,\ 3c_1c_2\ \text{κλπ}$$

αντικαθίστανται από μία σταθερά C. Αντίθετα, οι σταθερές c_1 και c_2. στη σχέση c_1x+c_2 παίζουν διαφορετικό ρόλο και προφανώς δεν αντικαθίστανται από μία.



Σχ. 3.1.2.: Η οικογένεια $y(x,c) = ce^{x^2}$ και η μερική λύση $y(x) = 2e^{x^2}$

Εδώ εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε πως η μονοπαραμετρική αυτή συνάρτηση επαληθεύει την δοσμένη δ.ε. και άρα αποτελεί τη γενική της λύση. Στο πιο πάνω γράφημα εμφανίζεται η οικογένεια αυτή καθώς και η μερική λύση που αντιστοιχεί στην αρχική συνθήκη:

$$y(0) = 2$$

για την οποία υπολογίζεται:

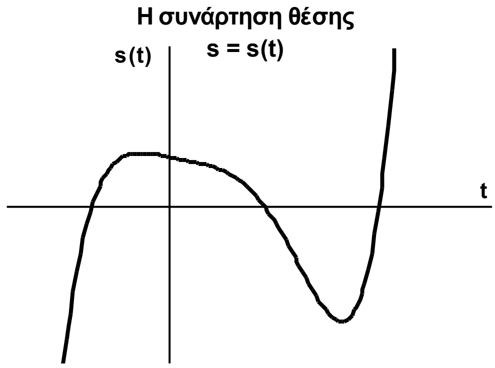
$$2 = ce^0 \quad \text{απ' όπου προκύπτει } c = 2\text{, οπότε}$$

$$y = 2e^{x^2}$$

3.1.2 Οι διαφορικές εξισώσεις στην Κινηματική και τη Δυναμική

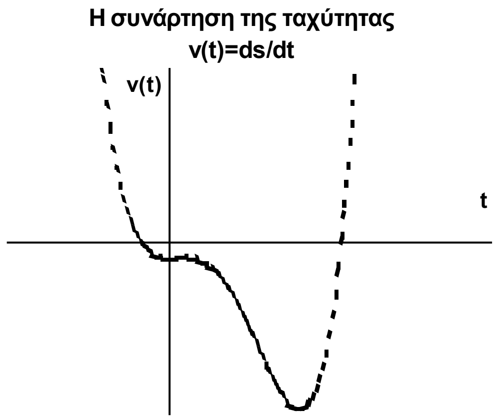
Η πιο απλή μορφή κίνησης είναι η ευθύγραμμη. Έστω λοιπόν μία ευθεία στην οποία έχει ορισθεί ένα σύστημα αναφοράς. Με τον όρο αυτό εννοούμε: **(i)** μία αρχή (ένα κέντρο Ο) πάνω στην ευθεία, **(ii)** τον ορισμό της θετικής φοράς και **(iii)** τον ορισμό του μήκους που αντιστοιχεί στη μονάδα μήκους. Η θέση ενός υλικού σημείου που κινείται πάνω στην ευθεία αυτή, καθορίζεται από την απόστασή του (s) από το κέντρο Ο. Λέμε πως γνωρίζουμε τη λύση του προβλήματος της κίνησης του σημείου, όταν γνωρίζουμε την εξίσωση που την περιγράφει, συναρτήσει του χρόνου t. Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται **<u>συνάρτηση θέσης</u>**:

$$\mathbf{s = s(t)}$$



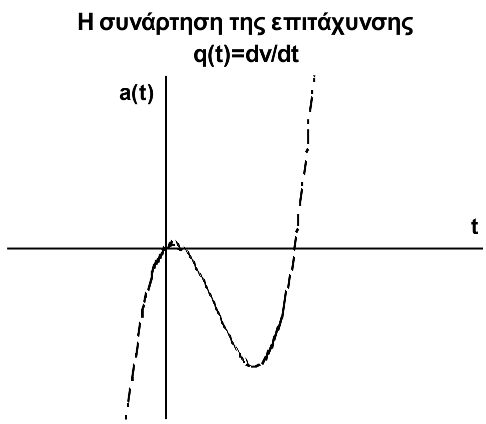
Είναι γνωστό πως η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης θέσης του κινητού είναι μία νέα συνάρτηση του t, που δίνει την ταχύτητα μετακίνησης του υλικού σημείου:

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt} = \dot{s}(t)$$



Όμοια, η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης θέσης (η πρώτη παράγωγος της ταχύτητας) δίνει την επιτάχυνση της κίνησης του υλικού σημείου:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2s(t)}{dt^2} = \dot{v}(t) = \ddot{s}(t)$$



Από τους νόμους του Νεύτωνα γνωρίζουμε πως όταν εφαρμόζεται μία δύναμη F σε ένα υλικό σημείο, του προσδίδει επιτάχυνση η οποία είναι ανάλογη της δύναμης, με συντελεστή αναλογίας τη μάζα m του σημείου:

$$\mathbf{F = m*a}$$

Η περίφημη αυτή σχέση ισχύει στην περίπτωση που η δύναμη είναι συγγραμμική με τον άξονα s, πάνω στον οποίο κινείται το υλικό σημείο. Αλλιώς ισχύει στη διανυσματική της μορφή:

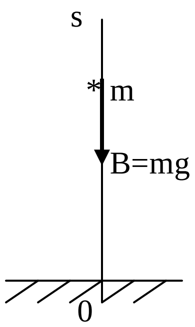
$$\vec{F}(t) = m\vec{a}(t)$$

Στην περίπτωση της ευθύγραμμης κίνησης (που θα μας απασχολήσει κατά κύριο λόγο) καταστρώνουμε τη δ.ε. που περιγράφει την κίνηση ενός υλικού σημείου, κινούμενου κάτω από την επίδραση ενός συνόλου δυνάμεων, δουλεύοντας ως εξής:

- Ξεκινούμε από τη σχέση που περιγράφει τον νόμο του Newton: F=ma
- Αντικαθιστούμε την επιτάχυνση α με τη δεύτερη παράγωγο της άγνωστης συνάρτησης θέσης s(t) [δηλαδή $a(t)=\ddot{s}(t)$]
- Στη θέση του F τοποθετούμε το άθροισμα όλων των δυνάμεων που επιδρούν πάνω στο υλικό σημείο (δηλαδή τη συνισταμένη τους).
- Με τον τρόπο αυτό έχουμε μία δ.ε. $2^{ης}$ τάξης, με άγνωστη συνάρτηση τη συνάρτηση θέσης του σημείου.

Παραδείγματα:

1^o) Ελεύθερη πτώση. Να υπολογισθεί η συνάρτηση θέσης ενός υλικού σημείου που κινείται πάνω σε μία κατακόρυφη ευθεία κάτω από την επίδραση του βέρους του (δεν υπάρχει αντίσταση του αέρα), όταν η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι σταθερή: $g = 9{,}81\ m/sec^2$.



Λύση: Έστω η ευθεία s, πάνω στην οποία εκτελείται η κίνηση του υλικού σημείου, με το σημείο 0 στο σημείο επαφής της με την επιφάνεια της Γης. Θεωρούμε επίσης πως το μέτρημα του χρόνου ξεκινά από τη στιγμή που ξεκινά η καταγραφή της θέσης του σημείου, κατά την οποία το σημείο βρίσκεται στη θέση s_0, έχοντας ταχύτητα v_0. Δίνονται δηλαδή οι αρχικές συνθήκες:

$$s(0)=s_0 \quad \text{και} \quad v(0)=v_0$$

Η κατάστρωση της δ.ε. της κίνησης ξεκινά όπως είδαμε από τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα:

$$\mathbf{F = ma} \quad \Rightarrow \quad -mg = m\ddot{s}$$

όπου το αρνητικό πρόσημο οφείλεται στο ότι το βάρος έχει αρνητική φορά σε σχέση με τη θετική φορά της ευθείας s. Η δ.ε. που προέκυψε είναι $2^{ης}$ τάξης, άμεσα ολοκληρώσιμη:

$$\ddot{s} = -g \quad \Rightarrow \quad v(t) = \dot{s}(t) = \int -g\,dt = -gt + c_1 \quad \Rightarrow$$

$$s(t) = \int (-gt + c_1)dt = -\frac{1}{2}gt^2 + c_1 t + c_2$$

Αντικαθιστώντας στη συνέχεια στις σχέσεις της ταχύτητας και της θέσης [s(t) και v(t)] τις αρχικές συνθήκες που δίνονται, υπολογίζουμε τις τιμές των δύο αυθαίρετων σταθερών:

$$v(0) = v_0 = c_1 \quad \text{και} \quad s(0) = s_0 = c_2$$

οπότε η μερική λύση που αντιστοιχεί στις δοσμένες αρχικές συνθήκες δίνεται:

$$s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + s_0 \qquad \text{και} \qquad v(t) = -gt + v_0$$

2^{o}) Ευθύγραμμη κίνηση υπό την επίδραση δύναμης που είναι συνάρτηση του χρόνου και αλλάζει έκφραση

Ένα υλικό σημείο μάζας m=2 Kg, κινείται πάνω σε μία προσανατολισμένη ευθεία υπό την επίδραση της δύναμης:

$$F(t) = \begin{cases} 4\sqrt{t} & \varepsilon\alpha\nu \quad 0 < t < 9 \\ -\dfrac{2}{3t} & \varepsilon\alpha\nu \quad 9 < t \end{cases}$$

όπου η δύναμη μετριέται σε Newton (N) και ο χρόνος σε sec. Παρατηρούμε πως ο τύπος που δίνει τη δύναμη, σαν συνάρτηση του χρόνου, αλλάζει έκφραση μετά την πάροδο 9 δευτερολέπτων από τη στιγμή που ξεκίνησε να μετράει ο χρόνος. Μάλιστα στα προβλήματα αυτά ελάχιστα μας απασχολεί η τιμή F(9), πράγμα που δηλώνεται και στην έκφραση της δύναμης, όπου φαινομενικά η F δεν ορίζεται για t=9. Στην πράξη, σε όποιο σκέλος κι αν βάλουμε το ίσον, οδηγούμαστε στο ίδιο αποτέλεσμα.

Εάν λοιπόν η συνάρτηση θέσης της μάζας m είναι η s(t), **ζητούνται**: **α)** η κατάστρωση της διαφορικής εξίσωσης του προβλήματος. **β)** η γενική λύση της δ.ε. αυτής. **γ)** Η μερική λύση που αντιστοιχεί σε μηδενικές αρχικές συνθήκες(1). **δ)** Η θέση και η ταχύτητα της μάζας m την χρονική στιγμή t=20.

Λύση:

α) Η δ.ε. του προβλήματος, είναι η σχέση που πηγάζει από τον 3^{o} νόμο του Νεύτωνα (F=ma), ενώ έχει τα παρακάτω δύο σκέλη:

$$ma(t) = m\ddot{s}(t) = F(t) = \begin{cases} 4\sqrt{t} & \varepsilon\alpha\nu \quad 0 < t < 9 \\ -\dfrac{2}{3t} & \varepsilon\alpha\nu \quad 9 < t \end{cases}$$

β) Γενική λύση της δ.ε.:

(i) Όταν 0<t<9.

$$m\ddot{s} = 4\sqrt{t} \quad \Rightarrow \quad 2\ddot{s} = 4\sqrt{t} \quad \Rightarrow \quad \ddot{s} = 2\sqrt{t}$$

---

(1) *Σε ένα πρόβλημα κλασσικής κινηματικής η δ.ε. είναι $2^{ης}$ τάξης, που στηρίζεται στη σχέση F=ma. Άρα οι αρχικές συνθήκες θα αφορούν στις τιμές της συνάρτησης θέσης και της συνάρτησης ταχύτητας, $s(t_0) = s_0$ και $\dot{s}(t_0) = v_0$. Η έκφραση **«μηδενικές αρχικές συνθήκες»** σημαίνει πως κατά την χρονική στιγμή t=0, η αρχική θέση και η αρχική ταχύτητα ήταν ίσες με το μηδέν: $s(0) = 0$ και $\dot{s}(0) = 0$. Δηλαδή την χρονική στιγμή t=0 η μάζα m βρισκόταν στο σημείο 0 του άξονα κίνησής της και ήταν ακίνητη.*

$$\dot{s}(t,c_1) = \int 2t^{1/2}dt = \frac{4}{3}t^{3/2} + c_1$$

$$s(t,c_1,c_2) = \int\left[\frac{4}{3}t^{3/2} + c_1\right]dt = \frac{8}{15}t^{5/2} + c_1 t + c_2$$

(ii) Όταν t>9.

$$m\ddot{s} = -\frac{2}{3t} \quad \Rightarrow \quad 2\ddot{s} = -\frac{2}{3t} \quad \Rightarrow \quad \ddot{s} = -\frac{1}{3t}$$

$$\dot{s}(t,c_1) = \int -\frac{1}{3t}dt = -\frac{1}{3}\ln t + c_1$$

$$s(t,c_1,c_2) = \int\left[-\frac{1}{3}\ln t + c_1\right]dt = -\frac{1}{3}\left(t\ln t - t\right) + c_1 t + c_2 = -\frac{1}{3}t\ln t + (c_1 + \frac{1}{3})t + c_2$$

γ) Μερική λύση:

(i) Όταν 0<t<9.

$$s(0) = 0 \Rightarrow s(0,c_1,c_2) = \frac{8}{15}0^{5/2} + c_1 0 + c_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = 0$$

$$\dot{s}(0,c_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{4}{3}0^{3/2} + c_1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0$$

Επομένως οι εξισώσεις κίνησης για 0<t<9 είναι οι:

$$s(t) = \frac{8}{15}t^{5/2} \quad \text{και} \quad \dot{s}(t) = \frac{4}{3}t^{3/2}$$

(ii) Όταν t>9. Στην περίπτωση αυτή πρέπει να υπολογίσουμε την μερική λύση που περιγράφει την κίνηση της μάζας m, από το 9^o δευτερόλεπτο και πέρα, που λαμβάνει χώρα υπό την επίδραση της νέας δύναμης, η οποία όμως αναλαμβάνει την μάζα από την θέση και με την ταχύτητα στις οποίες την έχει φέρει η επίδραση του πρώτου σκέλους της δύναμης κατά τα πρώτα 9 δευτερόλεπτα. Άρα, οι αρχικές συνθήκες για το δεύτερο σκέλος προκύπτουν από τις εξισώσεις κίνησης του πρώτου σκέλους:

$$s(9) = \frac{8}{15}t^{5/2}\Big|_{t=9} = \frac{648}{5} \quad \text{και} \quad \dot{s}(9) = \frac{4}{3}t^{3/2}\Big|_{t=9} = 36$$

τις οποίες αντικαθιστούμε στη γενική λύση του $2^{ου}$ σκέλους της δ.ε. και έχουμε:

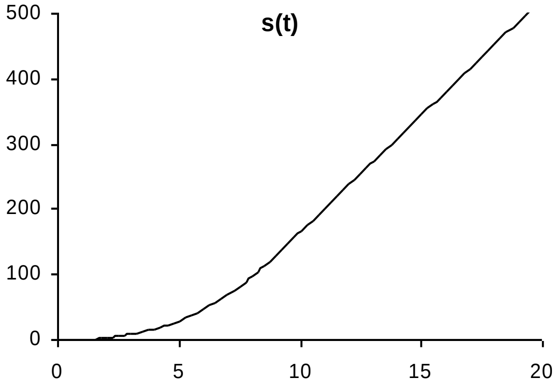
$$\dot{s}(9) = 36 = -\frac{1}{3}\ln t + c_1\Big|_{t=9} = -\frac{1}{3}\ln 9 + c_1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 36.7324$$

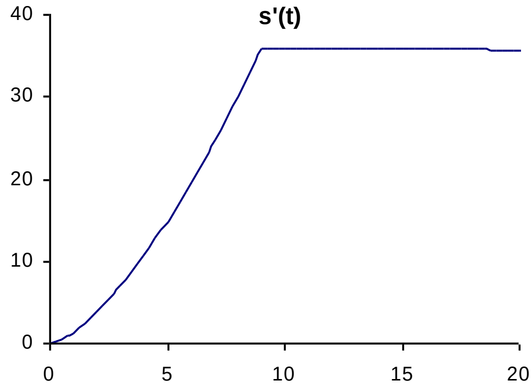
$$s(9) = \frac{648}{5} = -\frac{1}{3}t\ln t + (c_1 + \frac{1}{3})t + c_2\Big|_{t=9} = -3\ln 9 + (36.7324 + \frac{1}{3})9 + c_2 \Rightarrow c_2 = -197.4$$

Επομένως οι εξισώσεις κίνησης για 0<t<9 είναι οι:

$$s(t) = -\frac{1}{3}t\ln t + 37.07t - 197.4 \qquad \text{και} \qquad \dot{s}(t) = -\frac{1}{3}\ln t + 36.73$$

με γραφικές παραστάσεις:





όπου παρατηρούμε πως μετά το 9^{ο} δευτερόλεπτο η (ελαφρώς αρνητική) επιτάχυνση ανακόπτει την άνοδο της ταχύτητας, η οποία αρχίζει να μειώνεται ελαφρά. Αντίθετα, η συνάρτηση θέσης εξακολουθεί να είναι αύξουσα και θυμίζει ευθεία, μια και το διάστημα μεταβάλλεται με (πρακτικά) σταθερή ταχύτητα.

Αξίζει επίσης να παρατηρήσουμε πως η δύο αυτές καμπύλες είναι συνεχείς στο t=9, κάτι που είναι το λογικό επακόλουθο του ότι πήραμε σαν αρχικές συνθήκες του 2^{ου} σκέλους τις τιμές της θέσης και της ταχύτητας που προκύπτουν από το 1^{ο} σκέλος. Μάλιστα η συνάρτηση θέσης είναι και παραγωγίσιμη, μια και οι δύο πλευρικές παράγωγοι της s(t)[1] στο t=9 είναι ίσες.

δ) Η θέση και η ταχύτητα της μάζας m την χρονική στιγμή t=20, δίνεται από τις εξισώσεις κίνησης του 2^{ου} σκέλους:

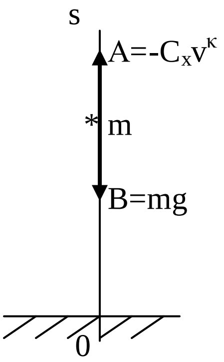
$$s(20) = -\frac{1}{3}t\ln t + 37.07t - 197.4\Big|_{t=20} = 523.94$$

και

$$\dot{s}(20) = -\frac{1}{3}\ln t + 36.73\Big|_{t=20} = 35.734$$

[1] *Θυμίζουμε πως η παράγωγος της συνάρτησης θέσης s(t) είναι η συνάρτηση της ταχύτητας. Επειδή λοιπόν η ταχύτητα (παράγωγος) είναι συνεχής, η συνάρτηση θέσης (αρχική) θα είναι παραγωγίσιμη….*

3°) Πτώση με αντίσταση του αέρα. Να υπολογισθεί η συνάρτηση θέσης ενός υλικού σημείου που κινείται πάνω σε μία κατακόρυφη ευθεία κάτω από την επίδραση του βέρους του και της αντίστασης του αέρα.



Λύση: Παρόμοιο πρόβλημα μ' αυτό του προηγούμενου παραδείγματος. Η αντίσταση του αέρα, που εμφανίζεται εδώ, είναι ένα φαινόμενο ιδιαίτερα περίπλοκο Εξαρτάται

- από την ταχύτητα κίνησης που έχει το κινούμενο σημείο ως προς τον αέρα (θεωρούμε τον αέρα ακίνητο ή προσθέτουμε τις δύο ταχύτητες) και
- από έναν συντελεστή αεροδυναμικής αντίστασης που εξαρτάται από το μέγεθος της μετωπικής επιφάνειάς του, την υφή της επιφάνειάς του και το σχήμα του.

Ο μαθηματικός τύπος με τον οποίο ορίζεται έχει τρία διαφορετικά σκέλη, ανάλογα με το μέγεθος της ταχύτητάς του:

$$A(v) = \begin{cases} -C_x v & \text{για ταχύτητες που δεν ξεπερνούν τα 5 m/sec} \\ -C_x v^2 & \text{για ταχύτητες υποηχητικές (δεν ξεπερνούν τα 330 m/sec)} \\ -C_x v^3 & \text{για υπερηχητικές ταχύτητες} \end{cases}$$

όπου το αρνητικό πρόσημο οφείλεται στη ότι η αντίσταση έχει πάντα αντίθετη φορά από την ταχύτητα v. Η δ.ε. της κίνησης είναι όμοια μ' αυτήν του προηγούμενου παραδείγματος, όπου όμως η εξωτερική δύναμη F περιλαμβάνει, εκτός από το βάρος του σώματος, και την αντίσταση της ατμόσφαιρας.

$$\mathbf{F = ma} \quad \Rightarrow \quad -mg - C_x\dot{s} = m\ddot{s} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{m\ddot{s} + C_x\dot{s} + mg = 0}$$

Πρόκειται για μία δ.ε. $2^{ης}$ τάξης την οποία θα επιλύσουμε στην παράγραφο των γραμμικών δ.ε..

3.1.3 Προβλήματα που οδηγούν σε δ.ε.

1. Προβλήματα Γεωμετρίας.

Έστω η (συνεχής και παραγωγίσιμη) συνάρτηση y = f(x). Όπως έχουμε κατ' επανάληψη τονίσει, η κλίση της f(x), στο τυχαίο σημείο x, δίνεται από την παράγωγο της συνάρτησης f [την f'(x)]. Όταν λοιπόν σε κάποιο πρόβλημα Γεωμετρίας, εμφανίζεται σε κάποια έκφραση η κλίση μιας καμπύλης, ουσιαστικά εμφανίζεται η παράγωγος της συνάρτησης αυτής…

Παράδειγμα: Να βρεθεί η εξίσωση της καμπύλης της οποίας η κλίση σε κάθε σημείο της ισούται με το άθροισμα των δύο συντεταγμένων του σημείου αυτού.

Λύση: Έστω πως η εξίσωση της εν λόγω καμπύλης είναι η: $y=y(x)$. Τότε θα ισχύει πως

$$y' = x + y$$

Η σχέση αυτή ορίζει μια δ.ε., της οποίας η λύση είναι η συνάρτηση που θα έχει την απαιτούμενη ιδιότητα. Προφανώς δεν πρόκειται για μία μόνο καμπύλη αλλά για μια μονοπαραμετρική οικογένεια καμπύλων (όπως είδαμε η γενική λύση μιας δ.ε. 1ης τάξης περιέχει και μία αυθαίρετη σταθερά). Η πιο πάνω δ.ε. είναι γραμμική και θα λυθεί σε επόμενη παράγραφο…

2. Προβλήματα ρυθμού μεταβολής.

Ο ρυθμός μεταβολής της τιμής μιας ποσότητας δίνεται από την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης που εκφράζει την ποσότητα αυτή. Επομένως κάθε σχέση που αφορά σε ρυθμό μεταβολής, ορίζει ουσιαστικά μια δ.ε. 1ης τάξης.

Παράδειγμα: Ένα ποτήρι νερό, του οποίου η θερμοκρασία μεταβάλλεται με το χρόνο ($\theta(t)$), μεταφέρεται σε ανοικτό χώρο με θερμοκρασία θ_x. Ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας του νερού είναι ανάλογος της διαφοράς ανάμεσα στη θερμοκρασία του νερού και του χώρου, με ένα συντελεστή αναλογίας λ. Να καταστρωθεί η δ.ε. που περιγράφει την μεταβολή της θερμοκρασίας του νερού $\theta(t)$.

Λύση: Μεταφέροντας σε εξίσωση την προηγούμενη έκφραση έχουμε:

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = -\lambda(\theta(t) - \theta_x)$$

όπου το αρνητικό πρόσημο δίνει θετικό ρυθμό μεταβολής της θερμοκρασίας του νερού όταν η θερμοκρασία του νερού είναι μικρότερη από τη θερμοκρασία του χώρου [όταν δηλαδή $\theta(t)-\theta_x<0$], και αρνητικό ρυθμό μεταβολής στην αντίθετη περίπτωση [$\theta(t)-\theta_x>0$].

3.1.3 Δ.Ε. μιας παραμετρικής οικογένειας καμπύλων

Πρόκειται ουσιαστικά για το αντίθετο πρόβλημα. Μας δίνεται η γενική λύση μιας δ.ε. και πρέπει να υπολογίσουμε την δ.ε.. Η διαδικασία λύσης είναι απλή. Εάν μας δοθεί μια οικογένεια ν-παραμετρική (η οποία να περιέχει ν αυθαίρετες σταθερές) τότε:

- Παραγωγίζουμε την παραμετρική εξίσωση ν φορές και
- απαλείφουμε τις ν αυθαίρετες σταθερές ανάμεσα στης ν+1 σχέσεις που έχουμε (τη σχέση που ορίζει την οικογένεια και τις ν παραγώγους της).

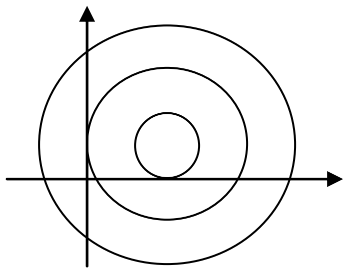
Με τον τρόπο αυτό καταλήγουμε σε μια δ.ε. ν-ης τάξης, που επαληθεύεται από την δοσμένη ν-παραμετρική οικογένεια (οι οποία επομένως θα αποτελεί και τη γενική της λύση –αφού την επαληθεύει).

Στη σπάνια περίπτωση όπου, μετά τη ν-οστή παραγώγιση, έχουν χαθεί όλες οι αυθαίρετες σταθερές, η δ.ε. της οικογένειας είναι η σχέση της ν-οστής παραγώγου (και αποφεύγουμε τις απαλοιφές).

Παραδείγματα.

1^o) Να υπολογισθεί η δ.ε. της οικογένειας των ομόκεντρων κύκλων με κέντρο το σημείο (2,1).

Ως γνωστόν η εξίσωση ενός κύκλου με κέντρο το σημείο (κ,λ) και ακτίνα R είναι η:



$$(x-\kappa)^2 + (y-\lambda)^2 = R^2$$

Επομένως η δοσμένη οικογένεια έχει την εξίσωση:

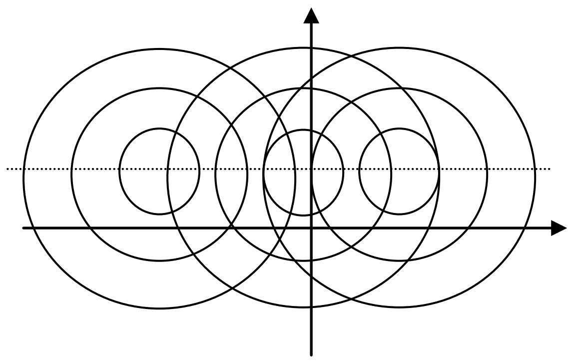
$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = R^2$$

και έχει μια μόνο αυθαίρετη σταθερή, την R. Παραγωγίζοντας μία φορά τη σχέση αυτή, χάνεται η αυθαίρετη σταθερά και έχουμε έτοιμη τη δ.ε. της δοσμένης οικογένειας:

$$2(x-2) + 2(y-1)y' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{x-2}{y-1}$$

2^o) Να υπολογισθεί η δ.ε. της οικογένειας των ομόκεντρων κύκλων, των οποίων το κέντρο βρίσκεται πάνω στην ευθεία y=2.

Τα κέντρα των κύκλων (ανήκουν στην ευθεία y=2) θα έχουν συντεταγμένες (c,2) και η εξίσωση των κύκλων αυτών είναι η:



$$(x-c)^2 + (y-2)^2 = R^2$$

που περιέχει 2 αυθαίρετες σταθερές. Παραγωγίζουμε λοιπόν δύο φορές…

$$2(x-c) + 2(y-2)y' = 0$$

$$\boxed{2 + 2y'^2 + 2(y-2)y'' = 0}$$

και χωρίς απαλοιφή φθάνουμε στη δ.ε. της δι-παραμετρικής οικογένειας των κύκλων.

3) Να βρεθεί η δ.ε. της οικογένειας των εκθετικών συναρτήσεων $y = ce^{x^2}$ (του σχήματος Γ.1.2):

Παραγωγίζουμε μία φορά την πιο πάνω οικογένεια έχουμε

$$y' = 2cxe^{x^2}$$

οπότε απαλείφοντας το c ανάμεσα στις 2 αυτές εξισώσεις, έχουμε:

$$c = ye^{-x^2}$$

και

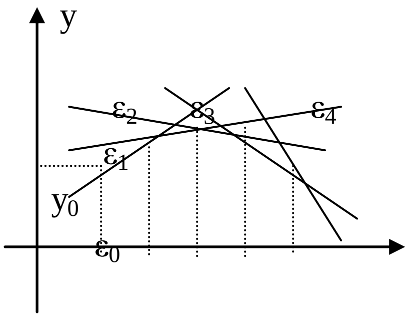
$$\boxed{y' = 2xy}$$

3.1.3 Πεδίο εφαπτόμενων, προσεγγιστικές λύσεις

Ας υποθέσουμε πως μια δ.ε. $1^{ης}$ τάξης μπορεί να λυθεί ως προς την παράγωγο της άγνωστης συνάρτησης και να γραφεί υπό τη μορφή: $y'=f(x,y)$. Έστω τώρα μια δοσμένη αρχική συνθήκη: $y(x_0)=y_0$. Θέτοντας τις τιμές x_0 και y_0 στο β' μέλος της δ.ε. έχουμε τη σχέση:

$$y' = f(x_0,y_0) = k_0$$

η οποία διαβάζεται: «η παράγωγος –η κλίση- της άγνωστης συνάρτησης y(x) όταν αυτή διέρχεται από το σημείο της αρχικής συνθήκης (x_0,y_0), είναι ίση με το k_0». Άρα η ευθεία (ε_0) η οποία διέρχεται από το σημείο αυτό και έχει κλίση k_0, θα εφάπτεται στην καμπύλη της άγνωστης συνάρτησης (η οποία αντιστοιχεί στην αρχική συνθήκη : $y(x_0)=y_0$).



Στη συνέχεια παίρνοντας σαν αρχική συνθήκη ένα διπλανό σημείο του (x_0,y_0), που να βρίσκεται πάνω στην ευθεία ε_0 (έστω το (x_1,y_1)), υπολογίζουμε μιαν άλλη ευθεία (την ε_1) που εφάπτεται στην άγνωστη συνάρτηση στο σημείο (x_1,y_1). Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο διαπιστώνουμε πως δημιουργούμε μια ακολουθία ευθειών που εφάπτονται στην άγνωστη συνάρτηση στα αντίστοιχα σημεία. Διαπιστώνουμε πως το σύνολο των ευθειών αυτών επιτρέπει να διαφανεί μια καμπύλη, η οποία προσεγγίζει τη μερική λύση της δοσμένης δ.ε. που να αντιστοιχεί στις αρχικές συνθήκες: $y(x_0)=y_0$.

Γενικά η δ.ε. $y' = f(x,y)$ δίνει την παράγωγο (την κλίση) της άγνωστης μονοπαραμετρικής οικογένειας καμπύλων και επομένως ορίζει ένα πεδίο εφαπτόμενων ευθειών στο επίπεδο Oxy.

3.1.3 Ασκήσεις

1η) Δίνεται η δ.ε. $y''' - xy'' + y' + xy - 2e^x = 0$. Να δείξετε πως μια μερική λύση της είναι η συνάρτηση $y(x) = e^x$.

2η) Να βρεθεί η γενική και η μερική λύση της δ.ε.:

$$y'' = \sqrt{x}$$

όταν δίνονται οι αρχικές συνθήκες: $y(0)=5$ και $y'(0) = -2$

3η) Δίνεται η δ.ε. 2ης τάξης: $y'' - 3y' + 2y = 0$. Θέτοντας στη θέση του y'' το ρ^2, στη θέση του y' το ρ και στη θέση του y το 1, φθάνουμε στην εξίσωση τριωνύμου: $\rho^2 - 3\rho + 2 = 0$, με ρίζες τις ρ_1 και ρ_2. Υπολογίστε τις ρίζες αυτές και δείξτε πως οι συναρτήσεις

$$y_1(x) = e^{\rho_1 x} \quad \text{και} \quad y_2(x) = e^{\rho_2 x}$$

είναι μερικές λύσεις της δοθείσας δ.ε..

4η) Να βρεθεί η δ.ε. της οικογένειας υπερβολών: $y = \dfrac{c}{x}$

5η) Μια σφαίρα μάζας m, «γλιστρά», χωρίς τριβή, πάνω σε ένα οριζόντιο άξονα, πακτωμένη στο άκρο ενός απόλυτα ελαστικού ελατηρίου, με σημείο ισορροπίας το σημείο O του άξονα. Εάν η δύναμη επαναφοράς προς το κέντρο ισορροπίας είναι ανάλογη της απόστασης x από το O, να βρεθεί η δ.ε. της κίνησης.