ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ
ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ

Μαθηματικά 2

Σταύρος Παπαϊωάννου

Ιούνιος 2015

Περιεχόμενα

3.3.2 Γραμμικές δ.ε. $2^{ης}$ τάξης, με σταθερούς συντελεστές και μη μηδενικό β' μέλος

Πρόκειται για δ.ε. της μορφής:

$$\mathbf{y'' + ay' + by = f(x)} \quad \mathbf{με\ \ a,b} \in \mathbb{R} \tag{3.3.1}$$

Η λύση της δ.ε. Γ.3.1 στηρίζεται στην παρακάτω πρόταση:

Εάν η συνάρτηση $y_\mu(x)$ είναι μία μερική λύση της 3.3.1 και η $y_O(x,c_1,c_2)$ είναι η λύση της αντίστοιχης ομογενούς ($y''+ay'+by=0$), τότε το άθροισμα:

$$y(x,c_1,c_2) = y_o(x,c_1,c_2) + y_\mu(x) \tag{3.3.2}$$

θα είναι η γενική λύση της Γ.3.1.

Απόδειξη: Εάν η συνάρτηση $y(x,c_1,c_2)$ (το άθροισμα δηλαδή της γενικής λύσης της ομογενούς με μία οποιαδήποτε μερική λύση της πλήρους) επαληθεύει την δ.ε. 3.3.1, τότε θα είναι όντως η γενική της λύση, μια και περιέχει δύο αυθαίρετες σταθερές.

$$\left.\begin{aligned} y\ &= y_o + y_\mu \\ y' &= y_o' + y_\mu' \\ y'' &= y_o'' + y_\mu'' \end{aligned}\right| \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} &y_o''+ y_\mu'' + a(y_o' + y_\mu') + b(y_o + y_\mu) = f(x) \quad \Longrightarrow \\ &(y_o''+ay_o'+by_o) + (y_\mu''+ay_\mu'+by_\mu) = f(x) \end{aligned}$$

$$(y_o''+ay_o'+by_o) + (y_\mu''+ay_\mu'+by_\mu) = f(x)$$

Είναι φανερό πως η σχέση αυτή ισχύει διότι η πρώτη παρένθεση είναι ίση με το μηδέν (η y_O είναι λύση της ομογενούς) ενώ η δεύτερη παρένθεση ισούται με το $f(x)$ (η y_μ είναι λύση της πλήρους).

Επομένως για να λύσουμε τη δ.ε. Γ.3.1 θα πρέπει να υπολογίσουμε μία μερική λύση της. Έχουμε δύο μεθόδους για τον υπολογισμό μιας μερικής λύσης [$y_\mu(x)$]:

- Την μέθοδο του προσδιορισμού των συντελεστών.
- Την μέθοδο της μεταβολής των σταθερών.

3.3.2 Η μέθοδος του προσδιορισμού των συντελεστών

Στον υπολογισμό μιας μερικής λύσης [$y_\mu(x)$] της πλήρους δ.ε.

$$\mathbf{y''+ay'+by=f(x)}$$

μας βοηθάει η μορφή της συνάρτησης του β' μέλους (η $f(x)$), μια και η μορφή της μας αποκαλύπτει τη μορφή της συνάρτησης που θα αποτελέσει τη μερική λύση y_μ. Ας μελετήσουμε τρεις χαρακτηριστικές περιπτώσεις για τη μορφή της συνάρτησης $f(x)$, οι οποίες περιγράφονται συνοπτικά στον επόμενο πίνακα (σαν ένα είδος τυπολογίου).

Λύση της $y'' + ay' + by = f(x)$ $[a, b \in R]$

Μορφή της f(x)	Δυνατές περιπτώσεις	Μορφή με την οποία αναζητούμε τη μερική λύση $y_\mu(x)$
$f(x) = p(x)$	$b \neq 0$	$y_\mu(x)=q(x)$
	$a \neq 0$ et $b=0$	$y_\mu(x)=xq(x)$
	$a=0$ et $b=0$	Η δ.ε. λύνεται με δύο διαδοχικές ολοκληρώσεις.
$f(x) = p(x)e^{kx}$ $k \in R$	Το x=k δεν είναι ρίζα της χαρ. εξίσωσης (χ.ε.)	$y_\mu(x)=q(x)e^{kx}$
	Το x=k είναι απλή ρίζα της χαρ. εξίσωσης	$y_\mu(x)=xq(x)e^{kx}$
	Το x=k είναι διπλή ρίζα της χαρ. εξίσωσης	$y_\mu(x)=x^2q(x)e^{kx}$
$f(x)=a\sin(kx)+b\cos(kx)$	Ο **φανταστικός. αριθμός** ki **δεν είναι** ρίζα της χ.ε..	$y_\mu(x)= \lambda\sin(kx)+\mu\cos(kx)$ όπου $\lambda,\mu \in R$
	Ο **φανταστικός αριθμός** ki **είναι** ρίζα της χ.ε..	$y_\mu(x)= x[\lambda\sin(kx)+\mu\cos(kx)]$ όπου $\lambda,\mu \in R$

όπου
- **p(x):** το β' μέλος της (2.1) είναι πολυωνυμική συνάρτηση ν-ου βαθμού.
- **q(x):** η γενική πολυωνυμική συνάρτηση ν-ου βαθμού.

Παραδείγματα.

α) Η συνάρτηση f(x) είναι πολυωνυμική: Έστω λοιπόν πως η f είναι πολυωνυμική συνάρτηση ν-ου βαθμού [έστω δηλαδή πως f(x)=p(x)]. Τότε αναζητούμε τη μερική λύση επίσης σαν πολυωνυμική συνάρτηση ν-ου βαθμού [$y_\mu=q(x)$].

Παράδειγμα 1^o: Να υπολογισθεί μια μερική λύση της δ.ε.

$$y'' + 2y' + 3y = x^2 - 2$$

Η πολυωνυμική συνάρτηση του β' μέλους της δ.ε. είναι 2^{ου} βαθμού. Άρα αναζητούμε μια μερική λύση που να είναι επίσης πολυωνυμική συνάρτηση 2^{ου} βαθμού. Έστω λοιπόν

$$y_\mu(x) = q(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

Υιοθετούμε δηλαδή σαν y_μ τη γενική έκφραση της δευτεροβάθμιας πολυωνυμικής συνάρτησης. Αντικαθιστούμε την y_μ στη δ.ε. οπότε έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} y_\mu = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \\ y_\mu' = 2\alpha x + \beta \\ y_\mu'' = 2\alpha \end{array}\right| \Longrightarrow \quad 2\alpha + 2(2\alpha x + \beta) + 3(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) = x^2 - 2 \quad \Longrightarrow$$

$$3\alpha x^2 + (4\alpha+3\beta)x + (2\alpha+2\beta+3\gamma) = x^2 - 2$$

Στην τελευταία αυτή σχέση εξισώνονται 2 πολυωνυμικές συναρτήσεις. Για να συμβαίνει αυτό πρέπει οι συντελεστές των ομοιόβαθμων όρων να είναι ίσοι. Επομένως καταλήγουμε στο σύστημα 3 εξισώσεων με 3 αγνώστους:

$$\left.\begin{array}{l} 3\alpha = 1 \\ 4\alpha + 3\beta = 0 \\ 2\alpha + 2\beta + 3\gamma = -2 \end{array}\right| \Longrightarrow \begin{array}{l} \alpha = 1/3 \\ \beta = -4/9 \\ \gamma = 20/27 \end{array}$$

οπότε η μερική λύση είναι η:

$$y_\mu = x^2/3 - 4x/9 + 20/27$$

β) Στην ιδιαίτερη περίπτωση όπου ο συντελεστής b της δ.ε. είναι μηδέν θα υπάρχει πρόβλημα αντιστοίχισης του μεγιστοβάθμιου όρου της πολυωνυμικής συνάρτησης του β μέλους.

Παράδειγμα 2^o: Εάν δίνεται η δ.ε.:

$$y'' + 3y' = x^2 + x - 1$$

και υιοθετήσουμε για τη μερική λύση τη μορφή:

$$y_\mu(x) = q(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \qquad [y_\mu' = 2\alpha x + \beta \quad \text{και} \quad y_\mu'' = 2\alpha]$$

τότε, αντικαθιστώντας στην δ.ε. την y_μ, θα έχουμε:

$$2\alpha + 3(2\alpha x + \beta) = x^2 + x - 1$$

οπότε δεν αντιστοιχίζεται ο όρος x^2. Για το λόγο αυτό:

Στην ιδιαίτερη περίπτωση όπου ο συντελεστής b της δ.ε. είναι μηδέν, αναζητούμε τη μερική λύση της δ.ε. υπό τη μορφή:

$$\mathbf{y_\mu(x) = xq(x) = x(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x}$$

Παρατήρηση: Εάν ο συντελεστής a της δ.ε. είναι ίσος με μηδέν υιοθετούμε τη μερική λύση της αρχικής περίπτωσης: $y_\mu(x) = q(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, ενώ εάν μηδενίζονται ταυτόχρονα τα a και b, τότε η δ.ε. είναι άμεσα ολοκληρώσιμη.

$$y'' = f(x)$$

Παράδειγμα: Να υπολογισθεί η γενική και η μερική λύση της δ.ε.

$y'' + y'/5 = x^2 - 5$ για αρχικές συνθήκες: $y(0) = 1$ και $y'(0) = 276$

Λύση: Αρχικά λύνουμε την αντίστοιχη ομογενή:

$$y'' + y'/5 = 0$$

με χαρακτηριστική εξίσωση:

$$p^2 + p/5 = 0$$

με πραγματικές ρίζες:

$$p_1 = 0 \text{ και } p_2 = -1/5$$

οπότε η γενική λύση της ομογενούς

$$\mathbf{y_o(x) = c_1 + c_2 e^{-x/5}}$$

Αναζητούμε τώρα την λύση της δοσμένης δ.ε. υπό τη μορφή:

$$y_\mu(x) = xq(x) = x(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x$$

με παραγώγους

$$y_\mu'(x) = 3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma \text{ και } y_\mu''(x) = 6\alpha x + 2\beta$$

Αντικαθιστούμε στη δ.ε. και υπολογίζουμε:

$$6\alpha x + 2\beta + (3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma)/5 = x^2 - 5$$

ή

$$3\alpha x^2/5 + (6\alpha + 2\beta/5)x + 2\beta + \gamma/5 = x^2 - 5$$

απ' όπου προκύπτει το σύστημα:

$$\begin{aligned} 3\alpha/5 &= 1 \\ 6\alpha + 2\beta/5 &= 0 \\ 2\beta + \gamma/5 &= -5 \end{aligned}$$

με λύση: $\alpha = 5/3$, $\beta = -25$ και $\gamma = 275$

Άρα η αναζητούμενη μερική λύση και η γενική λύση της δοσμένης δ.ε.:

$$y_\mu(x) = \frac{5}{3}x^3 - 25x^2 + 275x$$

και

$$\boxed{\mathbf{y(x,c_1,c_2) = y_O(x,c_1,c_2) + y_\mu(x) = c_1 + c_2 e^{-x/5} + \frac{5}{3}x^3 - 25x^2 + 275x}}$$

Για τον υπολογισμό της μερικής λύσης που αντιστοιχεί στις αρχικές συνθήκες του προβλήματος, χρειάζεται και η παράγωγος της γενικής λύσης:

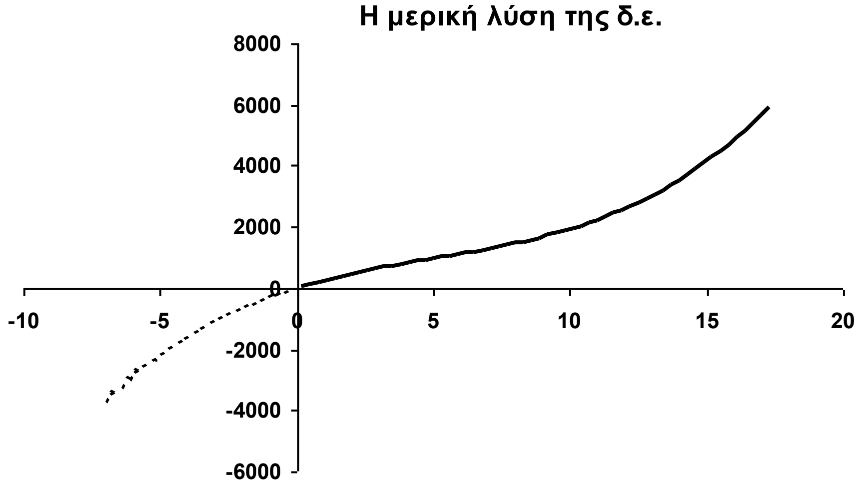
$$y'(x,c_1,c_2) = -\frac{c_2}{5}e^{-x/5} + 5x^2 - 50x + 275$$

και αντικαθιστώντας τις αρχικές συνθήκες, έχουμε:

$1 = c_1 + c_2$ $\qquad$ $c_1 = 6$

$276 = -\frac{c_2}{5} + 275$ $\qquad$ $c_2 = -5$

$$\mathbf{y(x,c_1,c_2) = 6 - 5e^{-x/5} + \frac{5}{3}x^3 - 25x^2 + 275x}$$



β) Η συνάρτηση f(x)[1] είναι γινόμενο εκθετικής επί πολυωνυμική: Έστω λοιπόν πως η συνάρτηση f του β' μέλους της δ.ε. είναι της μορφής:

$$\mathbf{f(x) = p(x)e^{kx}}$$

όπου η πολυωνυμική συνάρτηση είναι ν-οστού βαθμού, ενώ το k είναι πραγματική σταθερή $(k \in R)$.

Ξεχωρίζουμε τρεις υποπεριπτώσεις:

- Ο συντελεστής k δεν είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης της αντίστοιχης ομογενούς (δηλαδή η e^{kx} δεν είναι μερική λύση της ομογενούς). Στην περίπτωση αυτή αναζητούμε την μερική λύση υπό τη μορφή:

$$y_\mu(x) = q(x)e^{kx} \text{ (1)}$$

[1] *Πάντα πρόκειται για το β' μέλος της πλήρους δ.ε.:* ***y'' + ay' + by = f(x)***

(1) *Όπου, ως συνήθως, το q(x) είναι το γενικό πολυώνυμο ν-οστού βαθμού.*

- Ο συντελεστής k είναι μονή ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης της αντίστοιχης ομογενούς (δηλαδή η e^{kx} είναι μερική λύση της ομογενούς). Στην περίπτωση αυτή αναζητούμε την μερική λύση υπό τη μορφή:

$$y_\mu(x) = xq(x)e^{kx}$$

- Ο συντελεστής k είναι διπλή ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης της αντίστοιχης ομογενούς (δηλαδή οι e^{kx} και xe^{kx} είναι μερικές λύσεις της ομογενούς). Στην περίπτωση αυτή αναζητούμε την μερική λύση υπό τη μορφή:

$$y_\mu(x) = x^2q(x)e^{kx}$$

Παράδειγμα: Να υπολογισθεί η γενική και η μερική λύση της δ.ε.

$y'' + y' - 2y = (x-1)e^x$ για αρχικές συνθήκες: $y(0)=1$ και $y'(0)=-1$

Λύση: Αρχικά λύνουμε την αντίστοιχη ομογενή:

$$y'' + y' - 2y = 0$$

με χαρακτηριστική εξίσωση:

$$p^2 + p - 2 = 0$$

με πραγματικές ρίζες:

$$p_1 = -2 \quad \text{και} \quad p_2 = 1$$

οπότε η γενική λύση της ομογενούς

$$\mathbf{y_o(x,c_1,c_2) = c_1e^{-2x} + c_2e^{-x}}$$

Επειδή ο συντελεστής του x στον εκθέτη του e (στο β' μέλος της δ.ε.) είναι και μονή ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης, αναζητούμε τη μερική λύση υπό τη μορφή:

$$y_\mu(x) = xq(x)e^x = x(\alpha x+\beta)e^x = (\alpha x^2+\beta x)e^x$$

με παραγώγους

$$y_\mu'(x) = [\alpha x^2 + (2\alpha+\beta)x + \beta]e^x \quad \text{και}$$
$$y_\mu''(x) = [\alpha x^2 + (4\alpha+\beta)x + 2\alpha + 2\beta]e^x$$

Αντικαθιστούμε στη δ.ε. και υπολογίζουμε:

$$[\alpha x^2 + (4\alpha+\beta)x + 2\alpha+2\beta]e^x + [\alpha x^2 + (2\alpha+\beta)x + \beta]e^x - 2(\alpha x^2+\beta x)e^x = (x-1)e^x$$
$$(6\alpha x + 2\alpha+3\beta)e^x = (x-1)e^x$$

απ' όπου προκύπτει το σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l} 6\alpha = 1 \\ 2\alpha + 3\beta = -1 \end{array}\right| \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \alpha = 1/6 \\ \beta = -4/9 \end{array}$$

και η γενική λύση της πλήρους δ.ε.:

$$\boxed{\mathbf{y(x,c_1,c_2) = y_o(x,c_1,c_2) + y_\mu(x) = c_1e^{-2x} + c_2e^{-x} + \left(\frac{1}{6}x^2 - \frac{4}{9}x\right)e^x}}$$

Για τον υπολογισμό της μερικής λύσης χρειαζόμαστε την 1η παράγωγο:

$$\mathbf{y'(x,c_1,c_2) = -2c_1e^{-2x} + c_2e^{-x}} + \left[\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{9}x - \frac{4}{9}\right]\mathbf{e^x}$$

Θέτοντας στη συνάρτηση και στην παράγωγο τις τιμές των αρχικών συνθηκών, υπολογίζουμε την τιμή των αυθαίρετων σταθερών:

$$\left.\begin{array}{l} 1 = c_1 + c_2 \\ 2 = -2c_1 + c_2 - 4/9 \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} c_1 = -13/27 \\ c_2 = 40/27 \end{array}}$$

γ) Η συνάρτηση f(x) είναι άθροισμα ημιτόνου ή (και) συνημιτόνου: Έστω λοιπόν πως η συνάρτηση f του β’ μέλους της δ.ε. είναι της μορφής:

$$\mathbf{f(x) =}\ f(x)=a\eta\mu(kx)+b\sigma\upsilon\nu(kx)$$

όπου τα k, a και b είναι πραγματικές σταθερές $(k,a,b \in R)$.

Ξεχωρίζουμε τρεις υποπεριπτώσεις:

- Η χαρακτηριστική εξίσωση της αντίστοιχης ομογενούς **<u>δεν έχει</u>** σαν ρίζες τους φανταστικούς αριθμούς (όχι μιγαδικούς) $\pm ki$ (1). Στην περίπτωση αυτή αναζητούμε την μερική λύση υπό τη μορφή:

$$y_\mu(x)= \lambda\eta\mu(kx)+\mu\sigma\upsilon\nu(kx) \quad \text{όπου } \lambda,\mu \in R$$

- Η χαρακτηριστική εξίσωση της αντίστοιχης ομογενούς **<u>έχει</u>** σαν ρίζες τους φανταστικούς αριθμούς (όχι μιγαδικούς) $\pm ki$ (1). Στην περίπτωση αυτή αναζητούμε την μερική λύση υπό τη μορφή:

$$y_\mu(x)= x[\lambda\eta\mu(kx)+\mu\sigma\upsilon\nu(kx)] \quad \text{όπου } \lambda,\mu \in R$$

Παράδειγμα: Να υπολογισθεί η γενική και η μερική λύση της δ.ε.
$y'' + 16y = \eta\mu(4x)$ για αρχικές συνθήκες: $y(0) = 0$ και $y'(0) = 0$

Λύση: Αρχικά λύνουμε την αντίστοιχη ομογενή:

---

(1) *Για να έχει η χ.ε. της ομογενούς δ.ε. μιγαδική ρίζα θα πρέπει να είναι μηδέν ο συντελεστής του y’ (a=0, οπότε η ομογενής δ.ε. γράφεται: $y''+k^2y=0$). Τότε η χ.ε. είναι η:*

$$p^2 + k^2 = 0 \Rightarrow p^2 = -k^2 \Rightarrow p_{1,2} = \pm ki$$

$$y'' + 16y = 0$$

με χαρακτηριστική εξίσωση:

$$p^2 + 16 = 0$$

με φανταστικές ρίζες:

$$p_1 = -4i \quad \text{και} \quad p_2 = 4i$$

οπότε η γενική λύση της ομογενούς

$$\mathbf{y_o(x,D,\varphi) = D\text{συν}(4x-\varphi)}$$

Επειδή ο συντελεστής του x στο ημίτονο (4, στο β' μέλος της δ.ε.) είναι και ο συντελεστής του i της φανταστικής ρίζας της χαρακτηριστικής εξίσωσης, αναζητούμε τη μερική λύση υπό τη μορφή:

$$y_\mu(x)= x[\lambda\text{ημ}(4x)+\mu\text{συν}(4x)]$$

με παραγώγους

$$y_\mu'(x) = (\lambda-4\mu x)\text{ημ}(4x) + (\mu+4\lambda x)\text{συν}(4x) \quad \text{και}$$
$$y_\mu''(x) = -(8\mu+16\lambda x)\text{ημ}(4x) + (8\lambda-16\mu x)\text{συν}(4x)$$

Αντικαθιστούμε στη δ.ε. και υπολογίζουμε:

$$-(8\mu+16\lambda x)\text{ημ}(4x) + (8\lambda-16\mu x)\text{συν}(4x) +16x[\lambda\text{ημ}(4x)+\mu\text{συν}(4x)] = \text{ημ}(4x)$$
$$-8\mu\text{ημ}(4x) + 9\lambda\text{συν}(4x) = \text{ημ}(4x)$$

απ' όπου έχουμε $\mu= -1/8$, $\lambda=0$. Άρα η γενική λύση της δ.ε. είναι η:

$$\boxed{\mathbf{y(x,D,\varphi) = y_o(x,D,\varphi) + y_\mu(x) = D\text{συν}(4x-\varphi) - \frac{1}{8}x\text{συν}(4x)}}$$

Για τον υπολογισμό της μερικής λύσης χρειαζόμαστε την 1η παράγωγο:

$$y'(x,D,\varphi) = -4D\text{ημ}(4x-\varphi) - \frac{1}{8}\text{συν}(4x) + \frac{1}{2}x\text{ημ}(4x)$$

Θέτοντας στη συνάρτηση και στην παράγωγο τις τιμές των αρχικών συνθηκών, υπολογίζουμε την τιμή των αυθαίρετων σταθερών:

$$0 = D\text{συν}(-\varphi)$$
$$0 = -4D\text{ημ}(-\varphi) - 1/8$$

Από την 1η εξίσωση δεν μπορούμε να συμπεράνουμε πως D=0, αντίθετα, πρέπει να επιλέξουμε τη γωνία φ έτσι ώστε συν(-φ) = 0. Έχουμε επομένως:

$$\varphi = \pi/2 \quad \text{και} \quad D = 1/32$$

οπότε, η μερική λύση που αντιστοιχεί στις μηδενικές αρχικές συνθήκες:

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{32}\,\text{συν}(4x-\pi/2) - \frac{1}{8}\,x\,\text{συν}(4x)}$$

με γραφική παράσταση:

δ) Η f(x) είναι ένας συνδυασμός των προηγουμένων περιπτώσεων:

Παράδειγμα: Να βρεθεί η γενική και η μερική λύση της δ.ε.:

$$y''+9y = 36x\text{ημ}(3x)$$

για μηδενικές αρχικές συνθήκες.

Λύση:

(i) Λύση της αντίστοιχης ομογενούς: $y'' + 9y = 0$

με χαρακτηριστική εξίσωση:

$$p^2 + 9 = 0$$

με φανταστικές ρίζες:

$$p_1 = -3i \quad \text{και} \quad p_2 = 3i$$

οπότε η γενική λύση της ομογενούς

$$y_o(x,D,\varphi) = D\,\text{συν}(3x-\varphi)$$

(ii) Υπολογισμός μιας μερικής λύσης: Επειδή ο συντελεστής του x (κυκλική συχνότητα) στο ημίτονο του β' μέλους της δε. είναι ίσος με τον συντελεστή του i της φανταστικής ρίζας της χαρακτηριστικής εξίσωσης (ω=3), αναζητούμε τη μερική λύση υπό τη μορφή:

$$
\begin{aligned}
y_{\mu}\ x\ &= x\left[\ ax+b\ \eta\mu\ 3x\ +\ cx+d\ \sigma\upsilon\nu\ 3x\ \right]= \\
&=\ ax^2+bx\ \eta\mu\ 3x\ +\ cx^2+dx\ \sigma\upsilon\nu\ 3x
\end{aligned}
$$

με παραγώγους

$$
\begin{aligned}
y_{\mu}'\ x\ =\ & 2ax+b\ \eta\mu\ 3x\ +\ 3ax^2+3bx\ \sigma\upsilon\nu\ 3x\ + \\
&+\ 2cx+d\ \sigma\upsilon\nu\ 3x\ -\ 3cx^2+3dx\ \eta\mu\ 3x\ = \\
&=\left[-3cx^2+\ 2a-3d\ x+b\right]\eta\mu\ 3x\ +\left[3ax^2+\ 2c+3b\ x+d\right]\sigma\upsilon\nu\ 3x
\end{aligned}
$$

και

$$
\begin{aligned}
y_{\mu}''\ x\ =&\left[-6cx+\ 2a-3d\ \right]\eta\mu\ 3x\ +\left[-9cx^2+\ 6a-9d\ x+3b\right]\sigma\upsilon\nu\ 3x\ + \\
&+\left[6ax+\ 2c+3b\ \right]\sigma\upsilon\nu\ 3x\ +\left[-9ax^2-\ 6c+9b\ x-3d\right]\eta\mu\ 3x\ = \\
&=\left[-9ax^2-\ 12c+9b\ x+2a-6d\right]\eta\mu\ 3x\ + \\
&+\left[-9cx^2+\ 12a-9d\ x+2c+6b\right]\sigma\upsilon\nu\ 3x
\end{aligned}
$$

Αντικαθιστούμε στη δ.ε. και υπολογίζουμε:

$$
\begin{aligned}
&\left[-9ax^2-\ 12c+9b\ x+2a-6d\right]\eta\mu\ 3x\ + \\
&+\left[-9cx^2+\ 12a-9d\ x+2c+6b\right]\sigma\upsilon\nu\ 3x\ + \\
&+9\left[\ ax^2+bx\ \eta\mu\ 3x\ +\ cx^2+dx\ \sigma\upsilon\nu\ 3x\ \right]=36x\eta\mu\ 3x \qquad \Rightarrow
\end{aligned}
$$

$$
-12cx+2a-6d\ \eta\mu\ 3x\ +\ 12ax+2c+6b\ \sigma\upsilon\nu\ 3x\ =36x\eta\mu\ 3x
$$

απ' όπου προκύπτει το σύστημα:

$$
\left.\begin{aligned}
-12c&=36 \\
2a-6d&=0 \\
12a&=0 \\
2c+6b&=0
\end{aligned}\right]
\quad \Rightarrow \quad
\left[\begin{aligned}
a&=0 \\
b&=1 \\
c&=-3 \\
d&=0
\end{aligned}\right.
$$

απ' όπου προκύπτει η μερική λύση:

$$y_\mu(x) = x\eta\mu(3x) - 3x^2\sigma\upsilon\nu(3x)$$

(iii) Γενική λύση της πλήρους δ.ε., σαν άθροισμα της γενικής λύσης της αντίστοιχης ομογενούς και της μερικής λύσης της πλήρους:

$$y(x,D,\phi) = y_o(x,D,\phi) + y_\mu(x) = D\sigma\upsilon\nu(3x-\phi) + x\eta\mu(3x) - 3x^2\sigma\upsilon\nu(3x)$$

(iv) Μερική λύση σύμφωνα με τις αρχικές συνθήκες: Αρχικά υπολογίζουμε την παράγωγο της γενικής λύσης:

$$y'(x,D,\phi) = -3D\eta\mu(3x-\phi) + \eta\mu(3x) + 3x\sigma\upsilon\nu(3x) - 6x\sigma\upsilon\nu(3x) + 9x^2\eta\mu(3x) =$$

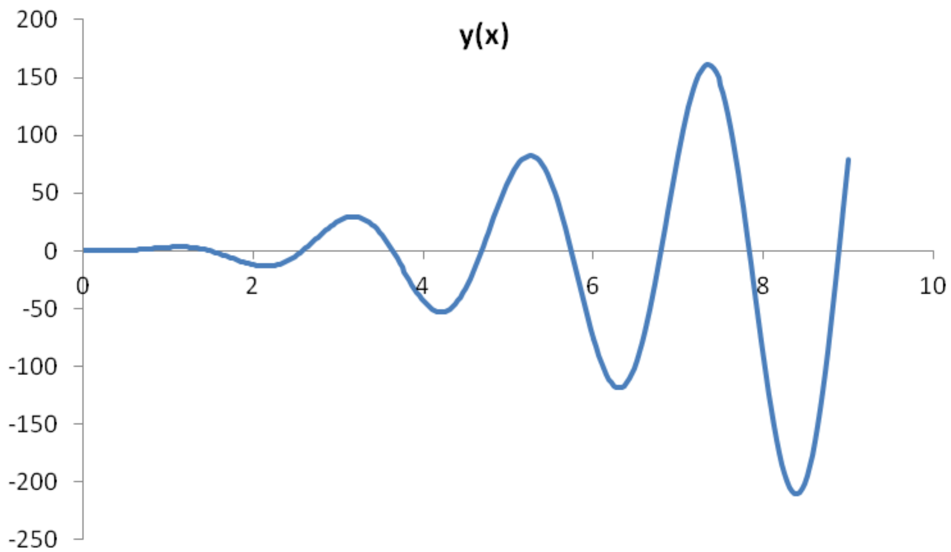
$$= -3D\eta\mu(3x-\phi) + (9x^2+1)\eta\mu(3x) - 3x\sigma\upsilon\nu(3x)$$

οπότε αντικαθιστώντας στις δύο εξισώσεις τις αρχικές συνθήκες: y(0)=y’(0)=0 και υπολογίζουμε τις αυθαίρετες σταθερές D και φ:

$$\left.\begin{matrix} 0 = D\sigma\upsilon\nu(-\phi) \\ 0 = -3D\eta\mu(-\phi) \end{matrix}\right] \Rightarrow \left[\begin{matrix} \phi = 0 \\ D = 0 \end{matrix}\right.$$

Παρατήρηση: Παρατηρούμε πως για τις συγκεκριμένες μερικές συνθήκες, η λύση στην οποία καταλήξαμε είναι η μερική λύση $y_\mu(x)$. Αυτό συμβαίνει διότι οι εν λόγω αρχικές συνθήκες επαληθεύουν την $y_\mu(x)$. Εάν επιλέξουμε διαφορετικές αρχικές συνθήκες αυτό δεν θα συμβαίνει.

(v) Η γραφική παράσταση της μερικής λύσης.



3.3.2 Μέθοδος μεταβολής των σταθερών

Θυμίζουμε πως θέλουμε να υπολογίσουμε τη γενική μορφή της δ.ε.

$$\mathbf{y'' + ay' + by = f(x)}$$

Ξέρουμε πως η γενική της λύση θα είναι το άθροισμα μιας γενικής λύσης της αντίστοιχης ομογενούς [**y''+ay'+by =0**], με μια (οποιαδήποτε) μερική λύση της πλήρους. Είδαμε πως η γενική λύση της ομογενούς είναι της μορφής:

$$y_o(x,c_1,c_2) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) \qquad (3.3.3)$$

Αναζητούμε λοιπόν μια μερική λύση υπό την παραπάνω μορφή, θεωρώντας όμως πως οι ποσότητες c_1 και c_2 είναι συναρτήσεις της μεταβλητής x: $c_1(x)$ και $c_2(x)$. Στη συνέχεια δεχόμαστε πως επιλέγουμε τις συναρτήσεις $c_1(x)$ και $c_2(x)$ με τρόπο ώστε να ισχύει η σχέση:

$$c_1'y_1 + c_2'y_2 = 0 \qquad (3.3.4)$$

και αυτή μας η επιλογή μας δίνει την $1^{η}$ σχέση από τις δύο που χρειαζόμαστε για να υπολογίσουμε τις συναρτήσεις $c_1(x)$ και $c_2(x)$. Με δεδομένη τη σχέση αυτή, παραγωγίζουμε λοιπόν τη σχέση (Γ.3.3), και αντικαθιστούμε τις παραγώγους (και τη συνάρτηση) στην πλήρη δ.ε.:

$$y = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) = c_1y_1 + c_2y_2$$
$$y' = c_1'y_1 + c_2'y_2 + c_1y_1' + c_2y_2' = c_1y_1' + c_2y_2'$$

διότι οι δύο συναρτήσεις y_1 και y_2 είναι μερικές λύσεις της ομογενούς δ.ε..

$$y'' = c_1'y_1' + c_2'y_2' + c_1y_1'' + c_2y_2''$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις αυτές στην πλήρη δ.ε. έχουμε:

$$c_1'y_1' + c_2'y_2' + c_1y_1'' + c_2y_2'' + \mathbf{a}(c_1y_1' + c_2y_2') + \mathbf{b}(c_1y_1 + c_2y_2) = \mathbf{f(x)} \Rightarrow$$

$$c_1(y_1'' + ay_1' + \mathbf{b}y_1) + c_2(y_2'' + ay_2' + \mathbf{b}y_2) + c_1'y_1' + c_2'y_2' = \mathbf{f(x)} \Rightarrow$$ [2]

$$c_1'y_1' + c_2'y_2' = \mathbf{f(x)}$$

Επομένως ο υπολογισμός των συναρτήσεων c_1' και c_2' γίνεται από το σύστημα των εξισώσεων:

---

[2] *Όπου οι παρενθέσεις* $(y_1'' + ay_1' + \mathbf{b}y_1)$ *και* $(y_2'' + ay_2' + \mathbf{b}y_2)$ *είναι ίσες με το μηδέν, μια και οι συναρτήσεις* y_1 *και* y_2 *είναι λύσεις της ομογενούς δ.ε..*

$$\begin{aligned} c_1'y_1 + c_2'y_2 &= 0 \\ c_1'y_1' + c_2'y_2' &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

από όπου, με ολοκλήρωση, προκύπτουν οι συναρτήσεις $c_1(x)$ και $c_2(x)$.

Παράδειγμα: Να βρεθεί η γενική λύση της δ.ε.: y''+y = ημx.

Λύση: Αρχικά θα υπολογίσουμε τη γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς:

$$y''+y = 0$$

της οποίας η χαρακτηριστική εξίσωση είναι η: $p^2 + 1 = 0$, με ρίζες $\mathbf{p}_{1,2} = \pm\mathbf{i}$. Επομένως:

$$y_o(\mathbf{x}, A, B) = \mathbf{A}\eta\mu\mathbf{x} + B\sigma\upsilon\nu\mathbf{x}$$

Αναζητούμε τώρα την μερική λύση της πλήρους, με μεταβολή των σταθερών A και B, που τις θεωρούμε σαν συναρτήσεις A(x) και B(x). Οι παράγωγοί τους υπολογίζονται (σύμφωνα με τα όσο ειπώθηκαν πιο πάνω) από το σύστημα:

$$\begin{aligned} A'y_1 + B'y_2 &= 0 \\ A'y_1' + B'y_2' &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

ή ολοκληρωμένα:

$$\begin{bmatrix} A'\eta\mu x + B'\sigma\upsilon\nu x = 0 \\ A'\sigma\upsilon\nu x - B'\eta\mu x = \eta\mu\mathbf{x} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} A' = -\dfrac{B'\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} \\ -\dfrac{B'\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu x} - B'\eta\mu x = \eta\mu\mathbf{x} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} A' = -\dfrac{B'\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} \\ -B'\sigma\upsilon\nu^2 x - B'\eta\mu^2 x = \eta\mu^2\mathbf{x} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A' = \eta\mu x\sigma\upsilon\nu x \\ B' = -\eta\mu^2\mathbf{x} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \int \eta\mu x\sigma\upsilon\nu x dx \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \int -\eta\mu^2\mathbf{x}\mathbf{dx} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \dfrac{1}{2}\eta\mu^2\mathbf{x} \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \dfrac{1}{2}\left[\eta\mu\mathbf{x}\sigma\upsilon\nu\mathbf{x} - \mathbf{x}\right] \end{bmatrix}$$

$$y_\mu(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x})\eta\mu\mathbf{x} + B(\mathbf{x})\sigma\upsilon\nu\mathbf{x} = \frac{1}{2}\eta\mu^2\mathbf{x}\eta\mu\mathbf{x} + \frac{1}{2}\left[\eta\mu\mathbf{x}\sigma\upsilon\nu\mathbf{x} - \mathbf{x}\right]\sigma\upsilon\nu\mathbf{x} =$$

$$= \frac{1}{2}(1 - \sigma\upsilon\nu^2\mathbf{x})\eta\mu\mathbf{x} + \frac{1}{2}\left[\eta\mu\mathbf{x}\sigma\upsilon\nu\mathbf{x} - \mathbf{x}\right]\sigma\upsilon\nu\mathbf{x} \quad \Rightarrow$$

$$\mathbf{y}_\mu(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\eta\mu\mathbf{x} - \frac{1}{2}\mathbf{x}\sigma\upsilon\nu\mathbf{x}$$

Παρατήρηση: Αξίζει να υπολογισθεί η μερική λύση $y_\mu(x)$ με τη μέθοδο του προσδιορισμού των συντελεστών. Στην περίπτωση αυτή η μερική λύση θα είναι διαφορετική!

$$\mathbf{y}_{\mu}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2}\mathbf{x}\sigma\upsilon\nu\mathbf{x}$$

Αν όμως δοκιμάσουμε θα δούμε πως και οι δύο λύσεις είναι αποδεκτές (επαληθεύουν την πλήρη δ.ε.).