

**ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ
ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ**

ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ

**ΤΜΗΜΑ Πολιτικών Μηχανικών ΤΕ και Μηχανικών Τοπογραφίας &
Γεωπληροφορικής ΤΕ**

Δορυφορική Γεωδαισία (GPS)

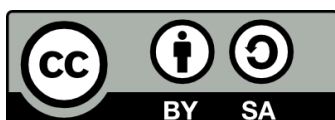
**Δρ. Κατσουγιαννόπουλος
Καθηγητής**

ΣΕΡΡΕΣ, ΙΟΥΝΙΟΣ 2015



Άδειες Χρήσης

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons. Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Το έργο αυτό αδειοδοτείται από την Creative Commons Αναφορά Δημιουργού - Παρόμοια Διανομή 4.0 Διεθνές Άδεια. Για να δείτε ένα αντίγραφο της άδειας αυτής, επισκεφτείτε <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.el>.

Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.

Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Κεντρικής Μακεδονίας**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



ΤΕΙ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

Σχολή Τεχνολογικών Εφαρμογών

Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών ΤΕ και Μηχανικών Τοπογραφίας &
Γεωπληροφορικής ΤΕ

κατεύθυνση Μηχανικών Τοπογραφίας και Γεωπληροφορικής ΤΕ

***Εφαρμογές Παγκοσμίου Δορυφορικού Συστήματος Εντοπισμού
Θέσης (GPS)***

Κωδικός Μαθήματος 501

Σημειώσεις Θεωρίας

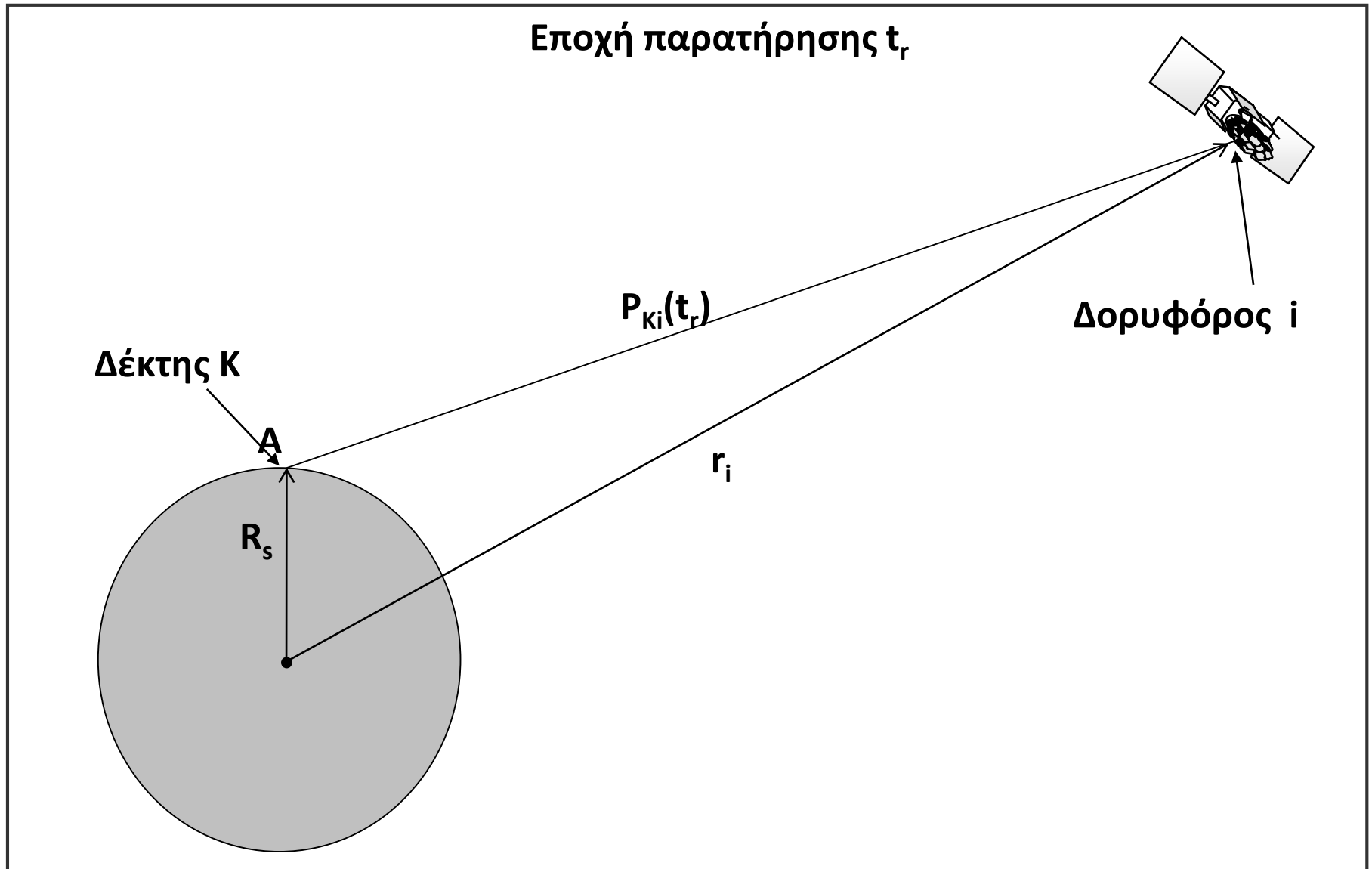
Ε' Εξάμηνο

Ακαδημαϊκό έτος 2014 – 2015

2^ο-3^ο Μάθημα Θεωρίας (501Θ)

Γραμμικοποίηση - Πίνακες σχεδιασμού Διάδοση σημάτων

Απόλυτος προσδιορισμός θέσης



Απόλυτος προσδιορισμός θέσης – Εξισώσεις παρατήρησης

Παρατηρηθήσα απόσταση μεταξύ δορυφόρου και δέκτη

Τροχιακά σφάλματα, κ.λπ.

Επίδραση της ιονόσφαιρας

$$P_K^i = p_K^i + \delta p_K^i + c\delta_K - c\delta^i + I_K^i + T_K^i + \varepsilon_K^i$$

Θόρυβος παρατήρησης

Επίδραση της τροπόσφαιρας

Σφάλμα χρονομέτρου δέκτη

Σφάλμα χρονομέτρου δορυφόρου

Αληθής απόσταση μεταξύ δορυφόρου και δέκτη

The diagram illustrates the observation equation for absolute positioning. The equation is $P_K^i = p_K^i + \delta p_K^i + c\delta_K - c\delta^i + I_K^i + T_K^i + \varepsilon_K^i$. Annotations with arrows point to each term: P_K^i is the observed distance, p_K^i is the true distance, δp_K^i represents orbital errors, $c\delta_K$ is the receiver clock error, $-c\delta^i$ is the satellite clock error, I_K^i is the ionospheric effect, T_K^i is the tropospheric effect, and ε_K^i is the observation noise.

Απόλυτος προσδιορισμός θέσης – Εξισώσεις παρατήρησης

$$P_K^i = p_K^i + \delta\rho_{mul} + \delta\rho_{rel} + c\delta_K - c\delta^i + I_K^i + T_K^i + \epsilon_K^i$$

Παρατηρηθήσα απόσταση μεταξύ δορυφόρου και δέκτη

Σφάλμα πολυανάκλασης

Επίδραση της ιονόσφαιρας

Επίδραση της τροπόσφαιρας

Θόρυβος παρατήρησης

Σφάλμα χρονομέτρου δέκτη

Σφάλμα χρονομέτρου δορυφόρου

Αληθής απόσταση μεταξύ δορυφόρου και δέκτη

Σχετικιστική επίδραση

Επιδράσεις εξαιτίας της Γενικής και της Ειδικής θεωρίας της Σχετικότητας $\delta\rho_{rel}$

Οι δορυφόροι βρίσκονται σε ύψος επάνω από την επιφάνεια της Γης και τις έλουσες μάζες αυτής. Στο ύψος αυτό η καμπυλότητα του χωροχρόνου είναι μικρότερη σε σχέση με την επιφάνεια της Γης. Η ΓΘΣ υπαγορεύει ότι τα ρολόγια πλησίον ενός σώματος με μεγάλη μάζα θα είναι πιο αργά σε σχέση με αυτά μακριά από αυτό. Συνεπώς, τα ρολόγια των δορυφόρων θα πρέπει να «χτυπούν» πιο γρήγορα από αυτά των δεκτών στην Γη ($\sim 45 \mu\text{s}/\text{day}$)

Ο παρατηρητής στη Γη βλέπει τους δορυφόρους εν κινήσει σε σχέση με αυτούς. Η ΕΘΣ υπαγορεύει ότι θα πρέπει να βλέπουμε τα ρολόγια των δορυφόρων να «χτυπούν» πιο αργά από αυτά στη Γη ($\sim 7 \mu\text{s}/\text{day}$)

Θεωρώντας ότι τα σφάλματα πολυανάκλασης και τα σχετικιστικά έχουν μοντελοποιηθεί επαρκώς και τα τροχιακά περιλαμβάνονται στα τυχαία, προκύπτει

$$P_K^i = p_K^i + c\delta_K - c\delta^i + I_K^i + T_K^i + \varepsilon_K^i$$

Απόλυτος προσδιορισμός θέσης – Εξισώσεις παρατήρησης

Αληθής δεκαδική διαφορά φάσης μεταξύ δορυφόρου και δέκτη

Ακέραιος αριθμός κύκλων για κάθε ζεύγος δέκτη-δορυφόρου

$$\lambda\Phi = P_K^i = p_K^i + \delta_K - c\delta^i + \lambda n_K^i \ominus l_K^i + T_K^i + \varepsilon_K^i(\Phi)$$

ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΟ ΠΡΟΣΗΜΟ στο σφάλμα της Ιονόσφαιρας
(ΓΙΑΤΙ??)

$$\Phi(\text{μονάδες μήκους}) = \lambda\varphi(\text{κύκλοι})$$

Απόλυτος προσδιορισμός θέσης – Εξίσωση παρατήρησης

$$P_K^i = p_K^i + \delta\rho_{mul} + \delta\rho_{rel} + c\delta_K - c\delta^i + I_K^i + T_K^i + \varepsilon_K^i$$

$K \rightarrow$ δέκτης (receiver)

$i \rightarrow$ δορυφόρος (satellite)

διανύσματα θέσης δορυφόρου και δέκτη

$$\mathbf{r}^i = \mathbf{X}^i = \begin{bmatrix} x^i \\ y^i \\ z^i \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_K = \mathbf{X}_K = \begin{bmatrix} x_K \\ y_K \\ z_K \end{bmatrix}$$

ΒΑΣΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗΣ

$$P_K^i = \sqrt{(x^i - x_K)^2 + (y^i - y_K)^2 + (z^i - z_K)^2}$$

Συνόρθωση με το μοντέλο των εξισώσεων παρατηρήσεων

$$P_K^i = p_K^i + c\delta_K - c\delta^i + I_K^i + T_K^i + \varepsilon_K^i$$



$$P_K^i = \sqrt{(x^i - x_K)^2 + (y^i - y_K)^2 + (z^i - z_K)^2} + c\delta_K - c\delta^i + I_K^i + T_K^i + \varepsilon_K^i$$



$$P_K^i = \sqrt{(x^i - x_K)^2 + (y^i - y_K)^2 + (z^i - z_K)^2} + c\delta_K - c\delta^i + I_K^i + T_K^i + \varepsilon_K^i$$

$$P_K^i - (I_K^i + T_K^i) = \sqrt{(x^i - x_K)^2 + (y^i - y_K)^2 + (z^i - z_K)^2} + c\delta_K - c\delta^i + \varepsilon_K^i$$

Συνόρθωση με το μοντέλο των εξισώσεων παρατηρήσεων

$$P_K^i = p_K^i + c\delta_K - c\delta^i + I_K^i + T_K^i + \varepsilon_K^i$$



$$P_K^i = \sqrt{(x^i - x_K)^2 + (y^i - y_K)^2 + (z^i - z_K)^2} + c\delta_K - c\delta^i + I_K^i + T_K^i + \varepsilon_K^i$$



$$P_K^i = \sqrt{(x^i - x_K)^2 + (y^i - y_K)^2 + (z^i - z_K)^2} + c\delta_K - c\delta^i + I_K^i + T_K^i + \varepsilon_K^i$$

Ατμοσφαιρικά σφάλματα μέσω κατάλληλων μοντέλων (Saastamoinen, Hopfield)

$$P_K^i - (I_K^i + T_K^i) = \sqrt{(x^i - x_K)^2 + (y^i - y_K)^2 + (z^i - z_K)^2} + c\delta_K - c\delta^i + \varepsilon_K^i$$

$$P_K^i = \sqrt{(x^i - x_K)^2 + (y^i - y_K)^2 + (z^i - z_K)^2} + c\delta_K - c\delta^i + \varepsilon_K^i$$

Γραμμικοποίηση κατά Taylor



$$P_K^i = (P_K^i)^0 - \frac{x^i - x_K^0}{(\rho_K^i)^0} dX_K - \frac{y^i - y_K^0}{(\rho_K^i)^0} dY_K - \frac{z^i - z_K^0}{(\rho_K^i)^0} dZ_K - c\delta d$$

Συνόρθωση με το μοντέλο των εξισώσεων παρατηρήσεων

$$P_K^i = (P_K^i)^0 - \frac{x^i - x_K^0}{(\rho_K^i)^0} dX_K - \frac{y^i - y_K^0}{(\rho_K^i)^0} dY_K - \frac{z^i - z_K^0}{(\rho_K^i)^0} dZ_K - c\delta d$$



$$P_K^i = (P_K^i)^0 - \frac{x^i - x_K^0}{(\rho_K^i)^0} dX_K - \frac{y^i - y_K^0}{(\rho_K^i)^0} dY_K - \frac{z^i - z_K^0}{(\rho_K^i)^0} dZ_K - c\delta d$$

Τέσσερις άγνωστοι οι

dX_r dY_r dZ_r δd

Συνόρθωση με το μοντέλο των εξισώσεων παρατηρήσεων

$$P_K^i = (P_K^i)^0 - \frac{x^i - x_K^0}{(\rho_K^i)^0} dX_K - \frac{y^i - y_K^0}{(\rho_K^i)^0} dY_K - \frac{z^i - z_K^0}{(\rho_K^i)^0} dZ_K - c\delta d$$

Τέσσερις άγνωστοι οι

dX_K dY_K dZ_K δd

Με τη γραμμικοποίηση από τους

X_K Y_K Z_K T

$$\text{ὅπου } X_K = X^0 + \delta X_K$$

$$Y_K = Y^0 + \delta Y_K$$

$$Z_K = Z^0 + \delta Z_K$$

$$d = d^0 + \delta d$$

Με δείκτη 0 είναι οι
προσεγγιστικές τιμές των
αγνώστων.

Συνόρθωση με το μοντέλο των εξισώσεων παρατηρήσεων

$$P_K^i = (P_K^i)^0 - \frac{x^i - x_K^0}{(\rho_K^i)^0} dX_K - \frac{y^i - y_K^0}{(\rho_K^i)^0} dY_K - \frac{z^i - z_K^0}{(\rho_K^i)^0} dZ_K - c\delta d$$

$K \rightarrow$ δέκτης (receiver)

$i \rightarrow$ δορυφόρος (satellite)

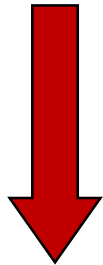
The diagram illustrates the decomposition of the observation equation coefficients into individual terms. Each term is enclosed in a yellow box, and the coefficient is circled in red. The terms are:

- $a_{xK}^i = -\frac{x^i - x_K^0}{(\rho_K^i)^0}$
- $a_{yK}^i = -\frac{y^i - y_K^0}{(\rho_K^i)^0}$
- $a_{zK}^i = -\frac{z^i - z_K^0}{(\rho_K^i)^0}$
- $a_d^i = -c$

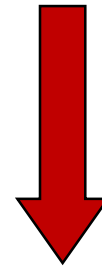
Συνόρθωση με το μοντέλο των εξισώσεων παρατηρήσεων

Έστω

$$a_{xK}^i = -\frac{x^i - x_K^o}{(\rho_K^i)^0}, \quad a_{yK}^i = -\frac{y^i - y_K^o}{(\rho_K^i)^0}, \quad a_{zK}^i = -\frac{z^i - z_K^o}{(\rho_K^i)^0}, \quad a_d^i = -c$$



Για παρατηρήσεις προς
τέσσερις δορυφόρους



Συνόρθωση με το μοντέλο των εξισώσεων παρατηρήσεων

Έστω

$$a_{xK}^i = -\frac{x^i - x_K^0}{(\rho_K^i)^0}, \quad a_{yK}^i = -\frac{y^i - y_K^0}{(\rho_K^i)^0}, \quad a_{zK}^i = -\frac{z^i - z_K^0}{(\rho_K^i)^0}, \quad a_d^i = -c$$

Για παρατηρήσεις προς
τέσσερις δορυφόρους

$$\begin{Bmatrix} P_K^1 - (P_K^1)^0 \\ P_K^2 - (P_K^2)^0 \\ P_K^3 - (P_K^3)^0 \\ P_K^4 - (P_K^4)^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_{xK}^1 dX_K + a_{yK}^1 dY_K + a_{zK}^1 dZ_K - c\delta d \\ a_{xK}^2 dX_K + a_{yK}^2 dY_K + a_{zK}^2 dZ_K - c\delta d \\ a_{xK}^3 dX_K + a_{yK}^3 dY_K + a_{zK}^3 dZ_K - c\delta d \\ a_{xK}^4 dX_K + a_{yK}^4 dY_K + a_{zK}^4 dZ_K - c\delta d \end{Bmatrix}$$

Συνόρθωση με το μοντέλο των εξισώσεων παρατηρήσεων

$$\begin{Bmatrix} P_K^1 - (P_K^1)^0 \\ P_K^2 - (P_K^2)^0 \\ P_K^3 - (P_K^3)^0 \\ P_K^4 - (P_K^4)^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_{xK}^1 dX_K + a_{yK}^1 dY_K + a_{zK}^1 dZ_K - c\delta d \\ a_{xK}^2 dX_K + a_{yK}^2 dY_K + a_{zK}^2 dZ_K - c\delta d \\ a_{xK}^3 dX_K + a_{yK}^3 dY_K + a_{zK}^3 dZ_K - c\delta d \\ a_{xK}^4 dX_K + a_{yK}^4 dY_K + a_{zK}^4 dZ_K - c\delta d \end{Bmatrix}$$

Σε μορφή
πινάκων



Συνόρθωση με το μοντέλο των εξισώσεων παρατηρήσεων

$$\begin{Bmatrix} P_K^1 - (P_K^1)^0 \\ P_K^2 - (P_K^2)^0 \\ P_K^3 - (P_K^3)^0 \\ P_K^4 - (P_K^4)^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_{xK}^1 dX_K + a_{yK}^1 dY_K + a_{zK}^1 dZ_K - c\delta d \\ a_{xK}^2 dX_K + a_{yK}^2 dY_K + a_{zK}^2 dZ_K - c\delta d \\ a_{xK}^3 dX_K + a_{yK}^3 dY_K + a_{zK}^3 dZ_K - c\delta d \\ a_{xK}^4 dX_K + a_{yK}^4 dY_K + a_{zK}^4 dZ_K - c\delta d \end{Bmatrix}$$

Σε μορφή
πινάκων

$$\begin{bmatrix} P_K^1 - (P_K^1)^0 \\ P_K^2 - (P_K^2)^0 \\ P_K^3 - (P_K^3)^0 \\ P_K^4 - (P_K^4)^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{xK}^1 & a_{yK}^1 & a_{zK}^1 & -1 \\ a_{xK}^2 & a_{yK}^2 & a_{zK}^2 & -1 \\ a_{xK}^3 & a_{yK}^3 & a_{zK}^3 & -1 \\ a_{xK}^4 & a_{yK}^4 & a_{zK}^4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dX_K \\ dY_K \\ dZ_K \\ c\delta d \end{bmatrix}$$

Συνόρθωση με το μοντέλο των εξισώσεων παρατηρήσεων

$$\begin{cases} P_K^1 - (P_K^1)^0 \\ P_K^2 - (P_K^2)^0 \\ P_K^3 - (P_K^3)^0 \\ P_K^4 - (P_K^4)^0 \end{cases} = \begin{cases} a_{xK}^1 dX_K + a_{yK}^1 dY_K + a_{zK}^1 dZ_K - c\delta d \\ a_{xK}^2 dX_K + a_{yK}^2 dY_K + a_{zK}^2 dZ_K - c\delta d \\ a_{xK}^3 dX_K + a_{yK}^3 dY_K + a_{zK}^3 dZ_K - c\delta d \\ a_{xK}^4 dX_K + a_{yK}^4 dY_K + a_{zK}^4 dZ_K - c\delta d \end{cases}$$

Σε μορφή
πινάκων

$$\begin{bmatrix} P_K^1 - (P_K^1)^0 \\ P_K^2 - (P_K^2)^0 \\ P_K^3 - (P_K^3)^0 \\ P_K^4 - (P_K^4)^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{xK}^1 & a_{yK}^1 & a_{zK}^1 & -1 \\ a_{xK}^2 & a_{yK}^2 & a_{zK}^2 & -1 \\ a_{xK}^3 & a_{yK}^3 & a_{zK}^3 & -1 \\ a_{xK}^4 & a_{yK}^4 & a_{zK}^4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dX_K \\ dY_K \\ dZ_K \\ c\delta d \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{v}$$

$$\begin{bmatrix} P_K^1 - (P_K^1)^0 \\ P_K^2 - (P_K^2)^0 \\ P_K^3 - (P_K^3)^0 \\ P_K^4 - (P_K^4)^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{xK}^1 & a_{yK}^1 & a_{zK}^1 & -1 \\ a_{xK}^2 & a_{yK}^2 & a_{zK}^2 & -1 \\ a_{xK}^3 & a_{yK}^3 & a_{zK}^3 & -1 \\ a_{xK}^4 & a_{yK}^4 & a_{zK}^4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dX_K \\ dY_K \\ dZ_K \\ c\delta d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

v_i τα τυχαία σφάλματα των παρατηρήσεων

Συνόρθωση με το μοντέλο των εξισώσεων παρατηρήσεων

$$\begin{bmatrix} P_K^1 - (P_K^1)^0 \\ P_K^2 - (P_K^2)^0 \\ P_K^3 - (P_K^3)^0 \\ P_K^4 - (P_K^4)^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{x^1 - x_K^o}{(\rho_K^1)^0} & -\frac{y^1 - y_K^o}{(\rho_K^1)^0} & -\frac{z^1 - z_K^o}{(\rho_K^1)^0} & -1 \\ -\frac{x^2 - x_K^o}{(\rho_K^2)^0} & -\frac{y^2 - y_K^o}{(\rho_K^2)^0} & -\frac{z^2 - z_K^o}{(\rho_K^2)^0} & -1 \\ -\frac{x^3 - x_K^o}{(\rho_K^3)^0} & -\frac{y^3 - y_K^o}{(\rho_K^3)^0} & -\frac{z^3 - z_K^o}{(\rho_K^3)^0} & -1 \\ -\frac{x^4 - x_K^o}{(\rho_K^4)^0} & -\frac{y^4 - y_K^o}{(\rho_K^4)^0} & -\frac{z^4 - z_K^o}{(\rho_K^4)^0} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dX_K \\ dY_K \\ dZ_K \\ c\delta d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{v}$$

Πίνακας σχεδιασμού για n -
παρατηρήσεις και m -
αγνώστους

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{y}^a}{\partial \mathbf{x}^a}(\mathbf{x}^o) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^a}(\mathbf{x}^o) = \begin{matrix} \underbrace{\hspace{10em}}_{m\text{-}\alpha\gamma\nu\nu\omega\sigma\tau\omicron\iota} \\ \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{array} \right]_{n \times m} \end{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{matrix}} \right\} n\text{-}\pi\alpha\rho\alpha\tau\eta\rho\acute{\eta}\sigma\epsilon\iota\varsigma$$

$$a_{ij} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j^a} \right|_o$$

**Πίνακας σχεδιασμού του συστήματος των
εξισώσεων παρατηρήσεων**

Συνόρθωση με το μοντέλο των εξισώσεων παρατηρήσεων

$$\mathbf{A}_{n \times m} = \begin{bmatrix} -\frac{x^1 - x_K^o}{(\rho_K^1)^0} & -\frac{y^1 - y_K^o}{(\rho_K^1)^0} & -\frac{z^1 - z_K^o}{(\rho_K^1)^0} & -1 \\ -\frac{x^2 - x_K^o}{(\rho_K^2)^0} & -\frac{y^2 - y_K^o}{(\rho_K^2)^0} & -\frac{z^2 - z_K^o}{(\rho_K^2)^0} & -1 \\ -\frac{x^3 - x_K^o}{(\rho_K^3)^0} & -\frac{y^3 - y_K^o}{(\rho_K^3)^0} & -\frac{z^3 - z_K^o}{(\rho_K^3)^0} & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{x^n - x_K^o}{(\rho_K^n)^0} & -\frac{y^n - y_K^o}{(\rho_K^n)^0} & -\frac{z^n - z_K^o}{(\rho_K^n)^0} & -1 \end{bmatrix}$$

Συνόρθωση με το μοντέλο των εξισώσεων παρατηρήσεων

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{v}$$

$$\mathbf{y}^a = \mathbf{F}(\mathbf{x}^a)$$

Άγνωστες αληθείς και προσεγγιστικές άγνωστες παράμετροι

$$\mathbf{x}^\alpha = \begin{bmatrix} x_1^\alpha \\ x_2^\alpha \\ x_3^\alpha \\ \dots \\ \dots \\ x_m^\alpha \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}^o = \begin{bmatrix} x_1^o \\ x_2^o \\ x_3^o \\ \dots \\ \dots \\ x_m^o \end{bmatrix}$$

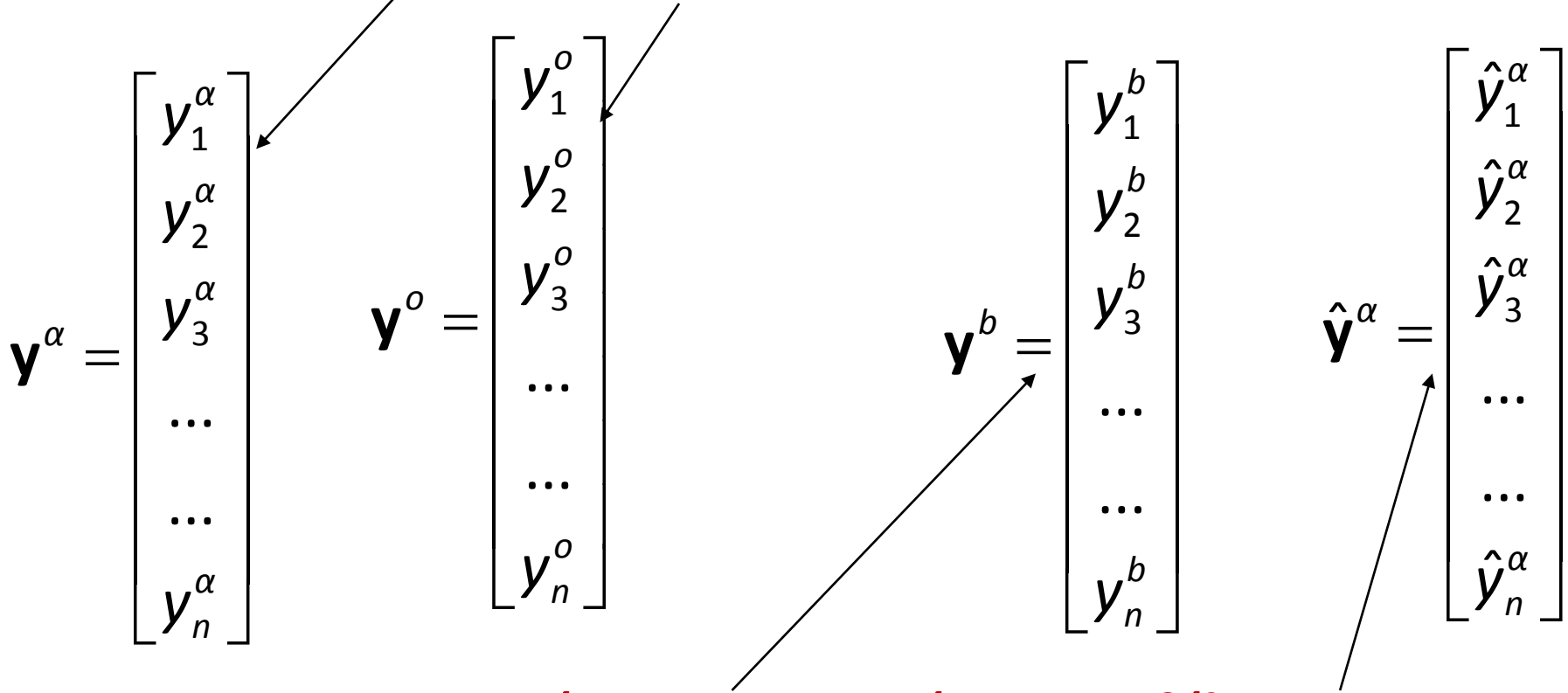
$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \\ \dots \\ \dots \\ \hat{x}_m \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{x}}^\alpha = \begin{bmatrix} \hat{x}_1^\alpha \\ \hat{x}_2^\alpha \\ \hat{x}_3^\alpha \\ \dots \\ \dots \\ \hat{x}_m^\alpha \end{bmatrix}$$

Βέλτιστες διορθώσεις προσεγγιστικών τιμών και βέλτιστες εκτιμήσεις αγνώστων παραμέτρων

Συνόρθωση με το μοντέλο των εξισώσεων παρατηρήσεων

Άγνωστες αληθείς και προσεγγιστικές παρατηρούμενες παράμετροι



Διάνυσμα παρατηρήσεων και βέλτιστες εκτιμήσεις παρατηρούμενων παραμέτρων

Συνόρθωση με το μοντέλο των εξισώσεων παρατηρήσεων

$$\mathbf{C}_v = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3^2 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

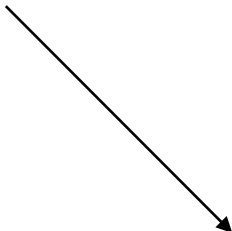
Πίνακας μεταβλητοτήτων/συμμεταβλητοτήτων παρατηρήσεων

$$\mathbf{P} = \mathbf{C}_v^{-1} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2^2} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sigma_3^2} & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sigma_n^2} \end{bmatrix}$$

Πίνακας βαρών παρατηρήσεων

Πίνακας ανοιγμένων παρατηρήσεων

$$\mathbf{b} = \mathbf{y}^b - \mathbf{y}^o = \begin{bmatrix} y_1^b \\ y_2^b \\ y_3^b \\ \dots \\ \dots \\ y_n^b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_1^o \\ y_2^o \\ y_3^o \\ \dots \\ \dots \\ y_n^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1^b - y_1^o \\ y_2^b - y_2^o \\ y_3^b - y_3^o \\ \dots \\ \dots \\ y_n^b - y_n^o \end{bmatrix}$$


- Με βάση το κριτήριο των ελαχίστων τετραγώνων το προηγούμενο σύστημα γίνεται:
 - *Ο πίνακας σχεδιασμού A μετασχηματίζεται σε πίνακα κανονικών εξισώσεων N .*
 - *Ο πίνακας b σε πίνακα u .*
 - *Αναλυτικά οι σχέσεις για τους νέους πίνακες είναι:*

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{u}, \quad \mathbf{N} = \mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{b}$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \left(\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A}\right)^{-1} \mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{b}, \quad \hat{\mathbf{v}} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}$$

$$\hat{\mathbf{x}}^a = \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{x}^o, \quad \hat{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}$$

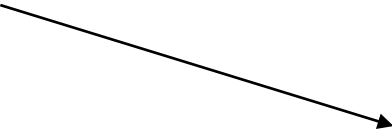
$$\hat{\mathbf{y}}^a = \mathbf{y}^o + \hat{\mathbf{y}} = \mathbf{y}^b - \hat{\mathbf{v}}$$

Πίνακας βαρών,
ακρίβειες των
παρατηρήσεων


$$\mathbf{P} = \mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\sigma_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sigma_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

Τέλικες βέλτιστες
εκτιμήσεις αγνώστων

$$\hat{\mathbf{x}}^a = \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{x}^o$$


$$\begin{bmatrix} \hat{X}_K^a \\ \hat{Y}_K^a \\ \hat{Z}_K^a \\ c\delta\hat{d}^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d\hat{X}_K \\ d\hat{Y}_K \\ d\hat{Z}_K \\ c\delta\hat{d} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_K^o \\ Y_K^o \\ Z_K^o \\ c\hat{d}^o \end{bmatrix}$$

a-posteriori εκτίμηση
της μεταβλητότητας
αναφοράς



$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{P} \hat{\mathbf{v}}}{n - m} = \frac{\hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{P} \hat{\mathbf{v}}}{f}$$

Συνόρθωση με το μοντέλο των εξισώσεων παρατηρήσεων

$$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{N}^{-1} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1}$$

$m \times m$

Πίνακας
μεταβλητοτήτων/συμμεταβλητοτήτων
αγνώστων παρατηρήσεων


$$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} \sigma_{\hat{x}}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\hat{y}}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\hat{z}}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{\hat{dT}}^2 \end{bmatrix}$$

Πίνακας σχεδιασμού A για τα διάφορα είδη παρατηρήσεων

Απόλυτος Προσδιορισμός Θέσης με GPS
(δέκτης K, δορυφόρος s(i))

$$P_K^i = \rho_K^i + c\delta_K - c\delta^i + I_K^i + T_K^i + \varepsilon_K^i$$

$$\left. \frac{\partial P_K^i}{\partial X_K} \right|_{X_K^0} = -\frac{x^i - x_K^0}{(\rho_K^i)^0}, \quad \left. \frac{\partial P_K^i}{\partial Y_K} \right|_{Y_K^0} = -\frac{y^i - y_K^0}{(\rho_K^i)^0}$$

$$\left. \frac{\partial P_K^i}{\partial Z_K} \right|_{Z_K^0} = -\frac{z^i - z_K^0}{(\rho_K^i)^0}, \quad \left. \frac{\partial P_K^i}{\partial \delta d_K} \right|_{\delta d_K^0} = -c$$

Απόλυτος Προσδιορισμός Θέσης με GPS (δέκτης r , 4 δορυφόροι s)

$$A = \begin{matrix} & \mathbf{x}_K & \mathbf{y}_K & \mathbf{z}_K & \delta d \\ \mathbf{s}^1 & \left[\begin{array}{c} \frac{x^1 - x_K^o}{(\rho_K^1)^0} \\ \frac{y^1 - y_K^o}{(\rho_K^1)^0} \\ \frac{z^1 - z_K^o}{(\rho_K^1)^0} \\ -1 \end{array} \right] \\ \mathbf{s}^2 & \left[\begin{array}{c} \frac{x^2 - x_K^o}{(\rho_K^2)^0} \\ \frac{y^2 - y_K^o}{(\rho_K^2)^0} \\ \frac{z^2 - z_K^o}{(\rho_K^2)^0} \\ -1 \end{array} \right] \\ \mathbf{s}^3 & \left[\begin{array}{c} \frac{x^3 - x_K^o}{(\rho_K^3)^0} \\ \frac{y^3 - y_K^o}{(\rho_K^3)^0} \\ \frac{z^3 - z_K^o}{(\rho_K^3)^0} \\ -1 \end{array} \right] \\ \mathbf{s}^4 & \left[\begin{array}{c} \frac{x^4 - x_K^o}{(\rho_K^4)^0} \\ \frac{y^4 - y_K^o}{(\rho_K^4)^0} \\ \frac{z^4 - z_K^o}{(\rho_K^4)^0} \\ -1 \end{array} \right] \end{matrix}$$

Απόλυτος Προσδιορισμός Θέσης με GPS (δέκτης K, 4 δορυφόροι (i,j,l,m), 4 εποχές (1,2,3,4))

$$\mathbf{A} = \begin{matrix} & \mathbf{X}_K & \delta d_1 & \delta d_2 & \delta d_3 & \delta d_4 \\ \text{Εποχή 1} & \left[\begin{array}{c} \frac{\partial P_{K1}^{i,j,l,m}}{\partial \mathbf{X}_K} \\ \frac{\partial P_{K2}^{i,j,l,m}}{\partial \mathbf{X}_K} \\ \frac{\partial P_{K3}^{i,j,l,m}}{\partial \mathbf{X}_K} \\ \frac{\partial P_{K4}^{i,j,l,m}}{\partial \mathbf{X}_K} \end{array} \right] & \begin{array}{c} -c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ -c \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ -c \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -c \end{array} \end{matrix}$$

Άγνωστοι = 7
Παρατηρήσεις = 16

Παράδειγμα απόλυτου προσδιορισμός θέσης με GPS (I)

$X_r = -197763.951$ m; $Y_r = -5512393.108$ m; $Z_r = 3191595.732$ m

SV	X_s (m)	Y_s (m)	Z_s (m)
2	837729.761	-16372739.124	20806828.321
15	14345304.312	-14543591.765	16824092.647
6	-4338336.160	17265997.291	19490981.421
9	-11645484.452	-1703052.998	23397778.661

Ο πίνακας σχεδιασμού A είναι:

$$A = \begin{bmatrix} -0.049956 & -0.523935 & 0.850292 & -1 \\ -0.664364 & 0.412568 & -0.623224 & -1 \\ 0.146209 & -0.804335 & -0.575906 & -1 \\ 0.486255 & -0.161806 & -0.858705 & -1 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα απόλυτου προσδιορισμός θέσης με GPS (I)

SV	X_s (m)	Y_s (m)	Z_s (m)
2	837729.761	-16372739.124	20806828.321
15	14345304.312	-14543591.765	16824092.647
6	-4338336.160	17265997.291	19490981.421
9	-11645484.452	-1703052.998	23397778.661
Rx	X_r (m)	Y_r (m)	Z_r (m)
	-197769.951	-5512393.108	3191595.792
S_{r2}	20728490.000	S_{r15}	21890123.000
S_{r6}	28319456.000	S_{r9}	23542685.000

Όλες οι παρατηρήσεις έγιναν με ακρίβεια ± 10 cm

$$\begin{aligned} S_{r2}^o &= \sqrt{(x^2 - x_r)^2 + (y^2 - y_r)^2 + (z^2 - z_r)^2} = \\ &= \sqrt{(837729.761 + 197769.951)^2 + (-16372739.124 + 5512393.108)^2 +} \\ &= \sqrt{+ (20806828.321 - 3191595.792)^2} = \\ &= 20728439.327 m \end{aligned}$$

Όμοια

$$S_{r15}^o = 21890209.653 m, \quad S_{r6}^o = 28319523.606 m, \quad S_{r9}^o = 23542627.066 m$$

Παράδειγμα απόλυτου προσδιορισμός θέσης με GPS (I)

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} S_{r2}^b - S_{r2}^o \\ S_{r15}^b - S_{r15}^o \\ S_{r6}^b - S_{r6}^o \\ S_{r9}^b - S_{r9}^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20728490.000 - 20728439.327 \\ 21890123.000 - 21890209.653 \\ 28319456.000 - 28319523.606 \\ 23542685.000 - 23542627.066 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -50.673 \\ 86.653 \\ 67.606 \\ -56.934 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0.049956 & -0.523935 & 0.850292 & -1 \\ -0.664364 & 0.412568 & -0.623224 & -1 \\ 0.146209 & -0.804335 & -0.575906 & -1 \\ 0.486255 & -0.161806 & -0.858705 & -1 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα απόλυτου προσδιορισμός θέσης με GPS (I)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0.049956 & -0.523935 & 0.850292 & -1 \\ -0.664364 & 0.412568 & -0.623224 & -1 \\ 0.146209 & -0.804335 & -0.575906 & -1 \\ 0.486255 & -0.161806 & -0.858705 & -1 \end{bmatrix}$$

$$a_{11} = \frac{837729.761 - (-197769.951)}{20728439.327} = -0.049956$$

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} -0.049956 & -0.664364 & 0.146209 & 0.486255 \\ -0.523935 & 0.412568 & -0.804335 & -0.161806 \\ 0.850292 & -0.623224 & -0.575906 & -0.858705 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα απόλυτου προσδιορισμός θέσης με GPS (I)

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 70.16962365 & -44.42019383 & -13.01814298 & 8.185617 \\ -44.42019383 & 111.7856101 & -10.04543382 & 107.7508 \\ -13.01814298 & -10.04543382 & 218.0447662 & 120.7543 \\ 8.185617375 & 107.7507937 & 120.7542917 & 400 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.029432024 & 0.020324039 & 0.007275442 & -0.008273 \\ 0.020324039 & 0.027774897 & 0.008245406 & -0.010387 \\ 0.007275442 & 0.008245403 & 0.008060596 & -0.004803 \\ -0.008273479 & -0.010386999 & -0.004803386 & 0.006917 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -7283.741649 \\ 1713.340158 \\ -8713.601957 \\ -4665.2254 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα απόλυτου προσδιορισμός θέσης με GPS (I)

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -204.3509302 \\ -123.8366631 \\ -86.69321385 \\ 52.04897374 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{x}}^a = \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{x}^o = \begin{bmatrix} -204.3509302 \\ -123.8366631 \\ -86.69321385 \\ 52.04897374 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -197769.951 \\ -5512393.108 \\ 3181595.792 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -197974.302 \\ -5512516.945 \\ 3181509.099 \\ 52.049 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_r \\ y_r \\ z_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -197974.302 \text{ m} \\ -5512516.945 \text{ m} \\ 3181509.099 \text{ m} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{cdT} &= 52.049 \text{ m} \Rightarrow \text{dT} = 1.73496579128 \cdot 10^{-7} \text{ s} \\ &\Rightarrow \text{dT} = 0.173496579128 \text{ } \mu\text{s} \end{aligned}$$

$$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{N}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.029432024 & 0.020324039 & 0.007275442 & -0.008273 \\ 0.020324039 & 0.027774897 & 0.008245406 & -0.010387 \\ 0.007275442 & 0.008245403 & 0.008060596 & -0.004803 \\ -0.008273479 & -0.010386999 & -0.004803386 & 0.006917 \end{bmatrix}$$

Θα φανεί χρήσιμος στα γεωμετρικά μέτρα ακρίβειας των μετρήσεων GPS

Παράδειγμα απόλυτου προσδιορισμός θέσης με GPS (II)

SV	X_s (m)	Y_s (m)	Z_s (m)
15	19893546.895	-7090496.480	16594411.908
27	10962379.722	10259769.378	21675314.007
31	6008825.202	13722255.067	21950922.781
7	16732066.969	16670534.874	12294322.665
Rx	X_r (m)	Y_r (m)	Z_r (m)
	4463674.587	1890981.398	4131173.486
$P_{K 15}$	21773407.000	$P_{K 27}$	20495509.318
$P_{K 31}$	21445500.000	$P_{K 7}$	20870695.576

Παράδειγμα απόλυτου προσδιορισμός θέσης με GPS (II)

PRN	Τυπική απόκλιση (m)	Ιονοσφαιρικό σφάλμα (m)
15	± 0.01	1.912
27	± 0.05	2.265
31	± 0.02	2.114
7	± 0.04	1.670

PRN	Γωνία ύψους (Deg)
15	48.2
27	63.4
31	54.5
7	60.1

Ολική Ατμοσφαιρική Πίεση (mbar)	Θερμοκρασία (Kelvin)	Μερική πίεση υδρατμών (mbar)
$P_0 = 1026$	$T_0 = 286.3$	$e_0 = 7.83$

Παράδειγμα απόλυτου προσδιορισμός θέσης με GPS

$$\begin{aligned} (P_K^{15})^0 &= \sqrt{(x^{15} - x_K^0)^2 + (y^{15} - y_K^0)^2 + (z^{15} - z_K^0)^2} = \\ &= \sqrt{(19893546.895 - 4463674.587)^2 + (-7090496.48 + 1890981.398)^2 + \\ &\quad + (16594411.908 - 4131173.486)^2} = \\ &= 21773383.207m \end{aligned}$$

Όμοια

$$(P_K^{27})^0 = 20495509.317m, \quad (P_K^{31})^0 = 21445512.164m,$$

$$(P_K^7)^0 = 20870688.947m$$

Υπολογισμός τροποσφαιρικού σφάλματος με το μοντέλο Saastamoinen

Ο Saastamoinen το 1972 (Saastamoinen, 1972) πρότεινε ένα μοντέλο για τον υπολογισμό της Τροποσφαιρικής υστέρησης ΔL και για τις δύο συνιστώσες (υγρή και ξηρή) ανάλογα με την ζενίθεια γωνία του δορυφόρου, όταν δίνονται στοιχεία πίεσης και θερμοκρασίας στο έδαφος :

$$\Delta L = \frac{2.277 \cdot 10^{-3}}{\cos(90^\circ - \nu)} \left(P_0 + \left(\frac{1255}{T_0} + 0.05 \right) \cdot e_0 - 1.16 \cdot \tan^2(90^\circ - \nu) \right) \quad \text{σε μέτρα}$$

P_0 = η ολική πίεση στην επιφάνεια του εδάφους. (σε mbar).

e_0 = η μερική πίεση των υδρατμών (σε mbar).

T_0 = η θερμοκρασία σε βαθμούς Kelvin.

Συνήθως στις περισσότερες εφαρμογές αντί της ζενίθειας απόστασης δίνεται γωνία ύψους του δορυφόρου, η σχέση που συνδέει τα δύο μεγέθη είναι $z = 90^\circ - \nu$

Υπολογισμός τροποσφαιρικού σφάλματος με το μοντέλο Saastamoinen

Παρατηρούμε ένα δορυφόρο με γωνία ύψους $\nu=15^\circ$ και οι μετεωρολογικές παρατηρήσεις στην επιφάνεια του εδάφους είναι :

Η ολική πίεση $P_0 = 1026$ mbar , η μερική πίεση των υδρατμών $e_0 = 7,83$ mbar και η θερμοκρασία $T_0 = 286,3$ βαθμοί Kelvin. Η υστέρηση από το μοντέλο του Saastamoinen θα είναι :

$$\Delta L = \frac{2.277 \cdot 10^{-3}}{\cos(75^\circ)} \left(1026 + \left(\frac{1255}{286.3} + 0.05 \right) \cdot 7.83 - 1.16 \cdot \tan^2(75^\circ) \right) \Rightarrow$$

$$\Delta L = 9.1897 \text{ m}$$

Υπολογισμός τροποσφαιρικού σφάλματος με το μοντέλο Saastamoinen

$$\begin{aligned}\Delta L_{Saast}^{15} &= \frac{2.277 \cdot 10^{-3}}{\cos(90^\circ - \nu)} \left(P_o + \left(\frac{1255}{T_o} + 0.05 \right) e_o - 1.16 \tan^2(90^\circ - \nu) \right) = \\ &= \frac{2.277 \cdot 10^{-3}}{\cos(90^\circ - 48.2^\circ)} \cdot \\ &\cdot \left(1026.0 + \left(\frac{1255}{286.3} + 0.05 \right) 7.830 - 1.16 \tan^2(90^\circ - 48.2^\circ) \right) = \\ &= 3.23704 \text{ m}\end{aligned}$$

$$\left(P_K^{15} \right)^{b'} = 21773407.000 - 1.912 - 3.237 = 21773402.851 \text{ m}$$

Όμοια

$$\Delta L_{Saast}^{27} = 2.7004 \text{ m}, \Delta L_{Saast}^{31} = 2.96506 \text{ m}, \Delta L_{Saast}^7 = 2.78508 \text{ m},$$

$$\left(P_K^{27}\right)^{b'} = 20495509.318 - 2.265 - 2.7004 = 20495504.353 \text{ m}$$

$$\left(P_K^{31}\right)^{b'} = 21445500.000 - 2.114 - 2.9651 = 21445494.921 \text{ m}$$

$$\left(P_K^7\right)^{b'} = 20870695.576 - 1.670 - 2.7851 = 20870691.121 \text{ m}$$

Παράδειγμα απόλυτου προσδιορισμός θέσης με GPS

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} (P_K^{15})^{b'} - (P_K^{15})^o \\ (P_K^{27})^{b'} - (P_K^{27})^o \\ (P_K^{31})^{b'} - (P_K^{31})^o \\ (P_K^7)^{b'} - (P_K^7)^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21773402.851 - 21773383.207 \\ 20495504.353 - 20495527.495 \\ 21445494.921 - 21445512.164 \\ 20870631.121 - 20870688.947 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19.644 \\ -23.143 \\ -17.243 \\ 2.174 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 400 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2500 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 625 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0.708654 & 0.412498 & -0.572407 & -1 \\ -0.317079 & -0.408323 & -0.855998 & -1 \\ -0.072050 & -0.551690 & -0.830931 & -1 \\ -0.587829 & -0.708149 & -0.391130 & -1 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα απόλυτου προσδιορισμός θέσης με GPS

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0.708654 & 0.412498 & -0.572407 & -1 \\ -0.317079 & -0.408323 & -0.855998 & -1 \\ -0.072050 & -0.551690 & -0.830931 & -1 \\ -0.587829 & -0.708149 & -0.391130 & -1 \end{bmatrix}$$

$$a_{11} = \frac{19893546.895 - 4463674.587}{21773383.207} = -0.709658$$

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} -0.708654 & -0.317079 & -0.072050 & -0.587829 \\ 0.412498 & -0.408323 & -0.551690 & -0.708149 \\ -0.572407 & -0.855998 & -0.830931 & -0.391130 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα απόλυτου προσδιορισμός θέσης με GPS

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 319.377465 & 382.098429 & 442.501807 & 745.215609 \\ 382.098429 & 1158.032644 & 1435.350336 & 1943.897149 \\ 442.501807 & 1435.350336 & 2147.589892 & 2721.424732 \\ 745.215609 & 1943.897149 & 2721.424732 & 3625.000000 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.05748321 & 0.023172908 & 0.069651706 & -0.0765338 \\ 0.02317291 & 0.018423544 & 0.030164471 & -0.037289 \\ 0.06965171 & 0.030164471 & 0.094443471 & -0.10139668 \\ -0.0765338 & -0.037289 & -0.10139668 & 0.11212789 \end{bmatrix}$$

$$u = \begin{bmatrix} 3850.281 \\ 27410.363 \\ 42088.253 \\ 49042.198 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα απόλυτου προσδιορισμός θέσης με GPS

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 34.637 \\ 35.054 \\ 97.242 \\ -85.393 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{x}}^a = \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{x}^o = \begin{bmatrix} 4463709.224 \\ 1891016.452 \\ 4131270.728 \\ -85.393 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_K \\ Y_K \\ Z_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4463709.224 \text{ m} \\ 1891016.452 \text{ m} \\ 4131270.728 \text{ m} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{cdT} = -85.393 \text{ m} &\Rightarrow \text{dT} = -2.8464254 \cdot 10^{-7} \text{ s} \Rightarrow \\ \text{dT} &= 0.28464254 \text{ } \mu\text{s} \end{aligned}$$

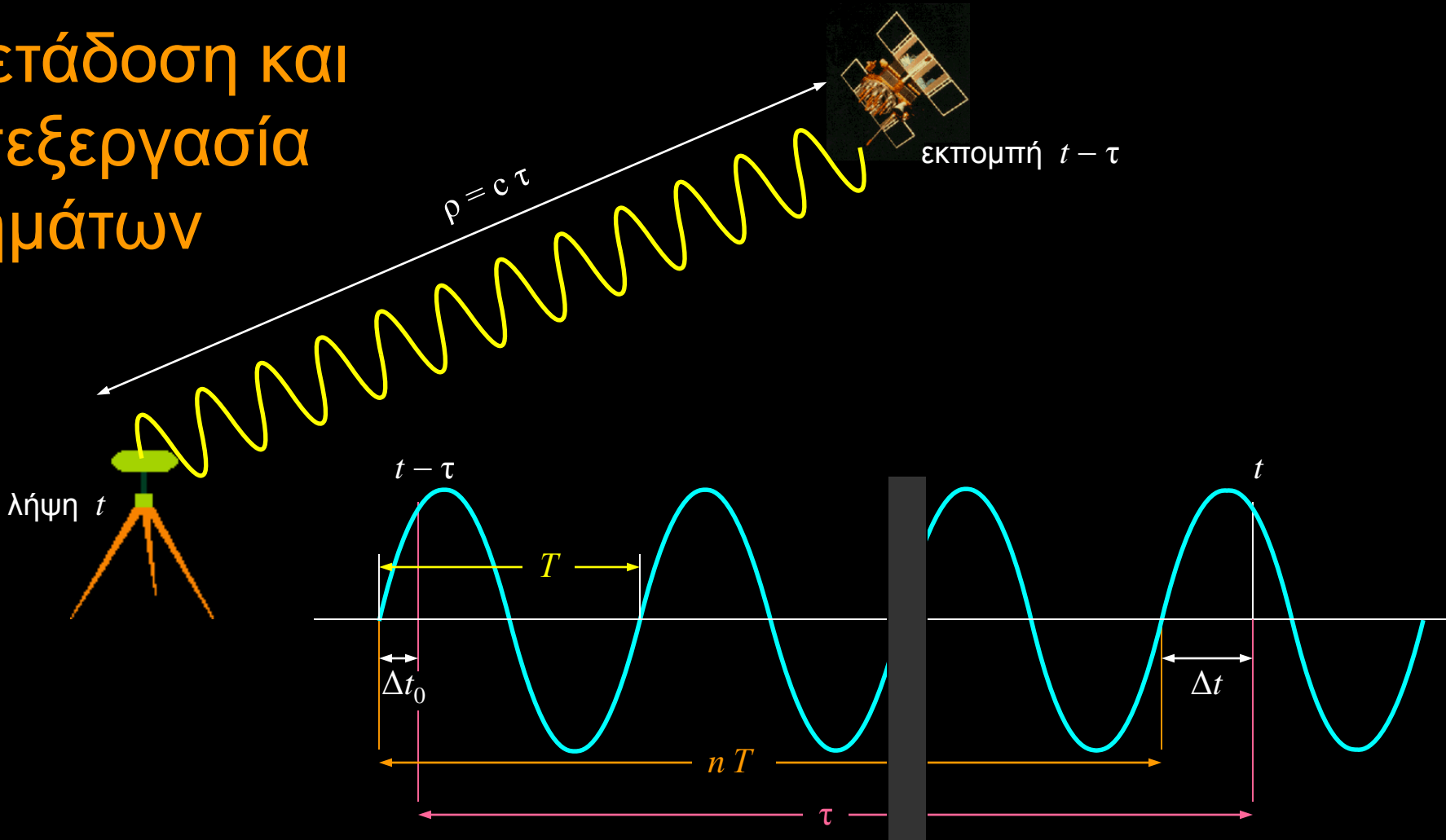
$$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{N}^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0.05748321 & 0.023172905 & 0.069651706 & -0.07653338 \\ 0.002317291 & 0.018423544 & 0.030164471 & -0.0372890 \\ 0.06965171 & 0.030164471 & 0.094443471 & -0.10139668 \\ -0.07653338 & -0.037289 & -0.10139688 & 0.11212789 \end{bmatrix}$$

Θα φανεί χρήσιμος στα γεωμετρικά μέτρα ακρίβειας των μετρήσεων GPS

Διάδοση σημάτων

Μετάδοση και επεξεργασία σημάτων



$$\tau = nT + \Delta t - \Delta t_0$$

$$\frac{c\tau}{cT} = \frac{\rho}{\lambda} = n + \frac{\Delta t}{T} - \frac{\Delta t_0}{T} = n + \Phi - \Phi_0 = n + \Delta\Phi$$

Παρατήρηση :

$$\Delta\Phi = \rho - n\lambda$$

Εκπομπή και λήψη σήματος

Σήμα στον πομπό: $x(t)$

Σήμα στο δέκτη:

$$y(t) = k x(t - \tau) + n(t)$$

$k =$ σταθερά,

$n(t) =$ θόρυβος

Εκπομπή και λήψη σήματος

Σήμα στον πομπό: $x(t)$

Σήμα στο δέκτη:

$$y(t) = k x(t - \tau) + n(t)$$

Χρόνος μετάδοσης: $\tau = \rho / c$

ρ = απόσταση πομπού - δέκτη

c = ταχύτητα μετάδοσης = ταχύτητα φωτός στο κενό

k = σταθερά, $n(t)$ = θόρυβος

Εκπομπή και λήψη σήματος

Σήμα στον πομπό: $x(t)$

Σήμα στο δέκτη:

$$y(t) = k x(t - \tau) + n(t)$$

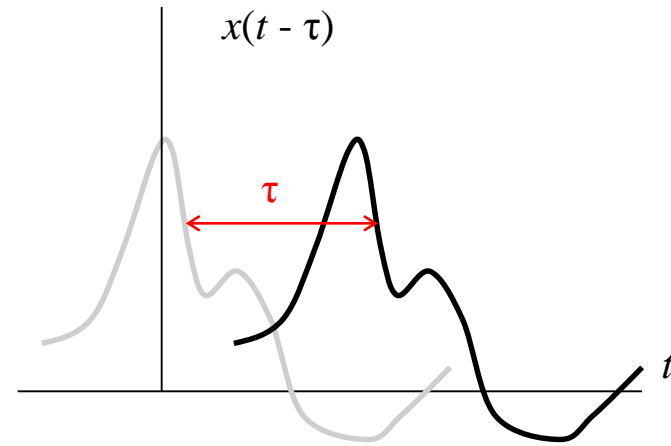
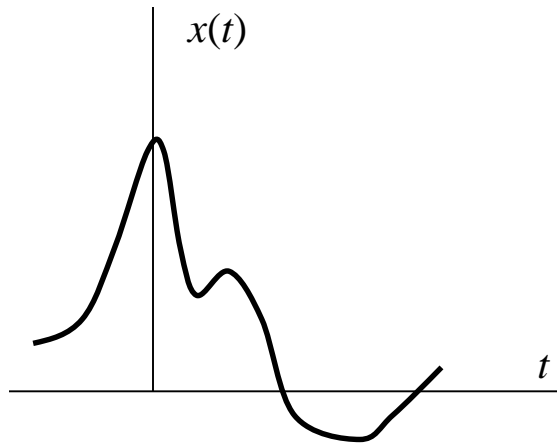
Χρόνος μετάδοσης: $\tau = \rho / c$

ρ = απόσταση πομπού - δέκτη

c = ταχύτητα μετάδοσης = ταχύτητα φωτός στο κενό

k = σταθερά,

$n(t)$ = θόρυβος



Εκπομπή και λήψη σήματος

Σήμα στον πομπό: $x(t)$

Σήμα στο δέκτη:

$$y(t) = k x(t - \tau) + n(t)$$

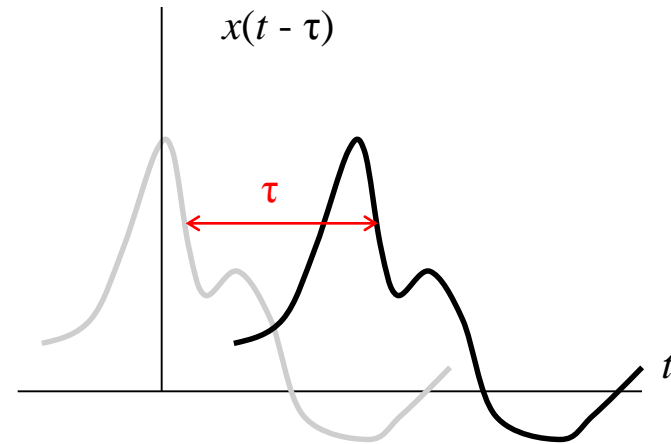
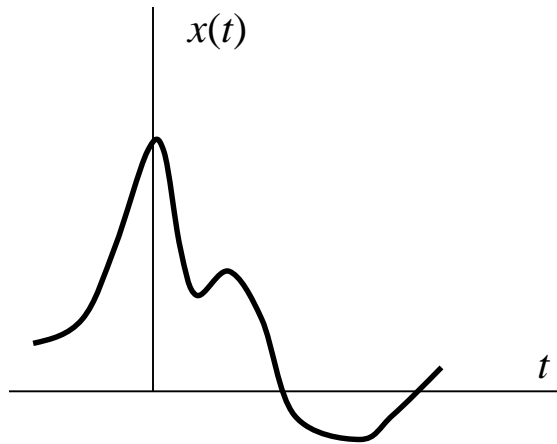
Χρόνος μετάδοσης: $\tau = \rho / c$

ρ = απόσταση πομπού - δέκτη

c = ταχύτητα μετάδοσης = ταχύτητα φωτός στο κενό

k = σταθερά,

$n(t)$ = θόρυβος



Η συνάρτηση $g(t) = f(t - \tau)$ παίρνει τη χρονική στιγμή t την τιμή που είχε η συνάρτηση f την στιγμή $t - \tau$, πριν από χρονικό διάστημα τ

= καθυστέρηση κατά τ = μετάθεση γραφήματος προς τα δεξιά (= μέλλον) κατά τ

Εκπομπή και λήψη σήματος

Σήμα στον πομπό: $x(t)$

Σήμα στο δέκτη:

$$y(t) = k x(t - \tau) + n(t)$$

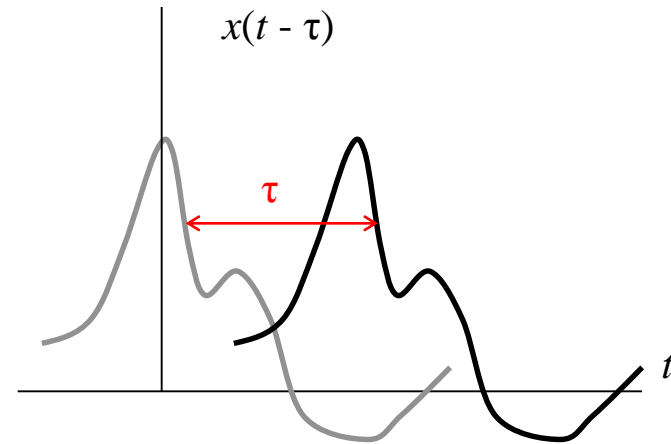
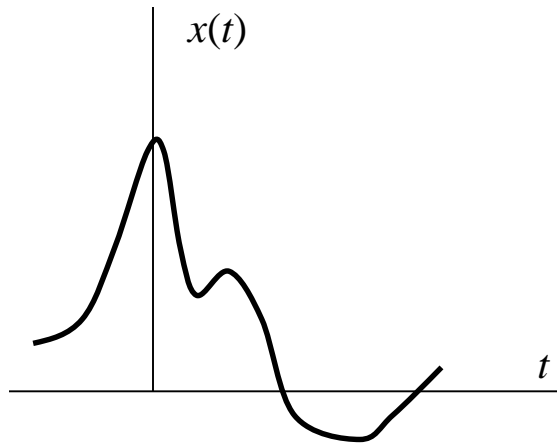
Χρόνος μετάδοσης: $\tau = \rho / c$

ρ = απόσταση πομπού - δέκτη

c = ταχύτητα μετάδοσης = ταχύτητα φωτός στο κενό

k = σταθερά,

$n(t)$ = θόρυβος



Εκπομπή και λήψη σήματος

Σήμα στον πομπό: $x(t)$

Σήμα στο δέκτη:

$$y(t) = k x(t - \tau) + n(t)$$

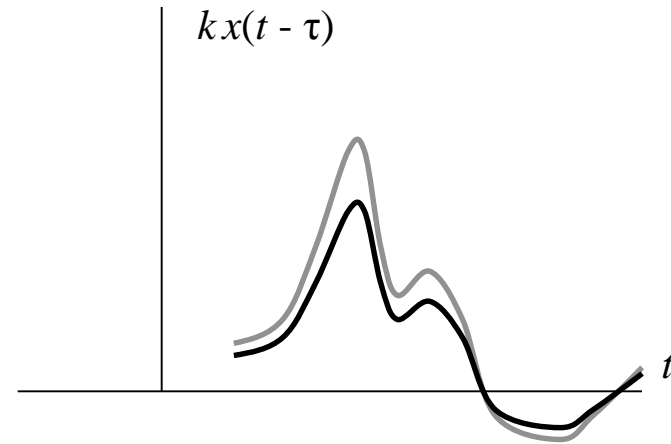
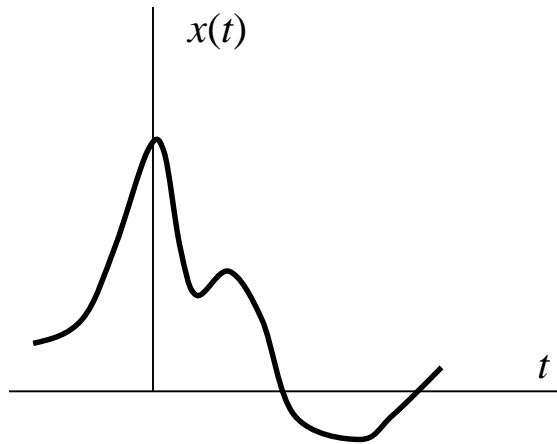
Χρόνος μετάδοσης: $\tau = \rho / c$

ρ = απόσταση πομπού - δέκτη

c = ταχύτητα μετάδοσης = ταχύτητα φωτός στο κενό

k = σταθερά,

$n(t)$ = θόρυβος



Εκπομπή και λήψη σήματος

Σήμα στον πομπό: $x(t)$

Σήμα στο δέκτη:

$$y(t) = k x(t - \tau) + n(t)$$

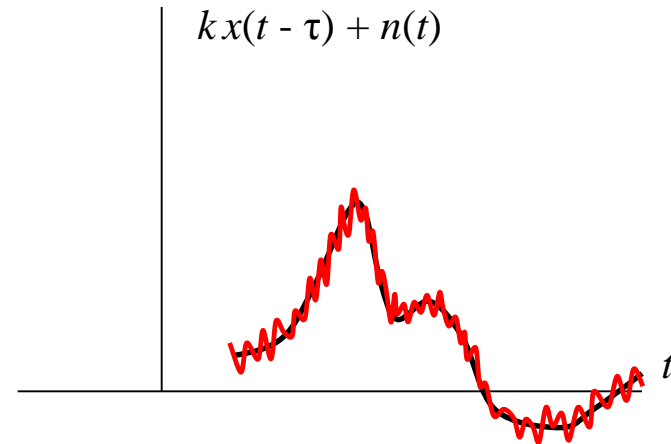
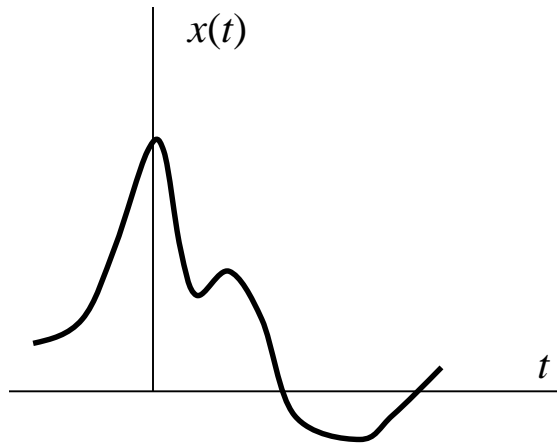
Χρόνος μετάδοσης: τ

$\rho = c\tau =$ απόσταση πομπού - δέκτη

$c =$ ταχύτητα μετάδοσης = ταχύτητα φωτός στο κενό

$k =$ σταθερά,

$n(t) =$ θόρυβος



Θόρυβος $n(t) =$ παράσιτα που οφείλονται στη μετάδοση
(ατμόσφαιρα, ηλεκτρονικά τμήματα πομπού και δέκτη)

Μονοχρωματικά (ημιτονοειδή) σήματα

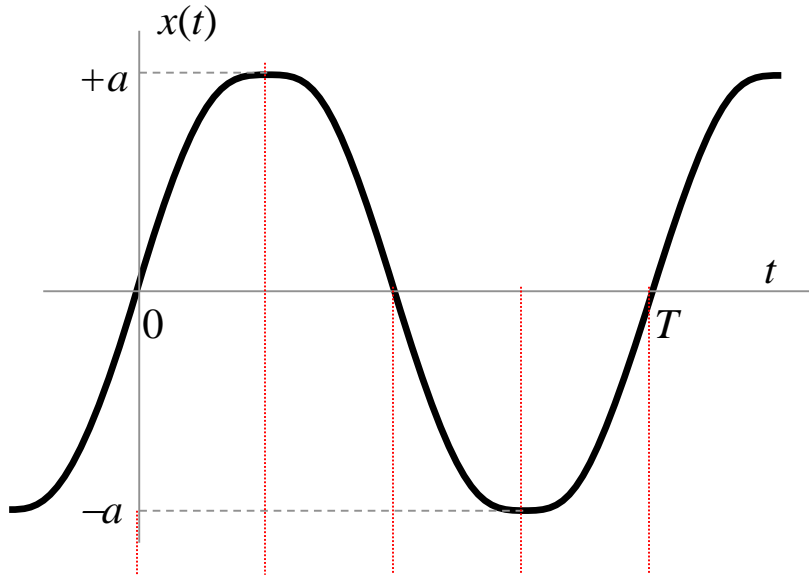
Μονοχρωματικό σήμα = περιοδικό σήμα ημιτονοειδούς μορφής :

$$x(t) = a \sin \frac{2\pi t}{T}$$

Μονοχρωματικά (ημιτονοειδή) σήματα

Μονοχρωματικό σήμα = περιοδικό σήμα ημιτονοειδούς μορφής :

$$x(t) = a \sin \frac{2\pi t}{T}$$

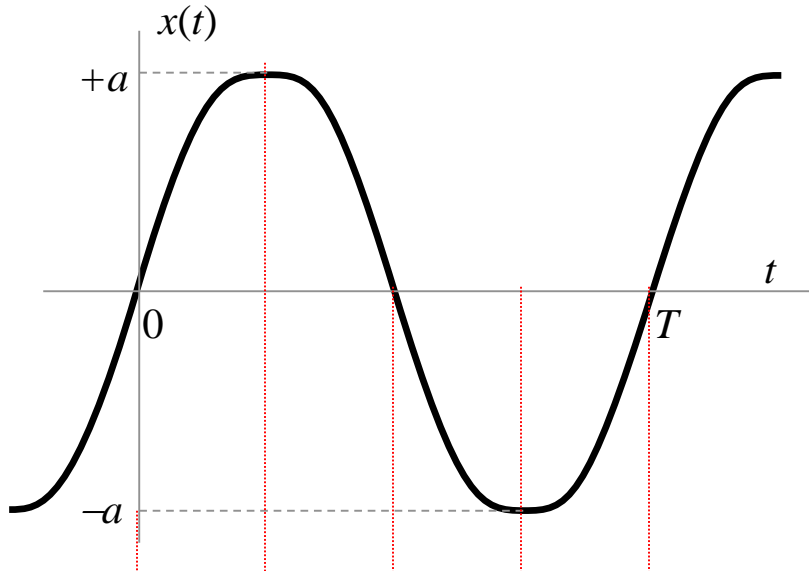


T = περίοδος

Μονοχρωματικά (ημιτονοειδή) σήματα

Μονοχρωματικό σήμα = περιοδικό σήμα ημιτονοειδούς μορφής :

$$x(t) = a \sin \frac{2\pi t}{T}$$



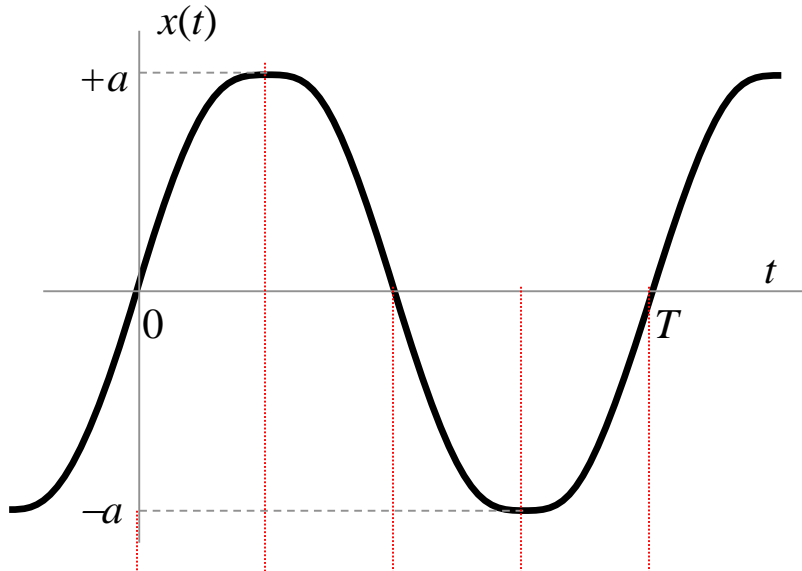
$T =$ περίοδος

$t =$	0	$\frac{1}{4} T$	$\frac{1}{2} T$	$\frac{3}{4} T$	T
$\frac{2\pi t}{T} =$	0	$\frac{1}{2} \pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\sin \frac{2\pi t}{T} =$	0	+1	0	-1	0
$x(t) =$	0	+a	0	-a	0

Μονοχρωματικά (ημιτονοειδή) σήματα

Μονοχρωματικό σήμα = περιοδικό σήμα ημιτονοειδούς μορφής :

$$x(t) = a \sin \frac{2\pi t}{T}$$



T = περίοδος

συχνότητα : $f = \frac{1}{T}$

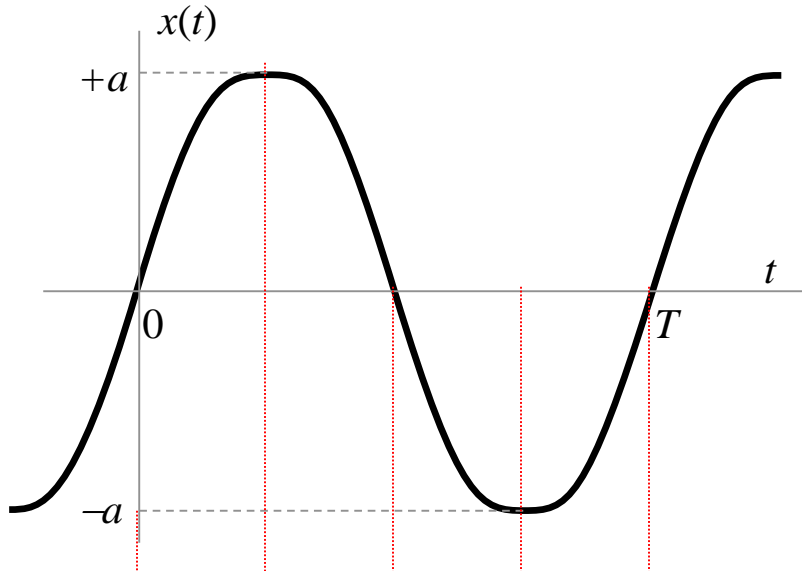
(Hertz = κύκλοι / δευτερόλεπτο)

$t =$	0	$\frac{1}{4} T$	$\frac{1}{2} T$	$\frac{3}{4} T$	T
$\frac{2\pi t}{T} =$	0	$\frac{1}{2} \pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\sin \frac{2\pi t}{T} =$	0	+1	0	-1	0
$x(t) =$	0	+a	0	-a	0

Μονοχρωματικά (ημιτονοειδή) σήματα

Μονοχρωματικό σήμα = περιοδικό σήμα ημιτονοειδούς μορφής :

$$x(t) = a \sin \frac{2\pi t}{T}$$



T = περίοδος

συχνότητα : $f = \frac{1}{T}$

(Hertz = κύκλοι / δευτερόλεπτο)

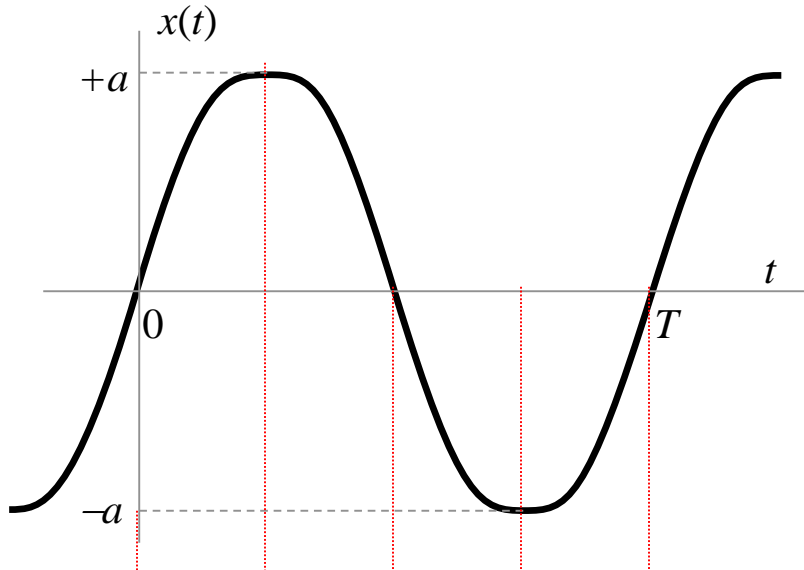
γωνιακή συχνότητα : $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$

$t =$	0	$\frac{1}{4} T$	$\frac{1}{2} T$	$\frac{3}{4} T$	T
$\frac{2\pi t}{T} =$	0	$\frac{1}{2} \pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\sin \frac{2\pi t}{T} =$	0	+1	0	-1	0
$x(t) =$	0	+a	0	-a	0

Μονοχρωματικά (ημιτονοειδή) σήματα

Μονοχρωματικό σήμα = περιοδικό σήμα ημιτονοειδούς μορφής :

$$x(t) = a \sin \frac{2\pi t}{T}$$



T = περίοδος

συχνότητα : $f = \frac{1}{T}$

(Hertz = κύκλοι / δευτερόλεπτο)

γωνιακή συχνότητα : $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$

μήκος κύματος : $\lambda = cT$

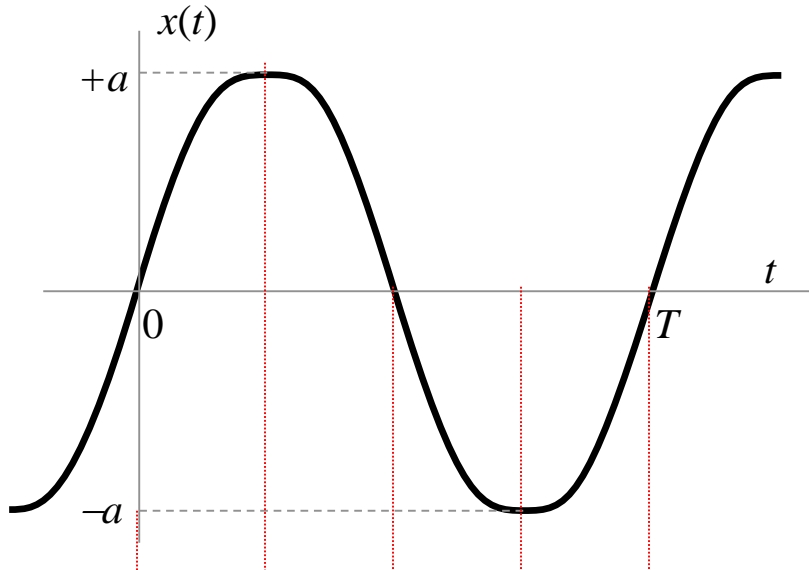
c = ταχύτητα φωτός στο κενό

$t =$	0	$\frac{1}{4} T$	$\frac{1}{2} T$	$\frac{3}{4} T$	T
$\frac{2\pi t}{T} =$	0	$\frac{1}{2} \pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\sin \frac{2\pi t}{T} =$	0	+1	0	-1	0
$x(t) =$	0	+a	0	-a	0

Μονοχρωματικά (ημιτονοειδή) σήματα

Μονοχρωματικό σήμα = περιοδικό σήμα ημιτονοειδούς μορφής :

$$x(t) = a \sin \frac{2\pi t}{T}$$



T = περίοδος

συχνότητα : $f = \frac{1}{T}$

(Hertz = κύκλοι / δευτερόλεπτο)

γωνιακή συχνότητα : $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$

μήκος κύματος : $\lambda = cT$

c = ταχύτητα φωτός στο κενό

Εναλλακτικές περιγραφές σήματος :

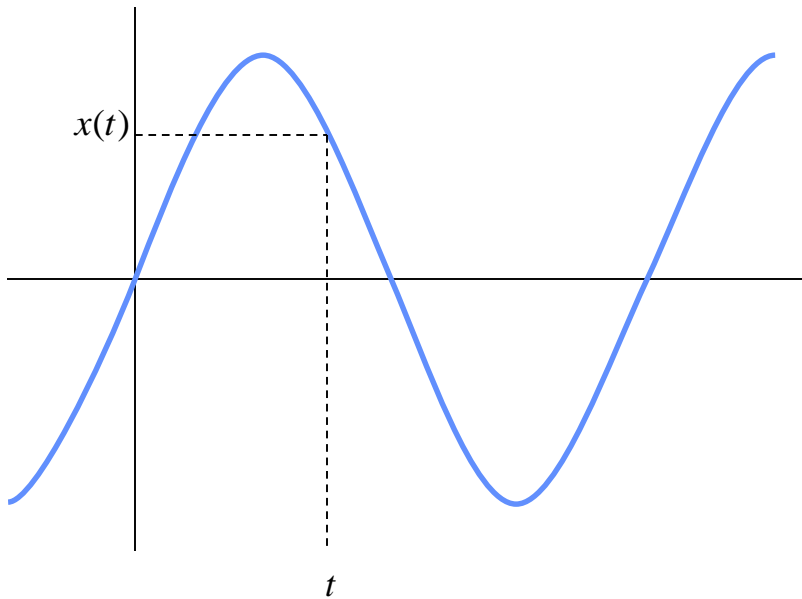
$$x(t) = a \sin \frac{2\pi t}{T} = a \sin(2\pi f t) = a \sin(\omega t) = a \sin \frac{2\pi c t}{\lambda}$$

↓
απλούστερη !

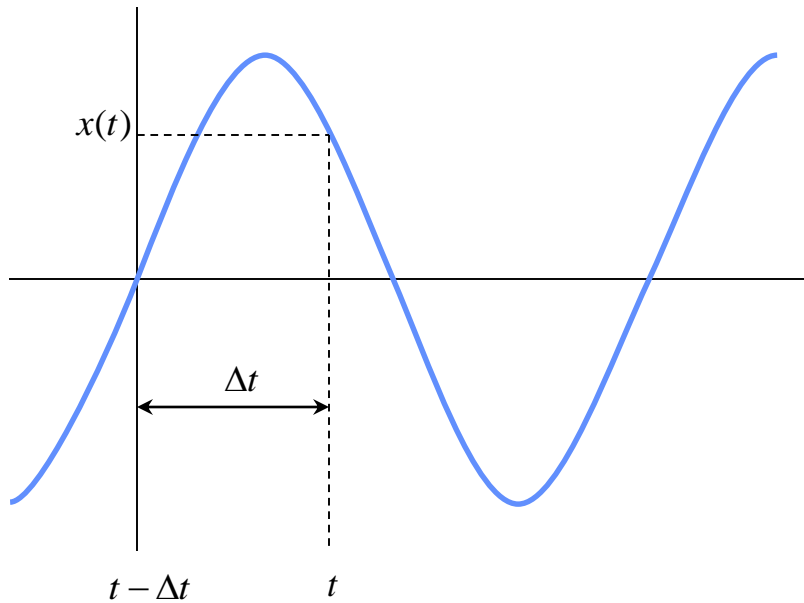
$t =$	0	$1/4 T$	$1/2 T$	$3/4 T$	T
$\frac{2\pi t}{T} =$	0	$1/2 \pi$	π	$3/2 \pi$	2π
$\sin \frac{2\pi t}{T} =$	0	+1	0	-1	0
$x(t) =$	0	+a	0	-a	0

Φάση σήματος

Φάση σήματος κατά μία χρονική στιγμή t :



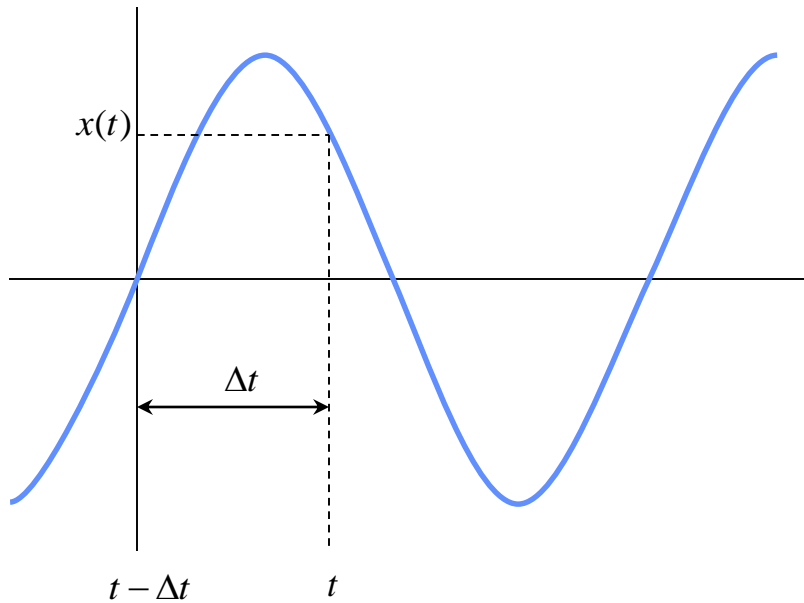
Φάση σήματος



Φάση σήματος κατά μία χρονική στιγμή t :

$t - \Delta t =$ αμέσως προηγούμενη στιγμή με $x(t - \Delta t) = 0$
και $x(t - \Delta t + \varepsilon) > 0$ (αρχή τρέχοντος κύκλου)

Φάση σήματος



Φάση σήματος κατά μία χρονική στιγμή t :

$t - \Delta t =$ αμέσως προηγούμενη στιγμή με $x(t - \Delta t) = 0$
και $x(t - \Delta t + \varepsilon) > 0$ (αρχή τρέχοντος κύκλου)

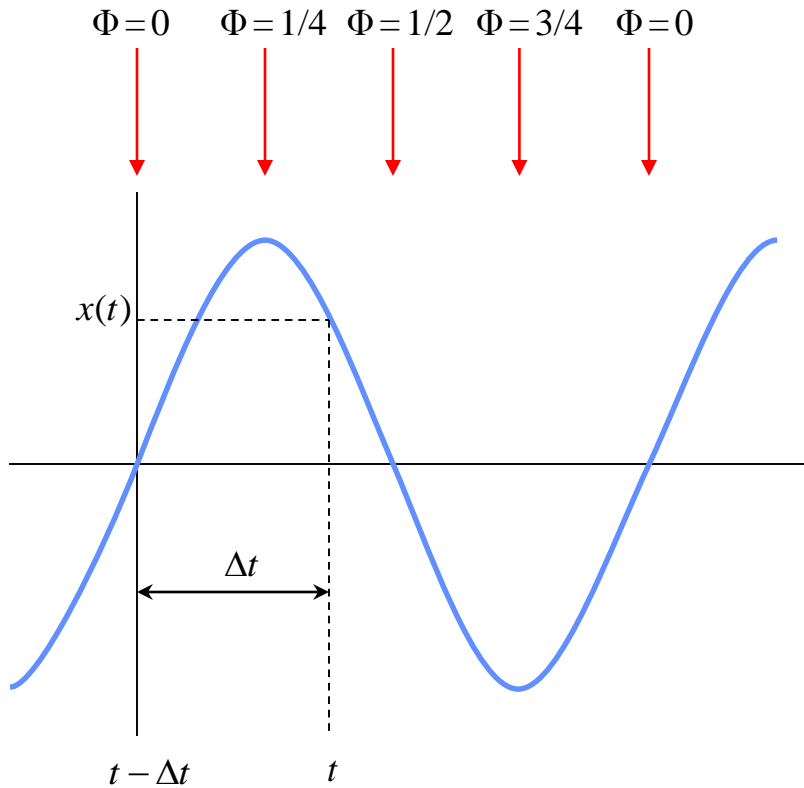
$$\Phi(t) = \frac{\Delta t}{T} = \text{φάση κατά τη στιγμή } t$$

$$0 \leq \Delta t < T$$

$$0 \leq \Phi < 1$$

(φάση = τρέχον κλάσμα της περιόδου)

Φάση σήματος



Φάση σήματος κατά μία χρονική στιγμή t :

$t - \Delta t =$ αμέσως προηγούμενη στιγμή με $x(t - \Delta t) = 0$
και $x(t - \Delta t + \varepsilon) > 0$ (αρχή τρέχοντος κύκλου)

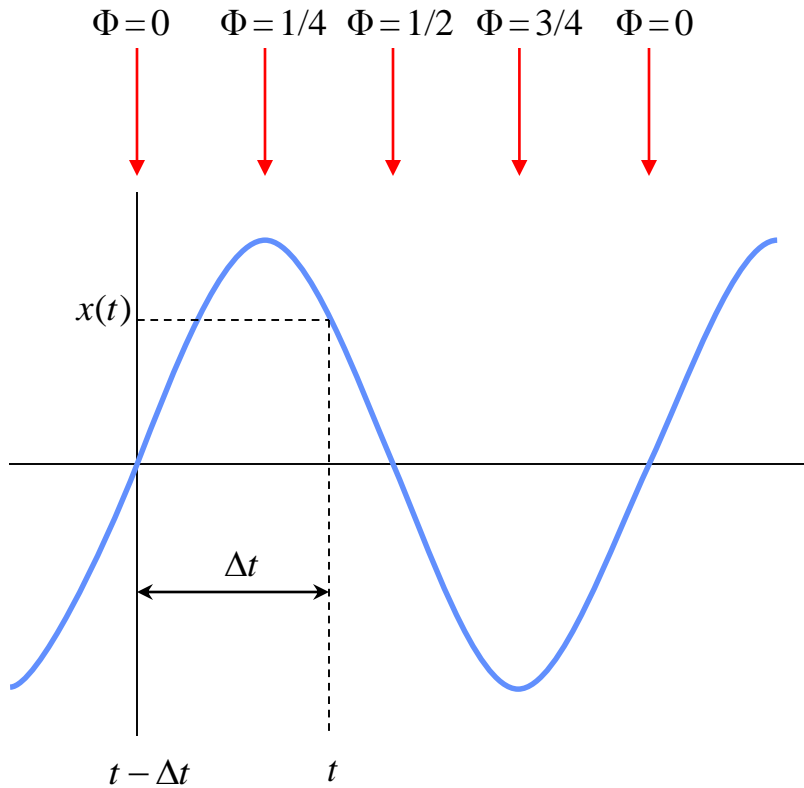
$$\Phi(t) = \frac{\Delta t}{T} = \text{φάση κατά τη στιγμή } t$$

$$0 \leq \Delta t < T$$

$$0 \leq \Phi < 1$$

(φάση = τρέχον κλάσμα της περιόδου)

Φάση σήματος



Φάση σήματος κατά μία χρονική στιγμή t :

$t - \Delta t =$ αμέσως προηγούμενη στιγμή με $x(t - \Delta t) = 0$
και $x(t - \Delta t + \varepsilon) > 0$ (αρχή τρέχοντος κύκλου)

$$\Phi(t) = \frac{\Delta t}{T} = \text{φάση κατά τη στιγμή } t$$

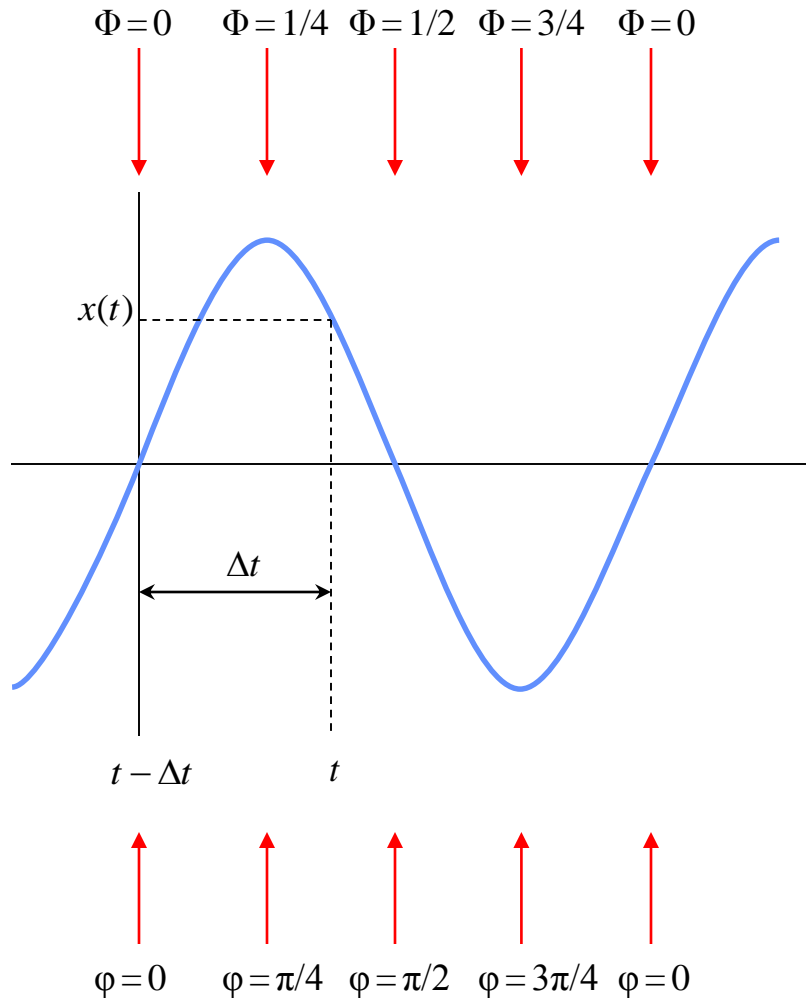
$$0 \leq \Delta t < T \qquad 0 \leq \Phi < 1$$

(φάση = τρέχον κλάσμα της περιόδου)

$$\varphi(t) = 2\pi\Phi(t) = 2\pi\frac{\Delta t}{T} = \text{γωνία φάσης}$$

$$0 \leq \varphi < 2\pi$$

Φάση σήματος



Φάση σήματος κατά μία χρονική στιγμή t :

$t - \Delta t$ = αμέσως προηγούμενη στιγμή με $x(t - \Delta t) = 0$
 και $x(t - \Delta t + \varepsilon) > 0$ (αρχή τρέχοντος κύκλου)

$$\Phi(t) = \frac{\Delta t}{T} = \text{φάση κατά τη στιγμή } t$$

$$0 \leq \Delta t < T \quad 0 \leq \Phi < 1$$

(φάση = τρέχον κλάσμα της περιόδου)

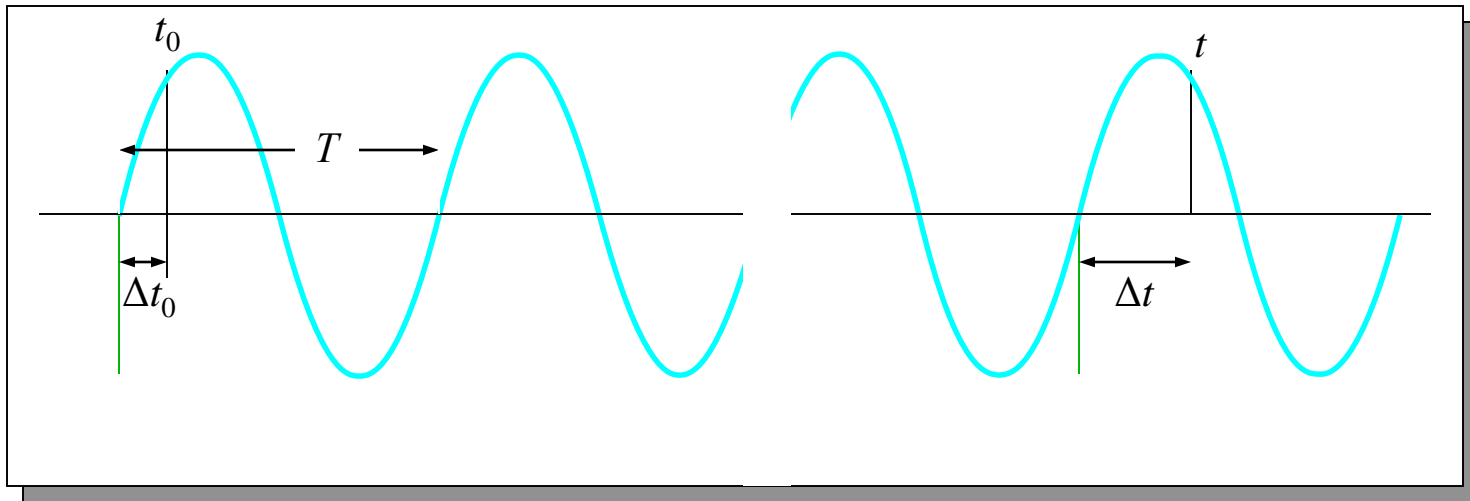
$$\varphi(t) = 2\pi\Phi(t) = 2\pi\frac{\Delta t}{T} = \text{γωνία φάσης}$$

$$0 \leq \varphi < 2\pi$$

(κλάσμα της περιόδου εκφρασμένο ως γωνία)

Γενίκευση: Μέτρηση χρόνου από μία αρχική στιγμή $t_0 \neq 0$:

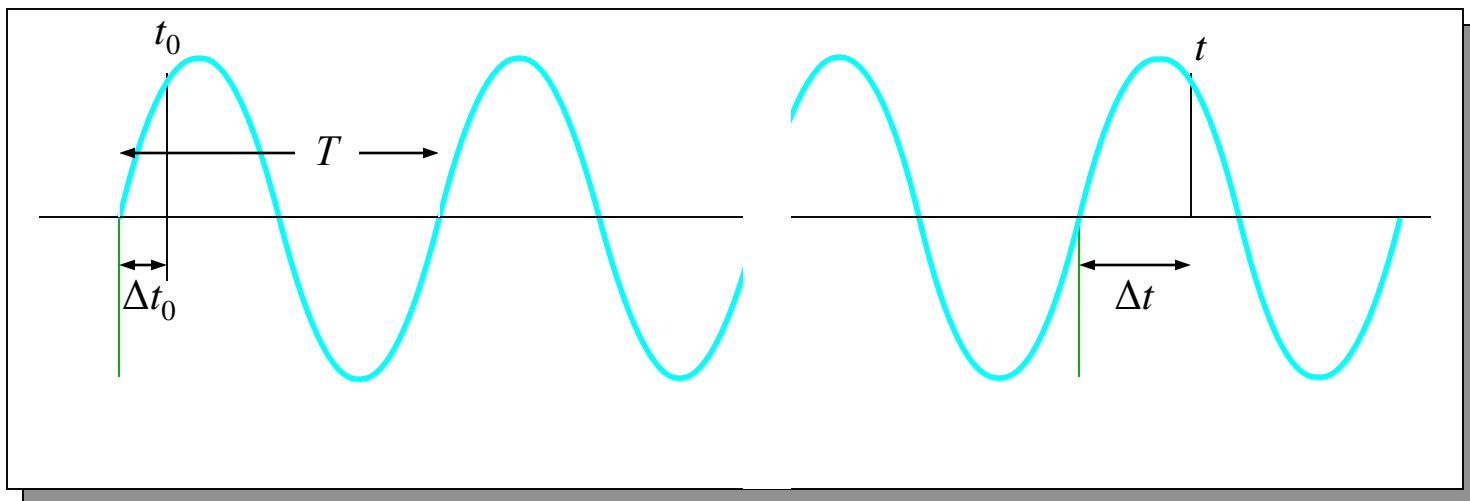
Γενίκευση: Μέτρηση χρόνου από μία αρχική στιγμή $t_0 \neq 0$:



Γενίκευση: Μέτρηση χρόνου από μία αρχική στιγμή $t_0 \neq 0$:

$$x(t_0 - \Delta t_0) = 0$$

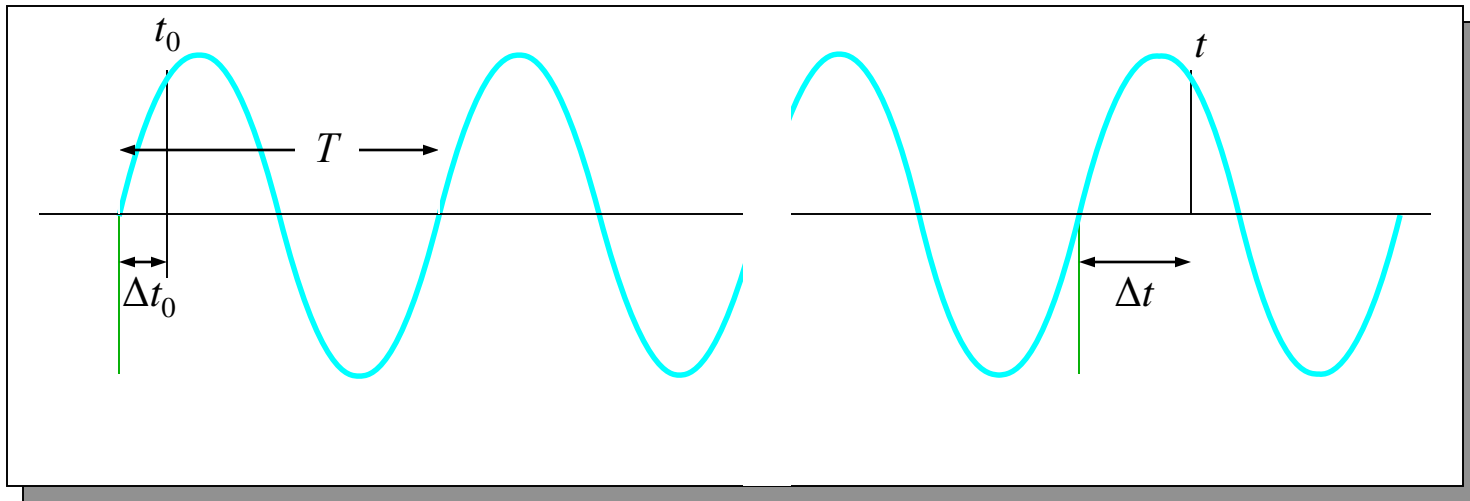
$$x(t_0 - \Delta t_0 + \varepsilon) > 0$$



Γενίκευση: Μέτρηση χρόνου από μία αρχική στιγμή $t_0 \neq 0$:

$$x(t_0 - \Delta t_0) = 0$$

$$x(t_0 - \Delta t_0 + \varepsilon) > 0$$



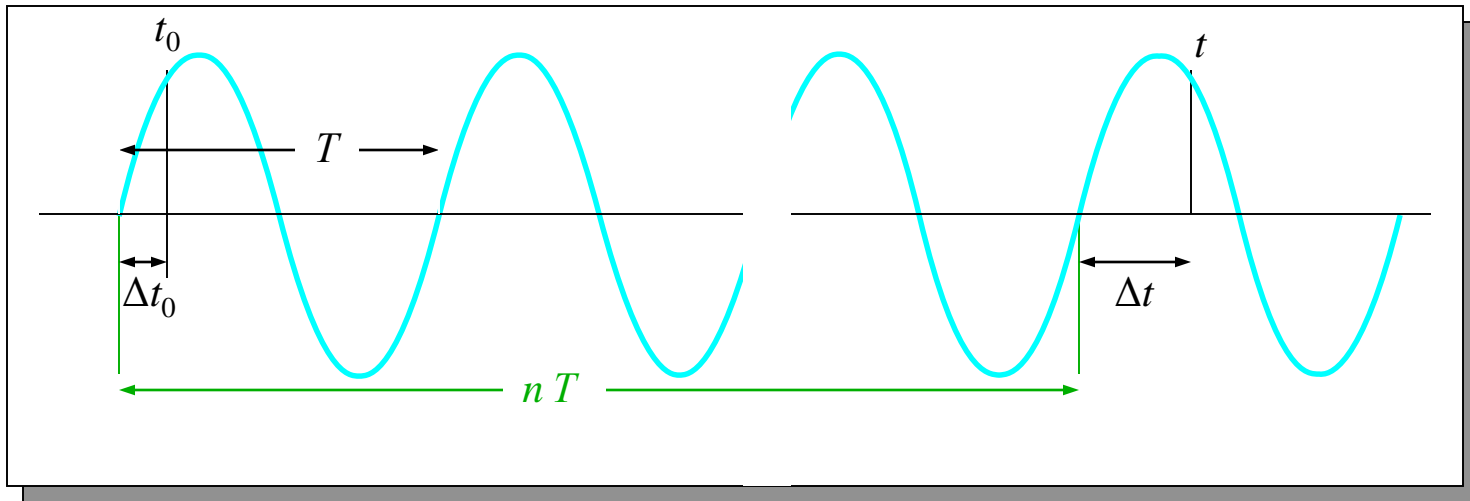
αρχική φάση : $\Phi_0 \equiv \Phi(t_0) = \frac{\Delta t_0}{T}$

τρέχουσα φάση : $\Phi \equiv \Phi(t) = \frac{\Delta t}{T}$

Γενίκευση: Μέτρηση χρόνου από μία αρχική στιγμή $t_0 \neq 0$:

$$x(t_0 - \Delta t_0) = 0$$

$$x(t_0 - \Delta t_0 + \varepsilon) > 0$$



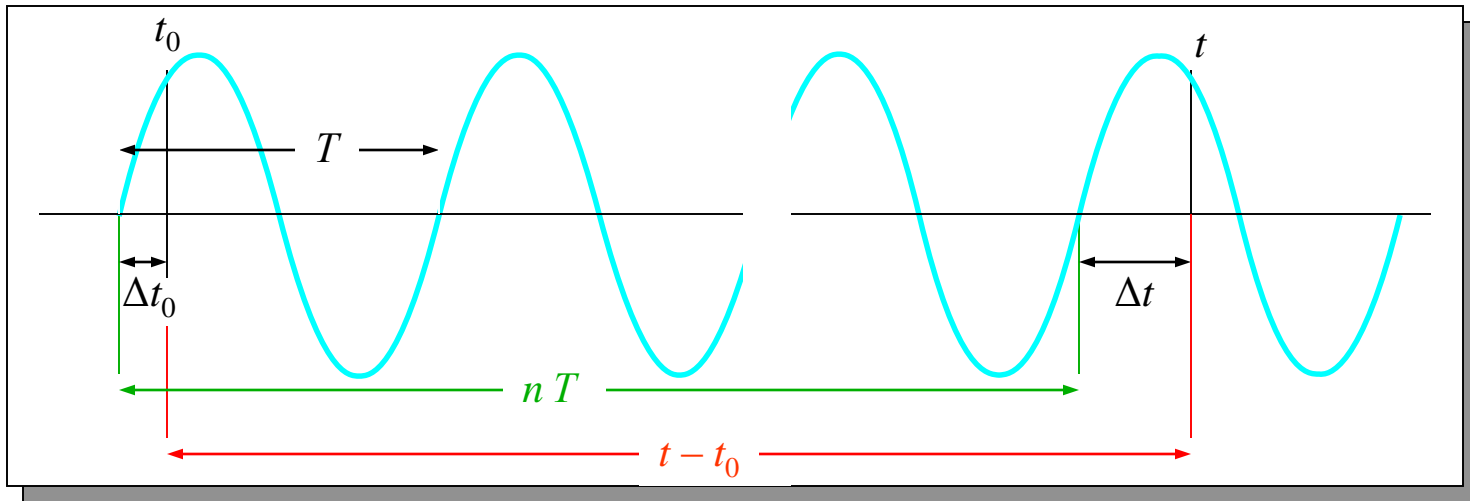
αρχική φάση : $\Phi_0 \equiv \Phi(t_0) = \frac{\Delta t_0}{T}$

τρέχουσα φάση : $\Phi \equiv \Phi(t) = \frac{\Delta t}{T}$

Γενίκευση: Μέτρηση χρόνου από μία αρχική στιγμή $t_0 \neq 0$:

$$x(t_0 - \Delta t_0) = 0$$

$$x(t_0 - \Delta t_0 + \varepsilon) > 0$$



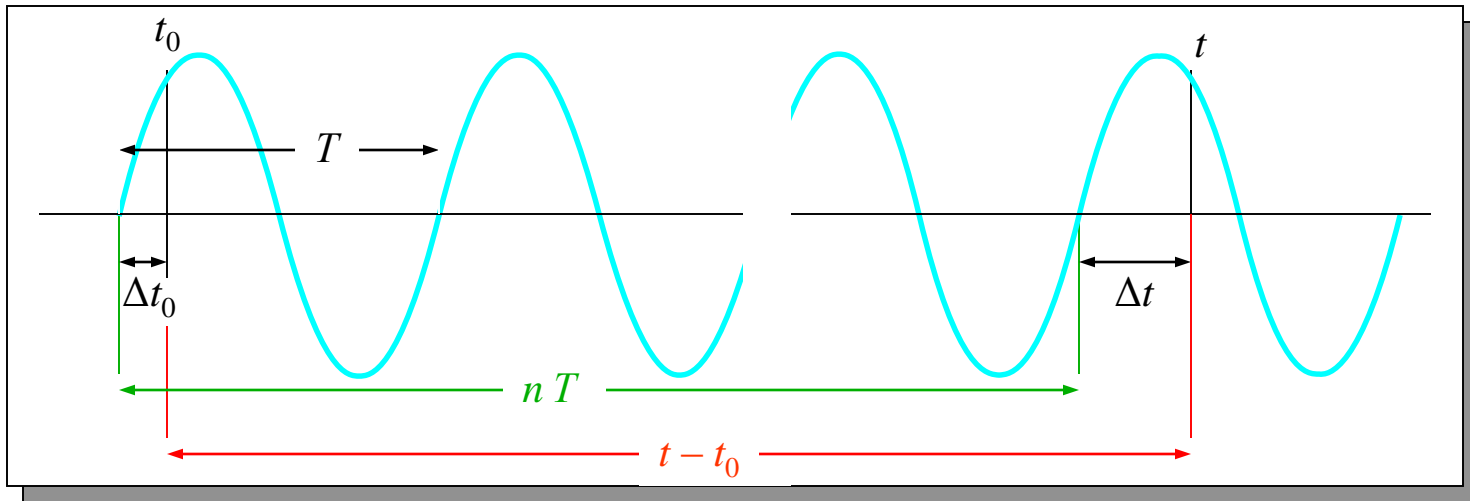
αρχική φάση : $\Phi_0 \equiv \Phi(t_0) = \frac{\Delta t_0}{T}$

τρέχουσα φάση : $\Phi \equiv \Phi(t) = \frac{\Delta t}{T}$

Γενίκευση: Μέτρηση χρόνου από μία αρχική στιγμή $t_0 \neq 0$:

$$x(t_0 - \Delta t_0) = 0$$

$$x(t_0 - \Delta t_0 + \varepsilon) > 0$$



αρχική φάση : $\Phi_0 \equiv \Phi(t_0) = \frac{\Delta t_0}{T}$

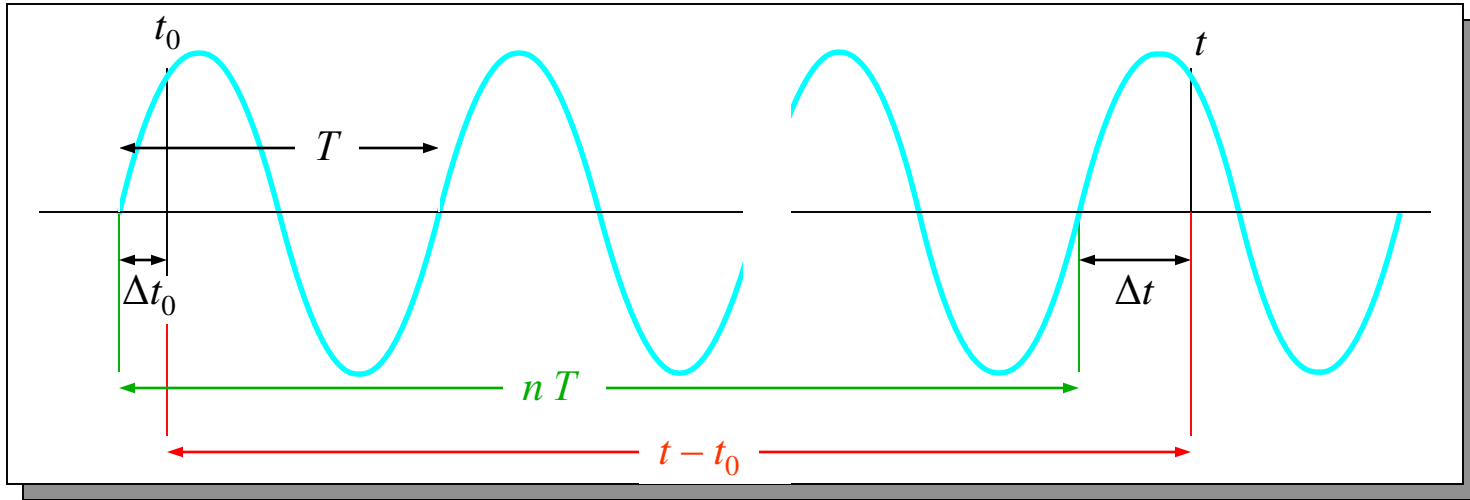
τρέχουσα φάση : $\Phi \equiv \Phi(t) = \frac{\Delta t}{T}$

$$t - t_0 = nT + \Delta t - \Delta t_0$$

Γενίκευση: Μέτρηση χρόνου από μία αρχική στιγμή $t_0 \neq 0$:

$$x(t_0 - \Delta t_0) = 0$$

$$x(t_0 - \Delta t_0 + \varepsilon) > 0$$



αρχική φάση : $\Phi_0 \equiv \Phi(t_0) = \frac{\Delta t_0}{T}$

τρέχουσα φάση : $\Phi \equiv \Phi(t) = \frac{\Delta t}{T}$

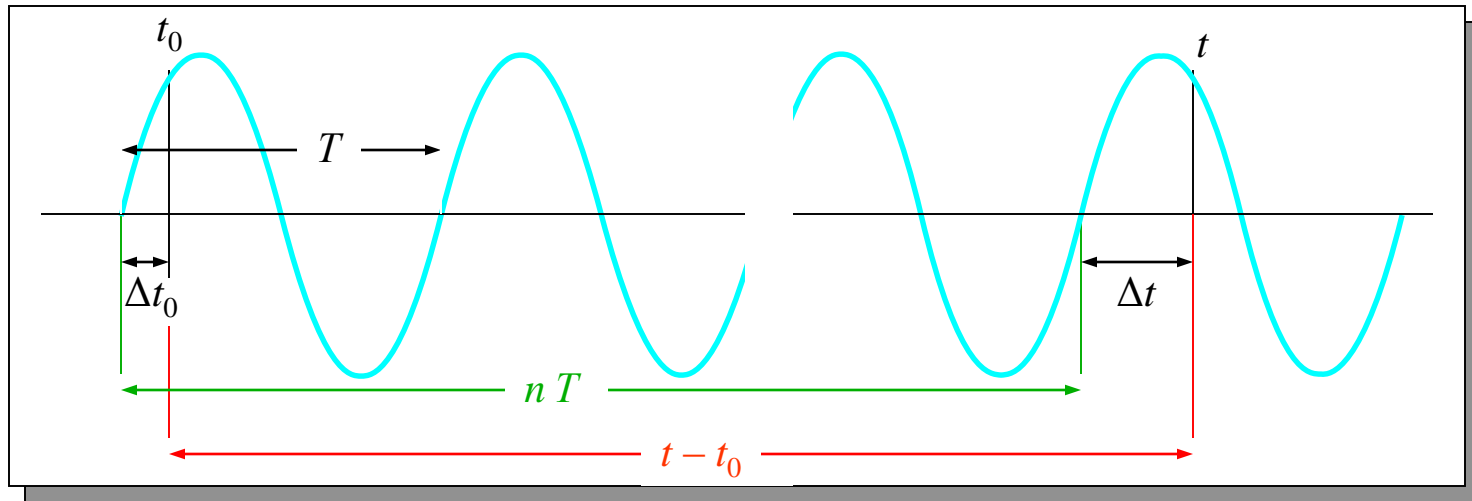
$$t - t_0 = nT + \Delta t - \Delta t_0$$

$$t = t_0 - \Delta t_0 + NT + \Delta t = t_0 - \Phi_0 T + NT + \Phi T$$

Γενίκευση: Μέτρηση χρόνου από μία αρχική στιγμή $t_0 \neq 0$:

$$x(t_0 - \Delta t_0) = 0$$

$$x(t_0 - \Delta t_0 + \varepsilon) > 0$$



αρχική φάση : $\Phi_0 \equiv \Phi(t_0) = \frac{\Delta t_0}{T}$

τρέχουσα φάση : $\Phi \equiv \Phi(t) = \frac{\Delta t}{T}$

$$t - t_0 = nT + \Delta t - \Delta t_0$$

$$t = t_0 - \Delta t_0 + nT + \Delta t = t_0 - \Phi_0 T + nT + \Phi T$$

Σύνδεση χρονικής διαφοράς με τη διαφορά φάσεων :

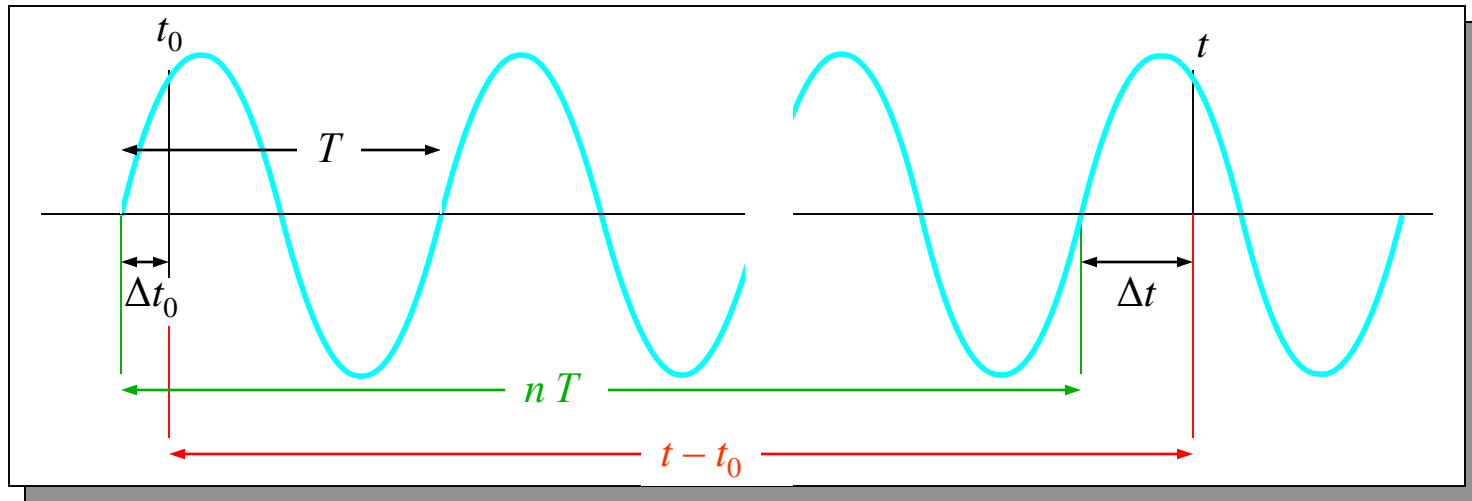
$$t - t_0 = nT + [\Phi(t) - \Phi_0]T$$

μαθηματικό μοντέλο
για τις παρατηρήσεις
διαφορών φάσεων

Γενίκευση: Μέτρηση χρόνου από μία αρχική στιγμή $t_0 \neq 0$:

$$x(t_0 - \Delta t_0) = 0$$

$$x(t_0 - \Delta t_0 + \varepsilon) > 0$$



αρχική φάση : $\Phi_0 \equiv \Phi(t_0) = \frac{\Delta t_0}{T}$

τρέχουσα φάση : $\Phi \equiv \Phi(t) = \frac{\Delta t}{T}$

$$t - t_0 = nT + \Delta t - \Delta t_0$$

$$t = t_0 - \Delta t_0 + NT + \Delta t = t_0 - \Phi_0 T + NT + \Phi T$$

Σύνδεση χρονικής διαφοράς με τη διαφορά φάσεων :

$$t - t_0 = NT + [\Phi(t) - \Phi_0]T$$

μαθηματικό μοντέλο
για τις παρατηρήσεις
διαφορών φάσεων

Η συχνότητα ως παράγωγος της φάσης

$$t = t_0 + NT + \Phi T - \Phi_0 T \quad \Rightarrow \quad \Phi(t) = \Phi_0 + \frac{t - t_0}{T} - N \quad \Rightarrow$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{T} = f$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f = \omega$$

Γενική μορφή μονοχρωματικού σήματος :

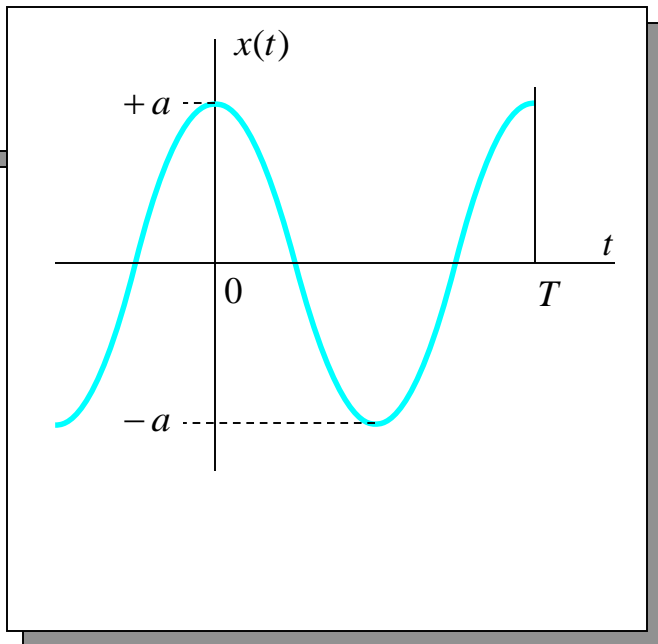
$$\begin{aligned}x(t) &= a \sin \left[\frac{2\pi(t - t_0)}{T} + \varphi_0 \right] = a \sin [2\pi f (t - t_0) + \varphi_0] = a \sin \varphi(t) = \\ &= a \sin 2\pi \left[\frac{(t - t_0)}{T} + \Phi_0 \right] = a \sin 2\pi [f(t - t_0) + \Phi_0] = a \sin 2\pi \Phi(t) = \\ &= a \sin [\omega(t - t_0) + \varphi_0] = a \sin [\omega(t - t_0) + 2\pi\Phi_0]\end{aligned}$$

Γενική μορφή μονοχρωματικού σήματος :

$$\begin{aligned}x(t) &= a \sin \left[\frac{2\pi(t-t_0)}{T} + \varphi_0 \right] = a \sin [2\pi f(t-t_0) + \varphi_0] = a \sin \varphi(t) = \\ &= a \sin 2\pi \left[\frac{(t-t_0)}{T} + \Phi_0 \right] = a \sin 2\pi [f(t-t_0) + \Phi_0] = a \sin 2\pi \Phi(t) = \\ &= a \sin [\omega(t-t_0) + \varphi_0] = a \sin [\omega(t-t_0) + 2\pi\Phi_0]\end{aligned}$$

Εναλλακτική (συνήθης) μορφή με συνημίτονα : $x(t) = a \cos \left[\frac{2\pi(t-t_0)}{T} + \theta_0 \right] = a \cos [2\pi f(t-t_0) + \theta_0] = a \cos \theta(t) =$

$$\begin{aligned}&= a \cos 2\pi \left[\frac{t-t_0}{T} + \Theta_0 \right] = a \cos 2\pi [f(t-t_0) + \Theta_0] = a \cos 2\pi \Theta(t) = \\ &= a \cos [\omega(t-t_0) + \theta_0] = a \cos [\omega(t-t_0) + 2\pi\Theta_0]\end{aligned}$$

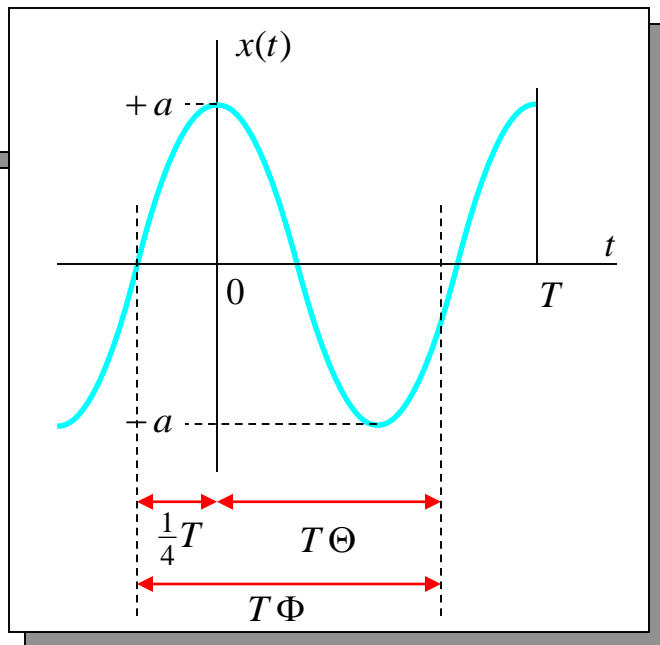


Γενική μορφή μονοχρωματικού σήματος :

$$\begin{aligned}
 x(t) &= a \sin \left[\frac{2\pi(t-t_0)}{T} + \varphi_0 \right] = a \sin [2\pi f(t-t_0) + \varphi_0] = a \sin \varphi(t) = \\
 &= a \sin 2\pi \left[\frac{(t-t_0)}{T} + \Phi_0 \right] = a \sin 2\pi [f(t-t_0) + \Phi_0] = a \sin 2\pi \Phi(t) = \\
 &= a \sin [\omega(t-t_0) + \varphi_0] = a \sin [\omega(t-t_0) + 2\pi\Phi_0]
 \end{aligned}$$

Εναλλακτική (συνήθης) μορφή με συνημίτονα : $x(t) = a \cos \left[\frac{2\pi(t-t_0)}{T} + \theta_0 \right] = a \cos [2\pi f(t-t_0) + \theta_0] = a \cos \theta(t) =$

$$\begin{aligned}
 &= a \cos 2\pi \left[\frac{t-t_0}{T} + \Theta_0 \right] = a \cos 2\pi [f(t-t_0) + \Theta_0] = a \cos 2\pi \Theta(t) = \\
 &= a \cos [\omega(t-t_0) + \theta_0] = a \cos [\omega(t-t_0) + 2\pi\Theta_0]
 \end{aligned}$$



Θ = φάση κύματος συνημίτονου

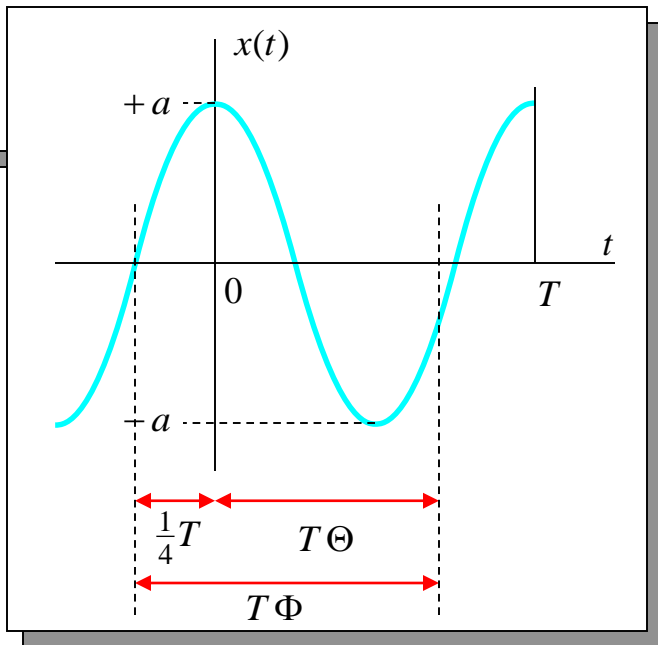
θ = αντίστοιχη γωνία φάσης

Γενική μορφή μονοχρωματικού σήματος :

$$\begin{aligned}
 x(t) &= a \sin \left[\frac{2\pi(t-t_0)}{T} + \varphi_0 \right] = a \sin [2\pi f(t-t_0) + \varphi_0] = a \sin \varphi(t) = \\
 &= a \sin 2\pi \left[\frac{(t-t_0)}{T} + \Phi_0 \right] = a \sin 2\pi [f(t-t_0) + \Phi_0] = a \sin 2\pi \Phi(t) = \\
 &= a \sin [\omega(t-t_0) + \varphi_0] = a \sin [\omega(t-t_0) + 2\pi\Phi_0]
 \end{aligned}$$

Εναλλακτική (συνήθης) μορφή με συνημίτονα :

$$\begin{aligned}
 x(t) &= a \cos \left[\frac{2\pi(t-t_0)}{T} + \theta_0 \right] = a \cos [2\pi f(t-t_0) + \theta_0] = a \cos \theta(t) = \\
 &= a \cos 2\pi \left[\frac{t-t_0}{T} + \Theta_0 \right] = a \cos 2\pi [f(t-t_0) + \Theta_0] = a \cos 2\pi \Theta(t) = \\
 &= a \cos [\omega(t-t_0) + \theta_0] = a \cos [\omega(t-t_0) + 2\pi\Theta_0]
 \end{aligned}$$



Θ = φάση κύματος συνημίτονου

θ = αντίστοιχη γωνία φάσης

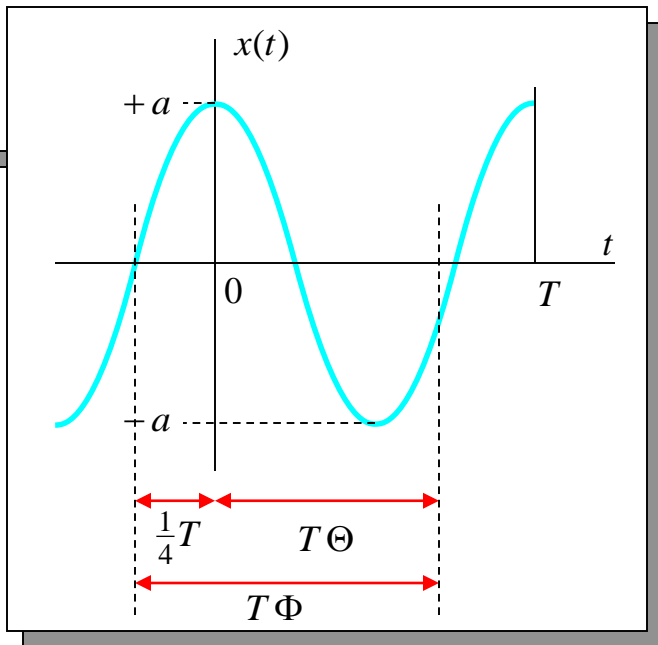
$$\Theta(t) = \Phi(t) - \frac{1}{4} \quad (\times 2\pi \Rightarrow) \quad \theta(t) = \varphi(t) - \frac{\pi}{2}$$

Γενική μορφή μονοχρωματικού σήματος :

$$\begin{aligned}
 x(t) &= a \sin \left[\frac{2\pi(t-t_0)}{T} + \varphi_0 \right] = a \sin [2\pi f(t-t_0) + \varphi_0] = a \sin \varphi(t) = \\
 &= a \sin 2\pi \left[\frac{(t-t_0)}{T} + \Phi_0 \right] = a \sin 2\pi [f(t-t_0) + \Phi_0] = a \sin 2\pi \Phi(t) = \\
 &= a \sin [\omega(t-t_0) + \varphi_0] = a \sin [\omega(t-t_0) + 2\pi\Phi_0]
 \end{aligned}$$

Εναλλακτική (συνήθης) μορφή με συνημίτονα :

$$\begin{aligned}
 x(t) &= a \cos \left[\frac{2\pi(t-t_0)}{T} + \theta_0 \right] = a \cos [2\pi f(t-t_0) + \theta_0] = a \cos \theta(t) = \\
 &= a \cos 2\pi \left[\frac{t-t_0}{T} + \Theta_0 \right] = a \cos 2\pi [f(t-t_0) + \Theta_0] = a \cos 2\pi \Theta(t) = \\
 &= a \cos [\omega(t-t_0) + \theta_0] = a \cos [\omega(t-t_0) + 2\pi\Theta_0]
 \end{aligned}$$



Θ = φάση κύματος συνημίτονου

θ = αντίστοιχη γωνία φάσης

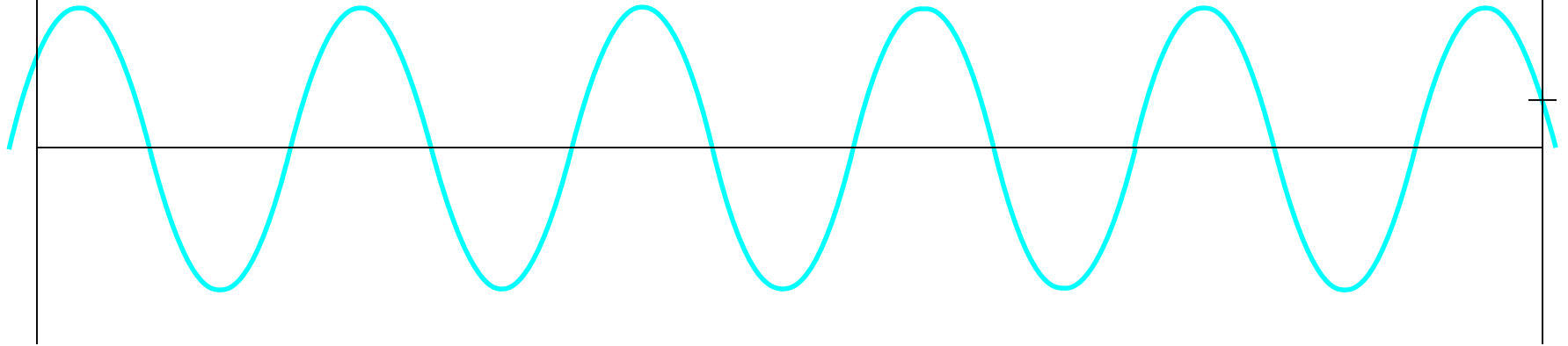
$$\Theta(t) = \Phi(t) - \frac{1}{4} \quad (\times 2\pi \Rightarrow) \quad \theta(t) = \varphi(t) - \frac{\pi}{2}$$

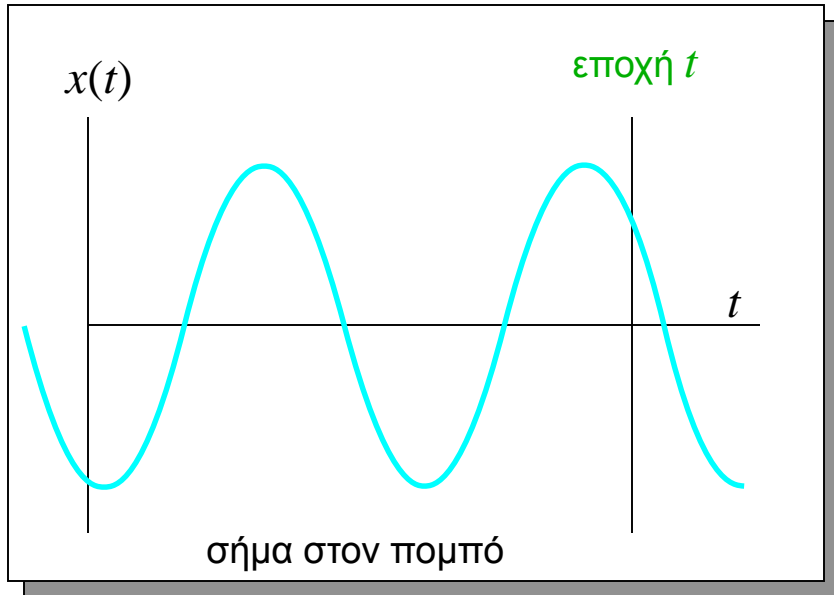
Συνήθης συμβολισμός : $\Theta \rightarrow \Phi$, $\theta \rightarrow \varphi$

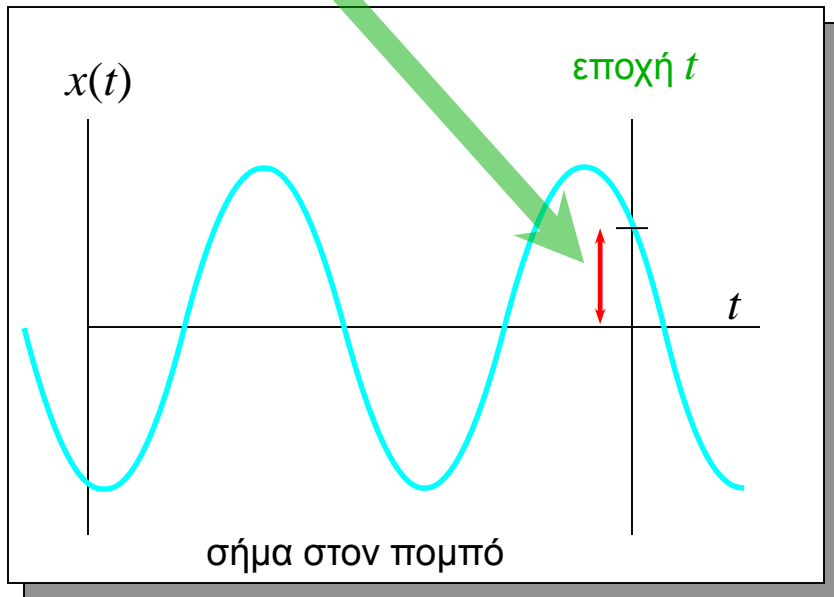
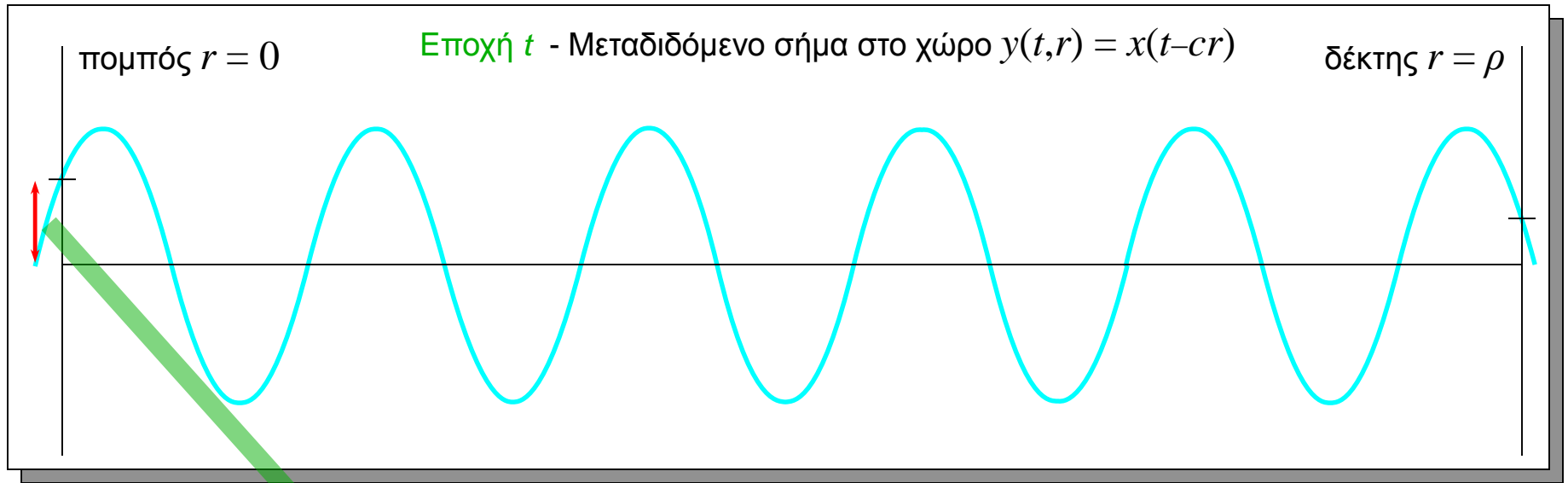
πομπός $r = 0$

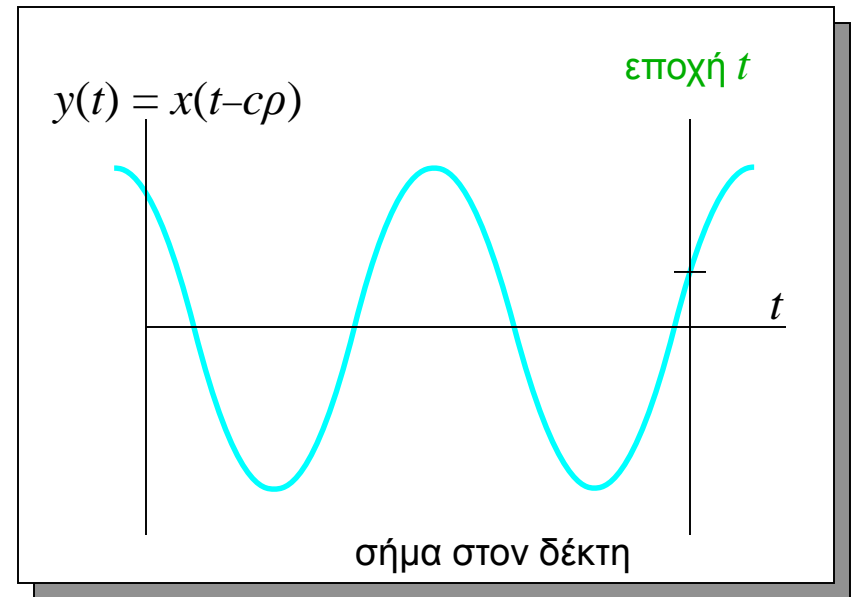
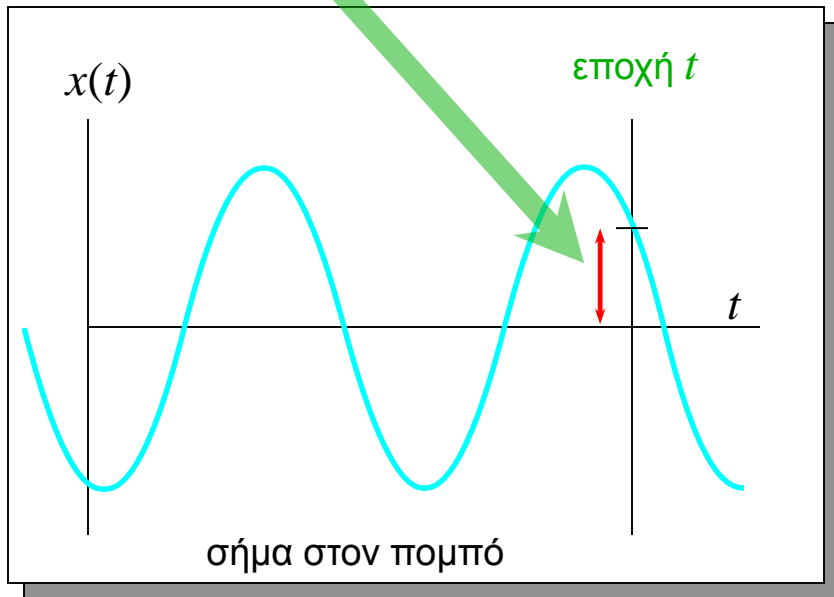
Εποχή t - Μεταδιδόμενο σήμα στο χώρο $y(t,r) = x(t-cr)$

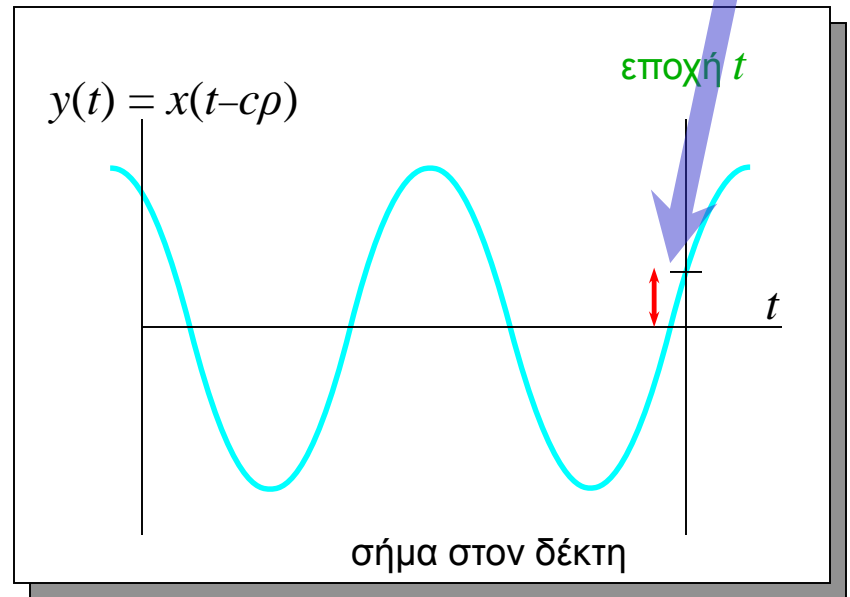
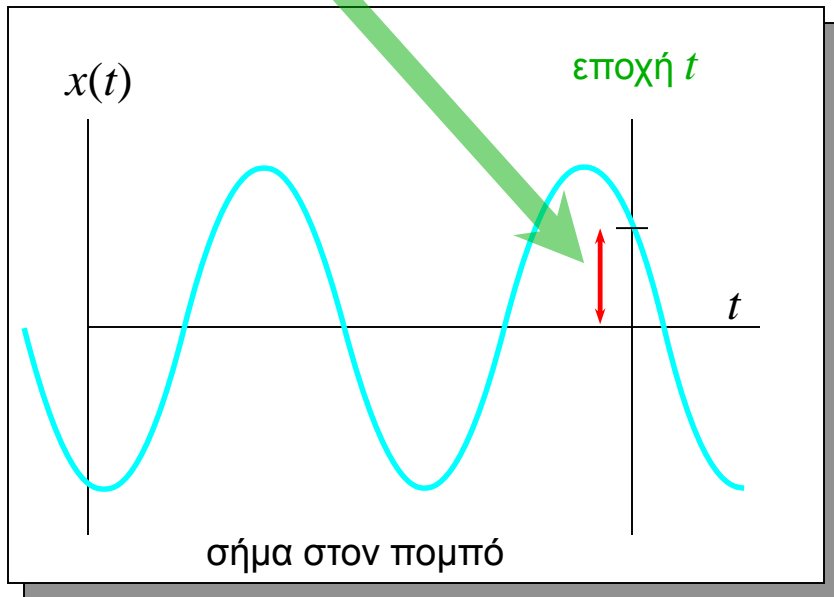
δέκτης $r = \rho$





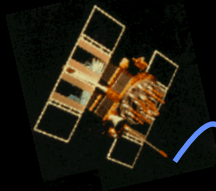




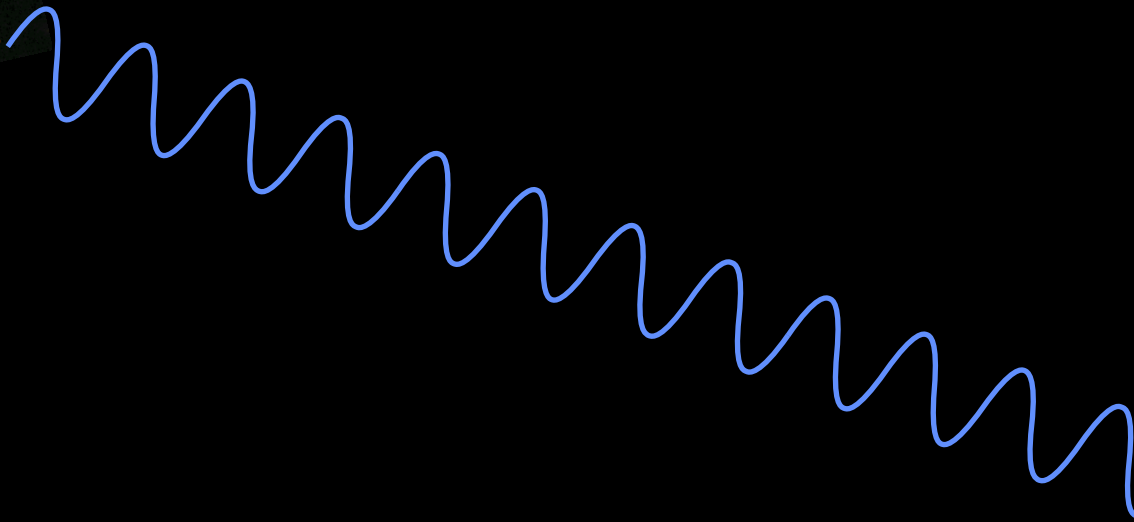


Μετάδοση σημάτων

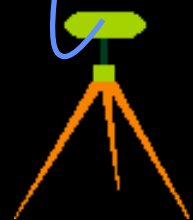
1 ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ : «Πρόσθεση» σήματος πάνω σε μονοχρωματικό σήμα (φέρουσα συχνότητα)



2 ΕΚΠΟΜΠΗ



3 ΛΗΨΗ



4 ΑΠΟΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ : Ανάκτηση σήματος (απομάκρυνση από τη φέρουσα)

Διαμόρφωση (modulation)

Διαμόρφωση (modulation)

Διαμόρφωση = μεταφορά σήματος $m(t)$ πάνω σε μονοχρωματικό σήμα με **φέρουσα συχνότητα** ω_C $x_C(t) = a_C \cos(\varphi_{0C} + \omega_C t)$

Διαμόρφωση (modulation)

Διαμόρφωση = μεταφορά σήματος $m(t)$ πάνω σε μονοχρωματικό σήμα $x_C(t) = a_C \cos(\varphi_{0C} + \omega_C t)$
με **φέρουσα συχνότητα** ω_C

A. Διαμόρφωση κατά εύρος (γενική μορφή) :

$$x(t) = a(t) \cos(\varphi_{0C} + \omega_C t)$$

Διαμόρφωση (modulation)

Διαμόρφωση = μεταφορά σήματος $m(t)$ πάνω σε μονοχρωματικό σήμα $x_C(t) = a_C \cos(\varphi_{0C} + \omega_C t)$
με **φέρουσα συχνότητα** ω_C


A. Διαμόρφωση κατά εύρος (γενική μορφή) :

$$x(t) = a(t) \cos(\varphi_{0C} + \omega_C t)$$



Διαμόρφωση (modulation)

Διαμόρφωση = μεταφορά σήματος $m(t)$ πάνω σε μονοχρωματικό σήμα $x_C(t) = a_C \cos(\varphi_{0C} + \omega_C t)$
με **φέρουσα συχνότητα** ω_C

 $m(t)$

A. Διαμόρφωση κατά εύρος (γενική μορφή) :

$$x(t) = a(t) \cos(\varphi_{0C} + \omega_C t)$$

B. Διαμόρφωση κατά γωνία (γενική μορφή) :

$$x(t) = a_C \cos[\varphi_{0C} + \omega_C t + \phi(t)]$$

Διαμόρφωση (modulation)

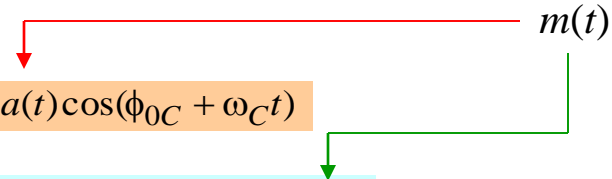
Διαμόρφωση = μεταφορά σήματος $m(t)$ πάνω σε μονοχρωματικό σήμα $x_C(t) = a_C \cos(\varphi_{0C} + \omega_C t)$
με **φέρουσα συχνότητα** ω_C

A. Διαμόρφωση κατά εύρος (γενική μορφή) :

$$x(t) = a(t) \cos(\varphi_{0C} + \omega_C t)$$

B. Διαμόρφωση κατά γωνία (γενική μορφή) :

$$x(t) = a_C \cos[\varphi_{0C} + \omega_C t + \phi(t)]$$



Διαμόρφωση (modulation)

Διαμόρφωση = μεταφορά σήματος $m(t)$ πάνω σε μονοχρωματικό σήμα $x_C(t) = a_C \cos(\varphi_{0C} + \omega_C t)$
με **φέρουσα συχνότητα** ω_C

A. Διαμόρφωση κατά εύρος (γενική μορφή) :

$$x(t) = a(t) \cos(\varphi_{0C} + \omega_C t)$$

B. Διαμόρφωση κατά γωνία (γενική μορφή) :

$$x(t) = a_C \cos[\varphi_{0C} + \omega_C t + \phi(t)]$$

$m(t)$



A. Διαμόρφωση κατά εύρος (**AM** = Amplitude Modulation) :

Διαμόρφωση (modulation)

Διαμόρφωση = μεταφορά σήματος $m(t)$ πάνω σε μονοχρωματικό σήμα $x_C(t) = a_C \cos(\varphi_{0C} + \omega_C t)$
με **φέρουσα συχνότητα** ω_C

A. Διαμόρφωση κατά εύρος (γενική μορφή) :

$$x(t) = a(t) \cos(\varphi_{0C} + \omega_C t)$$

B. Διαμόρφωση κατά γωνία (γενική μορφή) :

$$x(t) = a_C \cos[\varphi_{0C} + \omega_C t + \phi(t)]$$

$m(t)$

A. Διαμόρφωση κατά εύρος (**AM** = Amplitude Modulation) :

$$a(t) = A + k_a m(t)$$

Διαμόρφωση (modulation)

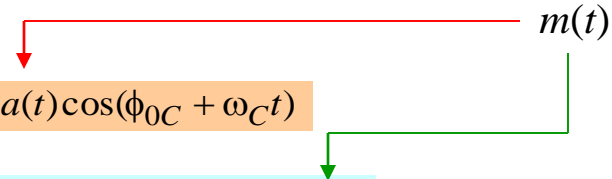
Διαμόρφωση = μεταφορά σήματος $m(t)$ πάνω σε μονοχρωματικό σήμα $x_C(t) = a_C \cos(\phi_{0C} + \omega_C t)$ με **φέρουσα συχνότητα** ω_C

A. Διαμόρφωση κατά εύρος (γενική μορφή) :

$$x(t) = a(t) \cos(\phi_{0C} + \omega_C t)$$

B. Διαμόρφωση κατά γωνία (γενική μορφή) :

$$x(t) = a_C \cos[\phi_{0C} + \omega_C t + \phi(t)]$$



A. Διαμόρφωση κατά εύρος (**AM** = Amplitude Modulation) :

$$a(t) = A + k_a m(t)$$

$$x(t) = [A + k_a m(t)] \cos(\phi_{0C} + \omega_C t)$$

Διαμόρφωση (modulation)

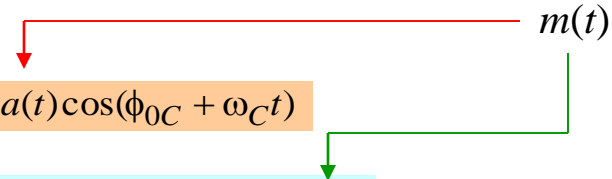
Διαμόρφωση = μεταφορά σήματος $m(t)$ πάνω σε μονοχρωματικό σήμα $x_C(t) = a_C \cos(\varphi_{0C} + \omega_C t)$ με **φέρουσα συχνότητα** ω_C

A. Διαμόρφωση κατά εύρος (γενική μορφή) :

$$x(t) = a(t) \cos(\varphi_{0C} + \omega_C t)$$

B. Διαμόρφωση κατά γωνία (γενική μορφή) :

$$x(t) = a_C \cos[\varphi_{0C} + \omega_C t + \phi(t)]$$



A. Διαμόρφωση κατά εύρος (**AM** = Amplitude Modulation) :

$$a(t) = A + k_a m(t)$$

$$x(t) = [A + k_a m(t)] \cos(\varphi_{0C} + \omega_C t)$$

B. Διαμόρφωση κατά γωνία

Διαμόρφωση (modulation)

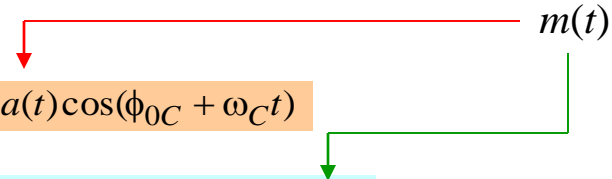
Διαμόρφωση = μεταφορά σήματος $m(t)$ πάνω σε μονοχρωματικό σήμα $x_C(t) = a_C \cos(\varphi_{0C} + \omega_C t)$
με **φέρουσα συχνότητα** ω_C

A. Διαμόρφωση κατά εύρος (γενική μορφή) :

$$x(t) = a(t) \cos(\varphi_{0C} + \omega_C t)$$

B. Διαμόρφωση κατά γωνία (γενική μορφή) :

$$x(t) = a_C \cos[\varphi_{0C} + \omega_C t + \phi(t)]$$



A. Διαμόρφωση κατά εύρος (**AM** = Amplitude Modulation) :

$$a(t) = A + k_a m(t)$$

$$x(t) = [A + k_a m(t)] \cos(\varphi_{0C} + \omega_C t)$$

B. Διαμόρφωση κατά γωνία

B1. Διαμόρφωση κατά φάση (**PM** = Phase Modulation) :

B2. Διαμόρφωση κατά συχνότητα (**FM** = Frequency Modulation) :

Διαμόρφωση (modulation)

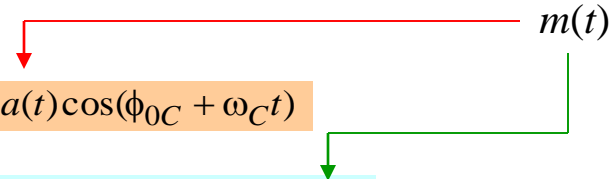
Διαμόρφωση = μεταφορά σήματος $m(t)$ πάνω σε μονοχρωματικό σήμα $x_C(t) = a_C \cos(\phi_{0C} + \omega_C t)$
με **φέρουσα συχνότητα** ω_C

A. Διαμόρφωση κατά εύρος (γενική μορφή) :

$$x(t) = a(t) \cos(\phi_{0C} + \omega_C t)$$

B. Διαμόρφωση κατά γωνία (γενική μορφή) :

$$x(t) = a_C \cos[\phi_{0C} + \omega_C t + \phi(t)]$$



A. Διαμόρφωση κατά εύρος (**AM** = Amplitude Modulation) :

$$a(t) = A + k_a m(t)$$

$$x(t) = [A + k_a m(t)] \cos(\phi_{0C} + \omega_C t)$$

B. Διαμόρφωση κατά γωνία

B1. Διαμόρφωση κατά φάση (**PM** = Phase Modulation) :

$$\phi(t) = k_p m(t)$$

B2. Διαμόρφωση κατά συχνότητα (**FM** = Frequency Modulation) :

Διαμόρφωση (modulation)

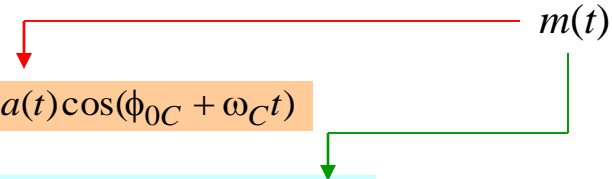
Διαμόρφωση = μεταφορά σήματος $m(t)$ πάνω σε μονοχρωματικό σήμα $x_C(t) = a_C \cos(\phi_{0C} + \omega_C t)$
με **φέρουσα συχνότητα** ω_C

A. Διαμόρφωση κατά εύρος (γενική μορφή) :

$$x(t) = a(t) \cos(\phi_{0C} + \omega_C t)$$

B. Διαμόρφωση κατά γωνία (γενική μορφή) :

$$x(t) = a_C \cos[\phi_{0C} + \omega_C t + \phi(t)]$$



A. Διαμόρφωση κατά εύρος (**AM** = Amplitude Modulation) :

$$a(t) = A + k_a m(t)$$

$$x(t) = [A + k_a m(t)] \cos(\phi_{0C} + \omega_C t)$$

B. Διαμόρφωση κατά γωνία

B1. Διαμόρφωση κατά φάση (**PM** = Phase Modulation) :

$$\phi(t) = k_p m(t)$$

$$x_C(t) = a_C \cos[\phi_{0C} + \omega_C t + k_p m(t)]$$

B2. Διαμόρφωση κατά συχνότητα (**FM** = Frequency Modulation) :

Διαμόρφωση (modulation)

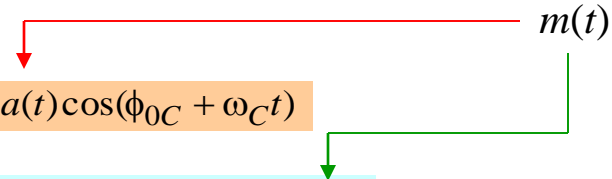
Διαμόρφωση = μεταφορά σήματος $m(t)$ πάνω σε μονοχρωματικό σήμα $x_C(t) = a_C \cos(\phi_{0C} + \omega_C t)$ με **φέρουσα συχνότητα** ω_C

A. Διαμόρφωση κατά εύρος (γενική μορφή) :

$$x(t) = a(t) \cos(\phi_{0C} + \omega_C t)$$

B. Διαμόρφωση κατά γωνία (γενική μορφή) :

$$x(t) = a_C \cos[\phi_{0C} + \omega_C t + \phi(t)]$$



A. Διαμόρφωση κατά εύρος (**AM** = Amplitude Modulation) :

$$a(t) = A + k_a m(t)$$

$$x(t) = [A + k_a m(t)] \cos(\phi_{0C} + \omega_C t)$$

B. Διαμόρφωση κατά γωνία

B1. Διαμόρφωση κατά φάση (**PM** = Phase Modulation) :

$$\phi(t) = k_p m(t)$$

$$x_C(t) = a_C \cos[\phi_{0C} + \omega_C t + k_p m(t)]$$

B2. Διαμόρφωση κατά συχνότητα (**FM** = Frequency Modulation) :

$$\omega(t) = \frac{d\phi}{dt}(t) = k_f m(t)$$

Διαμόρφωση (modulation)

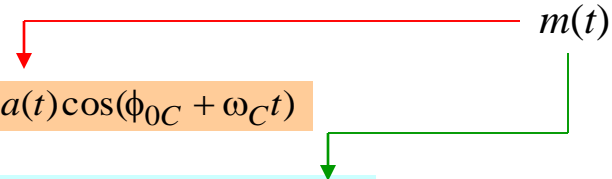
Διαμόρφωση = μεταφορά σήματος $m(t)$ πάνω σε μονοχρωματικό σήμα $x_C(t) = a_C \cos(\phi_{0C} + \omega_C t)$ με **φέρουσα συχνότητα** ω_C

A. Διαμόρφωση κατά εύρος (γενική μορφή) :

$$x(t) = a(t) \cos(\phi_{0C} + \omega_C t)$$

B. Διαμόρφωση κατά γωνία (γενική μορφή) :

$$x(t) = a_C \cos[\phi_{0C} + \omega_C t + \phi(t)]$$



A. Διαμόρφωση κατά εύρος (**AM** = Amplitude Modulation) :

$$a(t) = A + k_a m(t)$$

$$x(t) = [A + k_a m(t)] \cos(\phi_{0C} + \omega_C t)$$

B. Διαμόρφωση κατά γωνία

B1. Διαμόρφωση κατά φάση (**PM** = Phase Modulation) :

$$\phi(t) = k_p m(t)$$

$$x_C(t) = a_C \cos[\phi_{0C} + \omega_C t + k_p m(t)]$$

B2. Διαμόρφωση κατά συχνότητα (**FM** = Frequency Modulation) :

$$\omega(t) = \frac{d\phi}{dt}(t) = k_f m(t)$$

$$x(t) = \cos[\phi(t_0) + \omega_C t + k_f \int_{t_0}^t m(t) dt]$$

Διαμόρφωση (modulation)

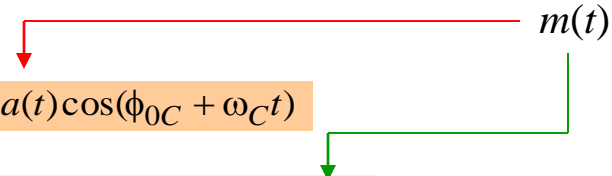
Διαμόρφωση = μεταφορά σήματος $m(t)$ πάνω σε μονοχρωματικό σήμα $x_C(t) = a_C \cos(\phi_{0C} + \omega_C t)$ με **φέρουσα συχνότητα** ω_C

A. Διαμόρφωση κατά εύρος (γενική μορφή) :

$$x(t) = a(t) \cos(\phi_{0C} + \omega_C t)$$

B. Διαμόρφωση κατά γωνία (γενική μορφή) :

$$x(t) = a_C \cos[\phi_{0C} + \omega_C t + \phi(t)]$$



A. Διαμόρφωση κατά εύρος (**AM** = Amplitude Modulation) :

$$a(t) = A + k_a m(t)$$

$$x(t) = [A + k_a m(t)] \cos(\phi_{0C} + \omega_C t)$$

B. Διαμόρφωση κατά γωνία

B1. Διαμόρφωση κατά φάση (**PM** = Phase Modulation) :

$$\phi(t) = k_p m(t)$$

$$x_C(t) = a_C \cos[\phi_{0C} + \omega_C t + k_p m(t)]$$

B2. Διαμόρφωση κατά συχνότητα (**FM** = Frequency Modulation) :

$$\omega(t) = \frac{d\phi}{dt}(t) = k_f m(t)$$

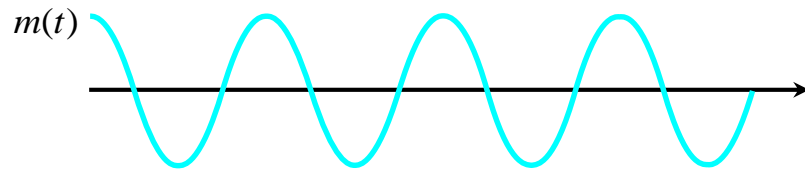
$$x(t) = \cos[\phi(t_0) + \omega_C t + k_f \int_{t_0}^t m(t) dt]$$

$\phi(t)$



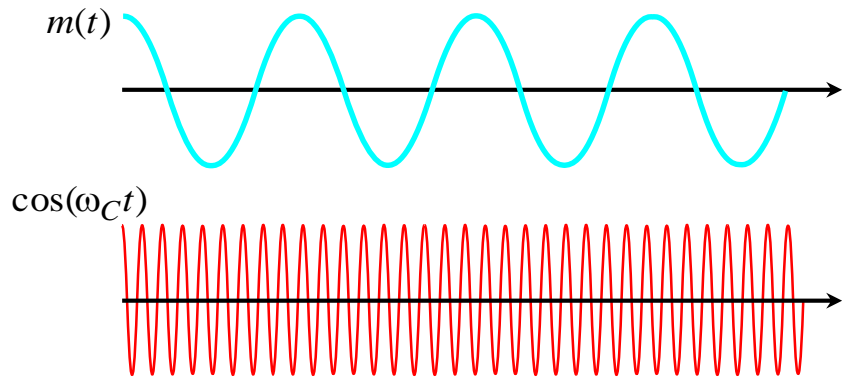
Παράδειγμα: Διαμόρφωση ημιτονοειδούς σήματος $m(t) = \cos\omega t$

Παράδειγμα: Διαμόρφωση ημιτονοειδούς σήματος $m(t) = \cos\omega t$



υπό διαμόρφωση σήμα

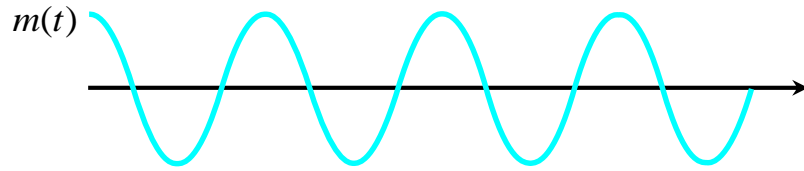
Παράδειγμα: Διαμόρφωση ημιτονοειδούς σήματος $m(t) = \cos\omega t$



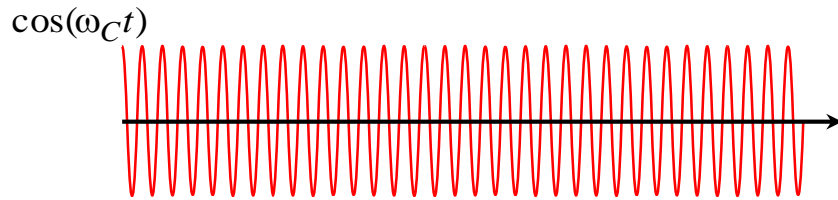
υπό διαμόρφωση σήμα

φέρουσα συχνότητα

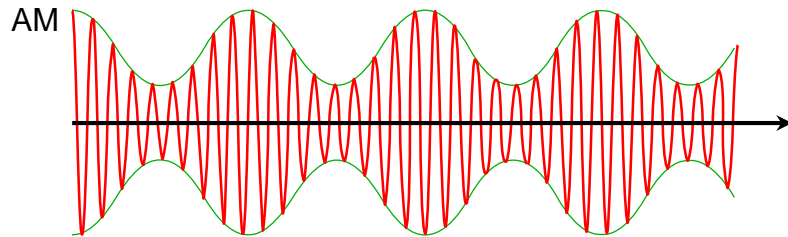
Παράδειγμα: Διαμόρφωση ημιτονοειδούς σήματος $m(t) = \cos\omega t$



υπό διαμόρφωση σήμα



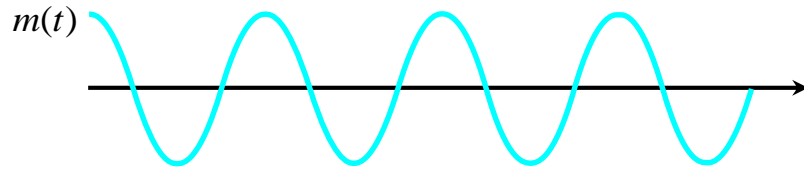
φέρουσα συχνότητα



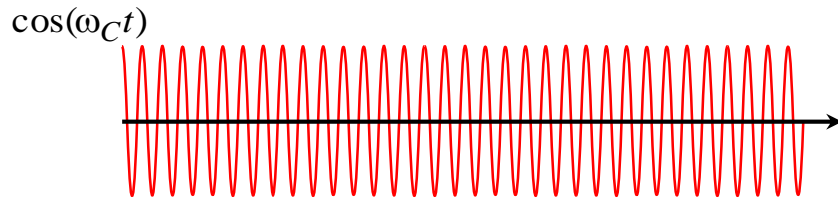
διαμόρφωση κατά εύρος

$$x(t) = [A + k_a m(t)] \cos(\omega_C t)$$

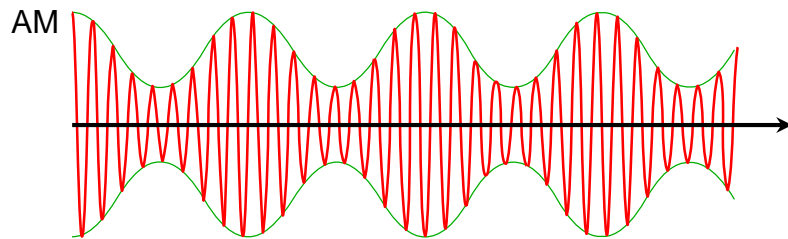
Παράδειγμα: Διαμόρφωση ημιτονοειδούς σήματος $m(t) = \cos\omega t$



υπό διαμόρφωση σήμα

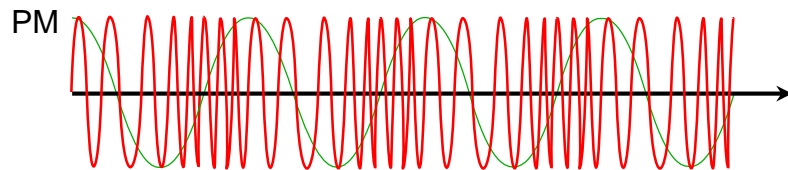


φέρουσα συχνότητα



διαμόρφωση κατά εύρος

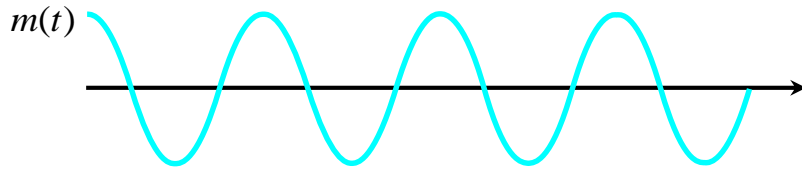
$$x(t) = [A + k_a m(t)] \cos(\omega_C t)$$



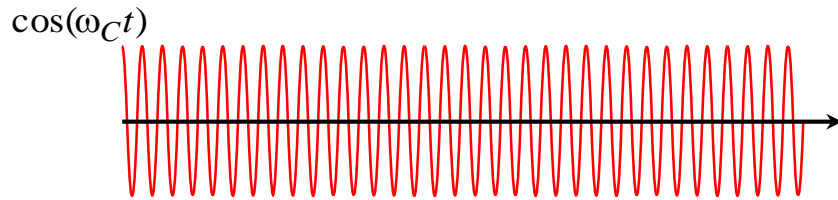
διαμόρφωση κατά φάση

$$x(t) = \cos[\omega_C t + k_f m(t)]$$

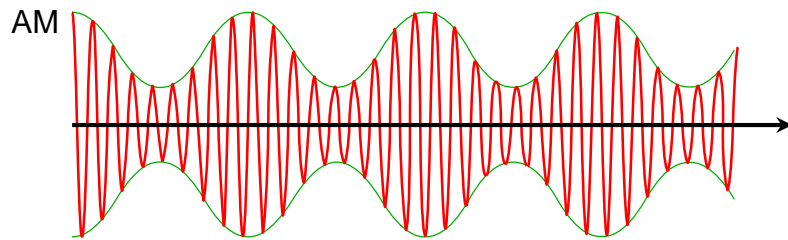
Παράδειγμα: Διαμόρφωση ημιτονοειδούς σήματος $m(t) = \cos\omega t$



υπό διαμόρφωση σήμα

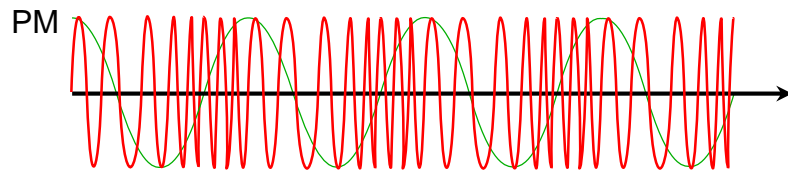


φέρουσα συχνότητα



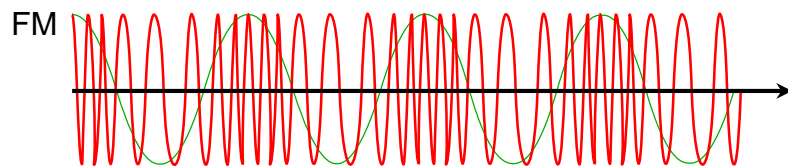
διαμόρφωση κατά εύρος

$$x(t) = [A + k_a m(t)] \cos(\omega_C t)$$



διαμόρφωση κατά φάση

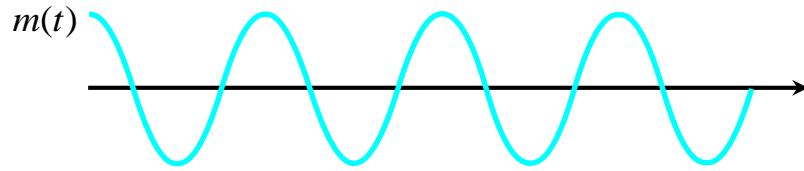
$$x(t) = \cos[\omega_C t + k_f m(t)]$$



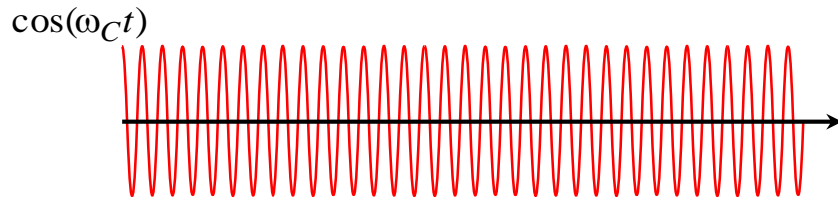
διαμόρφωση κατά συχνότητα

$$x(t) = \cos\left[\omega_C t + k_p \int_{t_0}^t m(t) dt\right]$$

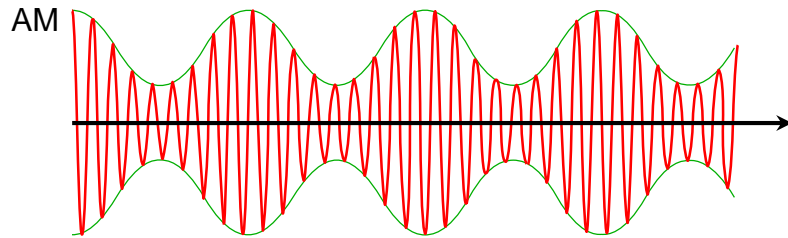
Παράδειγμα: Διαμόρφωση ημιτονοειδούς σήματος $m(t) = \cos\omega t$



υπό διαμόρφωση σήμα

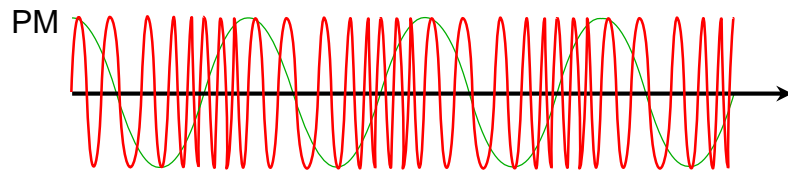


φέρουσα συχνότητα



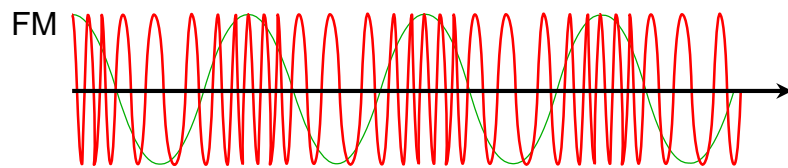
διαμόρφωση κατά εύρος

$$x(t) = [A + k_a m(t)] \cos(\omega_C t)$$



διαμόρφωση κατά φάση

$$x(t) = \cos[\omega_C t + k_f m(t)]$$



διαμόρφωση κατά συχνότητα

$$x(t) = \cos\left[\omega_C t + k_p \int_{t_0}^t m(t) dt\right]$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega \Rightarrow \phi = \int \omega dt$$

Αποδιαμόρφωση (demodulation)

Αποδιαμόρφωση (demodulation)

Αποδιαμόρφωση = διαδικασία διαχωρισμού κυρίως σήματος $m(t)$ από το λαμβανόμενο σήμα $x(t)$

Αποδιαμόρφωση (demodulation)

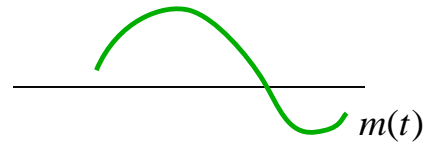
Αποδιαμόρφωση = διαδικασία διαχωρισμού κυρίως σήματος $m(t)$ από το λαμβανόμενο σήμα $x(t)$

φάσμα σήματος $m(t)$ = Μετασχηματισμός Fourier :
$$M(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} m(t) e^{-i\omega t} dt$$

Αποδιαμόρφωση (demodulation)

Αποδιαμόρφωση = διαδικασία διαχωρισμού κυρίως σήματος $m(t)$ από το λαμβανόμενο σήμα $x(t)$

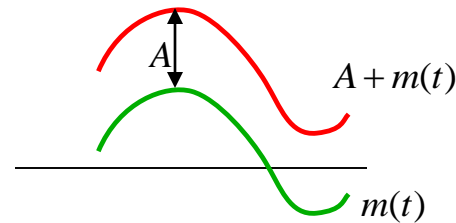
φάσμα σήματος $m(t)$ = Μετασχηματισμός Fourier :
$$M(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} m(t) e^{-i\omega t} dt$$



Αποδιαμόρφωση (demodulation)

Αποδιαμόρφωση = διαδικασία διαχωρισμού κυρίως σήματος $m(t)$ από το λαμβανόμενο σήμα $x(t)$

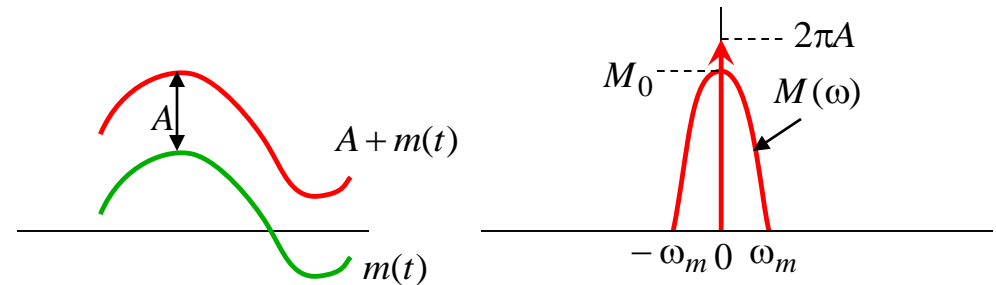
φάσμα σήματος $m(t)$ = Μετασχηματισμός Fourier :
$$M(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} m(t) e^{-i\omega t} dt$$



Αποδιαμόρφωση (demodulation)

Αποδιαμόρφωση = διαδικασία διαχωρισμού κυρίως σήματος $m(t)$ από το λαμβανόμενο σήμα $x(t)$

φάσμα σήματος $m(t)$ = Μετασχηματισμός Fourier :
$$M(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} m(t) e^{-i\omega t} dt$$

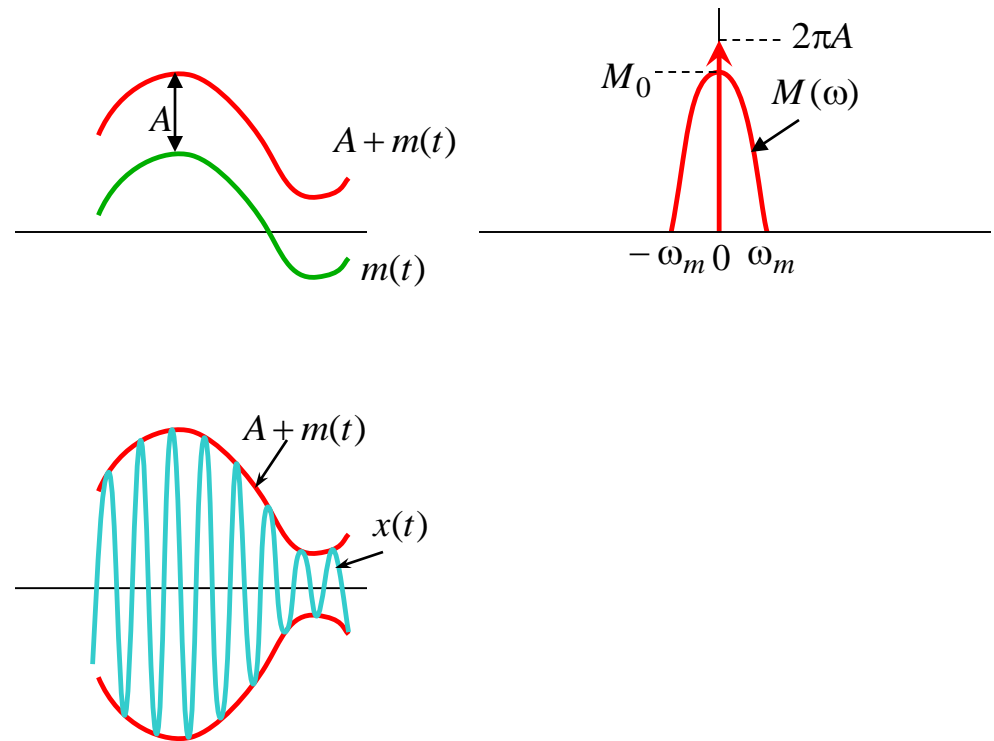


Αποδιαμόρφωση (demodulation)

Αποδιαμόρφωση = διαδικασία διαχωρισμού κυρίως σήματος $m(t)$ από το λαμβανόμενο σήμα $x(t)$

φάσμα σήματος $m(t)$ = Μετασχηματισμός Fourier :
$$M(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} m(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$x(t) = [A + m(t)] \cos(\omega_C t) = A \cos(\omega_C t) + m(t) \cos(\omega_C t)$$



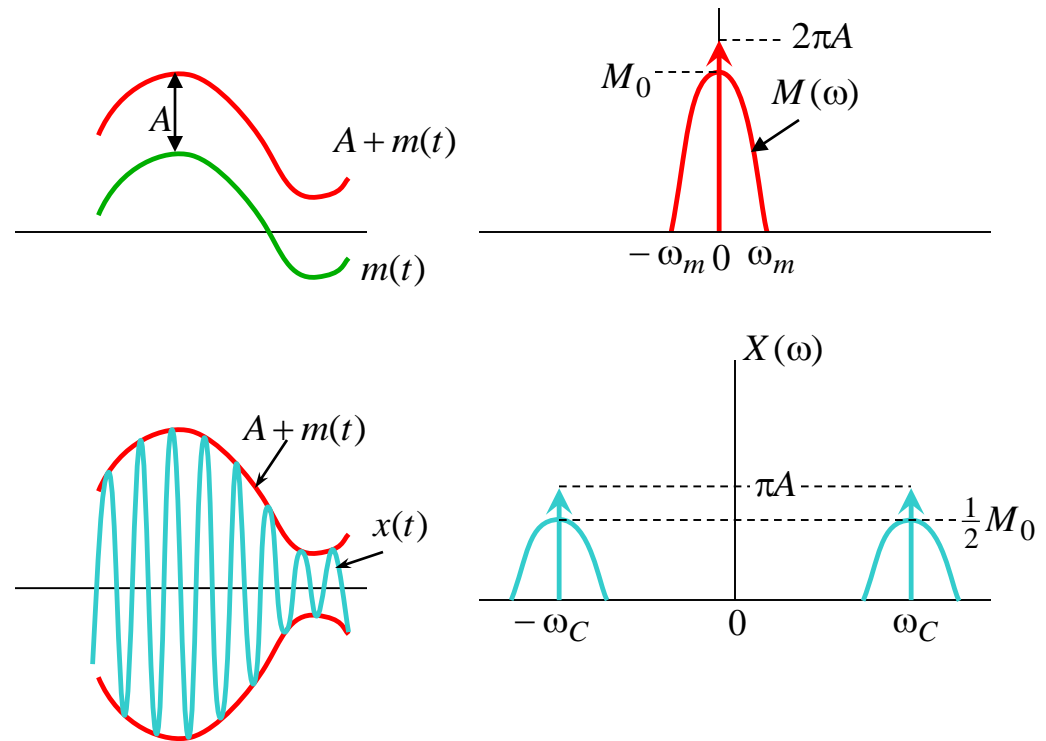
Αποδιαμόρφωση (demodulation)

Αποδιαμόρφωση = διαδικασία διαχωρισμού κυρίως σήματος $m(t)$ από το λαμβανόμενο σήμα $x(t)$

φάσμα σήματος $m(t)$ = Μετασχηματισμός Fourier :
$$M(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} m(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$x(t) = [A + m(t)] \cos(\omega_C t) = A \cos(\omega_C t) + m(t) \cos(\omega_C t)$$

$$X(\omega) = \frac{1}{2} M(\omega - \omega_C) + \frac{1}{2} M(\omega + \omega_C) + \pi A \delta(\omega - \omega_C) + \pi A \delta(\omega + \omega_C)$$



Αποδιαμόρφωση (demodulation)

Αποδιαμόρφωση = διαδικασία διαχωρισμού κυρίως σήματος $m(t)$ από το λαμβανόμενο σήμα $x(t)$

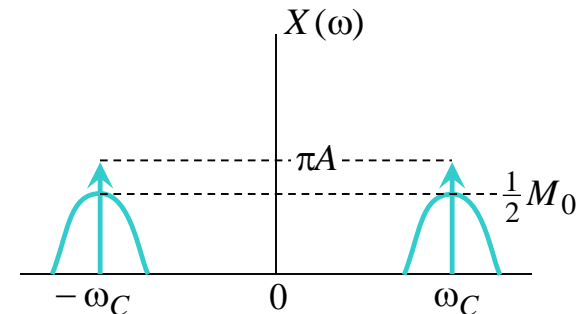
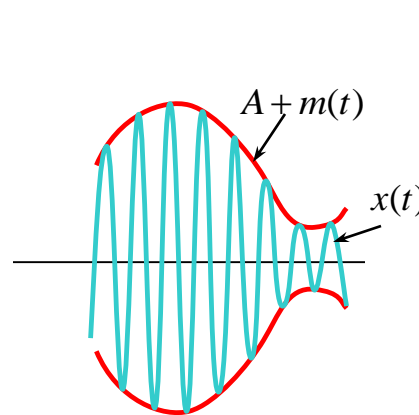
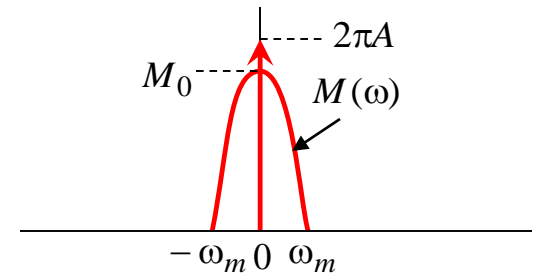
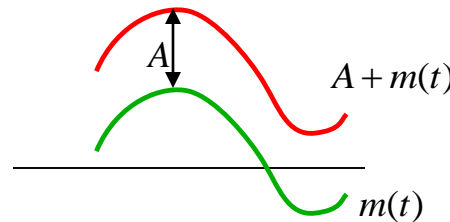
φάσμα σήματος $m(t)$ = Μετασχηματισμός Fourier :
$$M(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} m(t)e^{-i\omega t} dt$$

$$x(t) = [A + m(t)]\cos(\omega_C t) = A\cos(\omega_C t) + m(t)\cos(\omega_C t)$$

$$X(\omega) = \frac{1}{2}M(\omega - \omega_C) + \frac{1}{2}M(\omega + \omega_C) + \pi A\delta(\omega - \omega_C) + \pi A\delta(\omega + \omega_C)$$

Χρησιμοποιήθηκαν οι ιδιότητες :

$$1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega) \quad \Rightarrow \quad A \leftrightarrow 2\pi A\delta(\omega)$$



Αποδιαμόρφωση (demodulation)

Αποδιαμόρφωση = διαδικασία διαχωρισμού κυρίως σήματος $m(t)$ από το λαμβανόμενο σήμα $x(t)$

φάσμα σήματος $m(t)$ = Μετασχηματισμός Fourier :
$$M(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} m(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$x(t) = [A + m(t)] \cos(\omega_C t) = A \cos(\omega_C t) + m(t) \cos(\omega_C t)$$

$$X(\omega) = \frac{1}{2} M(\omega - \omega_C) + \frac{1}{2} M(\omega + \omega_C) + \pi A \delta(\omega - \omega_C) + \pi A \delta(\omega + \omega_C)$$

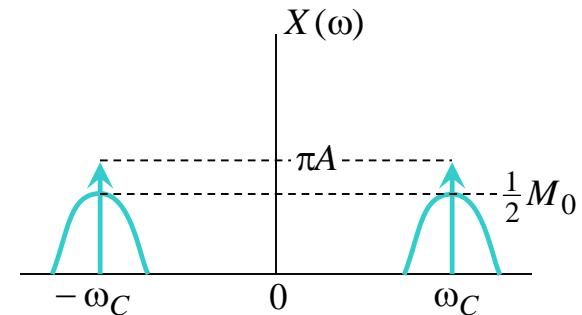
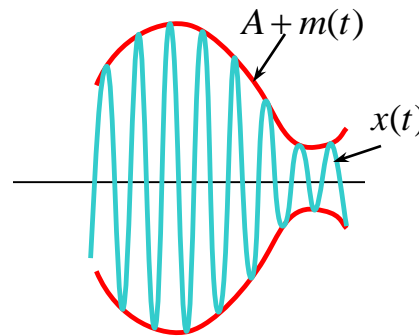
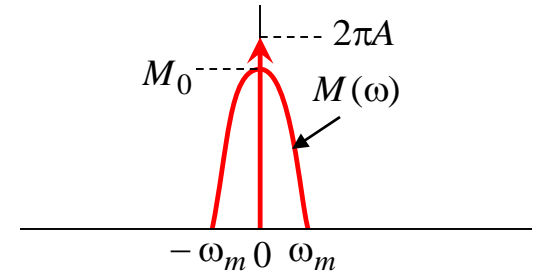
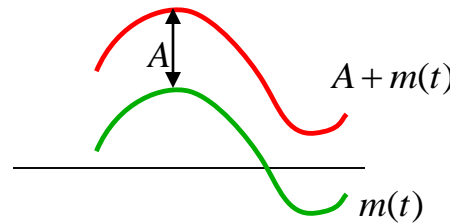
Χρησιμοποιήθηκαν οι ιδιότητες :

$$1 \leftrightarrow 2\pi \delta(\omega) \quad \Rightarrow \quad A \leftrightarrow 2\pi A \delta(\omega)$$

Θεώρημα διαμόρφωσης

$$z(t) \leftrightarrow Z(\omega) \quad \Rightarrow$$

$$z(t) \cos \omega_0 \leftrightarrow \frac{1}{2} [Z(\omega - \omega_0) + Z(\omega + \omega_0)]$$



Αποδιαμόρφωση (demodulation)

Αποδιαμόρφωση = διαδικασία διαχωρισμού κυρίως σήματος $m(t)$ από το λαμβανόμενο σήμα $x(t)$

φάσμα σήματος $m(t)$ = Μετασχηματισμός Fourier :
$$M(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} m(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$x(t) = [A + m(t)] \cos(\omega_C t) = A \cos(\omega_C t) + m(t) \cos(\omega_C t)$$

$$X(\omega) = \frac{1}{2} M(\omega - \omega_C) + \frac{1}{2} M(\omega + \omega_C) + \pi A \delta(\omega - \omega_C) + \pi A \delta(\omega + \omega_C)$$

Χρησιμοποιήθηκαν οι ιδιότητες :

$$1 \leftrightarrow 2\pi \delta(\omega) \Rightarrow A \leftrightarrow 2\pi A \delta(\omega)$$

Θεώρημα διαμόρφωσης

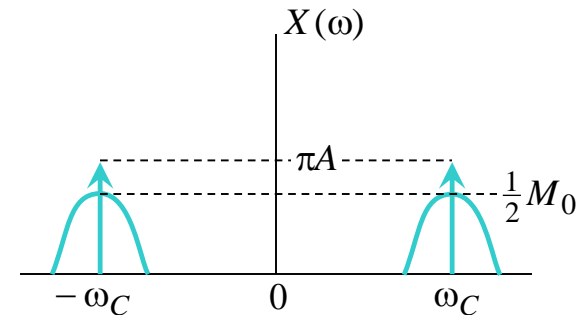
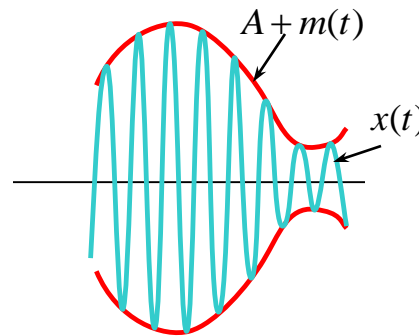
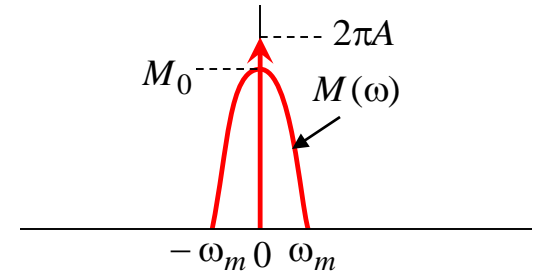
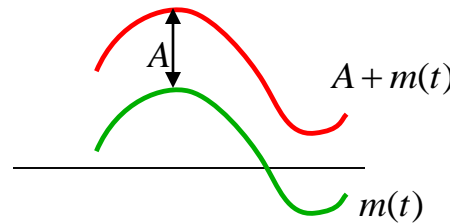
$$z(t) \leftrightarrow Z(\omega) \Rightarrow$$

$$z(t) \cos \omega_0 \leftrightarrow \frac{1}{2} [Z(\omega - \omega_0) + Z(\omega + \omega_0)]$$

από τις οποίες

$$A \cos(\omega_C t) \leftrightarrow \pi A \delta(\omega - \omega_C) + \pi A \delta(\omega + \omega_C)$$

$$m(t) \cos(\omega_C t) \leftrightarrow \frac{1}{2} M(\omega - \omega_C) + \frac{1}{2} M(\omega + \omega_C)$$



Διαμόρφωση διπλής ζώνης

Διαμόρφωση διπλής ζώνης

Διαμόρφωση = πολλαπλασιασμός σήματος $m(t)$ με φέρουσα $\cos\omega_C t$

$$x(t) = m(t)\cos(\omega_C t) \quad \leftrightarrow \quad X(\omega) = \frac{1}{2}M(\omega - \omega_C) + \frac{1}{2}M(\omega + \omega_C)$$

Διαμόρφωση διπλής ζώνης

Διαμόρφωση = πολλαπλασιασμός σήματος $m(t)$ με φέρουσα $\cos\omega_C t$

$$x(t) = m(t)\cos(\omega_C t) \quad \leftrightarrow \quad X(\omega) = \frac{1}{2}M(\omega - \omega_C) + \frac{1}{2}M(\omega + \omega_C)$$

Αποδιαμόρφωση = πολλαπλασιασμός εκ νέου με φέρουσα $\cos\omega_C t$ + φίλτρο χαμηλής διέλευσης

$$d(t) = x(t)\cos(\omega_C t) = m(t)x(t)\cos^2(\omega_C t) \quad \leftrightarrow \quad D(\omega) = \frac{1}{2}X(\omega - \omega_C) + \frac{1}{2}X(\omega + \omega_C)$$

Διαμόρφωση διπλής ζώνης

Διαμόρφωση = πολλαπλασιασμός σήματος $m(t)$ με φέρουσα $\cos\omega_C t$

$$x(t) = m(t)\cos(\omega_C t) \quad \leftrightarrow \quad X(\omega) = \frac{1}{2}M(\omega - \omega_C) + \frac{1}{2}M(\omega + \omega_C)$$

Αποδιαμόρφωση = πολλαπλασιασμός εκ νέου με φέρουσα $\cos\omega_C t$ + φίλτρο χαμηλής διέλευσης

$$d(t) = x(t)\cos(\omega_C t) = m(t)x(t)\cos^2(\omega_C t) \quad \leftrightarrow \quad D(\omega) = \frac{1}{2}X(\omega - \omega_C) + \frac{1}{2}X(\omega + \omega_C)$$

$$X(\omega) = \frac{1}{2}M(\omega - \omega_C) + \frac{1}{2}M(\omega + \omega_C)$$

Διαμόρφωση διπλής ζώνης

Διαμόρφωση = πολλαπλασιασμός σήματος $m(t)$ με φέρουσα $\cos\omega_C t$

$$x(t) = m(t)\cos(\omega_C t) \quad \leftrightarrow \quad X(\omega) = \frac{1}{2}M(\omega - \omega_C) + \frac{1}{2}M(\omega + \omega_C)$$

Αποδιαμόρφωση = πολλαπλασιασμός εκ νέου με φέρουσα $\cos\omega_C t$ + φίλτρο χαμηλής διέλευσης

$$d(t) = x(t)\cos(\omega_C t) = m(t)x(t)\cos^2(\omega_C t) \quad \leftrightarrow \quad D(\omega) = \frac{1}{2}X(\omega - \omega_C) + \frac{1}{2}X(\omega + \omega_C)$$

$$X(\omega) = \frac{1}{2}M(\omega - \omega_C) + \frac{1}{2}M(\omega + \omega_C)$$

$$\omega \rightarrow \omega - \omega_C \quad X(\omega - \omega_C) = \frac{1}{2}M(\omega - \omega_C - \omega_C) + \frac{1}{2}M(\omega + \omega_C - \omega_C) = \frac{1}{2}M(\omega - 2\omega_C) + \frac{1}{2}M(\omega)$$

Διαμόρφωση διπλής ζώνης

Διαμόρφωση = πολλαπλασιασμός σήματος $m(t)$ με φέρουσα $\cos\omega_C t$

$$x(t) = m(t)\cos(\omega_C t) \quad \leftrightarrow \quad X(\omega) = \frac{1}{2}M(\omega - \omega_C) + \frac{1}{2}M(\omega + \omega_C)$$

Αποδιαμόρφωση = πολλαπλασιασμός εκ νέου με φέρουσα $\cos\omega_C t$ + φίλτρο χαμηλής διέλευσης

$$d(t) = x(t)\cos(\omega_C t) = m(t)x(t)\cos^2(\omega_C t) \quad \leftrightarrow \quad D(\omega) = \frac{1}{2}X(\omega - \omega_C) + \frac{1}{2}X(\omega + \omega_C)$$

$$X(\omega) = \frac{1}{2}M(\omega - \omega_C) + \frac{1}{2}M(\omega + \omega_C)$$

$$\omega \rightarrow \omega - \omega_C \quad X(\omega - \omega_C) = \frac{1}{2}M(\omega - \omega_C - \omega_C) + \frac{1}{2}M(\omega + \omega_C - \omega_C) = \frac{1}{2}M(\omega - 2\omega_C) + \frac{1}{2}M(\omega)$$

$$\omega \rightarrow \omega + \omega_C \quad X(\omega + \omega_C) = \frac{1}{2}M(\omega - \omega_C + \omega_C) + \frac{1}{2}M(\omega + \omega_C + \omega_C) = \frac{1}{2}M(\omega) + \frac{1}{2}M(\omega + 2\omega_C)$$

Διαμόρφωση διπλής ζώνης

Διαμόρφωση = πολλαπλασιασμός σήματος $m(t)$ με φέρουσα $\cos\omega_C t$

$$x(t) = m(t)\cos(\omega_C t) \quad \leftrightarrow \quad X(\omega) = \frac{1}{2}M(\omega - \omega_C) + \frac{1}{2}M(\omega + \omega_C)$$

Αποδιαμόρφωση = πολλαπλασιασμός εκ νέου με φέρουσα $\cos\omega_C t$ + φίλτρο χαμηλής διέλευσης

$$d(t) = x(t)\cos(\omega_C t) = m(t)x(t)\cos^2(\omega_C t) \quad \leftrightarrow \quad D(\omega) = \frac{1}{2}X(\omega - \omega_C) + \frac{1}{2}X(\omega + \omega_C)$$

$$X(\omega) = \frac{1}{2}M(\omega - \omega_C) + \frac{1}{2}M(\omega + \omega_C)$$

$$\omega \rightarrow \omega - \omega_C \quad X(\omega - \omega_C) = \frac{1}{2}M(\omega - \omega_C - \omega_C) + \frac{1}{2}M(\omega + \omega_C - \omega_C) = \frac{1}{2}M(\omega - 2\omega_C) + \frac{1}{2}M(\omega)$$

$$\omega \rightarrow \omega + \omega_C \quad X(\omega + \omega_C) = \frac{1}{2}M(\omega - \omega_C + \omega_C) + \frac{1}{2}M(\omega + \omega_C + \omega_C) = \frac{1}{2}M(\omega) + \frac{1}{2}M(\omega + 2\omega_C)$$

$$D(\omega) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}M(\omega - 2\omega_C) + \frac{1}{2}M(\omega) \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}M(\omega) + \frac{1}{2}M(\omega + 2\omega_C) \right]$$

Διαμόρφωση διπλής ζώνης

Διαμόρφωση = πολλαπλασιασμός σήματος $m(t)$ με φέρουσα $\cos\omega_C t$

$$x(t) = m(t)\cos(\omega_C t) \quad \leftrightarrow \quad X(\omega) = \frac{1}{2}M(\omega - \omega_C) + \frac{1}{2}M(\omega + \omega_C)$$

Αποδιαμόρφωση = πολλαπλασιασμός εκ νέου με φέρουσα $\cos\omega_C t$ + φίλτρο χαμηλής διέλευσης

$$d(t) = x(t)\cos(\omega_C t) = m(t)x(t)\cos^2(\omega_C t) \quad \leftrightarrow \quad D(\omega) = \frac{1}{2}X(\omega - \omega_C) + \frac{1}{2}X(\omega + \omega_C)$$

$$X(\omega) = \frac{1}{2}M(\omega - \omega_C) + \frac{1}{2}M(\omega + \omega_C)$$

$$\omega \rightarrow \omega - \omega_C \quad X(\omega - \omega_C) = \frac{1}{2}M(\omega - \omega_C - \omega_C) + \frac{1}{2}M(\omega + \omega_C - \omega_C) = \frac{1}{2}M(\omega - 2\omega_C) + \frac{1}{2}M(\omega)$$

$$\omega \rightarrow \omega + \omega_C \quad X(\omega + \omega_C) = \frac{1}{2}M(\omega - \omega_C + \omega_C) + \frac{1}{2}M(\omega + \omega_C + \omega_C) = \frac{1}{2}M(\omega) + \frac{1}{2}M(\omega + 2\omega_C)$$

$$D(\omega) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}M(\omega - 2\omega_C) + \frac{1}{2}M(\omega) \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}M(\omega) + \frac{1}{2}M(\omega + 2\omega_C) \right]$$

$$D(\omega) = \frac{1}{4}M(\omega - 2\omega_C) + \frac{1}{2}M(\omega) + \frac{1}{4}M(\omega + 2\omega_C)$$

Διαμόρφωση διπλής ζώνης

Διαμόρφωση = πολλαπλασιασμός σήματος $m(t)$ με φέρουσα $\cos\omega_C t$

$$x(t) = m(t)\cos(\omega_C t) \quad \leftrightarrow \quad X(\omega) = \frac{1}{2}M(\omega - \omega_C) + \frac{1}{2}M(\omega + \omega_C)$$

Αποδιαμόρφωση = πολλαπλασιασμός εκ νέου με φέρουσα $\cos\omega_C t$ + φίλτρο χαμηλής διέλευσης

$$d(t) = x(t)\cos(\omega_C t) = m(t)x(t)\cos^2(\omega_C t) \quad \leftrightarrow \quad D(\omega) = \frac{1}{2}X(\omega - \omega_C) + \frac{1}{2}X(\omega + \omega_C)$$

$$X(\omega) = \frac{1}{2}M(\omega - \omega_C) + \frac{1}{2}M(\omega + \omega_C)$$

$$\omega \rightarrow \omega - \omega_C \quad X(\omega - \omega_C) = \frac{1}{2}M(\omega - \omega_C - \omega_C) + \frac{1}{2}M(\omega + \omega_C - \omega_C) = \frac{1}{2}M(\omega - 2\omega_C) + \frac{1}{2}M(\omega)$$

$$\omega \rightarrow \omega + \omega_C \quad X(\omega + \omega_C) = \frac{1}{2}M(\omega - \omega_C + \omega_C) + \frac{1}{2}M(\omega + \omega_C + \omega_C) = \frac{1}{2}M(\omega) + \frac{1}{2}M(\omega + 2\omega_C)$$

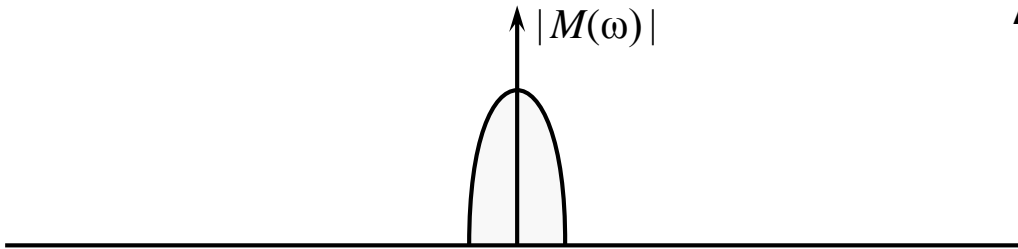
$$D(\omega) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}M(\omega - 2\omega_C) + \frac{1}{2}M(\omega) \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}M(\omega) + \frac{1}{2}M(\omega + 2\omega_C) \right]$$

$$D(\omega) = \frac{1}{4}M(\omega - 2\omega_C) + \frac{1}{2}M(\omega) + \frac{1}{4}M(\omega + 2\omega_C)$$

Μετά από φίλτρο χαμηλής διέλευσης απομένει : $\frac{1}{2}M(\omega) \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{2}m(t)$

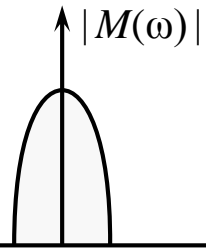
Διαμόρφωση διπλής ζώνης

αρχικό σήμα



Διαμόρφωση διπλής ζώνης

αρχικό σήμα



ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ

διαμορφωμένο σήμα

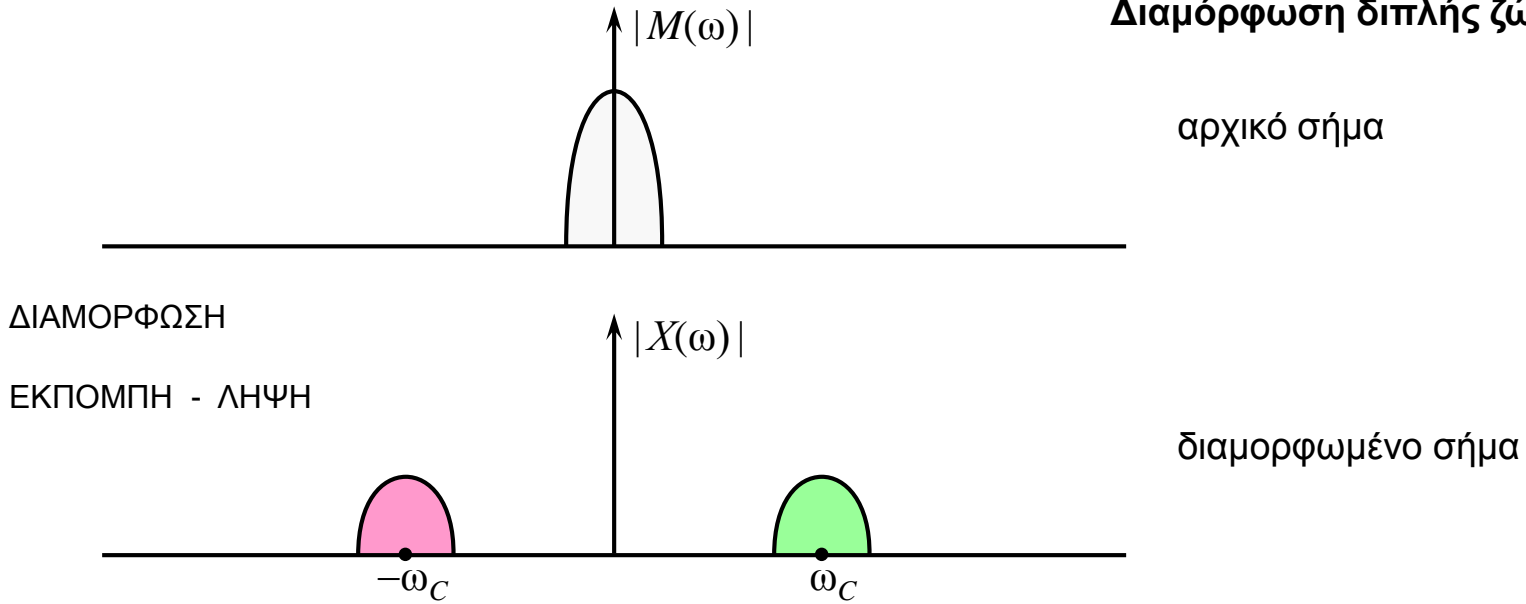
$|X(\omega)|$



$-\omega_c$

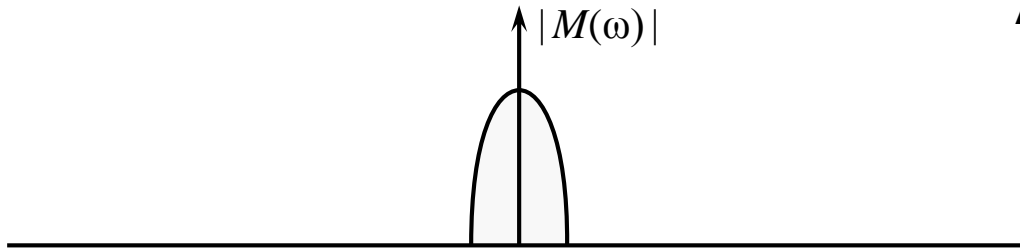
ω_c

Διαμόρφωση διπλής ζώνης



Διαμόρφωση διπλής ζώνης

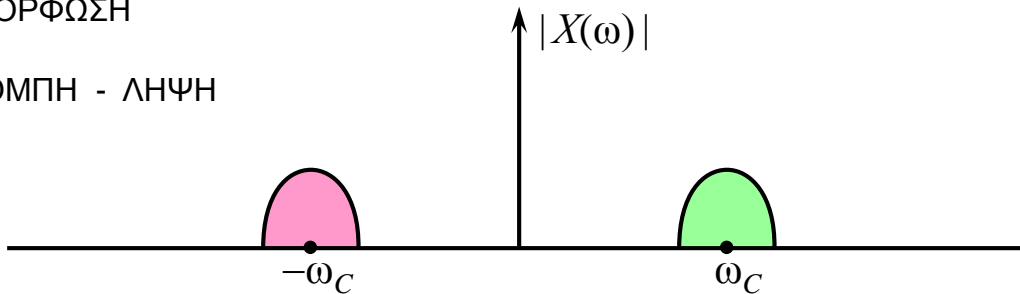
αρχικό σήμα



ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ

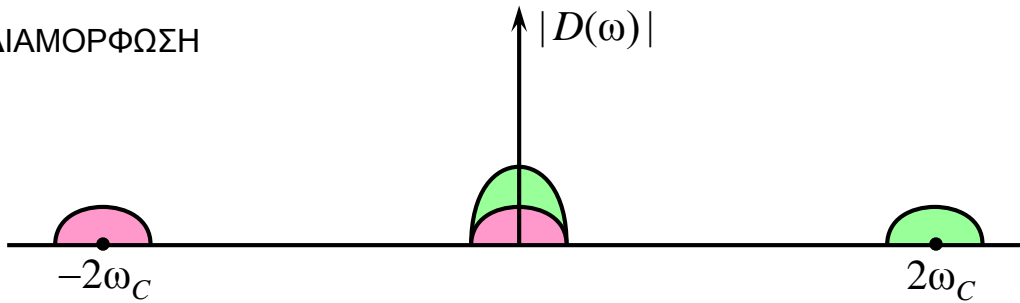
ΕΚΠΟΜΠΗ - ΛΗΨΗ

διαμορφωμένο σήμα



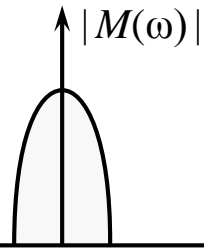
ΑΠΟΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ

Πολλαπλασιασμός με φέρουσα



Διαμόρφωση διπλής ζώνης

αρχικό σήμα



ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ

ΕΚΠΟΜΠΗ - ΛΗΨΗ

διαμορφωμένο σήμα

$|X(\omega)|$

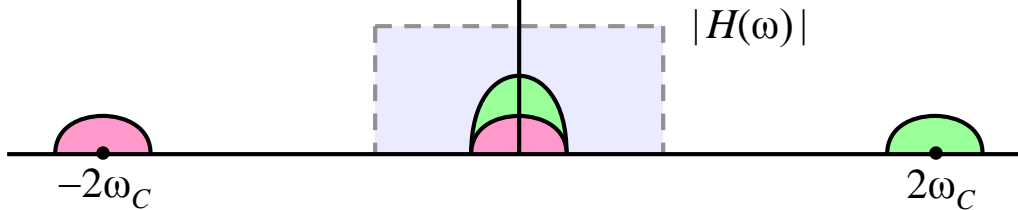


ΑΠΟΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ

Πολλαπλασιασμός με φέρουσα

$|D(\omega)|$

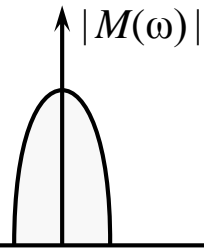
$|H(\omega)|$



Εφαρμογή φίλτρου χαμηλής διέλευσης

Διαμόρφωση διπλής ζώνης

αρχικό σήμα

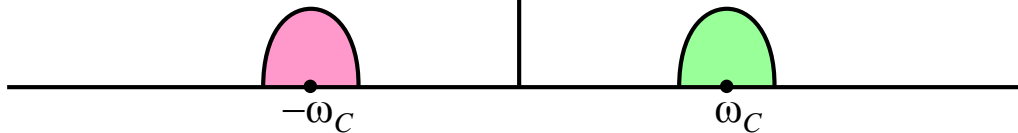


ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ

ΕΚΠΟΜΠΗ - ΛΗΨΗ

διαμορφωμένο σήμα

$|X(\omega)|$

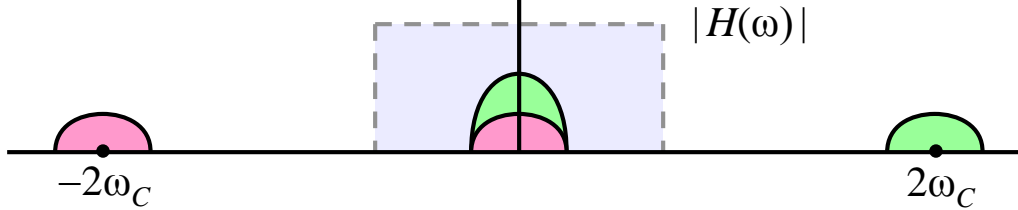


ΑΠΟΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ

Πολλαπλασιασμός με φέρουσα

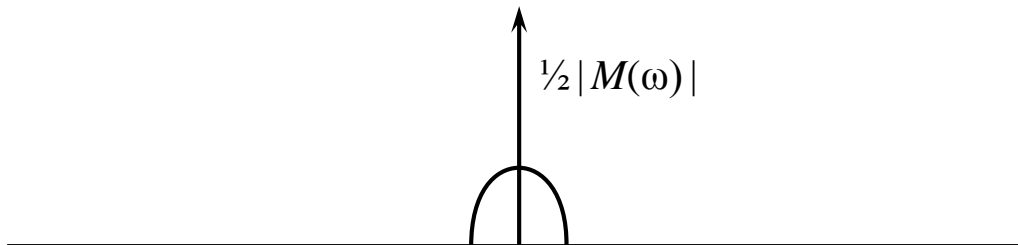
$|D(\omega)|$

$|H(\omega)|$

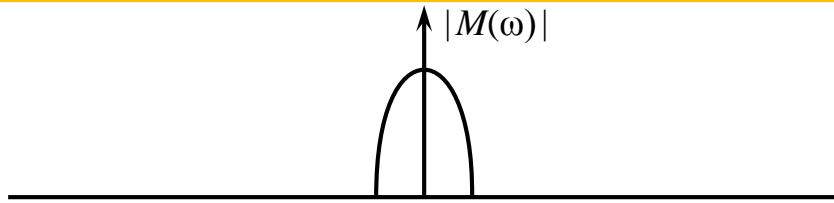


Εφαρμογή φίλτρου χαμηλής διέλευσης

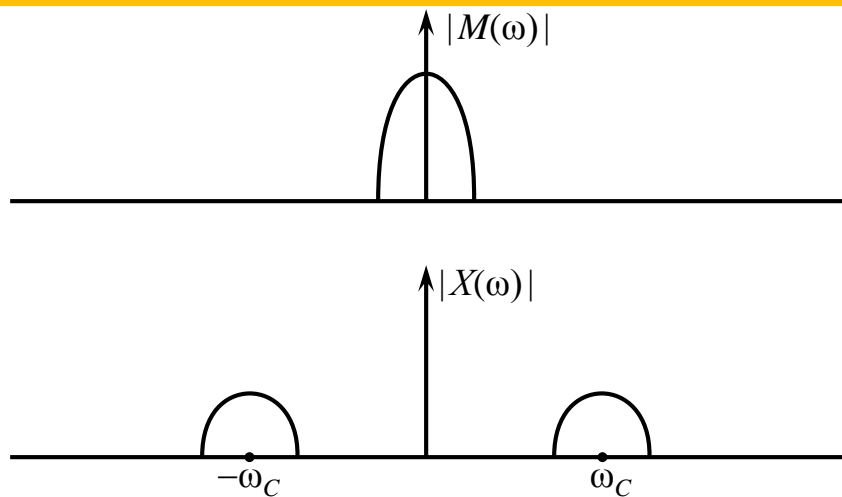
$\frac{1}{2} |M(\omega)|$



**Διαμόρφωση μοναδικής ζώνης
- διατήρηση εξωτερικών τμημάτων**

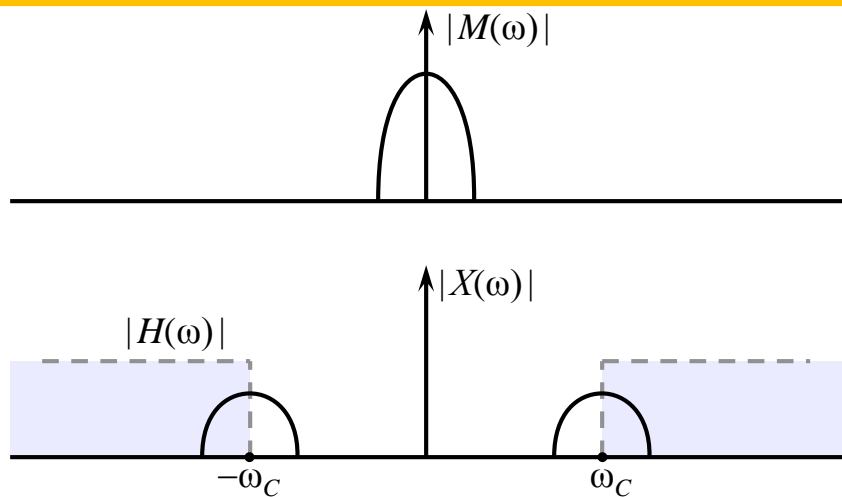


Διαμόρφωση μοναδικής ζώνης
- διατήρηση εξωτερικών τμημάτων



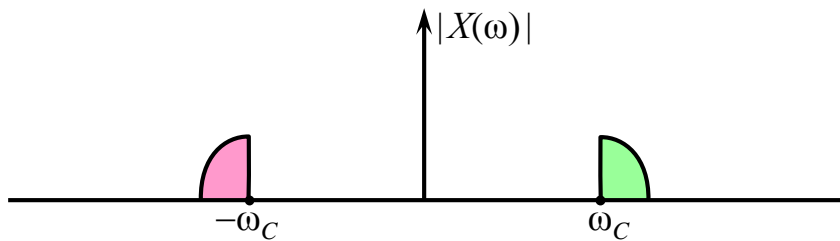
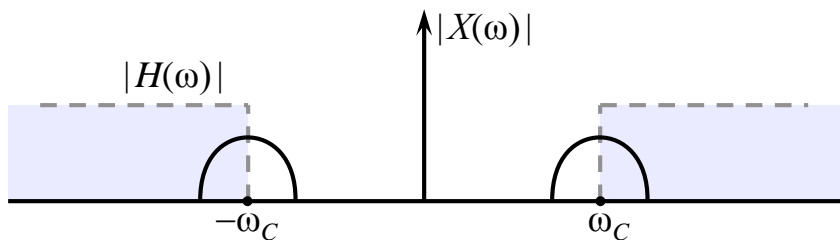
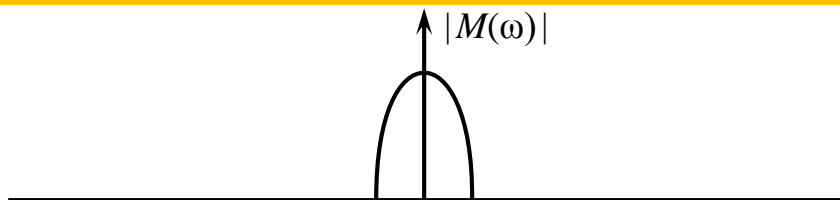
**Διαμόρφωση μοναδικής ζώνης
- διατήρηση εξωτερικών τμημάτων**

Διαμόρφωση = πολλαπλασιασμός με $\cos\omega_C t$
+ φίλτρο υψηλής διέλευσης



Διαμόρφωση μοναδικής ζώνης
- διατήρηση εξωτερικών τμημάτων

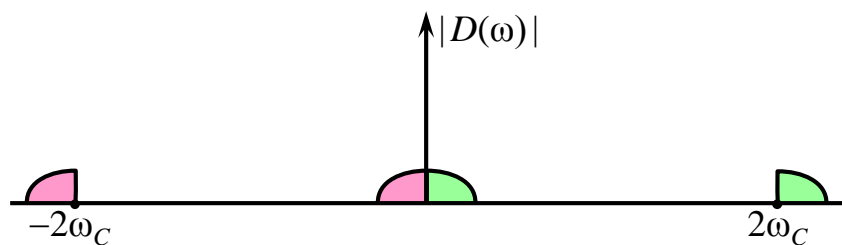
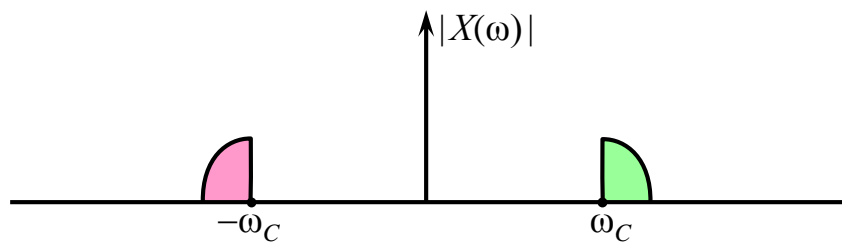
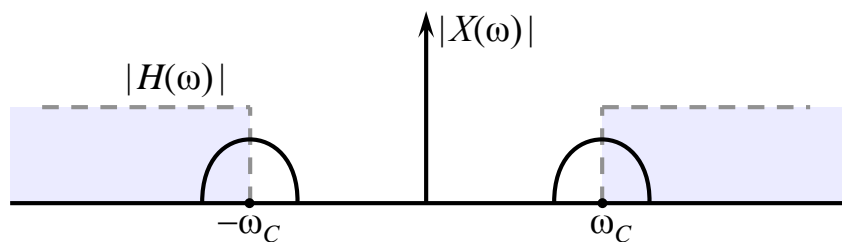
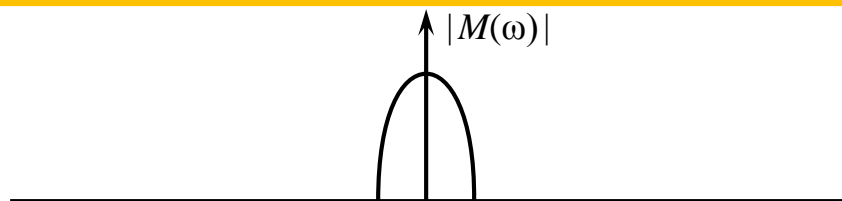
Διαμόρφωση = πολλαπλασιασμός με $\cos\omega_C t$
 + φίλτρο υψηλής διέλευσης



Διαμόρφωση μοναδικής ζώνης
 - διατήρηση εξωτερικών τμημάτων

Διαμόρφωση = πολλαπλασιασμός με $\cos\omega_C t$
 + φίλτρο υψηλής διέλευσης

διαμορφωμένο σήμα

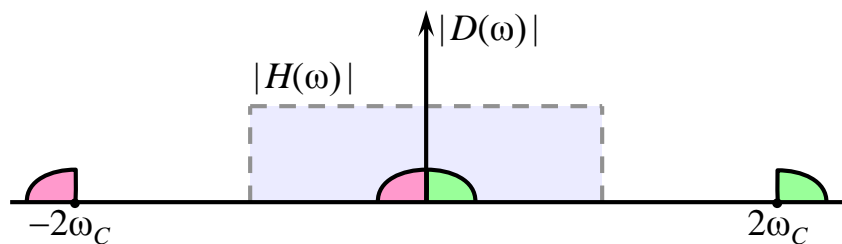
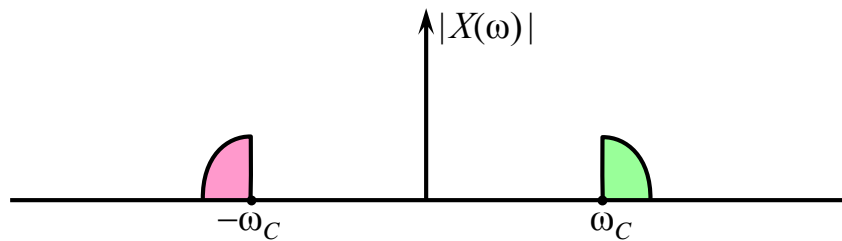
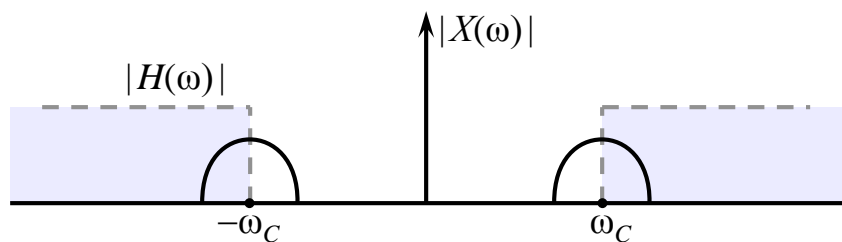
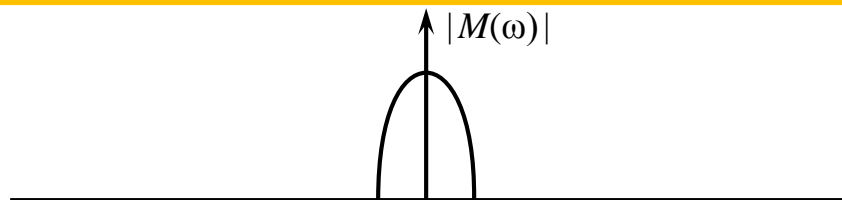


**Διαμόρφωση μοναδικής ζώνης
- διατήρηση εξωτερικών τμημάτων**

Διαμόρφωση = πολλαπλασιασμός με $\cos\omega_C t$
+ φίλτρο υψηλής διέλευσης

διαμορφωμένο σήμα

Αποδιαμόρφωση = πολλαπλασιασμός με $\cos\omega_C t$
+ φίλτρο χαμηλής διέλευσης



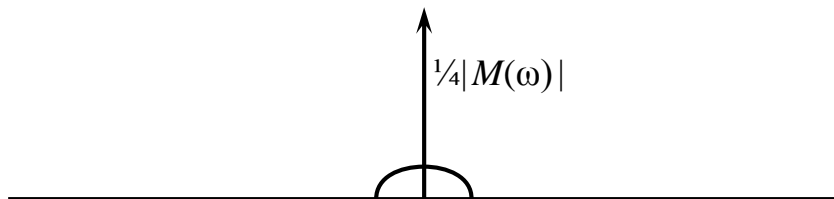
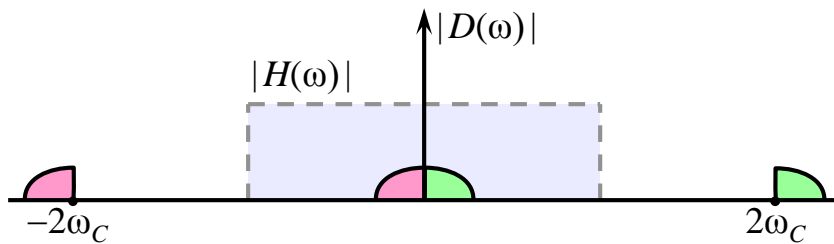
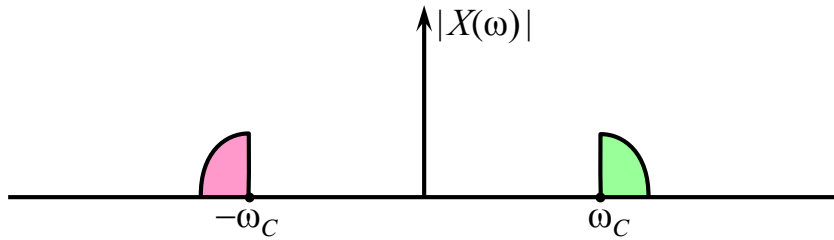
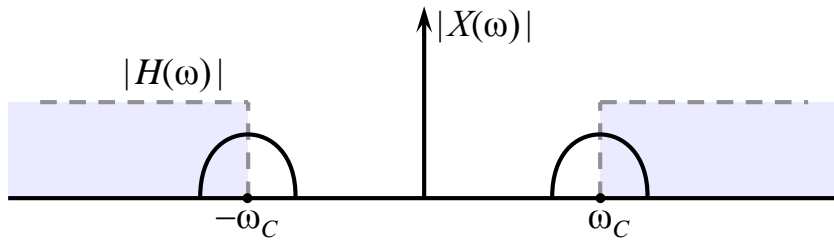
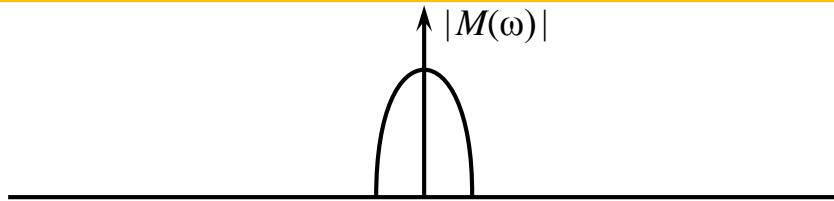
**Διαμόρφωση μοναδικής ζώνης
- διατήρηση εξωτερικών τμημάτων**

Διαμόρφωση = πολλαπλασιασμός με $\cos\omega_C t$
+ φίλτρο υψηλής διέλευσης

διαμορφωμένο σήμα

Αποδιαμόρφωση = πολλαπλασιασμός με $\cos\omega_C t$
+ φίλτρο χαμηλής διέλευσης

**Διαμόρφωση μοναδικής ζώνης
- διατήρηση εξωτερικών τμημάτων**



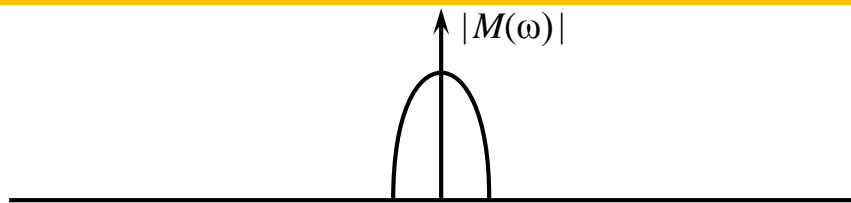
Διαμόρφωση = πολλαπλασιασμός με $\cos\omega_C t$
+ φίλτρο υψηλής διέλευσης

διαμορφωμένο σήμα

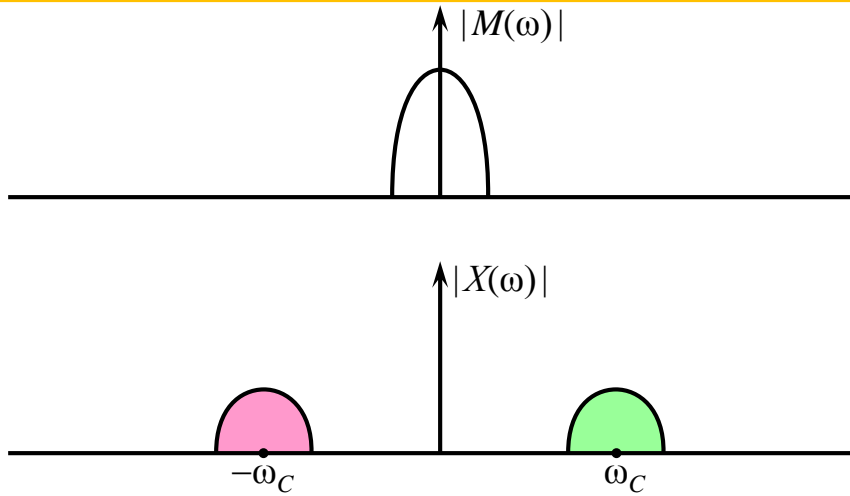
Αποδιαμόρφωση = πολλαπλασιασμός με $\cos\omega_C t$
+ φίλτρο χαμηλής διέλευσης

αποδιαμορφωμένο σήμα

**Διαμόρφωση μοναδικής ζώνης
- διατήρηση εσωτερικών τμημάτων**

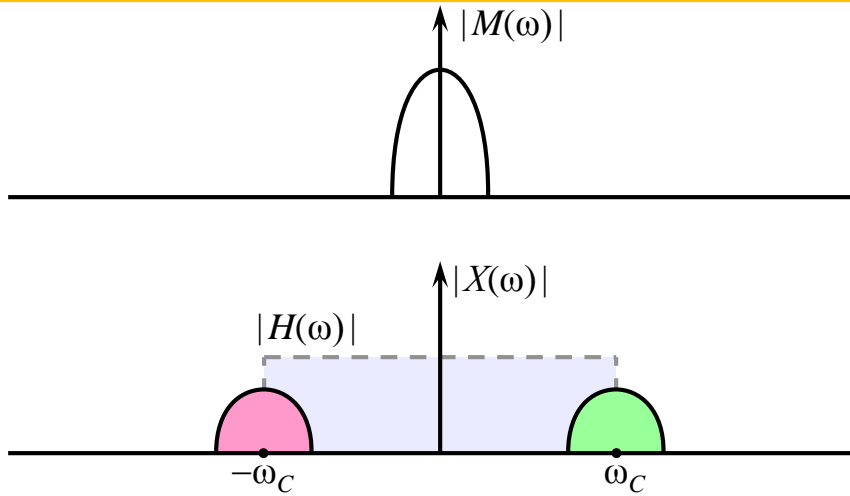


Διαμόρφωση μοναδικής ζώνης
- διατήρηση εσωτερικών τμημάτων



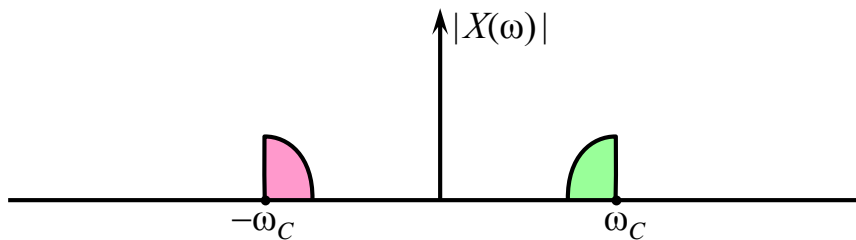
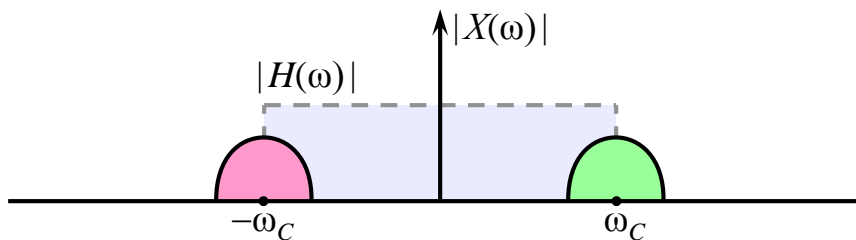
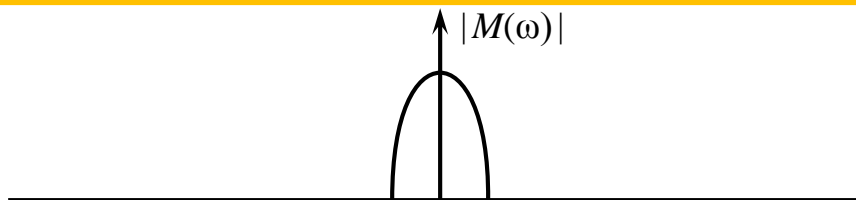
Διαμόρφωση μοναδικής ζώνης
- διατήρηση εσωτερικών τμημάτων

Διαμόρφωση = πολλαπλασιασμός με $\cos\omega_C t$
 + φίλτρο χαμηλής διέλευσης



Διαμόρφωση μοναδικής ζώνης
 - διατήρηση εσωτερικών τμημάτων

Διαμόρφωση = πολλαπλασιασμός με $\cos\omega_C t$
 + φίλτρο χαμηλής διέλευσης

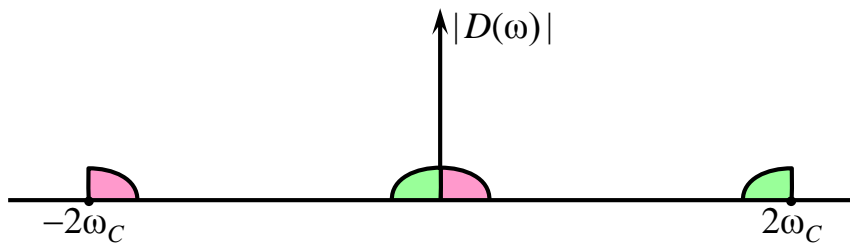
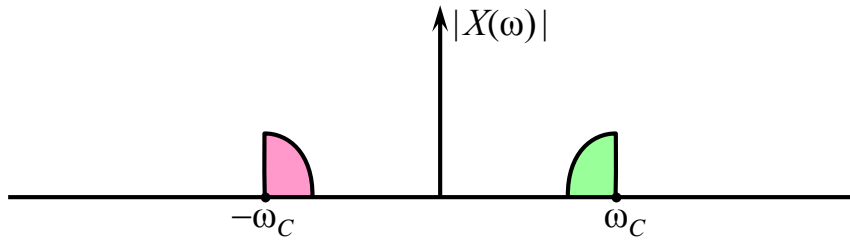
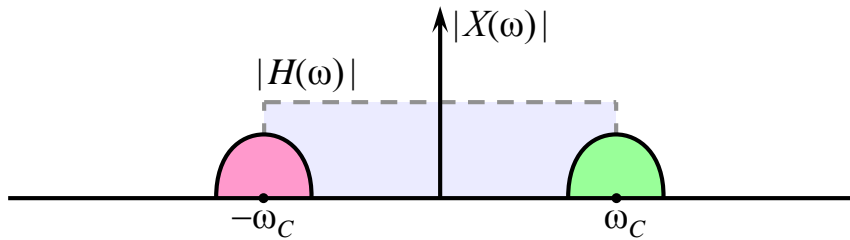
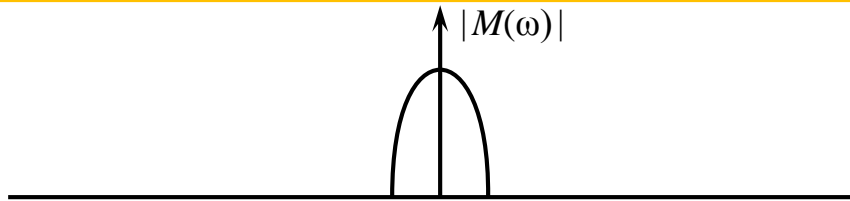


Διαμόρφωση μοναδικής ζώνης
- διατήρηση εσωτερικών τμημάτων

Διαμόρφωση = πολλαπλασιασμός με $\cos\omega_C t$
+ φίλτρο χαμηλής διέλευσης

διαμορφωμένο σήμα

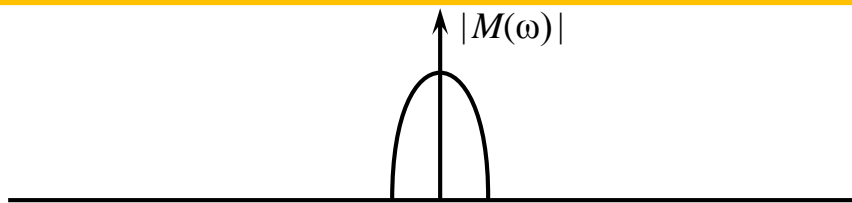
**Διαμόρφωση μοναδικής ζώνης
- διατήρηση εσωτερικών τμημάτων**



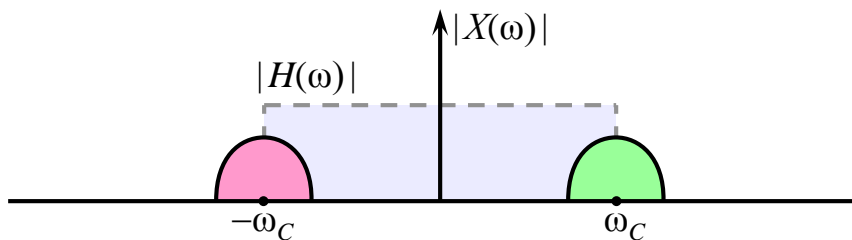
Διαμόρφωση = πολλαπλασιασμός με $\cos\omega_C t$
+ φίλτρο χαμηλής διέλευσης

διαμορφωμένο σήμα

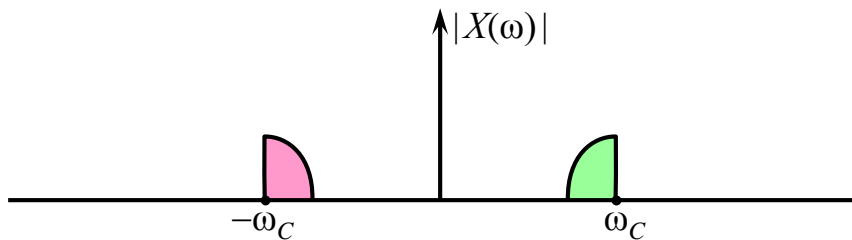
Αποδιαμόρφωση = πολλαπλασιασμός με $\cos\omega_C t$
+ φίλτρο χαμηλής διέλευσης



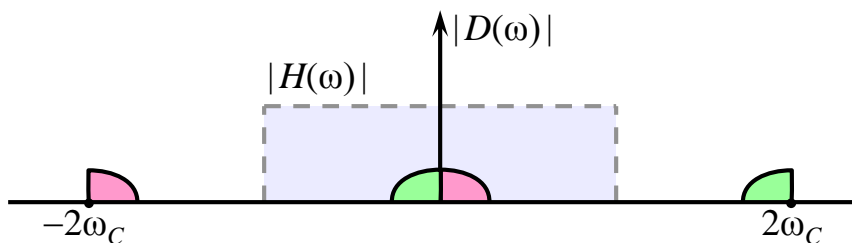
Διαμόρφωση μοναδικής ζώνης
- διατήρηση εσωτερικών τμημάτων



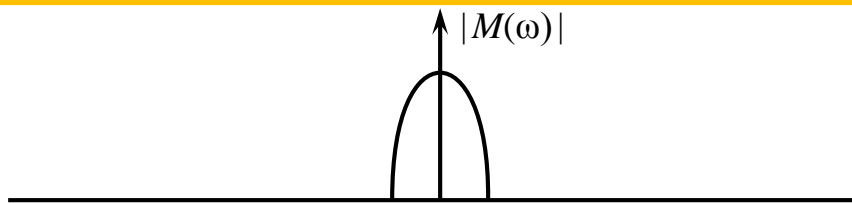
Διαμόρφωση = πολλαπλασιασμός με $\cos\omega_C t$
+ φίλτρο χαμηλής διέλευσης



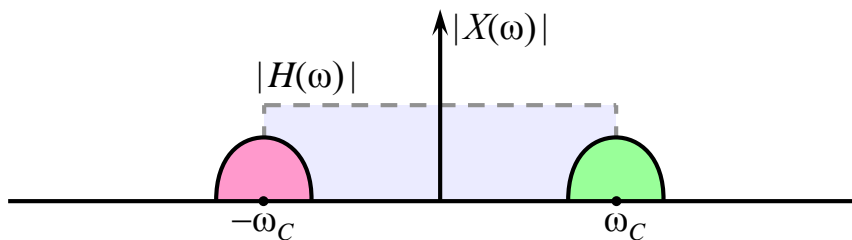
διαμορφωμένο σήμα



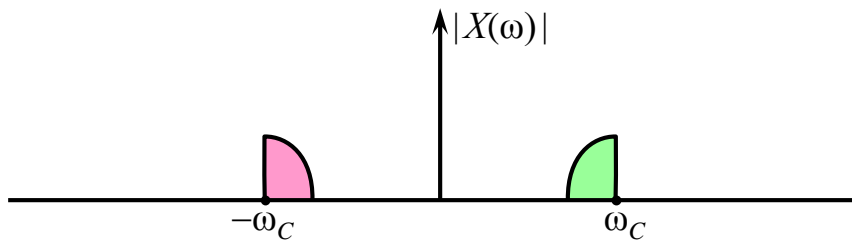
Αποδιαμόρφωση = πολλαπλασιασμός με $\cos\omega_C t$
+ φίλτρο χαμηλής διέλευσης



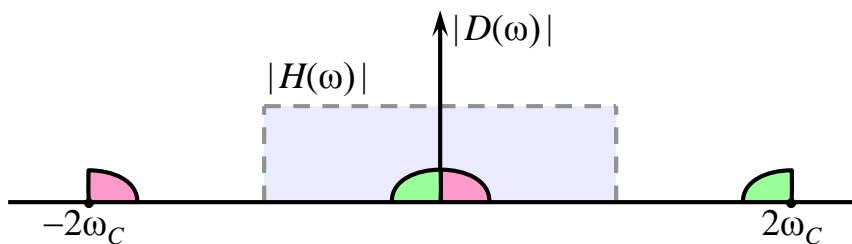
**Διαμόρφωση μοναδικής ζώνης
- διατήρηση εσωτερικών τμημάτων**



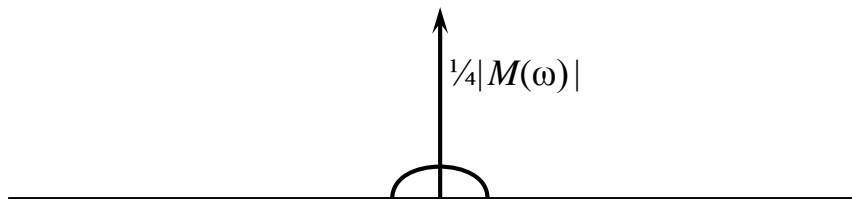
Διαμόρφωση = πολλαπλασιασμός με $\cos\omega_C t$
+ φίλτρο χαμηλής διέλευσης



διαμορφωμένο σήμα



Αποδιαμόρφωση = πολλαπλασιασμός με $\cos\omega_C t$
+ φίλτρο χαμηλής διέλευσης



αποδιαμορφωμένο σήμα