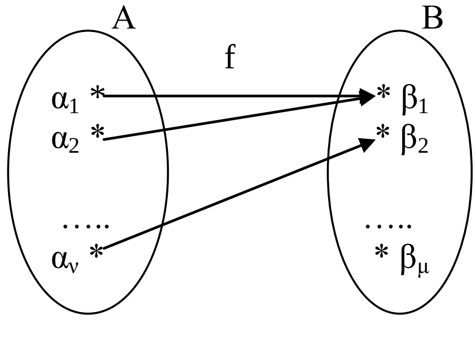
Α. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ.

Α.1. Γενικά.

Αξίζει να θυμίσουμε πως η συνάρτησης μιας πραγματικής μεταβλητής είναι μια μονοσήμαντη αντιστοιχία ενός συνόλου Α (υποσυνόλου του R - $A \subset R$) σε ένα σύνολο Β ($B \subset R$).

Με τον τρόπο αυτό ο μηχανισμός της συνάρτησης f αντιστοιχίζει σε κάποιο στοιχείο x του συνόλου Α (πεδίου ορισμού) ένα στοιχείο y του συνόλου Β (συνόλου εικόνων ή πεδίου τιμών)

$$y=f(x)$$



Σχ. Α.1.1.

Οι συναρτήσεις περισσοτέρων μεταβλητών είναι μια γενίκευση της έννοιας των συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής. Η μορφή μιας συνάρτησης ν-μεταβλητών διατυπώνεται από τη σχέση:

$$y = f(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_\nu)$$

όπου $x_1,x_2,x_3,\ldots,x_\nu$ είναι οι ανεξάρτητες μεταβλητές, ενώ y είναι η τιμή της συνάρτησης (ή όπως συχνά λέγεται: η εξαρτημένη μεταβλητή). Επομένως η συνάρτηση f για να λειτουργήσει χρειάζεται μια διατεταγμένη[(1)] ν-άδα δεδομένων. Επομένως το σύνολο ορισμού της θα έχει σαν στοιχεία διατεταγμένες ν-άδες, θα είναι δηλαδή ένα Καρτεσιανό γινόμενο της μορφής:

$$A_1 x A_2 x \ldots x A_\nu$$

όπου τα A_i θα είναι υποσύνολα του R ($A_i \subset R$)

Α.2. Συναρτήσεις δύο πραγματικών μεταβλητών.

Υπενθύμιση: Ονομάζουμε Καρτεσιανό γινόμενο δύο συνόλων Α και Β, ένα σύνολο διατεταγμένων ζευγών, όπου το πρώτο στοιχείο του κάθε ζεύγους ανήκει στο Α και το δεύτερο στο Β. Δηλαδή:

[(1)] *Ονομάζουμε τη δυάδα ($x_1,x_2,x_3,\ldots,x_\nu$) διατεταγμένη διότι τα στοιχεία της έχουν αυστηρώς προκαθορισμένη σειρά, η οποία δεν επιτρέπεται να μεταβληθεί. Αυτό συμβαίνει διότι εάν αντιμεταθέσουμε αμοιβαία δύο στοιχεία (π.χ. το x_1 και το x_2) μπορεί η f να μην λειτουργεί. Για παράδειγμα η συνάρτηση δύο μεταβλητών:*

$$f(x,y)=y\ln x$$

λειτουργεί για τη δυάδα (1,-3) αλλά όχι για την (-3,1)

$$A{\times}B = \{(x,y) \text{ όπου } x \in A \text{ και } y \in B\}$$

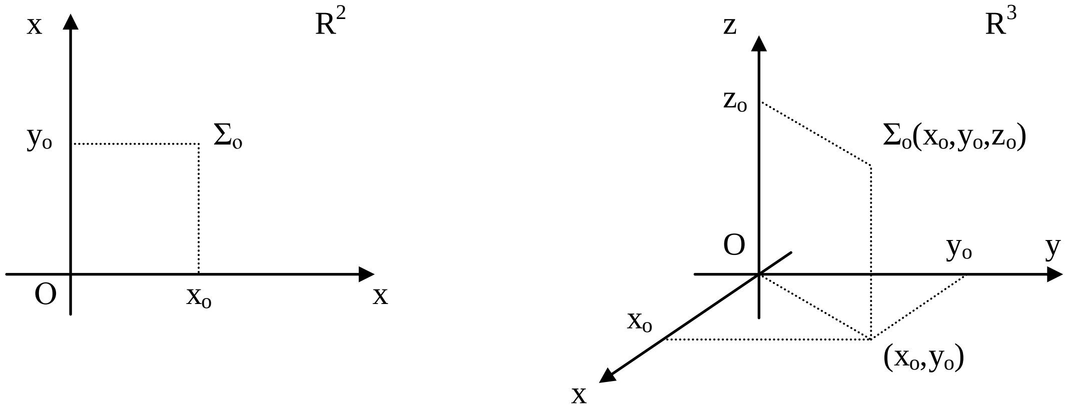
Εάν, για παράδειγμα, έχουμε τα σύνολα $A=\{1,2\}$ και $B=\{5,6\}$, τότε

$$A{\times}B = \{(1,5),(1,6),(2,5),(2,6)\}$$

Αξίζει να παρατηρήσουμε πως το σύνολο $A{\times}B$ έχει σαν στοιχεία δυάδες, είναι δηλαδή ένα σύνολο τελείως διαφορετικό από τα σύνολα A και B. Με όμοιο τρόπο ορίζουμε το Καρτεσιανό γινόμενο περισσοτέρων συνόλων:

$$A_1{\times}A_2{\times}\ldots{\times}A_\nu = \{(x_1,x_2,\ldots,x_\nu) \text{ όπου } x_1 \in A_1,\ x_2 \in A_2,\ \ldots,\ x_\nu \in A_\nu\}$$

Ένα πολύ χρήσιμο Καρτεσιανό γινόμενο συνόλων είναι το R^ν. Και από τα γινόμενα αυτά τα πιο γνωστά είναι το R^2 (το γνωστό επίπεδο Oxy) και το R^3 (ο γνωστός χώρος των τριών διαστάσεων Oxyz)



Σχ. Α.2.1. Το επίπεδο Oxy και ο χώρος των τριών διαστάσεων Oxyz

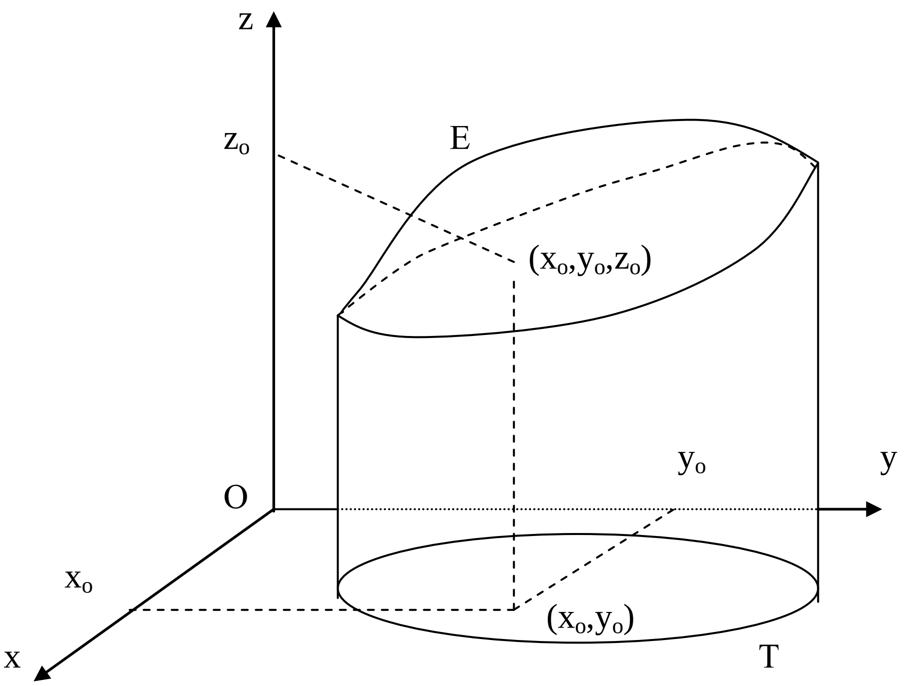
Το Καρτεσιανό γινόμενο R^2 περιέχει σαν στοιχεία τα σημεία ενός επιπέδου, στο οποίο ορίστηκε το Καρτεσιανό σύστημα Oxy. Το κάθε σημείο αντιστοιχεί σε μια διατεταγμένη δυάδα πραγματικών (x;y). Αντίστοιχα το Καρτεσιανό γινόμενο R^3 περιέχει τα σημεία του χώρου των τριών διαστάσεων, στον οποίο έχει ορισθεί το γνωστό Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxyz. Το κάθε σημείο του χώρου αντιστοιχεί σε μια διατεταγμένη τριάδα (x,y,z)

Ξαναγυρνώντας στις συναρτήσεις…

Επεκτείνοντας τώρα την λογική με την οποία «ορίσαμε» τη συνάρτηση μια μεταβλητής [$y=f(x)$], θα λέγαμε πως μία συνάρτηση δύο πραγματικών μεταβλητών είναι μια λειτουργία f, που για να «λειτουργήσει» χρειάζεται δύο δεδομένα (π.χ. το x και το y) έτσι ώστε να δώσει ένα τελικό αποτέλεσμα z: $z = f(x,y)$.

Εύκολα αντιλαμβάνεται κανείς πως το σύνολο (πεδίο) ορισμού μιας συνάρτησης δύο μεταβλητών είναι ένα Καρτεσιανό γινόμενο δύο υποσυνόλων του R που συχνά καλείται και **Τόπος Ορισμού** της συνάρτησης (Τ). Είναι δηλαδή το πεδίο ορισμού ένα υποσύνολο του $RxR=R^2$, ένα υποσύνολο δηλαδή του πραγματικού επιπέδου Oxy.

Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $z = f(x,y)$ απαιτεί ένα τρισδιάστατο σύστημα συντεταγμένων, σαν το Καρτεσιανό τρισορθογώνιο Oxyz. Πάνω στο «οριζόντιο» επίπεδο Oxy αναπαριστάται ο τόπος ορισμού (Τ) της συνάρτησης, η οποία αντιστοιχίζει σε κάθε σημείο (x_o,y_o) του Τ, μία τιμή $z_o = f(x_o,y_o)$. Τοποθετώντας την τιμή z_o στον αντίστοιχο άξονα ορίζουμε τη θέση ενός σημείου στο χώρο, του (x_o,y_o,z_o). Επομένως το σύνολο των σημείων του τόπου Τ αντιστοιχίζεται στα σημεία μιας επιφάνειας Ε σαν κι αυτή που φαίνεται στο επόμενο σχεδιάγραμμα. Είναι προφανές πως τμήματα της επιφάνειας Ε μπορεί να βρίσκονται κάτω από το επίπεδο Oxy, όταν βέβαια οι τιμές z της συνάρτησης είναι αρνητικές.



Σχ. Α.2.2. Στο παράδειγμα αυτό η επιφάνεια θυμίζει έναν «τρούλο» που «σκεπάζει» τον τόπο Τ.

Ο τόπος Τ ορίζεται είτε από τις «ανάγκες» της συνάρτησης, είτε από τις προσωπικές μας επιλογές: Για παράδειγμα σς υπολογίσουμε το Πεδίο Ορισμού της συνάρτησης:

$$z = f(x,y) = \ln(x) + x\sqrt{1-y^2}$$

Ισχύουν οι περιορισμοί:

- $x>0$ για να ορίζεται το $\ln x$
- $-1 \le y \le 1$ για να ορίζεται σαν πραγματικός αριθμός το ριζικό.

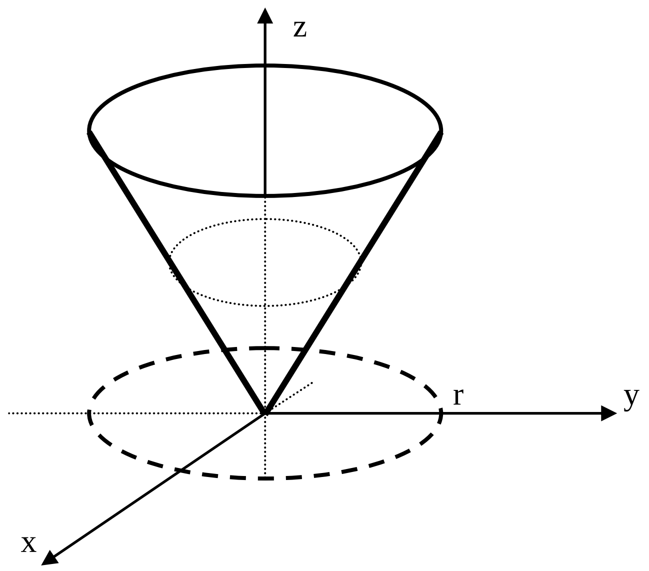
Άρα το πεδίο ορισμού είναι το καρτεσιανό γινόμενο των προηγουμένων διαστημάτων:

$$\text{Π.Ο.} = \{(x,y) \text{ όπου } x \in (0,\infty) \text{ και } y \in [-1,1]\}$$

Αντίθετα, η συνάρτηση:

$$z = f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

ορίζεται σε ολόκληρο το R^2, διότι η f μπορεί να «λειτουργήσει» για οποιαδήποτε δυάδα πραγματικών. Συχνά, όμως, ορίζεται σ' ένα συγκεκριμένο πεδίο ορισμού, ανάλογα με το πρόβλημα που μας απασχολεί κάθε φορά. Έτσι, η εν λόγω συνάρτηση, ορισμένη σε έναν κύκλο με κέντρο το Ο και ακτίνα r, ορίζει τον κώνο του παρακάτω σχήματος.



Σχ. Α.2.3. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $z = f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, όπου σαν τόπο Τ επιλέξαμε τον κύκλο με κέντρο το Ο και ακτίνα r.

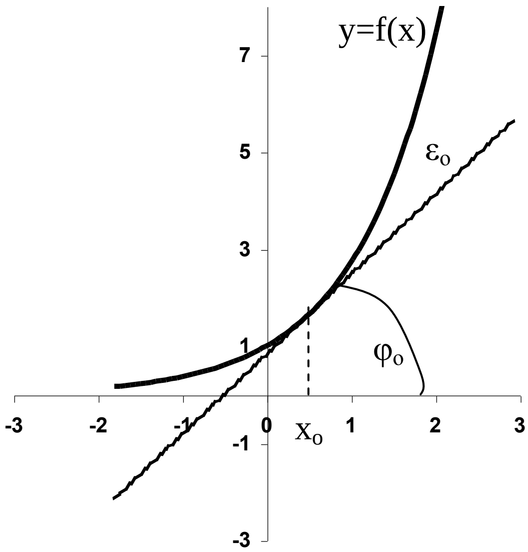
Α.3. Μερικές παράγωγοι.

Α.3.1. Υπενθυμίσεις.

Όπως ήδη γνωρίζουμε, η πρώτη παράγωγος μιας συνάρτησης μίας πραγματικής μεταβλητής $y=f(x)$, δίνει το ρυθμό μεταβολής της τιμής της εξαρτημένης μεταβλητής (y) όταν μεταβάλλεται η ανεξάρτητη (x). Για την πρώτη παράγωγο χρησιμοποιήσαμε επίσης τις εκφράσεις «ταχύτητα μεταβολής της τιμής της f» και «κλίση» της συνάρτησης f.

Στο διπλανό γράφημα παρατηρούμε την καμπύλη μιας συνάρτησης f(x), και την ευθεία ε_o η οποία εφάπτεται στο γράφημα της f στο σημείο x_o. Γνωρίζουμε πως η συνάρτηση που δίνει τις κλίσεις της f είναι η παράγωγός της. Έχουμε λοιπόν:

Κλίση της f(x) στο x_o =
κλίση της ευθείας ε_o στο x_o =
= $\varepsilon\varphi(\varphi_o) = f\,'(x_o)$



Να τονίσουμε πως η κλίση μιας συνάρτησης f σε κάποιο συγκεκριμένο σημείο λέγεται <u>παράγωγος αριθμός</u> της f, ενώ η συνάρτηση που δίνει τις κλίσεις της f καλείται <u>παράγωγος συνάρτηση</u>.

Έτσι η συνάρτηση $f(x) = x^2-5$ έχει παράγωγο συνάρτηση την $f\,'(x) = 2x$, ενώ η κλίση της συνάρτησης f στο x=3 ισούται με 6 ($f\,'(3) = 6$).

Παράδειγμα: Δίνεται η συνάρτηση $y = f(x) = x^3 - 4x^2 - x + 4$. Να υπολογισθεί η κλίση της f στο σημείο $x_0 = 0{,}5$, καθώς και η εξίσωση της ευθείας ε_o που εφάπτεται στην καμπύλη στο ίδιο σημείο.

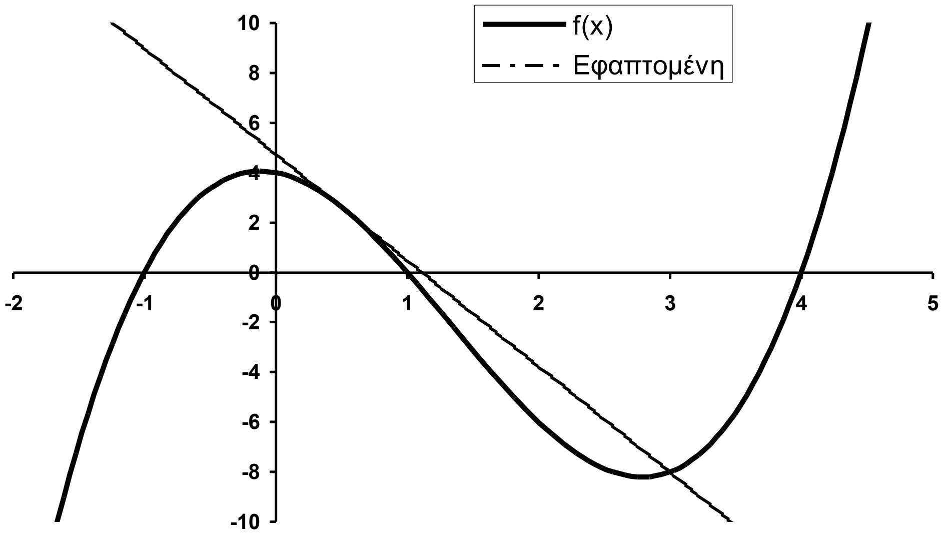
Λύση: Στην εξίσωση της ευθείας $\varepsilon : y = \alpha x + \beta$ η παράμετρος α ισούται με την κλίση της. Επειδή η ευθεία ε εφάπτεται στην καμπύλη της f, στο σημείο (0,5,f(0,5)) η κλίση της θα ταυτίζεται με την τιμή της παραγώγου της f :

$$\alpha = f\,'(0{,}5) = [\,x^3 - 4x^2 - x + 4\,]'_{x=0{,}5} =$$
$$= [3x^2 - 8x - 1]_{x=0{,}5} = -4{,}25$$

ενώ ο σταθερός όρος β δίνεται από τη σχέση:

$$\beta = y_o - \alpha x_0 = 4{,}75 \qquad \text{όπου} \qquad y_o = f'(0{,}5) = 2{,}625$$

Στο επόμενο γράφημα εμφανίζεται η συνάρτηση f και η ευθεία που εφάπτεται σ' αυτήν στο σημείο x=0,5 .



Α.3.2. Φυσική ερμηνεία των μερικών παραγώγων.

Υποθέτουμε πως το αυτοκίνητό μας έχει κατά τοις τελευταίες εβδομάδες ψηλή κατανάλωση καυσίμου. Ο μηχανικός του συνεργείου όπου το συντηρώ μου λέει:

Το πρόβλημα της κατανάλωσης θα βελτιωθεί εάν:

- επαναλάβω τις εργασίες συντήρησης,
- αυξήσω κατά 10% την πίεση στα λάστιχα
- εάν ελαττώσω δραματικά την πίεση στο γκάζι.

Ουσιαστικά ο μηχανικός, μας όρισε το ποσό της κατανάλωσης που ξεπερνά τα φυσιολογικά όρια κατανάλωσης, σαν μια συνάρτηση 3 μεταβλητών. Εάν υλοποιήσουμε ταυτόχρονα και τις τρεις συμβουλές του δεν θα μπορέσουμε να αντιληφθούμε τη συνεισφορά της κάθε μιας παραμέτρου στην τελική μείωση της κατανάλωσης. Για το λόγο αυτό κρατούμε σταθερές τις τιμές των δύο παραμέτρων και μεταβάλλουμε την τρίτη. Με τον τρόπο αυτό υπολογίζουμε το ρυθμό μεταβολής της κατανάλωσης όταν μεταβάλλουμε σταδιακά τον τρόπο οδήγησής μας.

Την ίδια λογική εφαρμόζουμε και στις συναρτήσεις περισσοτέρων μεταβλητών. Διατηρούμε σταθερές τις τιμές όλων των μεταβλητών της συνάρτησης, εκτός από μία, την οποία μεταβάλλουμε (θεωρώντας μόνον αυτή σαν μεταβλητή).

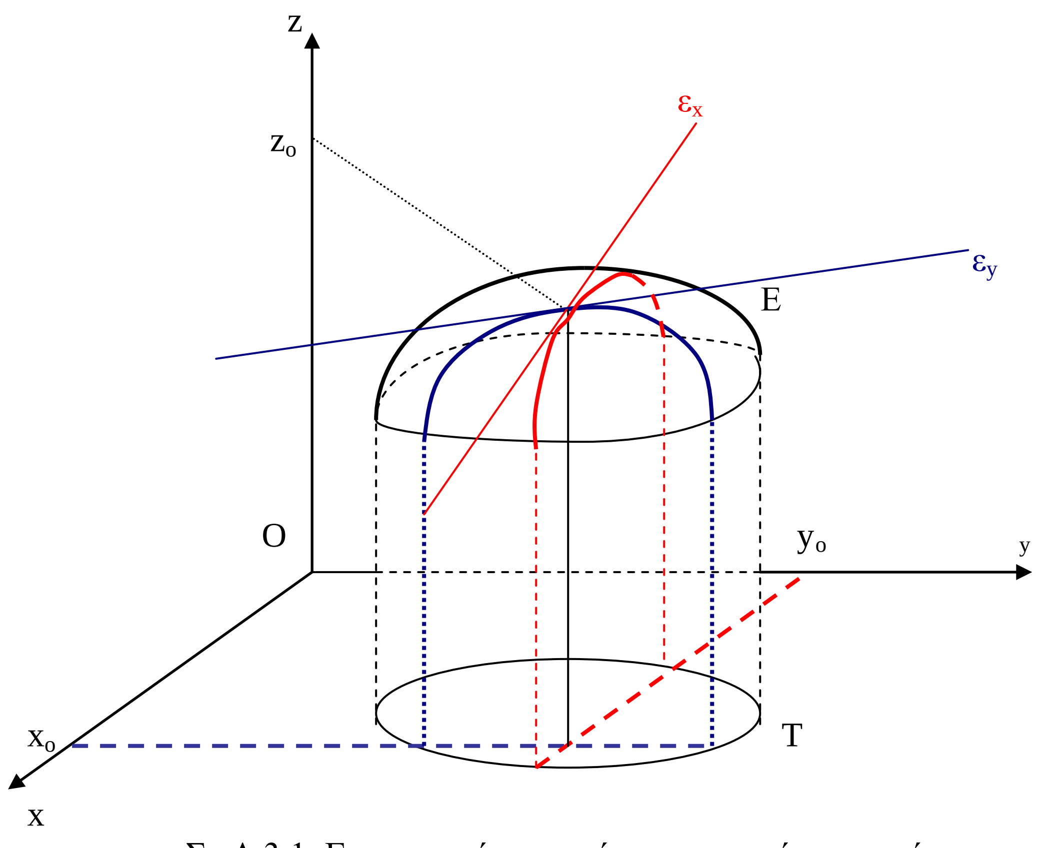
Έστω για παράδειγμα η συνάρτηση: $z = f(x,y)$ και ένα σημείο (x_o,y_o) του τόπου Τ, όπου ορίζεται. Ο ρυθμός (η ταχύτητα) με την οποία μεταβάλλεται η τιμή της συνάρτησης z, όταν μεταβάλλεται μόνο το x (παραμένοντας στην περιοχή του x_o) ενώ το y παραμένει σταθερά ίσο y_o, ονομάζεται μερική παράγωγος της f στο σημείο (x_o,y_o).

Α.3.3. Γεωμετρική ερμηνεία των μερικών παραγώγων.

Ξαναγυρνούμε στη σχήμα Α.2.2. όπου εμφανίζεται το «γράφημα» μιας συνάρτησης 2 μεταβλητών, της f(x,y), που ορίζεται πάνω στον τόπο T του επιπέδου Oxy. Θεωρούμε επίσης το σημείο (x_o,y_o) του T και την εικόνα του μέσω της f, (την τιμή της f $z_o = f(x_o,y_o)$), με την οποία καθορίζεται το σημείο (x_o,y_o,z_o) του τρισδιάστατου χώρου. Όπως εξηγήσαμε το σύνολο αυτό των εικόνων δημιουργεί την επιφάνεια Ε που είναι το γράφημα της συνάρτησης f.

Μεταφερόμαστε τώρα στο σχήμα Α.3.1.. Θα θεωρήσουμε όλα τα σημεία του τόπου T των οποίων η συντεταγμένη y είναι σταθερά ίση με το y_o, ενώ το x τους μεταβάλλεται. Η εικόνα των σημείων αυτών του T επάνω στην επιφάνεια Ε δημιουργεί την κόκκινη γραμμή, που είναι «παράλληλη» με το επίπεδο Oxz. Όμοια θεωρούμε όλα τα σημεία του τόπου T των οποίων η συντεταγμένη x είναι σταθερά ίση με το x_o ενώ το y τους μεταβάλλεται. Η εικόνα των σημείων αυτών του T επάνω στην επιφάνεια Ε δημιουργεί την μπλε γραμμή, που είναι «παράλληλη» με το επίπεδο Oyz.

Σύμφωνα με τα όσα είπαμε προηγουμένως η μερική παράγωγος της f ως προς x (θεωρώντας το y σταθερό ίσο με y_o) είναι η κλίση της ευθείας ε_x που εφάπτεται στην κόκκινη καμπύλη (την παράλληλη προς το επίπεδο Oxz). Αντίθετα, η μερική παράγωγος της f ως προς y (θεωρώντας το x σταθερό ίσο με x_o) είναι η κλίση της ευθείας ε_y που εφάπτεται στην μπλε καμπύλη (την παράλληλη προς το επίπεδο Oyz).



Σχ.Α.3.1. Γεωμετρική ερμηνεία των μερικών παραγώγων.

A.3.4. Υπολογισμός των μερικών παραγώγων. Συμβολισμοί.

Ο υπολογισμός των μερικών παραγώγων μιας συνάρτησης περισσοτέρων μεταβλητών προκύπτει εύκολα από τα προηγούμενα. Παραγωγίζουμε τη συνάρτηση μερικά ως προς μία μεταβλητή της, θεωρώντας σταθερές όλες τις υπόλοιπες. Η μερική παράγωγος μιας συνάρτησης f συμβολίζεται με ένα σύμβολο που είναι παραφθορά του κλασσικού d της πλήρους παραγώγισης: «∂»

Εάν θέλαμε να ορίσουμε και θεωρητικά τις μερικές παραγώγους θα γράφαμε τις γνωστές σχέσεις παραγώγισης:

- $$f'_x = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{\Delta\chi \to 0}\left[\frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}\right]$$
- $$f'_y = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0}\left[\frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}\right]$$

Όλοι οι κανόνες παραγώγισης (παραγώγιση αθροίσματος, γινομένου, πηλίκου, καθώς και οι παράγωγοι των γνωστών συναρτήσεων και των σύνθετων συναρτήσεων) ισχύουν όπως τους γνωρίσαμε στις παραγώγους των συναρτήσεων μιας μεταβλητής.

1^o παράδειγμα: Έστω η συνάρτηση: $z = f(x,y) = x^2y^3 - x\ln(xy)$. Υπολογίζουμε τις 2 μερικές παραγώγους.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[x^2y^3 - x\ln(xy)] = 2xy^3 - \ln(xy) - x\frac{1}{xy}\frac{\partial}{\partial x}(xy) = 2xy^2 - \ln(xy) - 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[x^2y^3 - x\ln(xy)] = 3x^2y^2 - x\frac{1}{xy}\frac{\partial}{\partial y}(xy) = 3x^2y^2 - \frac{x}{y}$$

Πρόκειται για δύο συναρτήσεις που δίνουν την κλίση της επιφάνειας που έχει εξίσωση $z = f(x,y)$, όταν μεταβάλλεται μόνο το x η πρώτη και μόνο το y η δεύτερη. Οι συναρτήσεις αυτές δίνουν μια συγκεκριμένη τιμή για την κλίση της επιφάνειας, όταν τους δοθούν οι συντεταγμένες ενός συγκεκριμένου σημείου (x_o,y_o). Εάν λοιπόν αναζητούμε τις δύο αυτές κλίσεις στο σημείο (0.5 , 2) έχουμε:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0.5,2) = [2xy^2 - \ln(xy) - 1]_{x=0,5\,,\,y=2} = 3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0.5,2) = [3x^2y^2 - \frac{x}{y}]_{x=0,5\,,\,y=2} = 2,75$$

2^o παράδειγμα: Όμοια υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους των συναρτήσεων περισσότερων μεταβλητών. Έτσι, μια συνάρτηση ν-μεταβλητών θα έχει ν-μερικές παραγώγους πρώτης τάξης. Ας παραγωγίσουμε λοιπόν τη συνάρτηση:

$$z = f(x,y,t) = x^3 - 3xy^2 + 3yt^4 - t\ln(y^2)$$

- $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}[\, x^3 - 3xy^2 + 3yt^4 - t\ln(y^2)] = 3x^2 - 3y^2$
- $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}[\, x^3 - 3xy^2 + 3yt^4 - t\ln(y^2)] = 6xy + 3t^4 - \dfrac{2t}{y}$
- $\dfrac{\partial f}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial t}[\, x^3 - 3xy^2 + 3yt^4 - t\ln(y^2)] = 12yt^3 - \ln(y^2)$

Εάν λοιπόν αναζητούμε την μερική παράγωγο της f ως προς y στο σημείο Σ(1,2,3), θα έχουμε:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,2,3) = [\, 6xy + 3t^4 - \frac{2t}{y}\,]_{(1,2,3)} = 12 + 243 - 3 = 252$$

Α.3.5. Παραγώγιση σύνθετων συναρτήσεων.

Υπενθύμιση: Την παραγώγιση σύνθετης συνάρτησης την συναντήσαμε και στις συναρτήσεις μιας μεταβλητής. Για παράδειγμα σύνθετη συνάρτηση είναι η:

$$f(u) = ημ(u) \quad όπου \quad u=4x^3$$

την οποία προτιμούσαμε να γράφουμε υπό τη μορφή:

$$f(x) = ημ(4x^3)$$

με παράγωγο την:

$$f\,'(x) = συν(4x^3)*(\,4x^3)' = 12x^2συν(4x^3)$$

Η παραγώγιση αυτή θεωρητικά περιγράφονταν από τη σχέση:

$$f\,'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{df}{du}\frac{du}{dx}$$

Τώρα θεωρούμε μία συνάρτηση της μορφής:

$$z = f(u,v) \quad όπου \quad \left|\begin{array}{l} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{array}\right.$$

η οποία λέγεται σύνθετη συνάρτηση των μεταβλητών x και y με ενδιάμεσες μεταβλητές τις u και v. Είναι φανερό πως εάν αντικαταστήσουμε στην f τις u και v με τα ίσα τους θα προκύψει μια κανονική συνάρτηση 2 μεταβλητών, των x και y. Η παραγώγισή της γίνεται με τον ίδιο τρόπο που γινόταν και στις συναρτήσεις μιας μεταβλητής:

- $$\frac{\partial f(u,v)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{f(u(x+\Delta x,y),v(x+\Delta x,y)) - f(u(x,y),v(x,y))}{\Delta x}\right] =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{\left[f(u(x+\Delta x,y),v(x+\Delta x,y)) - f(u(x,y),v(x+\Delta x,y))\right]}{\left(u(x+\Delta x,y)-u(x,y)\right)}\frac{\left[u(x+\Delta x,y)-u(x,y)\right]}{\Delta x} + \right.$$

$$\left. + \frac{\left[f(u(x,y),v(x+\Delta x,y)) - f(u(x,y),v(x,y))\right]}{\left(v(x+\Delta x,y)-v(x,y)\right)}\frac{\left[v(x+\Delta x,y)-v(x,y)\right]}{\Delta x}\right] \Rightarrow$$ (1)

$$\boxed{\frac{\partial f(u,v)}{\partial x} = \frac{\partial f(u,v)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f(u,v)}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}} \qquad \text{A.3.5}$$

όμοια προκύπτει και η αντίστοιχη παράγωγος ως προς y:

- $$\frac{\partial f(u,v)}{\partial y} = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{f(u(x,y+\Delta y),v(x,y+\Delta y)) - f(u(x,y),v(x,y))}{\Delta y}\right] =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{\left[f(u(x,y+\Delta y),v(x,y+\Delta y)) - f(u(x,y),v(x,y+\Delta y))\right]}{\left(u(x,y+\Delta y)-u(x,y)\right)}\frac{\left[u(x,y+\Delta y)-u(x,y)\right]}{\Delta y} + \right.$$

$$\left. + \frac{\left[f(u(x,y),v(x,y+\Delta y)) - f(u(x,y),v(x,y))\right]}{\left(v(x,y+\Delta y)-v(x,y)\right)}\frac{\left[v(x,y+\Delta y)-v(x,y)\right]}{\Delta y}\right] \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial f(u,v)}{\partial y} = \frac{\partial f(u,v)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f(u,v)}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}} \qquad \text{A.3.5}$$

Οι τύποι Α.3.5 δίνουν τελικά τις δύο μερικές παραγώγους της f ως προς τις βασικές μεταβλητές, μέσω των ενδιάμεσων u(x,y) και v(x,y). Τελικά η πρακτική εφαρμογή είναι πολύ απλούστερη από την απόδειξη. Ουσιαστικά αποτελεί μια επέκταση της σύνθετης παραγώγισης των συναρτήσεων μιας μεταβλητής.

---

(1) *Όπου προσθαφαιρέθηκε η ποσότητα* $f(u(x,y),v(x+\Delta x,y))$, *χωρίστηκε το κλάσμα σε δύο κλάσματα και το 1^o πολλαπλασιάστηκε και διαιρέθηκε με το* $[u(x+\Delta x,y)-u(x,y)]$, *ενώ το 2^o με το:* $[v(x+\Delta x,y)-v(x,y)]$.

Παράδειγμα: Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(u,v) = u^2 - v^3 \,, \text{ όπου } \left| \begin{array}{l} u(x,y) = ημ(x-y) \quad \text{και} \\ v(x,y) = συν(x+y) \end{array} \right.$$

να υπολογισθούν οι μερικές παράγωγοι: $\partial f/\partial x$ και $\partial f/\partial y$.

$$\frac{\partial f(u,v)}{\partial x} = \frac{\partial f(u,v)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f(u,v)}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial u}(u^2 - v^3)\frac{\partial}{\partial x}[ημ(x-y)] + \frac{\partial}{\partial v}(u^2 - v^3)\frac{\partial}{\partial x}[συν(x+y)] =$$

$$= 2uσυν(x-y) + 3v^2ημ(x+y)$$

και

$$\frac{\partial f(u,v)}{\partial y} = \frac{\partial f(u,v)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f(u,v)}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial u}(u^2 - v^3)\frac{\partial}{\partial y}[ημ(x-y)] + \frac{\partial}{\partial v}(u^2 - v^3)\frac{\partial}{\partial y}[συν(x+y)] =$$

$$= -2uσυν(x-y) + 3v^2ημ(x+y)$$

Παρατηρούμε πως θα βρίσκαμε ακριβώς τα ίδια εάν αντικαθιστούσαμε τις συναρτήσεις u και v στην f και παραγωγίζαμε κατά τα γνωστά:

$f(x,y) = ημ^2(x-y) - συν^3(x+y)$ οπότε

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[\, ημ^2(x-y) - συν^3(x+y) \,] = 2ημ(x-y)συν(x-y) + 3συν^2(x+y)ημ(x+y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[\, ημ^2(x-y) - συν^3(x+y) \,] = -2ημ(x-y)συν(x-y) + 3συν^2(x+y)ημ(x+y)$$

Τα αποτελέσματα είναι προφανώς ίδια…

Α.3.6. Πεπλεγμένη παραγώγιση.

Ονομάζουμε πεπλεγμένες συναρτήσεις αυτές που δεν είναι λυμένες ως προς την εξαρτημένη μεταβλητή τους. Η μορφή μιας πεπλεγμένης συνάρτησης μιας μεταβλητής είναι η:

F(x,y) = 0 $\quad \boxed{\text{κι αν λυνόταν ως προς y}} \quad$ **y = f(x)**

Τη συνάρτηση αυτή την παραγωγίζαμε ακολουθώντας ένα «μηχανικό» κανόνα που έλεγε πως παραγωγίζουμε την F κανονικά ως προς x και ως προς y, σαν να ήταν η y μια ακόμη μεταβλητή. Τελειώνοντας όμως την κάθε παραγώγιση ως προς y, θυμόμασταν πως η y είναι συνάρτηση y(x) και πολλαπλασιάζαμε με το y'!

Παράδειγμα: Δίνεται η συνάρτηση $F(x,y) = x^2 + y^3 + 3xy^2 - x\ln y = 0$ Παραγωγίζοντας σύμφωνα με τον προηγούμενο κανόνα έχουμε:

$$2x + 3y^2y' + 3y^2 + 6xyy' - \ln y - \frac{xy'}{y} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$2x + 3y^2 - \ln y = y'\left(\frac{x}{y} - 3y^2 - 6xy\right) \quad \Rightarrow$$

$$y' = \frac{2x + 3y2\ \ln y}{\frac{x}{y} - 3y^2 - 6xy}$$

Τώρα, γνωρίζοντας να παραγωγίζουμε μερικά, θα αντιμετωπίσουμε το αριστερό μέλος της σχέσης $F(x,y) = 0$ σαν συνάρτηση δύο μεταβλητών, όπου όμως η y είναι συνάρτηση του x $(y = y(x))$. Ας παραγωγίσουμε λοιπόν μερικά ως προς x την ισότητα $F(x,y) = 0$, κατά μέλη:

$$F(x,y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

όπου στην τελευταία σχέση γράψαμε την παράγωγο του y ως προς x με το σύμβολο d αντί του ∂, διότι η y είναι συνάρτηση μιας μεταβλητής και δεν έχει μερική παράγωγο αλλά ολική. Τέλος από την τελευταία σχέση βγαίνει και ο τύπος της πεπλεγμένης παραγώγου που (ουσιαστικά) χρησιμοποιήσαμε στο προηγούμενο παράδειγμα.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

Ας εφαρμόσουμε τη σχέση αυτή στο προηγούμενο παράδειγμα:

$$F(x,y) = x^2 + y^3 + 3xy^2 - x\ln y = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial}{\partial x}[x^2 + y^3 + 3xy^2 - x\ln y]}{\frac{\partial}{\partial y}[x^2 + y^3 + 3xy^2 - x\ln y]} = -\frac{2x + 3y^2 - \ln y}{3y^2 + 6xy - x/y}$$

Α.4. Το ολικό διαφορικό.

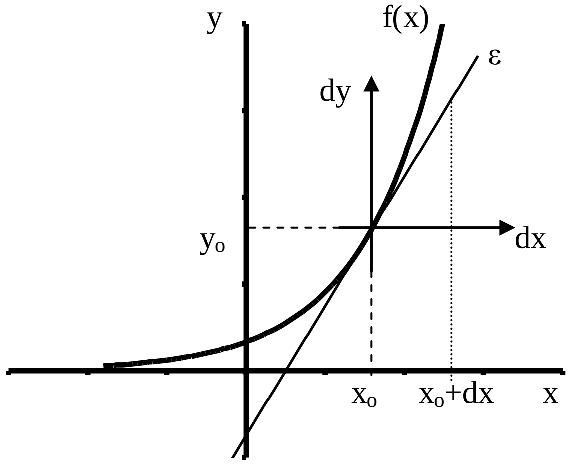
Α.4.1. Το διαφορικό στις συναρτήσεις μιας μεταβλητής.

Έστω η συνάρτηση $y=f(x)$. Υπολογίζουμε την παράγωγό της στο σημείο x_o και χαράζουμε την ευθεία ε που εφάπτεται στην $f(x)$ στο σημείο $(x_o,f(x_o))$ κι έχει κλίση $\kappa = f\,'(x_o)$.

Χαράζουμε τώρα ένα νέο σύστημα αξόνων με κέντρο το σημείο $(x_o,f(x_o))$, με τον άξονα dx παράλληλο μ' αυτόν των x και τον άξονα dy παράλληλο με τον αντίστοιχο των y. Η εξίσωση της ευθείας ε στο νέο σύστημα γράφεται:

$$dy = \kappa dx = f\,'(x_o)dx$$ [1]

όπου στον άξονα dx μετριέται η μεταβολή στα x (με κέντρο το x_o) , ενώ στον dy η μεταβολή της τιμής της συνάρτησης y (με κέντρο το y_o).



Δεν μπορούμε να μην παρατηρήσουμε πως η εξίσωση αυτή συνδέεται με τη γνωστή γραφή της πρώτης παραγώγου:

$$dy = f\,'(x_o)dx \qquad \text{και} \qquad \frac{dy}{dx} = f\,'(x_o)$$

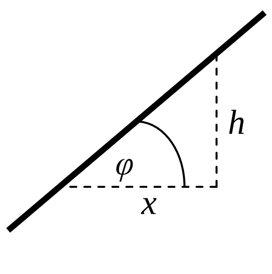
Ερμηνεύοντας αλγεβρικά και γεωμετρικά τη σχέση αυτή θα λέγαμε πως:

Το διαφορικό επιχειρεί να υπολογίσει την μεταβολή της τιμής της συνάρτησης $f(x)$, όταν περνούμε από το σημείο x_o σε κάποιο διπλανό, το x_o+dx. Μόνο που τη μεταβολή της τιμής δεν την υπολογίζει από την καμπύλη της συνάρτησης, αλλά από την ευθεία που εφάπτεται στο σημείο (x_o,y_o) [όπου $y_o= f(x_o)$]. Προφανώς ο υπολογισμός αυτός είναι προσεγγιστικός και ισχύει για μικρό dx. Έτσι η σχέση του διαφορικού «διαβάζεται»:

---

[1] *Τη σχέση αυτή συναντούμε κάθε φορά που αντιμετωπίζουμε κλίσεις, Για παράδειγμα έχουμε το διπλανό κεκλιμένο επίπεδο με κλίση κ% και ζητούμε τη διαφορά υψομέτρου h, που αντιστοιχεί σε οριζόντια μετατόπιση x :*

$$\lambda = \varepsilon\varphi\varphi = h/x = \kappa/100$$
$$h = x\varepsilon\varphi\varphi = \lambda x$$



Η μεταβολή της τιμής της συνάρτησης f (dy) δίνεται, προσεγγιστικά, από το γινόμενο της παραγώγου της f (στο κεντρικό σημείο) με το ποσό κατά το οποίο μεταβάλλεται η τιμή του x (dx).

Είναι φανερό πως εάν ζητείται η νέα τιμή στο σημείο x_o+dx, αυτή ισούται με το άθροισμα της παλιάς τιμής με τη διαφορά dy:

$$f(x_o+dx) = f(x_o) + dy = f(x_o) + f\,'(x_o)dx$$

Παράδειγμα: Να υπολογισθεί προσεγγιστικά, με τη βοήθεια του διαφορικού η τιμή $t = \sqrt[3]{26{,}82}$.

Λύση: Η μορφή της παράστασης, μας οδηγεί στη συνάρτηση: $y=f(x)=\sqrt[3]{x}$. Το διαφορικό της γράφεται:

$$dy = [\sqrt[3]{x}]'dx = [x^{1/3}]'dx = \frac{1}{3}x^{-2/3}dx = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}dx$$

Το κεντρικό σημείο στο οποίο θα καθορίσουμε την τιμή της παραγώγου, είναι ένα σημείο βολικό για τον υπολογισμό της τιμής των ριζικών και ταυτόχρονα πολύ κοντά στο x που μας ενδιαφέρει: 26,82. Προφανώς πρόκειται για το σημείο $x_o=27$:

$$dy = \frac{1}{3\sqrt[3]{27^2}}dx = \frac{dx}{27}$$

Η τιμή του dx ισούται με την απόσταση του σημείου x=26,82 και του κεντρικού σημείου $x_o = 27$:

$$dx = 26{,}82 - 27 = -0{,}18$$

οπότε

$$dy = \frac{-0{,}18}{27} = -\frac{0{,}02}{3}$$

Αξίζει να παρατηρήσουμε πως η τιμή της μεταβολής dx μπορεί να είναι και αρνητική. Προφανώς η τιμή του $t = \sqrt[3]{26{,}82}$ υπολογίζεται εάν στην τιμή της συνάρτησης στο κεντρικό σημείο ($x_o=27$) προστεθεί η μεταβολή της τιμής της συνάρτησης dy. Έχουμε λοιπόν:

$$t = \sqrt[3]{26{,}82} = f(26{,}82) = f(27) + dy = 3 - 0{,}0066667 = 2{,}993333$$

αντί του ακριβούς

$$t = \sqrt[3]{26{,}82} = 2{,}993318$$

Άσκηση: Έστω η συνάρτηση y = f(x) = ημx. Να υπολογισθεί η τιμή του ημ(0,04 rad) με τη βοήθεια της σχέσης του διαφορικού.

A.4.2. Το ολικό διαφορικό μιας συνάρτησης $z = f(x,y)$

Έστω η συνάρτηση $z = f(x,y)$, ορισμένη σ' έναν τόπο Τ, οι δύο μερικές παράγωγοί της πρώτης τάξης ($\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial x$) κι ένα σημείο (x_o,y_o) του τόπου Τ. Σύμφωνα με τη γεωμετρική ερμηνεία των μερικών παραγώγων που. παρουσιάστηκε στην παράγραφο Α.3.3, οι δύο νέες αυτές συναρτήσεις παρέχουν την κλίση της f όταν μεταβάλλεται μόνο το x (η πρώτη) και μόνο το y (η δεύτερη). Η επόμενη παράσταση καλείται ολικό διαφορικό της f :

$$\boxed{dz = df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy}$$

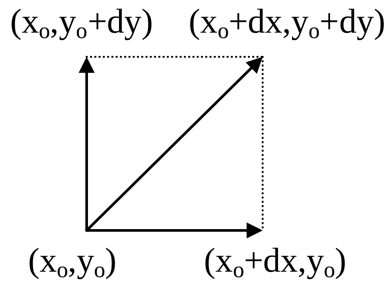
Ερμηνεύοντας γεωμετρικά τη σχέση του ολικού διαφορικού, την ορίζουμε στο σημείο (x_o,y_o) του τόπου Τ.

$$dz = df = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}dy$$

Παρατηρούμε πως το ολικό διαφορικό είναι το άθροισμα δύο ποσοτήτων:

της $h_x = \dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}dx$ και της $h_y = \dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}dy$

Η ποσότητα h_x προσεγγίζει τη διαφορά της τιμής της συνάρτησης f, όταν περνούμε από το σημείο (x_o,y_o) στο σημείο (x_o+dx,y_o) , ενώ η ποσότητα h_y προσεγγίζει τη διαφορά της τιμής της συνάρτησης f, όταν περνούμε από το σημείο (x_o,y_o) στο σημείο (x_o,y_o+dy). Το ολικό διαφορικό, σαν το άθροισμά τους, προσεγγίζει τη διαφορά της τιμής της συνάρτησης f, όταν περνούμε από το σημείο (x_o,y_o) στο σημείο (x_o+dx,y_o+dy).



Ενώ δηλαδή το διαφορικό της συνάρτησης μιας μεταβλητής προσεγγίζει την καμπύλη της συνάρτησης με την ευθεία που εφάπτεται στην καμπύλη στο «κεντρικό» σημείο x_o, το ολικό διαφορικό προσεγγίζει την επιφάνεια που αντιστοιχεί στη συνάρτηση $f(x,y)$, με το εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας, στο «κεντρικό» σημείο (x_o,y_o).

Παράδειγμα: Να υπολογισθεί προσεγγιστικά η τιμή της παράστασης:

$$\kappa = \sqrt{4{,}1^2 + 2{,}95^2}\,.$$

Λύση: Η μορφή της παράστασης παραπέμπει στη συνάρτηση:

$$z = f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

ενώ σαν κεντρικό σημείο επιλέγουμε το (4,3), για το οποίο έχουμε μεταβολή στα x και στα y, dx=0,1 και dy=-0,05. Έτσι το ολικό διαφορικό της f στο σημείο αυτό γίνεται:

$$dz = df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy =$$

$$= \frac{4}{5}dx + \frac{3}{5}dy = 0{,}08 - 0{,}03 = 0{,}05$$

Άρα έχουμε για την τιμή της κ:

$$\kappa = f(4,3) + df = 5 + 0{,}05 = 5{,}05$$

Ολικό διαφορικό της συνάρτησης z=f(x,y,t). Όμοια ορίζεται και το ολικό διαφορικό μιας συνάρτησης περισσοτέρων μεταβλητών. Για παράδειγμα το ολικό διαφορικό της συνάρτησης z = f(x,y,t) δίνεται από τη σχέση:

$$\boxed{dz = df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial t}dt}$$

Α.5. Μερικές παράγωγοι ανώτερης τάξης.

Όπως έχουμε διαπιστώσει, οι μερικές παράγωγοι μιας συνάρτησης f(x,y) είναι επίσης συναρτήσεις των ίδιων μεταβλητών με τη συνάρτηση. Άρα μπορούν να παραγωγισθούν κατ' επανάληψη. Έτσι προκύπτουν οι μερικές παράγωγοι ανώτερης τάξης,. Κάθε παράγωγος μπορεί να παραγωγισθεί μερικά ως προς οποιαδήποτε μεταβλητή της. Ισχύουν οι συμβολισμοί:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right] = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$ παραγωγίζουμε την f δύο φορές ως προς x.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right] = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$ παραγωγίζουμε ως προς x την μερική παράγωγο της f ως προς y (παραγωγίζουμε την f πρώτα ως προς y και στη συνέχεια ως προς x.

Προκύπτει δηλαδή ένα δένδρο της μορφής

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & f(x,y) \arrow[dl] \arrow[drr] & & & \\
 & \dfrac{\partial f}{\partial x} \arrow[dl] \arrow[dr] & & & \dfrac{\partial f}{\partial y} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} \arrow[d] \arrow[dr] & & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \arrow[d] & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \arrow[d] \\
\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3} & \dfrac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} & \dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \dfrac{\partial^3 f}{\partial y^3}
\end{tikzcd}$$

κ.λ.π.

<u>Θεώρημα:</u> Έστω η συνάρτηση f(x,y) ορισμένη σε έναν τόπο Τ, στο εσωτερικό του οποίου η f έχει συνεχείς μερικές παραγώγους 2ης τάξης. Τότε ισχύει η ισότητα:

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}}$$

Το θεώρημα αυτό γενικεύεται όπως δείχνει η επόμενη ισότητα:

$$\frac{\partial^5 f}{\partial x \partial y \partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^5 f}{\partial x \partial x \partial x \partial y \partial y} = \ldots. = \frac{\partial^5 f}{\partial x^3 \partial y^2}$$

πράγμα που σημαίνει πως εάν πρέπει να παραγωγίσουμε 5 φορές την συνάρτηση f, 3 φορές ως προς x και 2 φορές ως προς y, μπορούμε να το κάνουμε με οποιαδήποτε σειρά. Το αποτέλεσμα θα είναι το ίδιο. Επομένως η συνάρτηση f(x,y) έχει τρεις μερικές παραγώγους 2ης τάξης.

Θεωρητική άσκηση: Να δειχθεί πως η παράσταση:

$$A = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

είναι ολικό διαφορικό μιας συνάρτησης f όταν ισχύει η ισότητα:

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}}$$

Λύση: Εάν η παράσταση A είναι ολικό διαφορικό κάποιας συνάρτησης f ,θα ισχύουν οι σχέσεις:

$$P(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{και} \quad Q(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}$$

οπότε θα έχουμε:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right] = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

και

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right] = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

όπου επειδή τα δεύτερα μέλη είναι ίσα (λόγω του προηγουμένου Θεωρήματος) και τα πρώτα μέλη θα είναι ίσα.

1^o παράδειγμα: Να υπολογισθούν όλες οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης της συνάρτησης $z = f(x,y) = xy\eta\mu(xy) - x^2 + y^3$.

Λύση:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[xy\eta\mu(xy) - x^2 + y^3\right] = y\eta\mu(xy) + xy^2\sigma\upsilon\nu(xy) - 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[xy\eta\mu(xy) - x^2 + y^3\right] = x\eta\mu(xy) + yx^2\sigma\upsilon\nu(xy) + 3y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[y\eta\mu(xy) + xy^2\sigma\upsilon\nu(xy) - 2x\right] = y^2\sigma\upsilon\nu(xy) + y^2\sigma\upsilon\nu(xy) - xy^3\eta\mu(xy) - 2 =$$

$$= 2y^2\sigma\upsilon\nu(xy) - xy^3\eta\mu(xy) - 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left[y\eta\mu(xy) + xy^2\sigma\upsilon\nu(xy) - 2x\right] = \eta\mu(xy) + xy\sigma\upsilon\nu(xy) + 2xy\sigma\upsilon\nu(xy) - x^2y^2\eta\mu(xy)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left[x\eta\mu(xy) + yx^2\sigma\upsilon\nu(xy) + 3y^2\right] = x^2\sigma\upsilon\nu(xy) + x^2\sigma\upsilon\nu(xy) - yx^3\eta\mu(xy) + 6y$$

$$= 2x^2\sigma\upsilon\nu(xy) - yx^3\eta\mu(xy) + 6y$$

2^o παράδειγμα: Δίνεται η παράσταση:

$$A = \left[2x - \ln(y^2)\right]dx + \left[2y - \frac{2x}{y}\right]dy$$

Είναι το ολικό διαφορικό κάποιας συνάρτησης f(x,y);

Λύση: Για να είναι ολικό διαφορικό η παράσταση A θα πρέπει για τις συναρτήσεις $P(x,y) = 2x - \ln(y^2)$ και $Q(x,y) = \left[2y - \frac{2x}{y}\right]$, να ισχύει η ισότητα:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[2x - \ln(y^2)\right] = -\frac{2}{y}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[2y - \frac{2x}{y}\right] = -\frac{2}{y}$$

Οπότε η ισχύς της προηγούμενης σχέσης μαρτυρά πως η παράσταση A είναι το ολικό διαφορικό μιας συνάρτησης f(x,y)

Α.6. Μελέτη ακρότατων τιμών της συνάρτησης f(x,y).

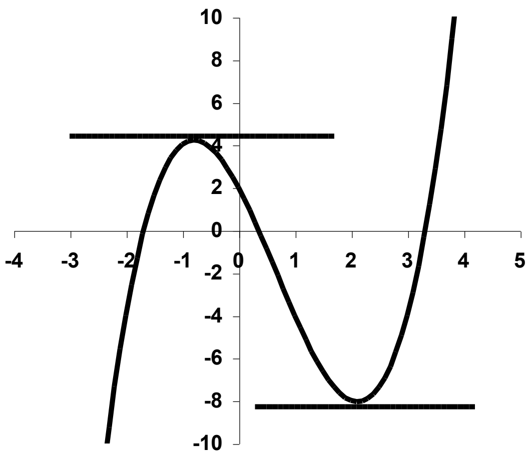
Α.6.1. Υπενθυμίσεις:

Στις συναρτήσεις μιας μεταβλητής έχουμε πιθανό τοπικό ακρότατο στα σημεία όπου η πρώτη παράγωγος μηδενίζεται:

$$f'(\rho) = 0$$

όπου δηλαδή η κλίση του γραφήματος της συνάρτησης ισούται με το μηδέν.

Εάν αριστερά από μια ρίζα ρ της παραγώγου, το πρόσημο της f ’ είναι θετικό, ενώ δεξιά της το πρόσημο της f ’ είναι αρνητικό, τότε στο σημείο x=ρ η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό μέγιστο. Εάν, αντίθετα, αριστερά της ρ το πρόσημο της f’ είναι αρνητικό και δεξιά θετικό τότε η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο.



Σχ.Α.6.1. Τοπικά ακρότατα συνάρτησης μιας μεταβλητής

Επομένως, για να έχουμε τοπικό μέγιστο σε κάποιο σημείο x=ρ θα πρέπει στην περιοχή του ρ η συνάρτηση f να στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω (θα πρέπει δηλαδή η παράγωγος f ‘ να είναι φθίνουσα συνάρτηση – οπότε η κλίση της f θα μειώνεται διαρκώς στην περιοχή του ρ). Όμως αυτό θα συμβαίνει όταν η 2η παράγωγος της f (η f ‘’) θα είναι αρνητική(1).

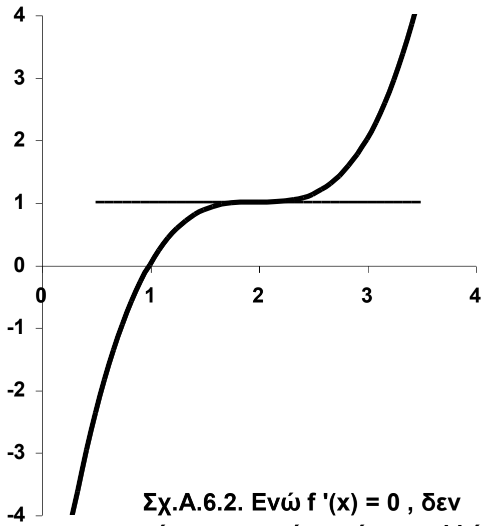
(1) *Να μην ξεχνούμε πως η 2η παράγωγος είναι η παράγωγος της 1ης παραγώγου. Άρα όταν η f ’’ είναι θετική, η f ‘ θα είναι αύξουσα. Κι επειδή η f ‘ δίνει τις κλίσεις της f, η f θα έχει κλίση διαρκώς αύξουσα, δηλαδή θα στρέφει τα κοίλα προς τα άνω.*

Αντίθετα, θα έχουμε τοπικό ελάχιστο όταν η f θα στρέφει τα κοίλα προς τα άνω, όταν δηλαδή η κλίση της θα αυξάνει, όταν δηλαδή η 2η παράγωγος θα είναι θετική. Όλα τα παραπάνω φαίνονται σχηματικά ως εξής: Έστω πως $f'(x_o) = 0$.

- Εάν $f''(x_o) > 0 \Rightarrow f'(x_o)$ αύξουσα $\Rightarrow$ **Η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω και παρουσιάζει στο x_o τοπικό ελάχιστο**

- Εάν $f''(x_o) < 0 \Rightarrow f'(x_o)$ φθίνουσα $\Rightarrow$ **Η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω και παρουσιάζει στο x_o τοπικό μέγιστο**

Τέλος υπάρχει και η δυνατότητα να μηδενίζεται η τιμή της παραγώγου f ' σε κάποιο x=ρ, χωρίς όμως η συνάρτηση f να παρουσιάζει τοπικό ακρότατο (όπως στο διπλανό γράφημα). Αυτό συμβαίνει όταν το πρόσημο της παραγώγου δεν αλλάζει εκατέρωθεν της ρίζας ρ, πράγμα που σημαίνει πως η ρίζα ρ είναι ρίζα άρτιας τάξης της παραγώγου (διπλή ρίζα, τετραπλή κ.λ.π.). Στην περίπτωση αυτή η 2η παράγωγος μηδενίζεται στο ρ και η 1η παράγωγος παρουσιάζει ακρότατο (ενώ η f παρουσιάζει σημείο καμπής). Στο διπλανό γράφημα για παράδειγμα η κλίση παρουσιάζει στο ρ=2 ελάχιστο (η κλίση ήταν θετική, μειώθηκε στο μηδέν για ρ=2 –ελάχιστο- και στη συνέχεια άρχισε και πάλι να αυξάνει).



Σχ.Α.6.2. Ενώ f '(x) = 0 , δεν υπάρχει τοπικό ακρότατο αλλά σημείο καμπής.

Α.6.2. Τοπικά ακρότατα στις συναρτήσεις δύο μεταβλητών.

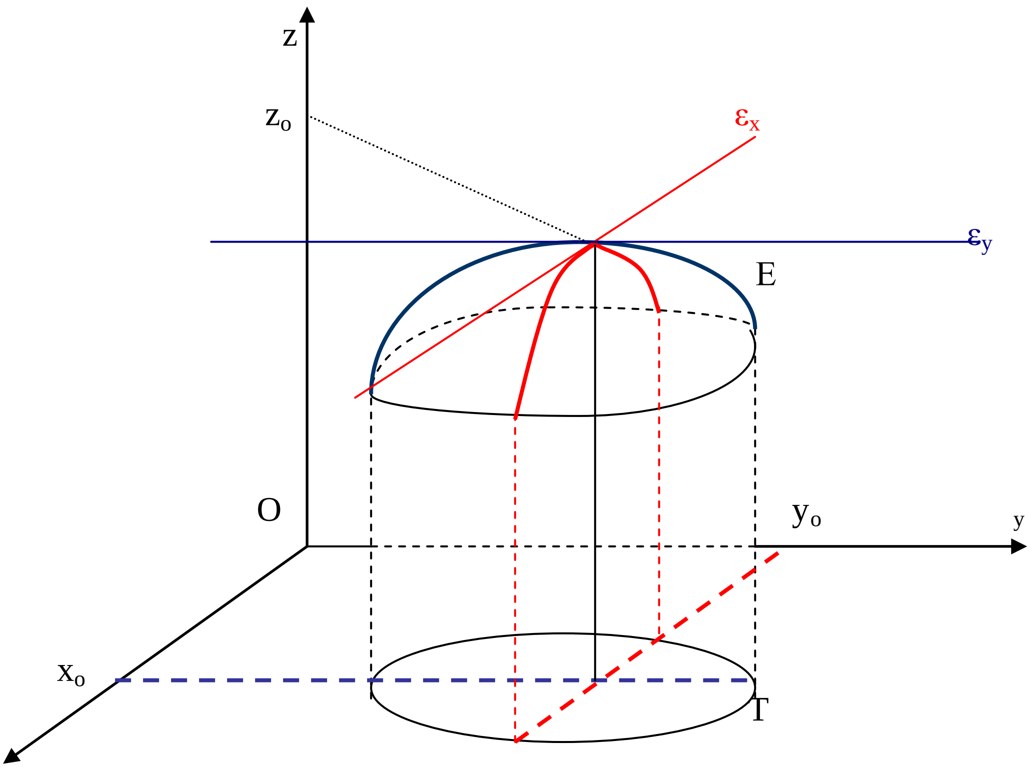
Έστω η συνάρτηση z = f(x,y), η οποία έχει συνεχείς παραγώγους στον τόπο Τ όπου έχει ορισθεί. Σκεπτόμενοι όπως και στις συναρτήσεις μιας μεταβλητής, αντιλαμβανόμαστε πως για να παρουσιάζει η f τοπικό ακρότατο σε κάποιο σημείο (x_o,y_o) του Τ, θα πρέπει το εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας στο σημείο αυτό να έχει μηδενική κλίση (να είναι παράλληλο μο το επίπεδο Oxy). Δηλαδή θα πρέπει να μηδενίζονται και οι δύο μερικές παράγωγοι:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0}$$

Τα σημεία του τόπου Τ για τα οποία ισχύουν και οι δύο προηγούμενες ισότητες ονομάζονται σημεία στάσης και είναι πιθανά σημεία όπου η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα.

Για να υπάρχει τοπικό ακρότατο όμως θα πρέπει και οι δύο καμπύλες που αντιστοιχούν στις συναρτήσεις $z(x)=f(x,y_o)$ και $z(y)=f(x_o,y)$, που διέρχονται από το σημείο (x_o,y_o) και είναι παράλληλες προς τον άξονα των x η πρώτη και των y η δεύτερη, να στρέφουν τα κοίλα προς τα κάτω και οι δύο, οπότε θα έχουμε τοπικό μέγιστο, ή τα κοίλα προς τα άνω (πάλι και οι δύο), οπότε θα έχουμε τοπικό ελάχιστο. Θα πρέπει δηλαδή οι δεύτερες παράγωγοι (βλ. επόμενο διάγραμμα) να είναι και οι δύο είτε ταυτόχρονα αρνητικές ή ταυτόχρονα θετικές. Αντίθετα εάν οι δύο παράγωγοι είναι ετερόσημες, τότε η f δεν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο. Δηλαδή:

Εάν οι παράγωγοι $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ και $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ είναι ομόσημες	$\Rightarrow$	Η f παρουσιάζει ακρότατο: μέγιστο εάν είναι αρνητικές ή ελάχιστο εάν είναι θετικές

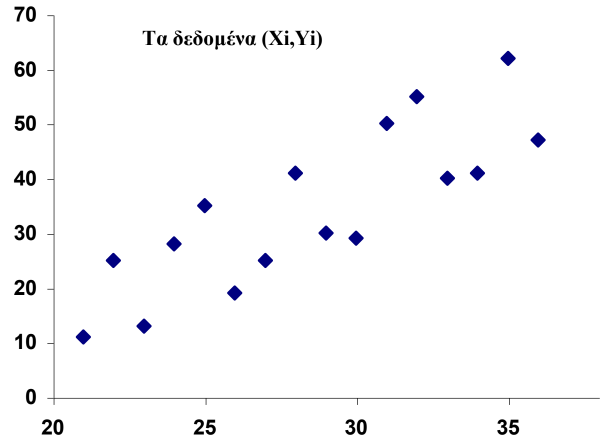


Σχ.Α.6.3. Γεωμετρική ερμηνεία του σημείου στάσης. Οι ευθείες ε_x και ε_y έχουν κλίση ίση με το μηδέν. Επειδή μάλιστα οι δύο καμπύλες που αντιστοιχούν στις συναρτήσεις $z(x)=f(x,y_o)$ και $z(y)=f(x_o,y)$ στρέφουν τα κοίλα προς τα κάτω, η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο (x_o,y_o).

Α.6.3. Θεωρητική άσκηση: Η ευθεία των ελαχίστων τετραγώνων (Ε.Ε.Τ.)

Δίνονται ν-σημεία του επιπέδου Oxy, με συντεταγμένες (x_i,y_i), Ι=1,2,…,ν.

Επειδή δεν υπάρχει μια συνάρτηση που να συνδέει τις τιμές Χ με τις αντίστοιχες Υ, το γράφημα θα έχει τη διπλανή μορφή ενός νέφους σημείων. Διαγράμματα αυτής της μορφής συναντιούνται πολύ συχνά σε επιστήμες όπως η Οικονομία, η Βιολογία κ.λ.π.. Το μέγεθος Χ καλείται ανεξάρτητη μεταβλητή ενώ το Υ εξαρτημένη. Παραδείγματα τέτοιων δυάδων μπορεί να συναντήσει κάποιος πάρα πολλά, σε καθημερινή βάση.



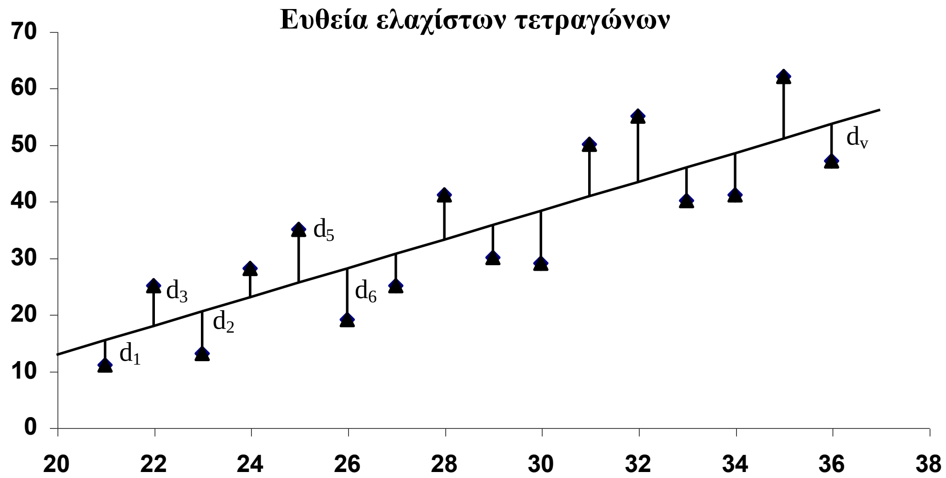
Σχ.Α.6.4. Το νέφος των δεδομένων

- Χ το ύψος και Υ το βάρος των ανθρώπων,
- Χ το επενδυμένο κεφάλαιο και Υ το κέρδος των επιχειρήσεων,
- Χ ο κυβισμός του κινητήρα και Υ η κατανάλωση του αυτοκινήτου, κ.λ.π.

Για τα δεδομένα Χ και Υ ονομάζουμε **παλινδρόμηση,** την προσαρμογή μιας μαθηματικής καμπύλης πάνω στο νέφος των δεδομένων, ενώ ονομάζουμε **ευθύγραμμη παλινδρόμηση,** την προσαρμογή μιας ευθείας (ε:y=αx+β) πάνω στο νέφος των δεδομένων.

Στη συνέχεια θα προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε τις παραμέτρους α και β έτσι ώστε η ευθεία ε να είναι η καλύτερα προσαρμοσμένη ευθεία στο νέφος των δεδομένων. Σαν τέτοια ευθεία επιλέγουμε την ευθεία των ελαχίστων τετραγώνων (Ε.Ε.Τ.). Για τον υπολογισμό της Ε.Ε.Τ. ορίζουμε τις αποστάσεις (d_i) των σημείων του νέφους από την ευθεία ε παράλληλα προς τον άξονα των y (όπως φαίνεται και στο σχ.Α.6.5.), αντίθετα απ' ότι θα περίμενε κανείς (κάθετα προς την ε). Ο βασικότερος λόγος έχει να κάνει με την ανεξαρτησία της μεταβλητής Χ. Εάν δηλαδή το νέφος των δεδομένων προέρχεται από τη δυάδα (Ύψος – Βάρος) και θεωρήσουμε πως η προσαρμοσμένη ευθεία συμβολίζει ένα μέσο όρο για το βάρος ανάλογα με το ύψος (τις τέλειες αναλογίες κατά κάποιο τρόπο, ανεξάρτητα με το ύψος), θα ήταν άτοπο η οποιαδήποτε διόρθωση να αφορούσε και το ύψος, εκτός από το βάρος.

Έστω λοιπόν πως η εξίσωση της Ε.Ε.Τ. είναι η: ε: $y = αx + β$. Ορίζουμε την ποσότητα Α η οποία ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των «αποστάσεων» του κάθε σημείου του νέφους από την ε. Έχουμε:



Σχ. Α.6.5. Το νέφος των δεδομένων (x_i;y_i), η Ε.Ε.Τ.
και οι «αποστάσεις» d_i των σημείων του νέφους από την ε
(παράλληλα με τον άξονα των y).

$$A(\alpha,\beta) = [y_1 - (\alpha x_1 + \beta)]^2 + [y_2 - (\alpha x_2 + \beta)]^2 + \ldots + [y_\nu - (\alpha x_\nu + \beta)]^2 = \\ = \sum_{i=1}^{\nu} [y_i - (\alpha x_i + \beta)]^2$$

Η παράσταση Α είναι μια συνάρτηση των α και β. Ζητούμε τώρα τον υπολογισμό της τιμής των α και β, έτσι ώστε η τιμή της Α να γίνεται ελάχιστη. Ζητούμε δηλαδή το τοπικό ελάχιστο της συνάρτησης Α(α,β). Τα σημεία στάσης προκύπτουν από τις δύο εξισώσεις:

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha} = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial A}{\partial \beta} = 0$$

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\sum_{i=1}^{\nu}[y_i - (\alpha x_i + \beta)]^2\right] = \sum_{i=1}^{\nu}\frac{\partial}{\partial \alpha}[y_i - \alpha x_i + \beta]^2 = \quad {}^{(1)}$$

$$= \sum_{i=1}^{\nu} 2[y_i - \alpha x_i - \beta](-x_i) = \sum_{i=1}^{\nu} 2\left[-x_i y_i + \alpha x_i^2 + \beta x_i\right] = \quad {}^{(2)}$$

---

(1) *Εφαρμόσαμε τη βασική ιδιότητα των παραγώγων σύμφωνα με την οποία η παράγωγος αθροίσματος είναι ίση με το άθροισμα των παραγώγων.*

(2) *Στη συνέχεια θα εφαρμόσουμε την ιδιότητα της αντιμετάθεσης των προσθετέων:*
$\Sigma(x_i+y_i) = (x_1+y_1)+(x_2+y_2)+ \ldots +(x_\nu+y_\nu) = (x_1+x_2+\ldots+x_\nu) + (y_1+y_2+\ldots+y_\nu) =$
$= \Sigma x_i + \Sigma y_i$

$$= -2\sum_{i=1}^{\nu} x_i y_i + 2\alpha\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 + 2\beta\sum_{i=1}^{\nu} x_i = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\alpha\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 + \beta\sum_{i=1}^{\nu} x_i = \sum_{i=1}^{\nu} x_i y_i} \qquad (A.6.3.1)$$

$$\frac{\partial A}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \beta}\left[\sum_{i=1}^{\nu}\left[y_i - (\alpha x_i + \beta)\right]^2\right] = \sum_{i=1}^{\nu}\frac{\partial}{\partial \beta}\left[y_i - \alpha x_i - \beta\right]^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{\nu} 2\left[y_i - \alpha x_i - \beta)\right](-1) = \sum_{i=1}^{\nu} 2\left[-y_i + \alpha x_i + \beta\right] =$$

$$= -2\sum_{i=1}^{\nu} y_i + 2\alpha\sum_{i=1}^{\nu} x_i + 2\beta\sum_{i=1}^{\nu} 1 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\alpha\sum_{i=1}^{\nu} x_i + \nu\beta = \sum_{i=1}^{\nu} y_i} \qquad (A.6.3.2)$$

Οι εξισώσεις Α.6.3.1 και Α.6.3.2 αποτελούν ένα σύστημα εξισώσεων με δύο αγνώστους, τα α και β. Επιλύνοντας το σύστημα αυτό έχουμε για τα α και β:

$$\alpha = \frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{\nu} y_i\right) - \nu\left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i y_i\right)}{\left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i\right)^2 - \nu\left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2\right)}$$

και

$$\beta = \frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu} y_i\right) - \alpha\left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i\right)}{\nu}$$

Παραγωγίζοντας για δεύτερη φορά έχουμε:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \alpha^2} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left[-2\sum_{i=1}^{\nu} x_i y_i + 2\alpha\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 + 2\beta\sum_{i=1}^{\nu} y_i\right] = 2\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 > \mathbf{0}$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \beta^2} = \frac{\partial}{\partial \beta}\left[-2\sum_{i=1}^{\nu} y_i + 2\alpha\sum_{i=1}^{\nu} x_i + 2\nu\beta\right] = 2\nu > \mathbf{0}$$

Επειδή οι δύο αυτές παράγωγοι είναι θετικές, συμπεραίνουμε πως το σημείο στάσης που μόλις υπολογίσαμε αντιστοιχεί στο μοναδικό τοπικό ελάχιστο της συνάρτησης Α(α,β). Άρα για τις πιο πάνω τιμές των α και β το άθροισμα των τετραγώνων των «αποστάσεων» των σημείων του νέφους από την ευθεία ελαχιστοποιούνται (εξ' ου και ευθεία των ελαχίστων τετραγώνων).

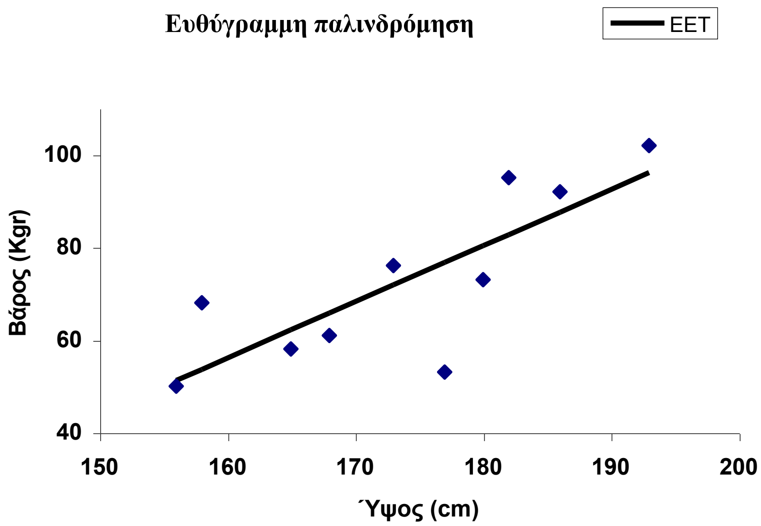
Αριθμητικό παράδειγμα: Δίνονται οι τιμές (x_i, y_i) , i=1,2,…,10 (Ύψος και βάρος 10 ατόμων). Στον παρακάτω πίνακα υπολογίζουμε τις τιμές των αθροισμάτων (Σx_i) , (Σy_i) , $(\Sigma x_i y_i)$ και (Σx_i^2) [(1)]

	Xi	Yi	Xi^2	XiYi
	156	50	24336	7800
	158	68	24964	10744
	165	58	27225	9570
	168	61	28224	10248
	173	76	29929	13148
	177	53	31329	9381
	180	73	32400	13140
	182	95	33124	17290
	186	92	34596	17112
	193	102	37249	19686
Αθροίσματα	1738	728	303376	128119

Με τα αθροίσματα του διπλανού πίνακα μπορούμε να υπολογίσουμε τις παραμέτρους α και β της Ε.Ε.Τ.:

$$\alpha = \frac{1738 * 728 - 10 * 128119}{1738^2 - 10 * 303376} = 1{,}214$$

$$\beta = \frac{728 - 1{,}214 * 1738}{10} = -138{,}235$$



[(1)] *Ας προσεχθεί πως οι ποσότητες (Σx_i^2) και $(\Sigma x_i)^2$ είναι τελείως διαφορετικές. Εάν για παράδειγμα $x_1=1$, $x_2=2$ και $x_3=3$ τότε*

$$(\Sigma x_i)^2 = (1+2+3)^2 = 36 \neq (\Sigma x_i^2) = 1^2+2^2+3^2 = 14$$

A.7. Διανυσματική Ανάλυση.

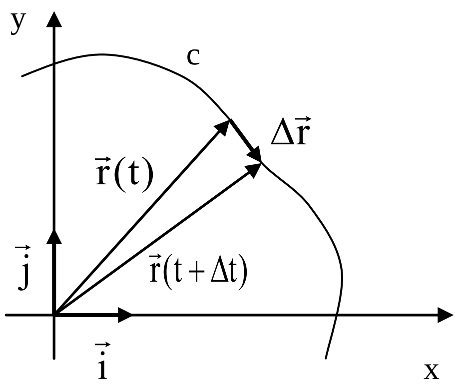
A.7.1. Υπενθυμίσεις.

Στο επίπεδο Oxy, ορίζουμε τις διανυσματικές μονάδες $\vec{i}$ και $\vec{j}$, στους άξονες των x και y, αντίστοιχα.

Μία συνάρτηση της μορφής:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$$

όπου το t είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή (συνήθως ο χρόνος) λέγεται διανυσματική συνάρτηση και ορίζει τη θέση ενός διανύσματος **r**[(1)] σαν συνάρτηση του t. Η διανυσματική συνάρτηση **r** (σαν διανυσματική ακτίνα) με τη σειρά της ορίζει μία καμπύλη c του επιπέδου.



Σχ. A.7.1.

Ο τρόπος αυτός ορισμού μιας καμπύλης στο επίπεδο, σαν συνάρτησης του t είναι ιδιαίτερα βολικός στην περιγραφή μιας κίνησης στο επίπεδο αυτό. Εύκολα διαπιστώνουμε πως με τον ίδιο τρόπο μπορεί να οριστεί μια καμπύλη στο χώρο των τριών διαστάσεων, με τη μορφή:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

όπου k είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στον άξονα z.

Η απόσταση ενός σημείου της καμπύλης c από το κέντρο O δίνεται από το μέτρο του διανύσματος **r** (δηλ. από το Πυθαγόρειο Θεώρημα):

$$|\vec{r}| = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$$

Στα Μαθηματικά I υπολογίσαμε τις παραγώγους της συνάρτησης αυτής:

$$\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{x(t+\Delta t)\vec{i} + y(t+\Delta t)\vec{j} - x(t)\vec{i} - y(t)\vec{j}}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0}\frac{[x(t+\Delta t) - x(t)]\vec{i} + [y(t+\Delta t)\vec{j} - y(t)]\vec{j}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j}\right] \Rightarrow$$

---

(1) *Για λόγους ευκολίας γραφής ας μας επιτρέψει ο αναγνώστης να δηλώνουμε ένα διάνυσμα με την έντονη γραφή, χωρίς το κλασσικό βελάκι από πάνω:*

$$\vec{r} = \mathbf{r}$$

$$\boxed{\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j}}$$

όπου η τελεία συμβολίζει την παραγώγιση ως προς το χρόνο (όπως ο τόνος την παράγωγο ως προς x).

Ξαναγυρνώντας στο σχήμα Α.7.1. και σκεπτόμενοι πως η παράγωγος της διανυσματικής συνάρτησης **r**(t) προκύπτει από το όριο

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

αντιλαμβανόμαστε πως η παράγωγος αυτή **είναι ένα διάνυσμα παράλληλο και ομόρροπο του διανύσματος Δr, δηλαδή <u>ένα διάνυσμα που εφάπτεται στην καμπύλη c που ορίζεται από την διανυσματική ακτίνα r(t</u>).**

Μπορούμε λοιπόν να καταλήξουμε στα παρακάτω συμπεράσματα:

- Η διανυσματική ακτίνα **r**(t) «χαράσσει» στο επίπεδο Oxy μια καμπύλη c, σαν συνάρτηση της μεταβλητής t, που θα μπορούσε να περιγράφει την κίνηση ενός σημείου πάνω στο επίπεδο αυτό.
- Η παράγωγος της **r**(t) είναι μια διανυσματική συνάρτηση η οποία δίνει την ταχύτητα με την οποία μετατοπίζεται το σημείο πάνω στην καμπύλη c.
- Το διάνυσμα της ταχύτητας εφάπτεται στην καμπύλη c. Δηλαδή το **...διάνυσμα** $\dot{\vec{r}}(t_0)$ **εφάπτεται στην καμπύλη c, στο σημείο:** $\vec{r}(t_0)$

Με όμοια μέθοδο υπολογίζεται η δεύτερη παράγωγος (η παράγωγος της πρώτης παραγώγου – της διανυσματικής ταχύτητας):

$$\boxed{\ddot{\vec{r}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{x}(t)\vec{i} + \ddot{y}(t)\vec{j}}$$

Η δεύτερη παράγωγος περιγράφει την επιτάχυνση με της κίνησης της οποίας η διανυσματική συνάρτηση **r**(t) αποτελεί τη συνάρτηση θέσης. Ισχύουν δηλαδή οι σχέσεις:

Συνάρτηση θέσης: $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$

Συνάρτηση ταχύτητας: $\dot{\vec{r}}(t) = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j}$

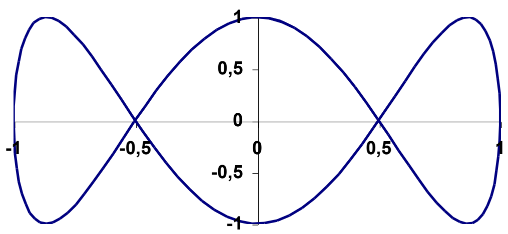
Συνάρτηση επιτάχυνσης: $\ddot{\vec{r}}(t) = \ddot{x}(t)\vec{i} + \ddot{y}(t)\vec{j}$

Σαν παράδειγμα μπορούμε να πάρουμε τη συνάρτηση:

$$\vec{r}(t) = \eta\mu(t)\vec{i} + \sigma\upsilon\nu(3t)\vec{j}$$ [1]

της οποίας η γραφική παράσταση εμφανίζεται στο διπλανό γράφημα, όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή t ορίζεται στο διάστημα:

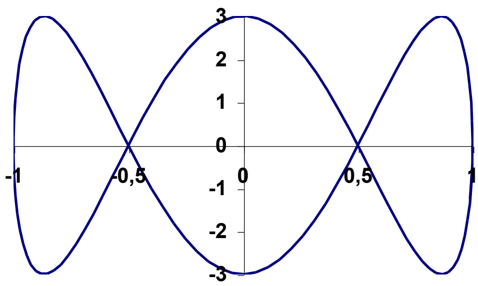
$$[0\ ,\ 1{,}7\pi]$$



Στη συνέχεια υπολογίζουμε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης αυτής:

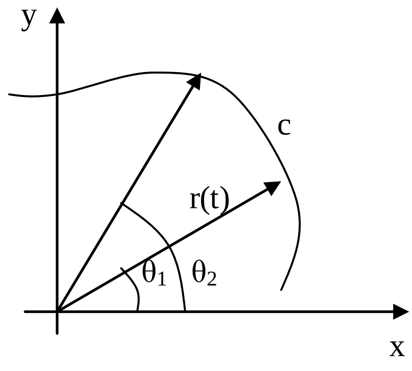
$$d\vec{r}(t)/dt = \sigma\upsilon\nu(t)\vec{i} - 3\eta\mu(3t)\vec{j}$$

της οποίας η γραφική παράσταση εμφανίζεται δίπλα και ενώ θυμίζει την προηγούμενη, ξεκινά και τελειώνει σε άλλο σημείο.



Γωνιακή ταχύτητα.

Πολύ χρήσιμο είναι το να καθορίζεται η γωνιακή ταχύτητα (ω) με την οποία «γράφεται» η καμπύλη c, από την επιβατική ακτίνα **r**(t). Πρόκειται για τη γωνία θ που «γράφεται» από την επιβατική ακτίνα στη μονάδα του χρόνου. Συχνά η γωνιακή ταχύτητα μεταβάλλεται με τον χρόνο, οπότε είναι συνάρτηση του t (ω=ω(t)). Έτσι η γωνία θ στην τυχαία χρονική στιγμή t, δίνεται από το άθροισμα της αρχικής γωνίας (θ_0) με το γινόμενο του χρόνου επί την γωνιακή ταχύτητα:



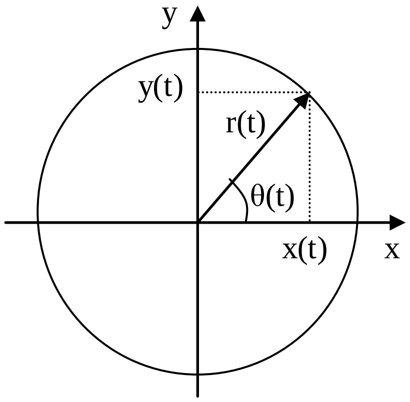
$$\theta(t) = t\omega(t) + \theta_0$$

[1] *Οι συναρτήσεις αυτές δίνουν τα γνωστά σχήματα Lissajous. Οι καμπύλες αυτές είναι κλειστές όταν το κλάσμα των κυκλικών συχνοτήτων των δύο ημιτονοειδών συναρτήσεων είναι ρητός αριθμός. Αντίθετα, εάν το κλάσμα αυτό είναι άρρητο, τότε η καμπύλη αυτή δεν «κλείνε»ι ποτέ.*

Παράδειγμα: Ομαλή κυκλική κίνηση.

Ένα υλικό σημείο που διαγράφει την περιφέρεια ενός κύκλου, με σταθερή γωνιακή ταχύτητα (ω=στ.), εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση. Άρα η γωνία της επιβατικής ακτίνας δίνεται από τη σχέση:

$$\theta(t) = \omega t + \theta_0 = \omega t \quad (\text{εάν } \theta_0=0)$$



Εάν λοιπόν R είναι η ακτίνα του κύκλου, τότε οι προβολές στους άξονες των x και y, της διανυσματικής ακτίνας δίνουν την διανυσματική εξίσωση της κίνησης του υλικού σημείου:

$$\vec{r}(t) = R[\sigma\upsilon\nu(\omega t)\vec{i} + \eta\mu(\omega t)\vec{j}] \quad ^{(1)}$$

Η παράγωγος της συνάρτησης αυτής, μας δίνει την διανυσματική συνάρτηση που περιγράφει το διάνυσμα της γραμμικής ταχύτητας ενός σημείου της περιφέρειας του κύκλου:

$$\vec{v}(t) = d\vec{r}(t)/dt = R[-\omega\eta\mu(\omega t)\vec{i} + \omega\sigma\upsilon\nu(\omega t)\vec{j}] = R\omega[-\eta\mu(\omega t)\vec{i} + \sigma\upsilon\nu(\omega t)\vec{j}] =$$
$$= R\omega[-\sigma\upsilon\nu(\omega t - \pi/2)\vec{i} + \eta\mu(\omega t - \pi/2)\vec{j}] \quad ^{(2)}$$

της οποίας το μέτρο ισούται με $v = \omega R$, με κατεύθυνση η οποία είναι κάθετη στην κατεύθυνση της διανυσματικής ακτίνας **r**(t). Η φορά της εξαρτάται από το πρόσημο της γωνιακής ταχύτητας ω[3].

---

(1) *Αξίζει να παρατηρήσουμε πως η ποσότητα* $[\sigma\upsilon\nu(\omega t)\vec{i} + \eta\mu(\omega t)\vec{j}]$, *είναι η έκφραση του μοναδιαίου διανύσματος στην κατεύθυνση θ=ωt (πράγματι είναι διάνυσμα στην κατεύθυνση αυτή ενώ το μέτρο του είναι ίσο με τη μονάδα).*

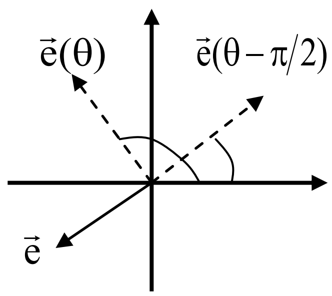
(2) *Χρησιμοποιήθηκαν οι γνωστές σχέσεις της Τριγωνομετρίας:*

$$\eta\mu\theta = \sigma\upsilon\nu(\theta-\pi/2) \quad \text{και} \quad \sigma\upsilon\nu\theta = -\eta\mu(\theta-\pi/2)$$

(3) *Υποθέτουμε πως ω>0, και θ=ωt. Τότε το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση του διανύσματος θέσης **r**(t) θα είναι το **e**(θ). Το μοναδιαίο στην κατεύθυνση θ-π/2 είναι το:*

$$e(\theta - \pi/2) = \sigma\upsilon\nu(\theta - \pi/2)\vec{i} + \eta\mu(\theta - \pi/2)\vec{j}$$

*Το μοναδιαίο στην κατεύθυνση του διανύσματος της ταχύτητας είναι το διάνυσμα **e** (λόγω του – στο συνημίτονο)*



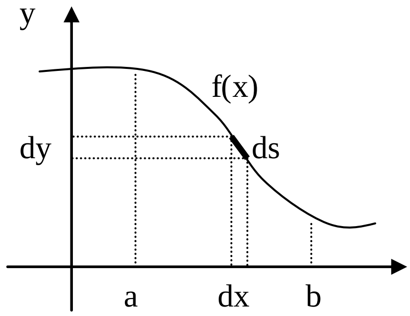
Παραγωγίζοντας για δεύτερη φορά την διανυσματική συνάρτηση θέσης, υπολογίζεται η διανυσματική έκφραση της επιτάχυνσης της κίνησης:

$$\vec{\alpha}(t) = d^2\vec{r}(t)/dt^2 = R[-\omega^2 \sigma\upsilon\nu(\omega t)\vec{i} - \omega^2 \eta\mu(\omega t)\vec{j}] = R\omega^2[-\sigma\upsilon\nu(\omega t)\vec{i} - \eta\mu(\omega t)\vec{j}]$$

της οποίας το μέτρο ισούται με $\alpha = \omega^2 R$, με κατεύθυνση η οποία είναι αντίθετη της κατεύθυνσης της διανυσματικής ακτίνας **r**(t), έχει δηλαδή κατεύθυνση προς το κέντρο του κύκλου και γι' αυτό καλείται κεντρομόλος επιτάχυνση.

Α.7.2. Μήκος τόξου καμπύλης (υπενθυμίσεων συνέχεια…)

(i) Η καμπύλη ορίζεται με τη βοήθεια της συνάρτησης y=f(x).



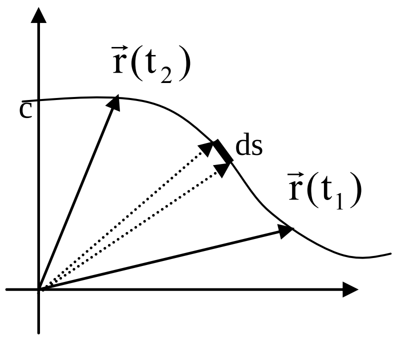
Το στοιχειώδες μήκος καμπύλης ds δίνεται από τη σχέση (Πυθαγόρειο Θ.):

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + (dy/dx)^2}\,dx$$

οπότε το μήκος της καμπύλης c από το a έως το b δίνεται από το άθροισμα των ds , δηλαδή από το ολοκλήρωμα:

$$\boxed{s = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{1 + (dy/dx)^2}\,dx = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx}$$

(ii) Η καμπύλη ορίζεται παραμετρικά.



Στην περίπτωση αυτή η καμπύλη ορίζεται με τη βοήθεια της διανυσματικής ακτίνας:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$$

Τώρα το στοιχειώδες μήκος ds, που ορίζεται από τις διανυσματικές ακτίνες:

$$\vec{r}(t) \text{ και } \vec{r}(t + \Delta t)$$

$$d\vec{s} = \vec{r}(t+\Delta t) \text{ - } \vec{r}(t) = \big(x(t+\Delta t) - x(t)\big)\vec{i} + \big(y(t+\Delta t) - y(t)\big)\vec{j} =$$

$$= \big(\dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j}\big)dt$$

Το μέτρο του διανύσματος d**s**:

$$ds = \sqrt{\vec{x}(t)^2 + \vec{y}(t)^2}\,dt$$

οπότε το συνολικό μήκος της καμπύλης s υπολογίζεται με ολοκλήρωση:

$$\boxed{s = \int_{t_1}^{t_2} ds = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\,dt}$$

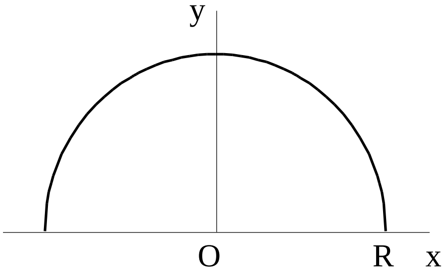
Με όμοιο ακριβώς τρόπο προκύπτει και το μήκος καμπύλης στο χώρο των τριών διαστάσεων, η οποία ορίζεται από τη διανυσματική ακτίνα:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

$$\boxed{s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}\,dt}$$

Παράδειγμα:

Να υπολογισθεί το μήκος του ημικυκλίου του διπλανού γραφήματος..



(i) Με τη χρήση της εξίσωσης του κύκλου:

Ως γνωστόν η εξίσωση του κύκλου, ακτίνας R είναι η:

$$x^2 + y^2 = R^2$$

και επειδή μας ενδιαφέρει το άνω τμήμα του κύκλου, γράφουμε:

$$y = f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$$

με παράγωγο:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{R^2-x^2}}(R^2-x^2)'=\frac{-2x}{2\sqrt{R^2-x^2}}=-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}$$

οπότε το ολοκλήρωμα που δίνει το μήκος του τόξου αυτού γράφεται:

$$s=\int_{-R}^{R}\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx=\int_{-R}^{R}\sqrt{1+\left(-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)^2}\,dx=\int_{-R}^{R}\sqrt{\frac{R^2}{R^2-x^2}}\,dx=$$

$$=R\int_{-R}^{R}\sqrt{\frac{1}{1-(x/R)^2}}\,d(x/R)=R\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du=R\left[\text{Τοξημ}(u)\right]_{-1}^{1}=$$ [(1)]

$$=R\left(\text{Τοξημ}(1)-\text{Τοξημ}(-1)\right)=R\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\pi R$$

(ii) Με τη χρήση της διανυσματικής εξίσωσης του κύκλου:

Είδαμε ήδη την διανυσματική εξίσωση του κύκλου:

$$\vec{r}(t)=R\left(\text{συν}(t)\vec{i}+\text{ημ}(t)\vec{j}\right)\quad t\in[0,\pi]$$

οπότε:

$$s=\int_{0}^{\pi}\sqrt{\dot{x}(t)^2+\dot{y}(t)^2}\,dt=\int_{0}^{\pi}\sqrt{R^2\left(-\text{ημ}(t)\right)^2+R^2\text{συν}^2(t)}\,dt=$$

$$=R\int_{0}^{\pi}\sqrt{\text{ημ}^2(t)+\text{συν}^2(t)}\,dt=R\int_{0}^{\pi}1\,dt=\pi R$$

[(1)] *Από τη στιγμή που αντικαθιστούμε τη μεταβλητή x, η οποία παίρνει τιμές από το –R έως το R, με την μεταβλητή u=x/R, μεταβάλλουμε και τα όρια ανάλογα. Πράγματι το u κυμαίνεται από το –1 έως το 1. Επίσης χρησιμοποιήθηκε το γνωστό αόριστο ολοκλήρωμα:*

$$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\text{Τοξημ}x\quad+c$$