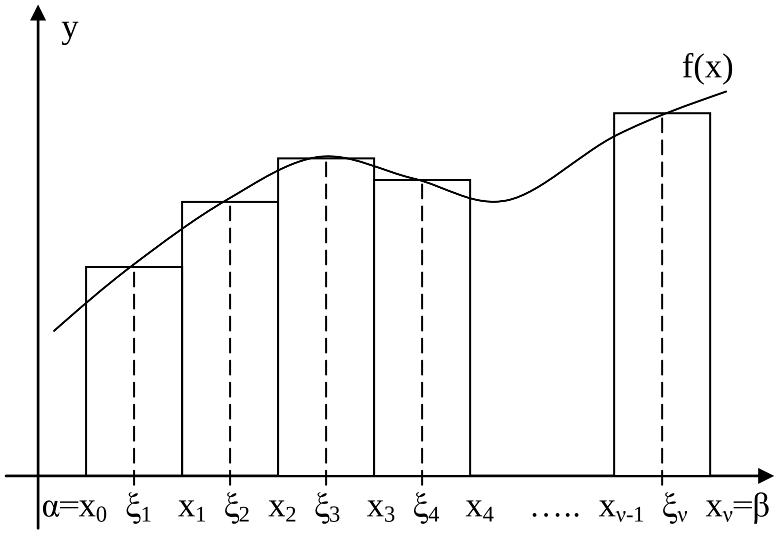
Β. Πολλαπλή ολοκλήρωση.

Β.1. Υπενθυμίσεις.

Έστω η συνάρτηση $y=f(x)$, ορισμένη στο διάστημα $[\alpha,\beta]$. Διαιρούμε το διάστημα αυτό σε ν-υποδιαστήματα:

$(\alpha=x_0,x_1),(x_1,x_2),..,(x_{\nu-1},x_\nu=\beta)$



Στο εσωτερικό του κάθε υποδιαστήματος ορίζουμε ένα σημείο (ξ_i) και θεωρούμε το παρακάτω άθροισμα:

$$I = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + ... + f(\xi_\nu)\Delta x_\nu = \sum_{i=1}^{\nu} f(\xi_i)\Delta x_i$$

όπου το τυχαίο $\Delta x_i = (x_i - x_{i-1})$. Γνωρίζουμε από τα απλά ορισμένα ολοκληρώματα πως το προηγούμενο άθροισμα τείνει προς το ολοκλήρωμα

$$I = \int_\alpha^\beta f(x)dx$$

όταν το ν τείνει στο άπειρο, όταν δηλαδή χωρίζουμε το διάστημα σε άπειρα υποδιαστήματα. Ορίζοντας λοιπόν το ορισμένο ολοκλήρωμα σαν το όριο του προηγουμένου αθροίσματος, εύκολα καταλήγουμε στις παρακάτω ιδιότητες:

Ιδιότητες:

1. Το ορισμένο ολοκλήρωμα I ισούται με το εμβαδόν του τόπου που ορίζεται ανάμεσα στον άξονα των x, στην καμπύλη της συνάρτησης f(x) και στις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$.

2. Όταν η συνάρτηση f(x) παίρνει αρνητικές τιμές στο διάστημα (α,β), τότε η απόλυτη τιμή του ολοκληρώματος I είναι ίση με το εμβαδόν του τόπου που καθορίστηκε στην προηγούμενη ιδιότητα, όμως θα έχει αρνητικό πρόσημο (μια και τα γινόμενα από τα οποία αποτελείται το αρχικό άθροισμα I είναι αρνητικά – τα Δx_i είναι πάντα θετικά)

3. Στηριζόμενοι στο θεώρημα μέσης τιμής, εύκολα αποδεικνύουμε πως εάν η συνάρτηση F(x) είναι το αόριστο ολοκλήρωμα της f(x) (ή όπως συχνά λέμε η αρχική συνάρτηση της f), το ορισμένο ολοκλήρωμα I δίνεται από τη σχέση:

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = F(\beta) - F(\alpha)$$

4. Αντιμεταθέτοντας τα όρια α και β αλλάζει το πρόσημο του ολοκληρώματος:

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = -\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx$$

5. Ισχύει η ισότητα:

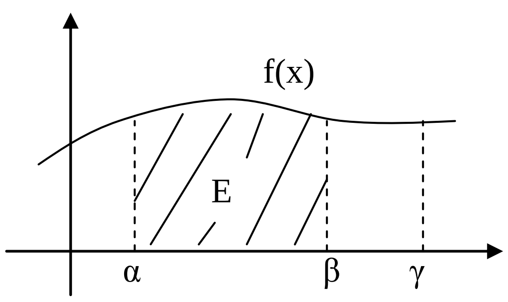
$$I = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx$$

κάτι που είναι φανερό εάν το σημείο γ ανήκει στο διάστημα (α,β), όμως ισχύει και στην περίπτωση που το σημείο γ βρίσκεται έξω από το διάστημα (α,β). (Σκεφτείτε πως γράφοντας τα όρια ανάποδα από την κανονική διάταξή τους αλλάζει το πρόσημο του ολοκληρώματος)

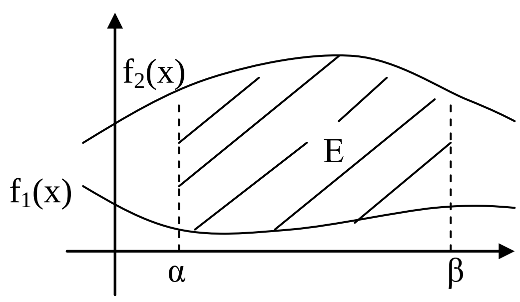
6. Το εμβαδόν Ε που ορίζεται ανάμεσα στις συναρτήσεις f_1 και f_2 και στις ευθείες x=α και x=β, δίνεται πάντα από το ολοκλήρωμα:

$$E = \int_{\alpha}^{\beta} [f_2(x) - f_1(x)]dx$$

οπουδήποτε κι αν βρίσκονται οι δύο αυτές συναρτήσεις με την προϋπόθεση η συνάρτηση f_2 να βρίσκεται, για όλο το διάστημα ολοκλήρωσης (α,β), πάνω από την f_1 (σε μεγαλύτερα y).



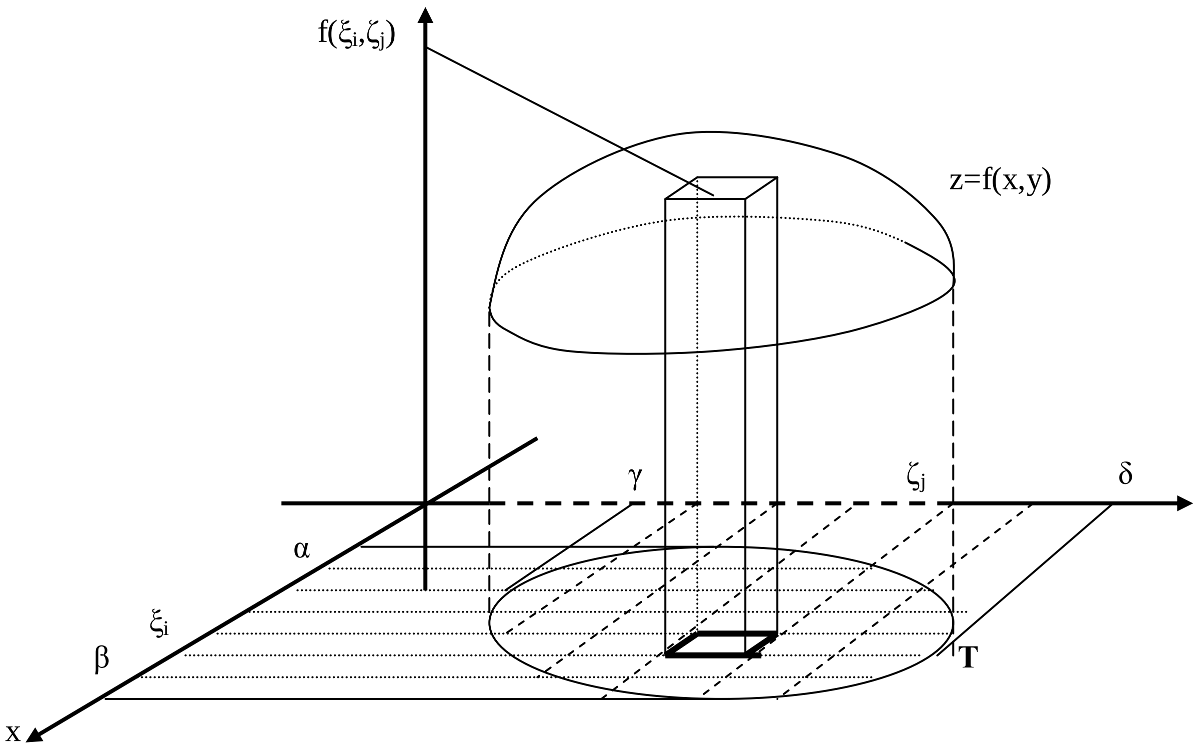
$$E = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx$$

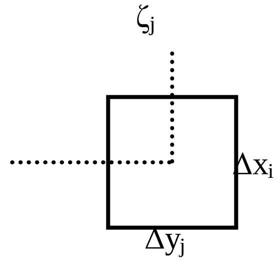


$$E = \int_{\alpha}^{\beta} [f_2(x) - f_1(x)]dx$$

B.2. Διπλή Ολοκλήρωση

B.2.1. Ορισμός του διπλού ολοκληρώματος.





Σχ. Β.2.1. Διαίρεση του τόπου Τ σε ορθογώνια διαστάσεων Δx_i και Δy_j. Το τυχαίο ορθογώνιο (i,j), ορίζεται από τα υποδιαστήματα (x_{i-1},x_i) στον άξονα των x και $(y_{j-1}\ ,y_j)$ στον άξονα των y. Τέλος ορίζουμε το σημείο (ξ_i,ζ_j), όπου τα σημεία ξ_i και ζ_j είναι εσωτερικά των υποδιαστημάτων στους άξονες x και y.

Έστω η συνάρτηση z=f(x,y), ορισμένη σε έναν τόπο Τ του επιπέδου Oxy. Θεωρούμε πως ο Τ προβαλλόμενος στους άξονες x και y αντιστοιχίζεται στα διαστήματα [α,β] και [γ,δ]. Διαιρώντας τα διαστήματα αυτά σε ν και μ υποδιαστήματα, αναλύουμε τον τόπο Τ σε ένα κάνναβο από ορθογώνια. Σε κάθε ορθογώνιο ορίζουμε ένα σημείο με συντεταγμένες (ξ_i,ζ_j) το οποίο αντιστοιχεί στο i-οστό υποδιάστημα του (α,β) και στο j-οστό υποδιάστημα του (γ,δ). Εάν οι διαστάσεις του εν λόγω ορθογωνίου είναι ίσες με Δx_i και Δy_j, τότε το γινόμενο

$$V_{i\,;j} = f(\xi\ ,\zeta\ )\Delta x_i\ \Delta y_j$$

δίνει το στοιχειώδη όγκο που έχει βάση το ορθογώνιο και ύψος την τιμή της συνάρτησης f στο σημείο (ξ_i,ζ_j).

Ορίζουμε λοιπόν το άθροισμα:

$$I = \sum_{i=1}^{\nu}\sum_{j=1}^{\mu} f(\xi_i, \zeta_j)\Delta x_i \Delta y_j \approx V_{o\lambda} \quad \text{(B.2.1)}$$

το οποίο προσεγγίζει το συνολικό όγκο που έχει βάση τον τόπο T και εκτείνεται μέχρι την επιφάνεια της συνάρτησης $f(x,y)$. Το άθροισμα (B.2.1) ορίζει το διπλό ολοκλήρωμα:

$$I = \iint_T f(x,y)dxdy$$

όταν το πλήθος των υποδιαστημάτων στα οποία διαιρούμε τα διαστήματα [α,β] και [γ,δ] τείνει στο άπειρο. Τότε βέβαια η τιμή του I ισούται ακριβώς με τον συνολικό όγκο $V_{o\lambda}$ στον οποίο αναφερθήκαμε προηγουμένως.

B.2.2. Βασικές ιδιότητες των διπλών ολοκληρωμάτων.

Οι βασικές ιδιότητες των διπλών ολοκληρωμάτων είναι μια γενίκευση των ιδιοτήτων των απλών ορισμένων ολοκληρωμάτων.

1. Όταν η συνάρτηση $f(x,y)$ παίρνει αρνητικές τιμές στον τόπο T, τότε η απόλυτη τιμή του ολοκληρώματος I είναι ίση με τον συνολικό όγκο ($V_{o\lambda}$) που έχει βάση τον τόπο T και εκτείνεται μέχρι την επιφάνεια της συνάρτησης $f(x,y)$, όμως θα έχει αρνητικό πρόσημο (μια και τα γινόμενα από τα οποία αποτελείται το αρχικό άθροισμα I είναι αρνητικά – τα Δx_i και Δy_j είναι πάντα θετικά)

2. Εάν ο τόπος T διαιρεθεί στους τόπους T_1 και T_2 θα ισχύει η σχέση:

$$I = \iint_T f(x,y)dxdy = \iint_{T_1} f(x,y)dxdy + \iint_{T_2} f(x,y)dxdy$$

   ουσιαστικά διαιρούμε τον όγκο $V_{o\lambda} = V_{T_1} + V_{T_2}$ στους όγκους που αντιστοιχούν στους τόπους T_1 και T_2.

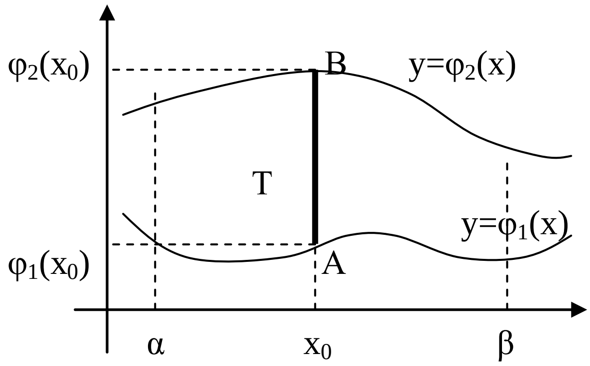
3. Έστω οι συναρτήσεις $f_1(x,y)$ και $f_2(x,y)$, ορισμένες στον ίδιο τόπο T. Τότε ο συνολικός όγκος που ορίζεται ανάμεσα στις δύο συναρτήσεις [με την προϋπόθεση πως η f_2 είναι πάντα μεγαλύτερη της f_1] δίνεται από το ολοκλήρωμα:

$$V_{o\lambda}(\text{από την } f_1 \text{ έως την } f_2) = \iint_T \left[f_2(x,y) - f_1(x,y)\right]dxdy$$

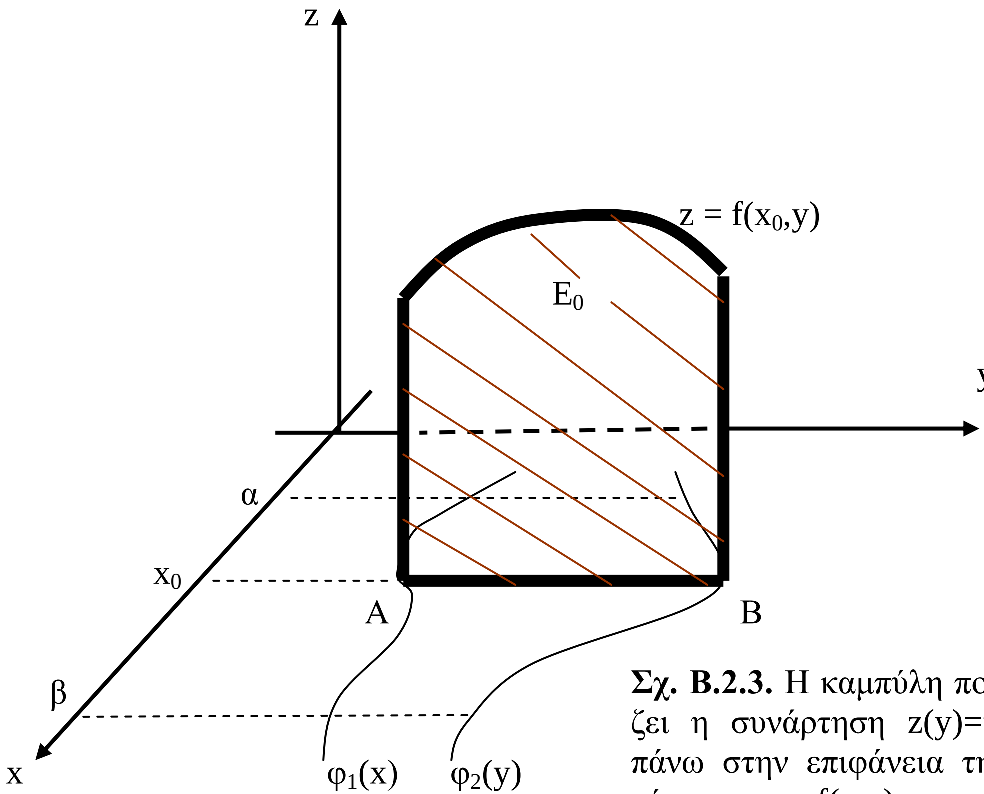
B.2.3. Υπολογισμός του διπλού ολοκληρώματος.

Υποθέτουμε πως ο τόπος Τ (του επιπέδου Oxy), πάνω στον οποίο ορίζεται η συνάρτηση f(x,y), οριοθετείται από τις συναρτήσεις $y=\varphi_1(x)$ και $y=\varphi_2(x)$ και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$. Έστω λοιπόν ένα τυχαίο σημείο x_0 του διαστήματος $[\alpha,\beta]$. Η ευθεία $x=x_0$ ορίζει ένα ευθύγραμμο τμήμα (το ΑΒ) ανάμεσα στις δύο καμπύλες των συναρτήσεων, με συντεταγμένες y:

$\varphi_1(x_0)$ και $\varphi_2(x_0)$



Σχ.Β.2.2. Ορισμός του τόπου Τ και του ευθ. τμήματος ΑΒ.



Σχ. Β.2.3. Η καμπύλη που ορίζει η συνάρτηση $z(y)=f(x_0,y)$ πάνω στην επιφάνεια της συνάρτησης $z=f(x,y)$

Τα σημεία του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ (που ανήκουν στον τόπο Τ) όταν εισέρχονται σαν δεδομένα στη συνάρτηση $z=f(x,y)$, δημιουργούν πάνω στην επιφάνεια της συνάρτησης μία καμπύλη, που αντιστοιχεί στη συνάρτηση: $z(y)=f(x_0,y)$, η οποία είναι συνάρτηση μιας μεταβλητής (της y). Άρα το εμβαδό που ορίζεται από το τμήμα ΑΒ και την εν λόγω καμπύλη, δίνεται από τη σχέση:

$$E_0 = \int_{A}^{B} f(x_0, y)dy = \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x_0, y)dy$$

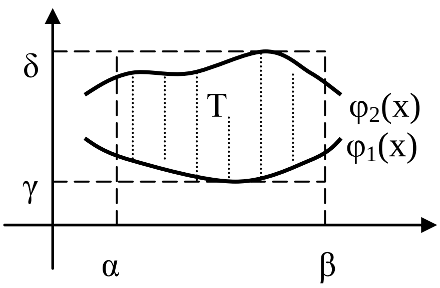
Πολλαπλασιάζοντας στη συνέχεια το εμβαδόν E_0 με την ποσότητα dx παίρνουμε τον όγκο μιας φέτας που έχει βάση το E_0 και πλάτος το dx. Διαιρώντας επομένως το διάστημα [α,β] του άξονα των x σε ν-υποδιαστήματα και προσθέτοντας τα αντίστοιχα στοιχειώδη εμβαδά έχουμε πως ο ολικός όγκος $V_{ολ}$, τον οποίο συνδέσαμε με το διπλό ολοκλήρωμα, θα είναι ίσος με:

$$V_{ολ} = \sum_{i=1}^{ν} E_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{ν} \left[\int_{\phi_1(x_i)}^{\phi_2(x_i)} f(x_i, y)dy \right] \Delta x_i = \int_{α}^{β} \left[\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y)dy \right] dx$$

Εάν λοιπόν ο τόπος T ολοκλήρωσης ορίζεται με τον τρόπο που περιγράφεται στο Σχ.Β.2.2., ο τρόπος επίλυσης των διπλών ολοκληρωμάτων συμπυκνώνεται στον παρακάτω τύπο:

$$\boxed{I = \iint_{T} f(x, y)dxdy = \int_{α}^{β} \left[\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y)dy \right] dx} \qquad (B.2.3.)$$

Παρατηρήσεις πάνω στον τύπο Β.2.3..



Σχ. Β.2.4.

1. Τελικά, τα όρια είναι αυτά που γνωστοποιούν τον τόπο T στο ολοκλήρωμα. Άρα θα πρέπει να παρέχουν όλα τα απαραίτητα δεδομένα γι' αυτό. Συχνά βάζουμε σαν όρια τα: α, β στο εξωτερικό ολοκλήρωμα, και τα: γ, δ στο εσωτερικό, τα ακραία δηλαδή όρια μέσα στα οποία εκτείνεται ο T. Έτσι όμως αντί για τον τόπο T του διπλανού σχήματος, καθορίζουμε σαν τόπο, το παραλληλόγραμμο που ορίζεται από τις ευθείες x = α, x =β, y = γ και y = δ.
2. Το εσωτερικό ολοκλήρωμα αναγνωρίζει μόνο το y σαν μεταβλητή (και αντιμετωπίζει το x σαν μία σταθερά). Ολοκληρώνοντας ως προς y, και θέτοντας τα δύο όρια που είναι συναρτήσεις του x, φθάνουμε σε μία συνάρτηση που περιέχει μόνον x. Όμως το x αναγνωρίζεται σαν μεταβλητή από το εξωτερικό

ολοκλήρωμα. Ολοκληρώνοντας για δεύτερη φορά ως προς x και θέτοντας τα όρια α και β, υπολογίζουμε την τιμή του διπλού ολοκληρώματος.

3. Τα όρια του εσωτερικού ολοκληρώματος είναι εν γένει συναρτήσεις του x (θα εξηγήσουμε αργότερα πότε τα όρια αυτά θα είναι σταθερές), ενώ τα όρια του εξωτερικού ολοκληρώματος είναι εν γένει σταθερές.
4. Για να είναι το διπλό ολοκλήρωμα μιας μη μηδενικής συνάρτησης f(x,y), σε έναν τόπο T, ίσο με το μηδέν, θα πρέπει η f να «γράφει» ίσους «θετικούς» και «αρνητικούς» όγκους πάνω στον τόπο T.

B.2.4. Παραδείγματα:

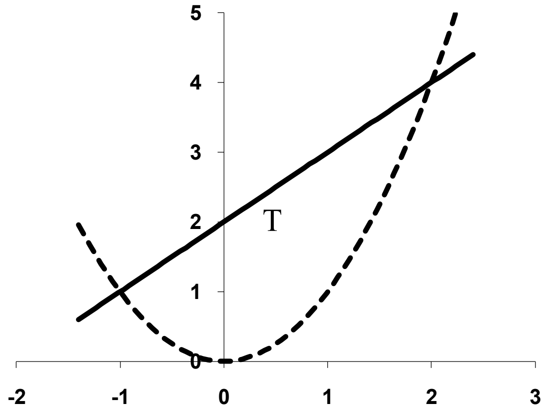
1ο) Να υπολογισθεί το διπλό ολοκλήρωμα:

$$I = \iint_T (x + y)dxdy \ ,$$

όπου ο τόπος T ορίζεται από τις συναρτήσεις:

$y=x^2$ και $y=x+2$

όπως φαίνεται στο διπλανό γράφημα.



Λύση: Τα όρια του εσωτερικού ολοκληρώματος θα είναι οι δύο συναρτήσεις που ορίζουν τον τόπο T, από τα άνω (από τα μεγαλύτερα y) η $y=x+2$, και από τα κάτω (από τα μικρότερα y) η $y=x^2$. Τα όρια του εξωτερικού ολοκληρώματος είναι τα δύο άκρα του διαστήματος [α,β] του άξονα των x, πάνω στο οποίο εκτείνεται ο T. Τα όρια αυτά είναι οι τετμημένες[1] των σημείων τομής της παραβολής και της ευθείας, και αποτελούν τις λύσεις του συστήματος:

$$\begin{matrix} y = x^2 \\ y = x+2 \end{matrix} \quad \Longrightarrow \quad x^2 = x+2 \quad \Rightarrow \quad x^2 - x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = -$$

και όπου προφανώς οι τεταγμένες[1] των δύο αυτών σημείων βρίσκονται θέτοντας στη μία από τις εξισώσεις τις δύο τιμές x_1 και x_2 (δεν χρειάζονται στην άσκηση).

---

[1] *Η τετμημένη ενός σημείου είναι η συντεταγμένη του ως προς x, ενώ τεταγμένη του είναι η συντεταγμένη του ως προς y.*

Έχουμε λοιπόν:

$$I=\int_{-1}^{2}\left[\int_{x^2}^{x+2}(x+y)dy\right]dx=\int_{-1}^{2}\left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_{y=x^2}^{y=x+2}dx=$$

$$=\int_{-1}^{2}\left[x(x+2-x^2)+\frac{1}{2}\left[(x+2)^2-x^4\right]\right]dx=$$

$$=\int_{-1}^{2}\left[x^2+2x-x^3+\frac{1}{2}\left[x^2+2x+4-x^4\right]\right]dx\ =$$

$$=\int_{-1}^{2}\left[-\frac{1}{2}x^4-x^3+\frac{3}{2}x^2+3x+2\right]dx=\left[-\frac{x^5}{10}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{2}+\frac{3x^2}{2}+2x\right]_{-1}^{2}=$$

$= 7{,}95$

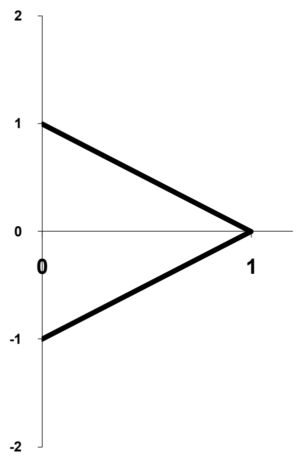
2ο) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα:

$$I=\iint_T ydxdy$$

όπου ο τόπος T είναι το τρίγωνο που ορίζεται από τον άξονα των y και τις ευθείες:

$$y = x–1 \ \ \text{και} \ \ y = –x+1$$

Μπορεί να αιτιολογηθεί το τελικό αποτέλεσμα;



Λύση: Ο τόπος T «καλύπτεται» από το άνω μέρος από την συνάρτηση y = –x+1 και από το κάτω μέρος από την y = x–1. Έχουμε λοιπόν:

$$I=\iint_T ydxdy=\int_0^1\left[\int_{x-1}^{-x+1}ydy\right]dx=\int_0^1\frac{1}{2}\left[y^2\right]_{x-1}^{-x+1}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left[(1-x)^2-(x-1)^2\right]dx=\frac{1}{2}\int_0^1(x^2-2x+1-x^2+2x-1)dx=$$

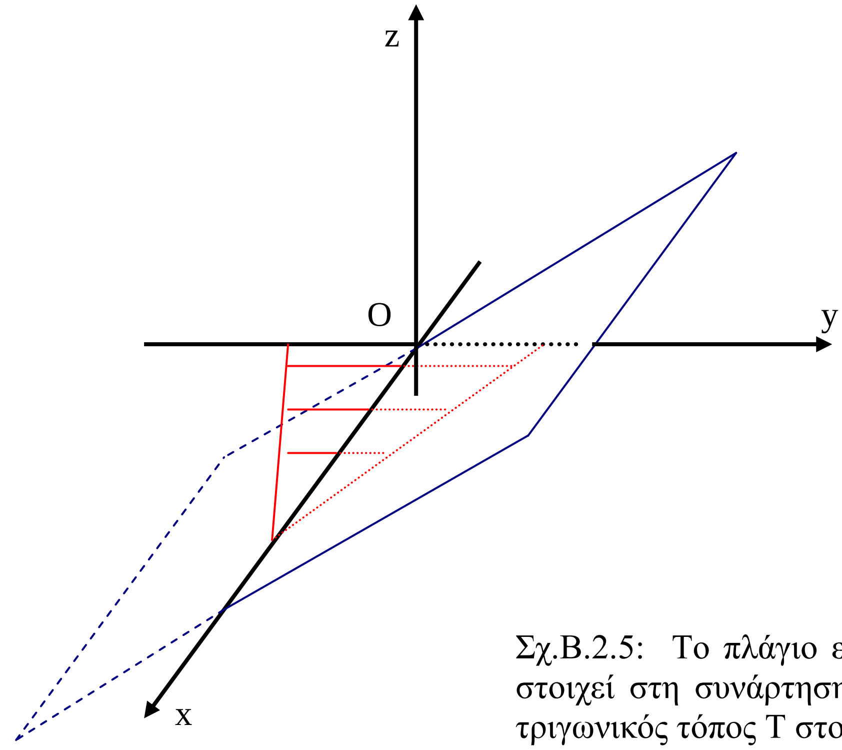
$$=\frac{1}{2}\int_0^1 0dx=0$$

Ερμηνεία του αποτελέσματος: Η συνάρτηση που ολοκληρώνεται είναι η

$$z = f(x,y) = y$$

Δηλαδή η τιμή του z δεν εξαρτάται από το x του τυχαίου σημείου (x,y) το οποίο εισέρχεται η f. Εύκολα μπορεί να αντιληφθεί κανείς πως η επιφάνεια την οποία ορίζει είναι ένα επίπεδο το οποίο διέρχεται από τον άξονα των x (κάθε σημείο του άξονα των x έχει y=0). Ταυτόχρονα στο επίπεδο αυτό ανήκει και η ευθεία z=y (η διχοτόμος της yOz). Επομένως πρόκειται για το επίπεδο που διχοτομεί την δίεδρη γωνία που δημιουργούν τα επίπεδα Oxy και Oxz, όπως φαίνεται στο σχήμα B.2.5.

Στο σχήμα αυτό εμφανίζεται και ο τριγωνικός τόπος ολοκλήρωσης, ο οποίος έχει το ήμισυ της επιφάνειάς του στο πρώτο τεταρτημόριο του επιπέδου Oxy και το δεύτερο ήμισυ στο τέταρτο. Γίνεται φανερό πως ο όγκος που ορίζεται στο τρίγωνο του 1^ου^ τεταρτημορίου μετριέται από το ολοκλήρωμα σαν θετικός, ενώ ο αντίστοιχος του 4^ου^ τεταρτημορίου μετριέται σαν αρνητικός. Το συνολικό αποτέλεσμα είναι φυσικά μηδέν[1].



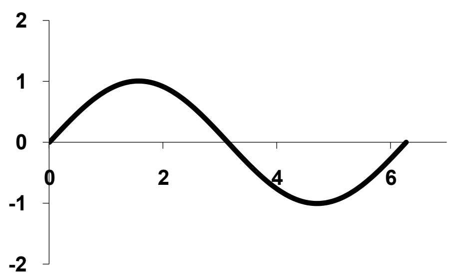
Σχ.Β.2.5: Το πλάγιο επίπεδο που αντιστοιχεί στη συνάρτηση f(x,y)=y και ο τριγωνικός τόπος T στο επίπεδο Oxy.

---

(1) Αντίστοιχο παράδειγμα από τα απλά ορισμένα ολοκληρώματα είναι το:

$$I = \int_0^{2\pi} \eta\mu x\, dx$$

το οποίο είναι ίσο με το μηδέν μια και το εμβαδό που υπολογίζεται από το ολοκλήρωμα από το 0 έως το π είναι ίσο με 2 και από το π έως το 2π, –2.

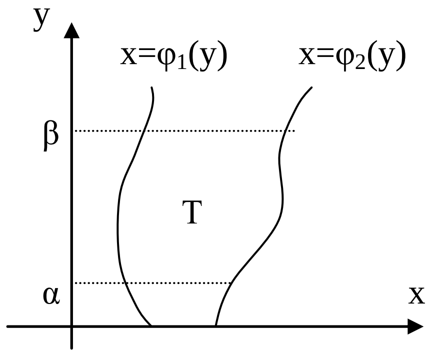


Β.2.5. Άλλα είδη τόπων.

Συχνά ο τόπος ολοκλήρωσης Τ ορίζεται (φυσικά στο επίπεδο Oxy) με τη βοήθεια συναρτήσεων όπου το y είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή και το x η εξαρτημένη. Η μορφή τους (όπως φαίνεται στο διπλανό γράφημα):

$$y = \varphi_1(x) \quad \text{και} \quad y = \varphi_2(x)$$

Στην περίπτωση αυτή ο τρόπος δουλειάς είναι ανάλογος με προηγούμενα:



Σχ. Β.2.6.

- Ολοκληρώνουμε πρώτα ως προς x (το εσωτερικό ολοκλήρωμα περιέχει το dx).
- Τα όρια του εσωτερικού ολοκληρώματος είναι συναρτήσεις με μεταβλητή το y.
- Στο άνω όριο εμφανίζεται η συνάρτηση που «καλύπτει» τον τόπο από πάνω (δηλαδή από τα μεγάλα x), στο γράφημά η $x=\varphi_2(y)$.
- Στο κάτω όριο εμφανίζεται η συνάρτηση που «καλύπτει» τον τόπο από κάτω (δηλαδή από τα μικρά x), στο γράφημά η $x=\varphi_1(y)$
- Το εξωτερικό ολοκλήρωμα ολοκληρώνει ως προς y και τα όριά του είναι οι σταθερές α και β.

Τα παραπάνω γίνονται φανερά στον επόμενο τύπο, όπου ολοκληρώνεται η συνάρτηση $z = f(x,y)$, στον τόπο Τ του Σχ.Β.2.6.

$$\boxed{I = \iint_{T} f(x,y)dxdy = \int_{\alpha}^{\beta} \left[\int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x,y)dx \right] dy}$$

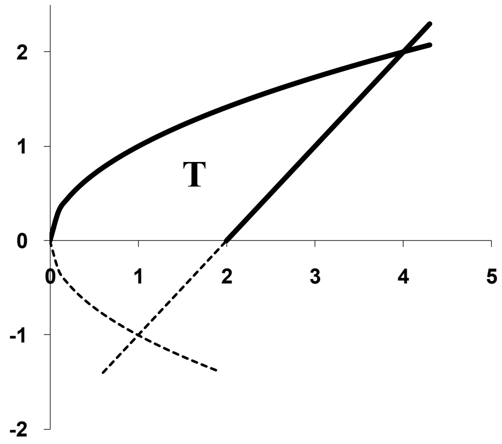
Τέλος, όταν ο τόπος είναι ιδιαίτερα περίπλοκος μπορούμε να τον διαιρέσουμε σε περισσότερους υποτόπους, που να ανήκουν σε μία από τις δύο προαναφερθείσες κατηγορίες (οι οποίοι προφανώς θα είναι ξένοι ανά δύο και η ένωσή τους θα δίνει τον Τα). Τότε ισχύει η γνωστή ιδιότητα:

$$I = \iint_{T} f(x,y)dxdy = \iint_{T_1} f(x,y)dxdy + \ldots + \iint_{T_\nu} f(x,y)dxdy$$

B.2.6. Παραδείγματα.

1ο) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα:

$$I = \iint_T 6xy\,dxdy$$



όπου ο τόπος T ορίζεται από τον άξονα των x και τις συναρτήσεις:

$$y = \sqrt{x} \quad \text{και} \quad y = x - 2$$

Λύση: Αρχικά να υπολογίσουμε το σημείο τομής της καμπύλης και της ευθείας. Όπως ειπώθηκε σε προηγούμενο παράδειγμα, στο σημείο τομής συναληθεύουν οι δύο εξισώσεις, δηλαδή έχουμε το επόμενο σύστημα 2 εξισώσεων:

$$\begin{matrix} y = \sqrt{x} \\ y = x - 2 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x} = x - 2 \Rightarrow x = (x-2)^2 = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow$$

Δηλαδή x^2-5x+4 = 0 οπότε $x_{1,2}$ = 1 και 4
που αντιστοιχούν στα $y_{1,2}$ = -1 και 2

Παρατηρούμε πως υψώνοντας στο τετράγωνο μετατρέπουμε τη συνάρτηση $y = \sqrt{x}$ (για $x \geq 0$), στην παραβολή $x = y^2$, που είναι παραβολή εάν θεωρήσουμε πως σαν μεταβλητή το x και συνάρτηση το y. Με τον τρόπο αυτό όμως εισάγουμε ακόμη ένα σημείο τομής (το (1,-1)).

Εφόσον πρόκειται να ολοκληρώσουμε πρώτα ως προς x, θα βρούμε τα όρια ολοκλήρωσης λύνοντας τις εξισώσεις των καμπύλων που δίνονται, ως προς x:

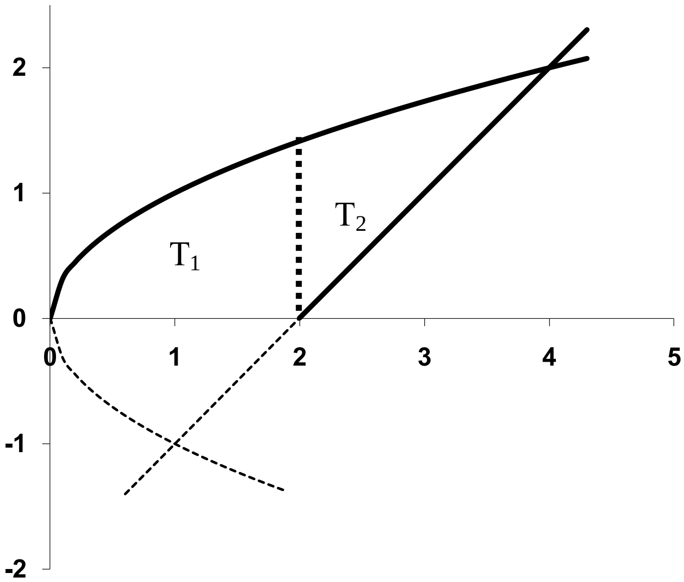
$$\begin{matrix} y = \sqrt{x} & \Rightarrow & x = y^2 \\ y = x - 2 & \Rightarrow & x = y + 2 \end{matrix}$$

$$\cdot\, I = \iint_T 6xy\,dxdy = \int_0^2 \left[6y \int_{y^2}^{y+2} x\,dx \right] dy = 3\int_0^2 y\left[x^2\right]_{y^2}^{y+2} dy =$$

$$= 3\int_0^2 y\left[(y+2)^2 - y^4\right]dy = 3\int_0^2 (y^3 + 4y^2 + 4y - y^5)dy =$$

$$= \left[\frac{3}{4}y^4 + 4y^3 + 6y^2 - \frac{1}{2}y^6\right]_0^2 = 36$$

Εάν επιμέναμε να ολοκληρώσουμε πρώτα ως προς y και στη συνέχεια ως προς x, τότε θα έπρεπε να χωρίσουμε τον τόπο T σε δύο υποτόπους (όπως φαίνεται στο επόμενο γράφημα).



Τότε το ολοκλήρωμα θα λυνόταν:

$$I = \iint\limits_{T} 6xydxdy = \iint\limits_{T_1} 6xydxdy + \iint\limits_{T_2} 6xydxdy =$$

$$= \int_0^2 \left[\int_0^{\sqrt{x}} 6xydy \right] dx + \int_2^4 \left[\int_{x-2}^{\sqrt{x}} 6xydy \right] dx = \ldots = 36$$

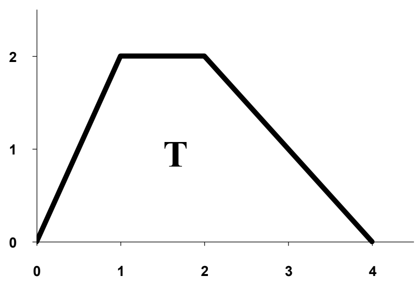
Ο τρόπος αυτός απαιτεί σαφώς περισσότερες πράξεις. Εδώ αναφέρεται σαν μια άσκηση πάνω στον καθορισμό των ορίων των διπλών ολοκληρωμάτων.

2^o) Δίνεται το ολοκλήρωμα:

$$I = \iint\limits_{T} 4dxdy$$

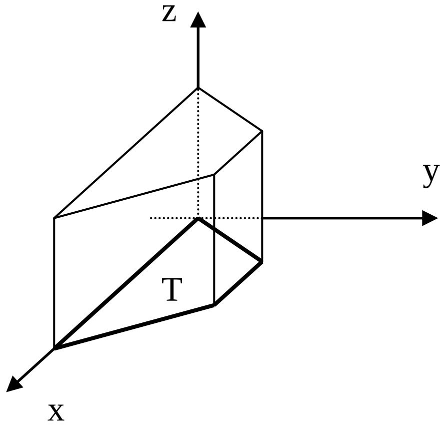
με τόπο T το τραπέζιο του διπλανού γραφήματος. Να υπολογισθεί:

- Γεωμετρικά.
- Αλγεβρικά



(i) Γεωμετρική λύση: Η συνάρτηση που ολοκληρώνεται είναι η σταθερή συνάρτηση:

$$\mathbf{z = f(x,y) = 4}$$



Πρόκειται για την εξίσωση ενός επιπέδου παράλληλου προς το Oxy, σε απόσταση 4 μονάδων (τέμνει κάθετα τον άξονα των z στο 4). Άρα η τιμή του ολοκληρώματος I (που ισούται με τον όγκο που ορίζεται από τον τόπο T και την επιφάνεια της f(x,y)), θα είναι ίση με τον όγκο του διπλανού ορθογώνιου πρίσματος:

I = (Εμβαδό βάσης)x(Ύψος)

$$I = \frac{(B+\beta)*\upsilon(\tau\rho\alpha\pi\varepsilon\zeta\acute{\iota}o\upsilon)}{2} * \upsilon(\pi\rho\acute{\iota}\sigma\mu\alpha\tau o\varsigma) = \frac{(4+1)*2}{2} * 4 = 20$$

(ii) Αλγεβρική λύση: Ολοκληρώνοντας πρώτα ως προς y, είμαστε υποχρεωμένοι να διαιρέσουμε τον τόπο T σε τρία τμήματα, πράγμα ασύμφορο. Αντίθετα, ολοκληρώνοντας πρώτα ως προς x, ο τόπος αντιμετωπίζεται ενιαία, διότι μία και μόνη συνάρτηση καλύπτει τον τόπο από κάτω (στα μικρά x) και ενώ και προς τα πάνω (μεγάλα x) υπάρχει μία συνάρτηση που τον καλύπτει.. Εύκολα υπολογίζονται οι εξισώσεις των δύο ευθειών:

$$y = 2x \quad \text{και} \quad y = -x+4$$

οι οποίες πρέπει να λυθούν ως προς x, εφ’ όσον θα ολοκληρώσουμε πρώτα ως προς x:

$$x = \frac{y}{2} \quad \text{και} \quad x = -y + 4$$

Έχουμε λοιπόν:

$$I = \iint_T 4dxdy = \int_0^2 \left[\int_{y/2}^{-y+4} 4dx \right] dy = 4\int_0^2 [x]_{y/2}^{-y+4} dy = 2\int_0^2 (8 - 2y - y)dy =$$

$$= \left[-3y^2 + 16y\right]_0^2 = 20$$

Β.2.7. Συστήματα συντεταγμένων στο επίπεδο.

Ένα σύστημα συντεταγμένων επιτρέπει τον καθορισμό της θέσης των σημείων ενός χώρου. Το πλήθος των παραμέτρων που απαιτούνται για τον καθορισμό αυτό, είναι απόλυτα συγκεκριμένος για κάθε χώρο, και αποτελεί τη διάσταση του χώρου.

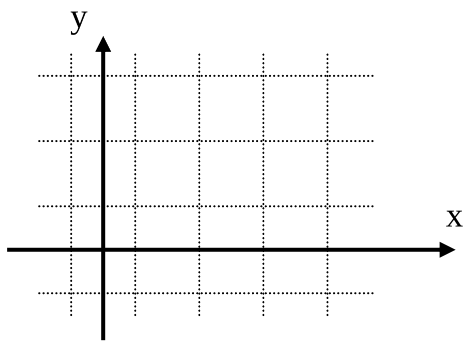
Είναι γνωστό πως μία καμπύλη είναι μονοδιάστατη. Ειδικότερα μία ευθεία διαθέτει σύστημα συντεταγμένων όταν ορισθεί επάνω της το σημείο 0, το μοναδιαίο μήκος και η θετική φορά.

Εξ ίσου γνωστό είναι πως οποιαδήποτε επιφάνεια έχει δύο διαστάσεις, και πως είναι αναγκαίες δύο συντεταγμένες για τον καθορισμό της θέσης ενός σημείου της επιφανείας. Ένα κλασσικό παράδειγμα είναι οι συντεταγμένες που επιτρέπουν τον καθορισμό της θέσης πάνω στην επιφάνεια της Γης: το Γεωγραφικό μήκος και πλάτος.

Στη συνέχεια θα αναφερθούν δύο συστήματα συντεταγμένων ενός επιπέδου: Το πολύ γνωστό Καρτεσιανό σύστημα και το σύστημα των Πολικών συντεταγμένων.

(i) Το Καρτεσιανό σύστημα:

Η βάση του Καρτεσιανού συστήματος είναι οι δύο γνωστοί (προσανατολισμένοι) άξονες των x και των y.



Ουσιαστικά το σύστημα αυτό καλύπτει το επίπεδο με έναν κάναβο ευθειών παράλληλων με τους δύο άξονες. Από κάθε σημείο του επιπέδου διέρχονται ακριβώς δύο τέτοιες ευθείες, οι οποίες υποδεικνύουν τις δύο συντεταγμένες. Συχνά αποκαλούμε τις ευθείες αυτές <u>**συντεταγμένες γραμμές.**</u> Η εξίσωση των συντεταγμένων γραμμών προκύπτει από την εξίσωση της κάθε συντεταγμένης με μια αυθαίρετη σταθερή (c):

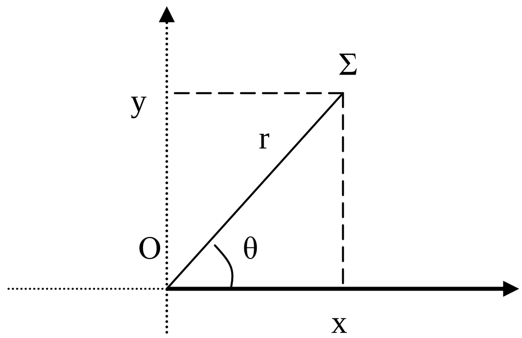
x = c   η εξίσωση των ευθειών που είναι παράλληλες του άξονα των y.
y = c   η εξίσωση των ευθειών που είναι παράλληλες του άξονα των x.

Η εξίσωση x=c δίνει μία ευθεία παράλληλη με τον άξονα των y που τέμνει τον άξονα των x στο σημείο c. Πράγματι η ευθεία αυτή είναι ο Γεωμετρικός τόπος των σημείων τα οποία, ανεξαρτήτως της τιμής της συντεταγμένης y, έχουν την x ίση με το c.

Όμοια, η εξίσωση y=c αντιστοιχεί σε ευθεία παράλληλη με τον άξονα των x. Σ' αυτήν ανήκουν τα σημεία που έχουν οποιοδήποτε x, αλλά το y τους είναι ίσο με το c. Έτσι λοιπόν ο κάναβος αυτός αποτελείται από δύο δέσμες (οικογένειες) παραλλήλων ευθειών οι οποίες μεταξύ τους τέμνονται κάθετα.

(ii) Πολικές συντεταγμένες.

Στις πολικές συντεταγμένες υπάρχει ένας ημιάξονας Ox, στον οποίο ορίζεται η μονάδα μήκους. Η θέση του κάθε σημείου Σ του επιπέδου ορίζεται από την απόστασή του (r) από την αρχή O και από τη γωνία (θ), που δημιουργείται από τον ημιάξονα Ox και την επιβατική ακτίνα ΟΣ.



Ένα σημαντικό πρόβλημα που ανακύπτει είναι να υπολογίσουμε τις Καρτεσιανές συντεταγμένες ενός σημείου Σ, όταν γνωρίζουμε τις πολικές, και αντίστροφα, τις πολικές συντεταγμένες του Σ, όταν γνωρίζουμε τις Καρτεσιανές.

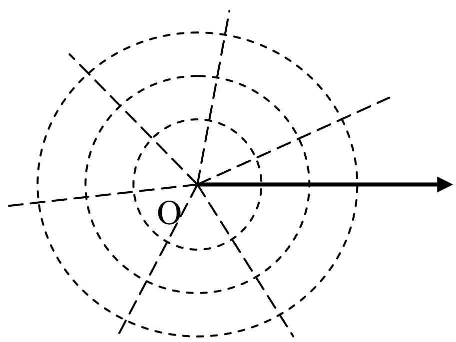
Θεωρούμε γνωστές τις πολικές συντεταγμένες (r,θ), ενός σημείου Σ. Οι αντίστοιχες Καρτεσιανές δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις (με δεδομένο πως το σημείο τομής (O) των αξόνων ταυτίζεται με το O του ημιάξονα των πολικών, ενώ ο ημιάξονας των πολικών ταυτίζεται με το θετικό τμήμα του άξονα των x)

$$x = r\sigma\upsilon\nu\theta \quad \text{και} \quad y = r\eta\mu\theta$$

Αντίστροφα, οι σχέσεις που δίνουν τις πολικές όταν γνωρίζουμε τις Καρτεσιανές είναι οι:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \text{και} \qquad \begin{array}{ll} \theta = \text{τοξεφ}(y/x) & \text{εάν } x>0 \\ \theta = \text{τοξεφ}(y/x) + \pi & \text{εάν } x<0 \\ \theta = \pi/2 & \text{εάν } x=0 \text{ και } y>0 \\ \theta = -\pi/2 & \text{εάν } x=0 \text{ και } y<0 \end{array}$$

Η απόσταση r ενός σημείου Σ είναι πάντα θετική, ενώ η γωνία θ παίρνει τιμές από 0 έως 2π. Οι συντεταγμένες γραμμές του συστήματος αυτού προκύπτουν με τον ίδιο τρόπο που προέκυψαν και στο Καρτεσιανό. Δηλαδή εξισώνοντας με μία σταθερή την κάθε συντεταγμένη (και θεωρώντας πως η άλλη μεταβάλλεται):



$$\mathbf{r = c}$$

που δημιουργεί ομόκεντρους κύκλους με κέντρο το O και ακτίνα το c (διότι η απόσταση παραμένει σταθερή ενώ η γωνία θ μεταβάλλεται). Αντίστοιχα η εξίσωση

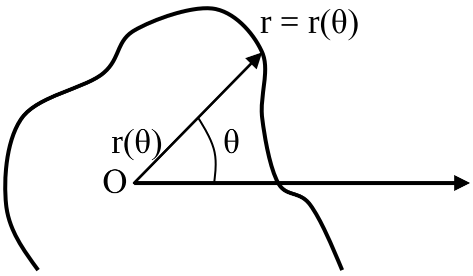
$$\boldsymbol{\theta = c}$$

αντιστοιχεί σε δέσμη ημιευθειών με κέντρο το O.

Η συνηθισμένη μορφή των συναρτήσεων στις πολικές συντεταγμένες είναι η:

$$r = r(\theta)$$

και οι γραφικές τους παραστάσεις μοιάζουν στη διπλανή.

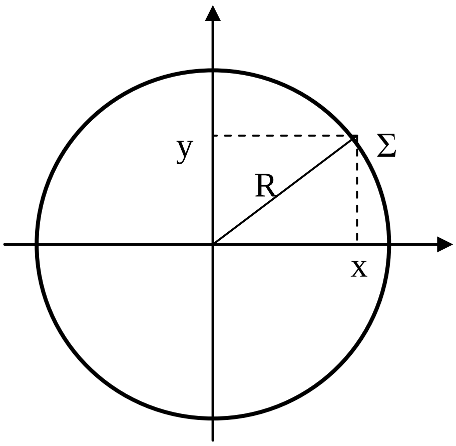


Παραδείγματα συναρτήσεων:

1ο) Η εξίσωση του κύκλου. Ως γνωστόν στο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, η εξίσωση του κύκλου ακτίνας R είναι η:

$$\mathbf{x^2 + y^2 = R^2}$$

εκφράζοντας τη σχέση που συνδέει τις συντεταγμένες x και y και προκύπτει από το Πυθαγόρειο Θεώρημα. Χρησιμοποιώντας τους γνωστούς τύπους μετατροπής:



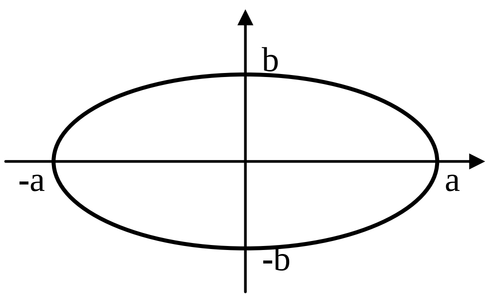
$$\mathbf{x = r\sigma\upsilon\nu\theta \quad \text{και} \quad y = r\eta\mu\theta}$$

υπολογίζουμε την ακόμη γνωστότερη σχέση r = R.

$$\mathbf{x^2 + y^2 = R^2 \Rightarrow r^2\sigma\upsilon\nu^2\theta + r^2\eta\mu^2\theta = R^2 \Rightarrow r^2(\sigma\upsilon\nu^2\theta + \eta\mu^2\theta) = R^2 \Rightarrow r = R}$$

2ο) **Η εξίσωση της έλλειψης.** Η εξίσωση της έλλειψης με οριζόντιο ημιάξονα τον a και κατακόρυφο τον b, στο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, δίνεται από την εξίσωση:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



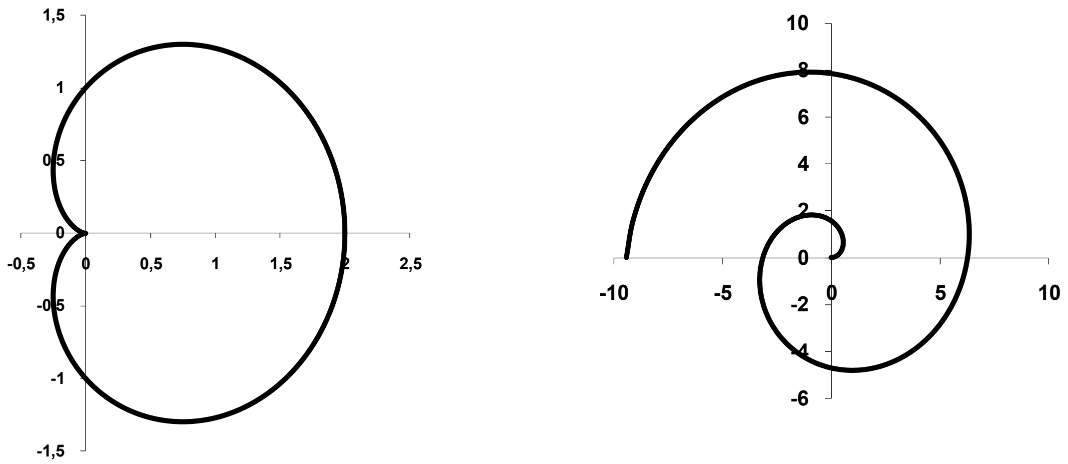
Όπως και προηγουμένως βρίσκουμε:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{r^2\sigma\upsilon\nu^2\theta}{a^2} + \frac{r^2\eta\mu^2\theta}{b^2} = 1 \Rightarrow r^2\left[\frac{b^2\sigma\upsilon\nu^2\theta + a^2\eta\mu^2\theta}{a^2b^2}\right] = 1 \Rightarrow$$

$$r = \frac{ab}{\sqrt{b^2\sigma\upsilon\nu^2\theta + a^2\eta\mu^2\theta}}$$

3ο) Συχνά όμως χρησιμοποιούνται οι πολικές συντεταγμένες για να ορισθούν οι εξισώσεις ιδιαίτερων καμπύλων όπως είναι:

- το καρδιοειδές με εξίσωση: $r(\theta) = \alpha(1+\sigma\upsilon\nu\theta)$
- η σπείρα του Αρχιμήδη με εξίσωση: $r(\theta) = \alpha\theta$



Σχ. Β.2.7. Το καρδιοειδές και η σπείρα του Αρχιμήδη για α=1.

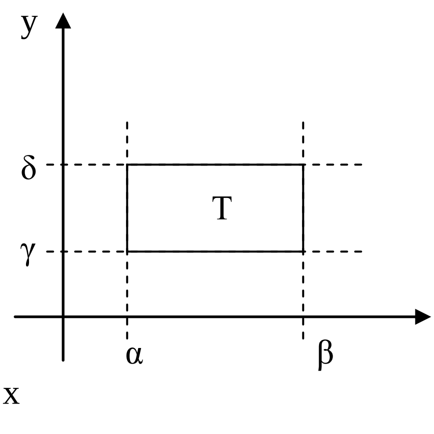
Β.2.8. Το διπλό ολοκλήρωμα σε τόπο που ορίζεται από συντεταγμένες γραμμές.

Έστω πως ο τόπος ολοκλήρωσης είναι το παραλληλόγραμμο του διπλανού σχήματος, αποτελούμενο από τις ευθείες:

$$x = \alpha\ ,\ x = \beta\ ,\ y = \gamma\ ,\ y = \delta$$

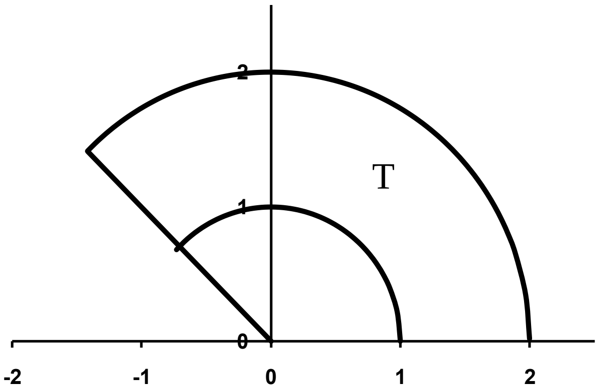
$$I = \iint_T f(x,y)dxdy =$$

$$= \int_\alpha^\beta \left[\int_\gamma^\delta f(x,y)dy \right] dx$$



Παρατηρούμε πως όταν ο τόπος ολοκλήρωσης ορίζεται με συντεταγμένες γραμμές, τότε και τα όρια του εσωτερικού ολοκληρώματος είναι σταθεροί αριθμοί, πράγμα που συνήθως απλοποιεί ιδιαίτερα τον υπολογισμό του. Για το λόγο αυτό συχνά φροντίζουμε να κάνουμε αλλαγή μεταβλητών (ουσιαστικά αλλαγή συστήματος συντεταγμένων), έτσι ώστε στο νέο σύστημα ο δοσμένος τόπος να ορίζεται από συντεταγμένες γραμμές.

Στις πολικές συντεταγμένες για παράδειγμα διευκολύνεται πολύ η λύση του ολοκληρώματος (όπως θα δούμε στην επόμενη παράγραφο), όταν ο τόπος ολοκλήρωσης ορίζεται από ομόκεντρους κύκλους με κέντρο το Ο και ημιευθείες που ξεκινούν από το Ο. Ένας τέτοιος τόπος είναι αυτός του διπλανού σχήματος που ορίζεται από τους κύκλους



$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{και} \quad x^2 + y^2 = 2^2$$

και τις ευθείες

$$y = 0 \quad \text{και} \quad y = -x$$

Μεταφέροντας τις εξισώσεις αυτές σε πολικές συντεταγμένες[1], έχουμε:

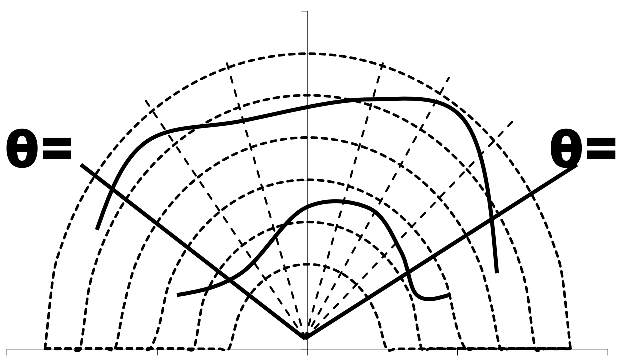
τους κύκλους $r = 1$ και $r = 2$
και τις ημιευθείες $\theta = 0$ και $\theta = 3\pi/4$

Β.2.9. Το διπλό ολοκλήρωμα στις πολικές συντεταγμένες.

Οι πολικές συντεταγμένες χρησιμοποιούνται για να απλοποιήσουν τη λύση κάποιων διπλών ολοκληρωμάτων. Τέτοια ολοκληρώματα είναι συχνά αυτά που ολοκληρώνουν συναρτήσεις της μορφής: $f(x,y) = g(x^2+y^2)$.

Ο τόπος ολοκλήρωσης ορίζεται από τις συναρτήσεις:

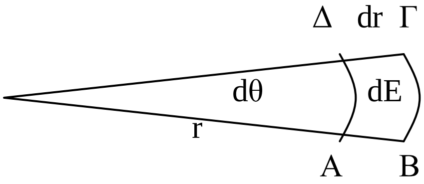
- $r = r_1(\theta)$ στα μικρά r
- $r = r_1(\theta)$ στα μεγάλα r
- από τη γωνία θ_1 έως τη γωνία θ_2, **εκφρασμένες σε ακτίνια**.



Σχ. Β.2.8. Ο τόπος ολοκλήρωσης, και η ανάλυσή του σε στοιχειώδεις υποτόπους.

Ο τόπος ολοκλήρωσης Τ τεμαχίζεται σε στοιχειώδεις τόπους με τη βοήθεια συντεταγμένων γραμμών των πολικών συντεταγμένων (σε στοιχειώδη τμήματα κυκλικών δακτυλίων). Θα πρέπει στη συνέχεια να υπολογίσουμε το εμβαδόν του κάθε στοιχειώδη τόπου, έτσι ώστε να αντικατασταθεί η έκφραση του στοιχειώδους εμβαδού (dE=dxd) των Καρτεσιανών συντεταγμένων.

Θεωρώντας πως η γωνία dθ είναι πολύ μικρή κι εκφράζεται σε ακτίνια (rad), μπορούμε να θεωρήσουμε πως το στοιχειώδες εμβαδόν είναι ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (το ΑΒΓΔ) του οποίου το εμβαδόν ισούται με:



$$dE = (AB)(A\Delta)$$

όπου όμως

$$(AB) = dr \quad \text{και} \quad (A\Delta) = rd\theta \ ^{(1)}$$

άρα έχουμε:

$$\boxed{\mathbf{dxdy = dE = rdrd\theta}}$$

Στη συνέχεια εκφράζεται η συνάρτηση που ολοκληρώνεται, σαν συνάρτηση των μεταβλητών r και θ, σύμφωνα με τους τύπους μετατροπής:

$$\text{Από } \ z = f(x,y) \ \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} x = r\sigma\upsilon\nu\theta \\ y = r\eta\mu\theta \end{array}} \longrightarrow \ \text{σε } \ z = g(r,\theta)$$

Διατηρώντας την ίδια λογική λύσης μ’ αυτήν που ακολουθήσαμε στις Καρτεσιανές συντεταγμένες υπολογίζουμε:

$$\iint_T f(x,y)dxdy = \iint_T g(r,\theta)rdrd\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\left[\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} g(r,\theta)rdr\right]d\theta$$

όπου οι συναρτήσεις $r_1(\theta)$, $r_2(\theta)$ και οι γωνίες θ_1 και θ_2 είναι αυτές που καθορίζουν τον τόπο ολοκλήρωσης (Τ), όπως φαίνεται στο σχ. Β.2.8.

---

[1] *Το ότι (ΑΔ) = rdθ μπορεί να δειχθεί με δύο τρόπους:*

(α) Από τον ορισμό του ακτινίου (1 ακτίνιο είναι η επίκεντρη γωνία που «βλέπει» σε τόξο μήκους μιας ακτίνας), οπότε το μήκος ενός τόξου s(θ) που αντιστοιχεί σε μία επίκεντρη γωνία θ (rad) ισούται με: ***s(θ) = rθ***, *όπου r είναι η ακτίνα του κύκλου.*

(β) Από την απλή μέθοδο των τριών:

Σε γωνία ***2π*** *(rad) αντιστοιχεί μήκος περιφέρειας* ***s(2π) = 2πr***

Σε γωνία ***θ*** *(rad) αντιστοιχεί μήκος περιφέρειας* ***s(θ) = ;***

s(θ) = 2πrθ/2π = rθ

Παρατηρήσεις: Οι παρακάτω παρατηρήσεις για τον τύπο της ολοκλήρωσης σε πολικές συντεταγμένες αποτελούν επανάληψη των παρατηρήσεων που αφορούσαν στον τύπο της ολοκλήρωσης σε Καρτεσιανές συντεταγμένες, της παραγράφου Β.2.3.

1. Το εσωτερικό ολοκλήρωμα αναγνωρίζει μόνο το r σαν μεταβλητή (και αντιμετωπίζει το θ σαν μία σταθερά). Ολοκληρώνοντας ως προς r, και θέτοντας τα δύο όρια που είναι συναρτήσεις του θ, φθάνουμε σε μία συνάρτηση που περιέχει μόνον θ. Όμως το θ αναγνωρίζεται σαν μεταβλητή από το εξωτερικό ολοκλήρωμα. Ολοκληρώνοντας για δεύτερη φορά ως προς θ και θέτοντας τα όρια θ_1 και θ_2 (πάντα σε rad), υπολογίζουμε την τιμή του διπλού ολοκληρώματος.
2. Τα όρια του εσωτερικού ολοκληρώματος είναι εν γένει συναρτήσεις του θ. Όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο (Β.2.8) δεν είναι συναρτήσεις του θ, αλλά σταθερές τιμές όταν ο τόπος ορίζεται με τη βοήθεια συντεταγμένων γραμμών των πολικών συντεταγμένων.

Β.2.10 Παραδείγματα.

1°) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα:

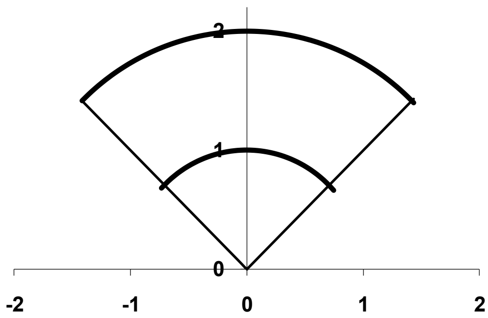
$$I = \iint_T \eta\mu(x^2 + y^2)dxdy$$

όπου ο τόπος ολοκλήρωσης είναι το τμήμα κυκλικού δακτυλίου, που ορίζεται από τους κύκλους:

$$x^2 + y^2 = 1 \text{ και } x^2 + y^2 = 2^2$$

και τις ευθείες:

$$y = -x \text{ και } y = x$$



Λύση: Και η μορφή του τόπου και η συνάρτηση που ολοκληρώνεται οδηγούν στη χρήση των πολικών συντεταγμένων. Έτσι μετατρέπουμε:

- Τη συνάρτηση που ολοκληρώνεται
  από $z = \eta\mu(x,y)$ σε $z = \eta\mu(r^2\sigma\upsilon\nu^2\theta + r^2\eta\mu^2\theta) = \eta\mu(r^2)$ [1]

- Τις εξισώσεις που ορίζουν τον τόπο Τ.

$$\text{από } \boxed{\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 2^2 \\ x=-y \text{ και } x=y \end{array}} \qquad \text{σε } \boxed{\begin{array}{l} r = 1 \\ r = 2 \\ \theta = \pi/4 \text{ και } \theta = 3\pi/4 \end{array}}$$

---

[1] *Όπου χρησιμοποιήθηκε η γνωστή σχέση:* $\sigma\upsilon\nu^2\theta + \eta\mu^2\theta = 1$

- ενώ, τέλος αντικαθιστούμε το dxdy με το rdrdθ.

Έχουμε λοιπόν για το ολοκλήρωμα:

$$I=\iint_T \eta\mu(x^2+y^2)dxdy=\iint_T \eta\mu(r^2)rdrd\theta=\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\left[\int_1^2 \eta\mu(r^2)rdr\right]d\theta=$$

$$=\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\left[\int_1^2 \eta\mu(r^2)d(r^2/2)\right]d\theta=-\frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\left[\sigma\upsilon\nu(r^2)\right]_1^2 d\theta=$$

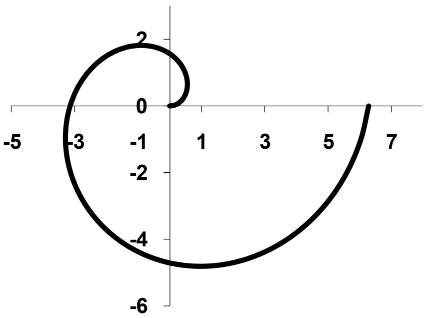
$$=-\frac{1}{2}\left[\sigma\upsilon\nu(4)-\sigma\upsilon\nu(1)\right]\int_{\pi/4}^{3\pi/4}d\theta=-\frac{1}{2}\left[\sigma\upsilon\nu(4)-\sigma\upsilon\nu(1)\right]\left[\theta\right]_{\pi/4}^{3\pi/4}=$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\sigma\upsilon\nu(4)-\sigma\upsilon\nu(1)\right]\left[\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right]=-\frac{\pi}{4}\left[\sigma\upsilon\nu(4)-\sigma\upsilon\nu(1)\right]=0{,}937723$$

Παρατήρηση: Το ολοκλήρωμα αυτό δεν θα μπορούσαμε να το λύσουμε αν δεν το μεταφέραμε σε πολικές συντεταγμένες. Αν θέλετε δοκιμάστε να το επιλύσετε σε Καρτεσιανές …

2ο) Να υπολογισθεί το εμβαδόν της σπείρας του Αρχιμήδη για ένα πλήρη κύκλο (όπως στη διπλανή γραφική παράσταση), όταν γνωρίζουμε πως η εξίσωση της σπείρας σε πολικές συντεταγμένες είναι η:

$$r = r(\theta) = \alpha\theta \quad [\alpha\in R]$$



Λύση: Όπως αναφέρθηκε στη γεωμετρική ερμηνεία του διπλού ολοκληρώματος, αλλά και στο 2ο παράδειγμα της παραγράφου Β.2.6, το ολοκλήρωμα:

$$I=\iint_T 1dxdy$$

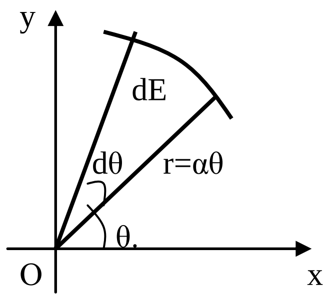
ισούται με το εμβαδόν του τόπου T. Εάν λοιπόν επιλέξουμε σαν τόπο τη σπείρα του Αρχιμήδη, θα υπολογίσουμε το εμβαδόν της. Έχουμε:

$$E_{\sigma\pi\varepsilon\acute{\iota}\rho\alpha\varsigma}=\iint_T 1rdrd\theta=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\alpha\theta} rdr\right]d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[r^2\right]_0^{\alpha\theta}d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\alpha^2\theta^2 d\theta=$$

$$= \frac{\alpha^2}{6}\left[\theta^3\right]_0^{2\pi} = \frac{4\alpha^3\pi^3}{3}$$

Παρατήρηση: Αξίζει στο σημείο αυτό να ξαναθυμηθούμε τα απλά ορισμένα ολοκληρώματα και να υπολογίσουμε το πιο πάνω εμβαδόν με τη βοήθειά τους. Για να καταστρώσουμε το ολοκλήρωμα που επιλύει ένα πρόβλημα, θα πρέπει να ορίσουμε το άθροισμα που δίνει τη λύση του προβλήματος. Στο πρόβλημα της σπείρας έχουμε:

Έστω 2 σημεία πάνω στην καμπύλη της σπείρας. Το πρώτο αντιστοιχεί σε γωνία θ και το δεύτερο σε γωνία θ+dθ. Επειδή η γωνία dθ είναι πάρα πολύ μικρή, μπορούμε να θεωρήσουμε πως το εμβαδόν που ορίζεται από την καμπύλη της σπείρας και τις δύο επιβατικές ακτίνες, είναι ένας κυκλικός τομέας, ακτίνας r=αθ. Με τον τρόπο αυτό το στοιχειώδες εμβαδόν dE δίνεται από τη σχέση:



$$dE = \pi r^2 \frac{d\theta}{2\pi} = \frac{r^2}{2}d\theta = \frac{\alpha^2\theta^2}{2}d\theta$$

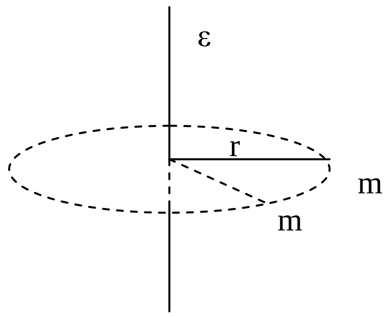
οπότε:

$$E = \int_0^{2\pi} dE = \int_0^{2\pi} \frac{\alpha^2\theta^2}{2}d\theta = \frac{\alpha^2}{6}\left[\theta^3\right]_0^{2\pi} = \frac{4\alpha^2\pi^3}{3}$$

B.2.11. Ροπή αδρανείας.

Ένα υλικό σημείο μάζας m περιστρέφεται γύρω από έναν άξονα ε.

Η ροπή αδρανείας (Ι) του υλικού σημείου είναι το φυσικό μέγεθος που αποδίδει την αντίσταση του σημείου, λόγω αδρανείας, σε κάθε επιτάχυνση ή επιβράδυνση της κυκλικής του κίνησης. Στην περίπτωση αυτή, η ροπή αδρανείας ισούται με το γινόμενο της μάζας (m) του σημείου επί την απόστασή του (r) από τον άξονα ε.



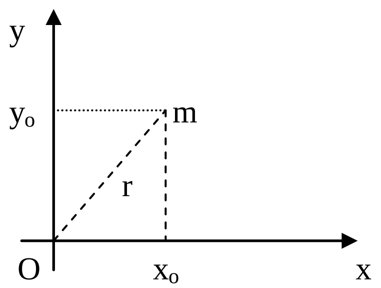
$$\boxed{\mathbf{I = mr^2}}$$

Όμοια, η ροπή αδρανείας ενός υλικού σημείου με μάζα m, ως προς ένα σημείο O, που βρίσκεται σε απόσταση r, ισούται με το γινόμενο της μάζας του επί την απόστασή του από το εν λόγω σημείο. Ισχύει δηλαδή και πάλι ο προηγούμενος τύπος: $I = mr^2$.

Αν και μια επιφάνεια, σαν χώρος δύο διαστάσεων, δεν μπορεί να περιέχει μάζα, εν τούτοις είναι συχνά χρήσιμο να της αποδοθεί μια πυκνότητα μάζας, η οποία καλείται επιφανειακή πυκνότητα. **Η επιφανειακή πυκνότητα μετρά τη μάζα που περιέχεται στη μονάδα επιφανείας.** Μονάδα της θα μπορούσε να είναι το gr/cm^2. Μία επιφάνεια μπορεί να έχει σταθερή πυκνότητα (οπότε λέγεται ομογενής) ή η πυκνότητά της να είναι συνάρτηση της θέσης του κάθε σημείου:

- Ομογενής $\rho = c$
- Μη ομογενής: $\rho = \rho(x,y)$ ή $\rho = \rho(r,\theta)$

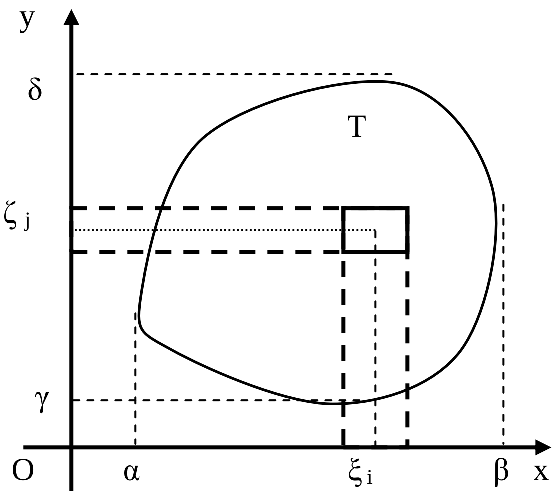
Έστω το υλικό σημείο m και οι καρτεσιανές του συντεταγμένες (x_o,y_o). Με βάση τους προηγούμενους ορισμούς για την ροπή αδρανείας, ισχύουν οι σχέσεις:



- Ροπή αδρανείας ως προς τον άξονα των x:
$$I_x = my_o$$
- Ροπή αδρανείας ως προς τον άξονα των y:
$$I_y = mx_o$$
- Ροπή αδρανείας ως προς το κέντρο των αξόνων O:
$$I_O = mr^2 = m(x^2+y^2) = I_x + I_y$$

Παρατηρούμε πως η ροπή αδρανείας ως προς το κέντρο O των καρτεσιανών αξόνων ισούται με το άθροισμα της ροπής αδρανείας ως προς τον κάθε άξονα.

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε τη ροπή αδρανείας μιας επίπεδης επιφάνειας T, που ανήκει στο επίπεδο Oxy, της οποίας η επιφανειακή πυκνότητα σε ένα σημείο, είναι συνάρτηση της θέσης του σημείου:
$$\rho = \rho(x,y)$$
Διαιρούμε τον τόπο T σε στοιχειώδεις ορθογώνιους τόπους πλάτους Δx και Δy, με εμβαδό ΔE=ΔxΔy. Αυτό επιτυγχάνεται με τη διαίρεση των δύο διαστημάτων των αξόνων των x και y στα οποία εκτείνεται ο τόπος, σε ν και μ υποδιαστήματα, αντίστοιχα. Δηλαδή



Σχ. Β.2.11

στα:

$$(\alpha=x_0,x_1),\ (x_1,x_2),\ (x_2,x_3),\ \dots,\ (x_{i-1},x_i),\ \dots,\ (x_{v-1},x_v=\beta)$$
$$(\gamma=y_0,y_1),\ (y_1,y_2),\ (y_2,y_3),\ \dots,\ (y_{j-1},y_j),\ \dots,\ (y_{\mu-1},y_\mu=\delta)$$

όπου Δx_i και Δy_j είναι το μήκος και τι πλάτος του τυχαίου στοιχειώδους εμβαδού ΔE_{ij}. Λόγω των ελάχιστων διαστάσεων, μπορούμε να θεωρήσουμε πως η πυκνότητα της στοιχειώδους επιφάνειας ΔE_{ij} είναι σταθερή και ίση με:

$$\boldsymbol{\rho = \rho(\xi_i ,\zeta_j)}$$

όπου τα σημεία ξ_i και ζ_j είναι σημεία των διαστημάτων (x_{i-1},x_i) και (y_{j-1},y_j) αντίστοιχα (έστω το μέσον τους). Επομένως η μάζα που περιέχεται στην επιφάνεια ΔE_{ij} δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbf{M_{ij} = \rho(\xi_i ,\zeta_j)\, \Delta E_{ij} = \rho(\xi_i ,\zeta_j)\, \Delta x_i\, \Delta y_j} \quad ^{(1)}$$

και η ροπή αδρανείας της μάζας αυτής ως προς τους άξονες των x, των y και ως προς το κέντρο των αξόνων είναι:

$$I_x = \sum_{j=1}^{\mu}\sum_{i=1}^{\nu} \zeta_i^2 \rho(\xi_i,\zeta_j)\Delta x_i \Delta y_j = \iint_T y^2 \rho(x,y)dxdy$$

$$I_y = \sum_{j=1}^{\mu}\sum_{i=1}^{\nu} \xi_i^2 \rho(\xi_i,\zeta_j)\Delta x_i \Delta y_j = \iint_T x^2 \rho(x,y)dxdy$$

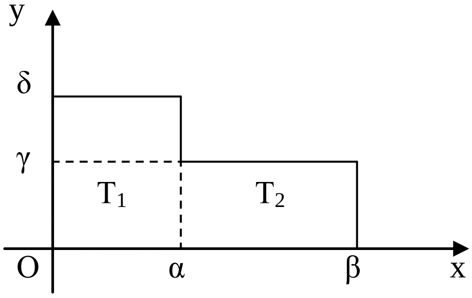
$$I_O = \sum_{j=1}^{\mu}\sum_{i=1}^{\nu} r_{i,j}^2 \rho(\xi_i,\zeta_j)\Delta x_i \Delta y_j = \iint_T (x^2+y^2) \rho(x,y)dxdy = I_y + I_x$$

όπου ζ_j , ξ_j και $r_{ij} = \sqrt{\xi_i^2 + \zeta_j^2}$ είναι οι αποστάσεις του σημείου (ξ_i ,ζ_j) από τους άξονες των x, των y και από το κέντρο O αντίστοιχα.

---

(1) *Η επιφανειακή πυκνότητα δίνει τη μάζα στη μονάδα επιφανείας. Άρα το γινόμενό της επί τη συνολική επιφάνεια, δίνει τη συνολική μάζα που αντιστοιχεί στην επιφάνεια αυτή (θεωρώντας την επιφανειακή πυκνότητα σταθερή).*

Β.2.12. Παραδείγματα:



1°) Να υπολογισθούν οι ροπές αδρανείας I_x,, I_y και I_O της διατομής του διπλανού σχήματος, εάν η επιφανειακή πυκνότητά του είναι σταθερή: $\rho(x,y) = \kappa$.

Λύση:

- $$I_x = \iint_T y^2 \kappa dxdy = \iint_{T_1} + \iint_{T_2} =$$

$$= \int_0^\alpha \left[\int_0^\delta \kappa y^2 dy \right] dx + \int_\alpha^\beta \left[\int_0^\gamma \kappa y^2 dy \right] dx = \frac{\kappa}{3} \left[\int_0^\alpha \left[y^3 \right]_0^\delta dx + \int_\alpha^\beta \left[y^3 \right]_0^\gamma dx \right] =$$

$$= \frac{\kappa}{3} \left[\int_0^\alpha \delta^3 dx + \int_\alpha^\beta \gamma^3 dx \right] = \frac{\kappa}{3} \left[\delta^3 [x]_0^\alpha + \gamma^3 [x]_\alpha^\beta \right] =$$

$$= \frac{\kappa\alpha\delta^3}{3} + \frac{\kappa(\beta-\alpha)\gamma^3}{3}$$

- $$I_y = \iint_T x^2 \kappa dxdy = \iint_{T_1} + \iint_{T_2} = \int_0^\alpha \left[\int_0^\delta \kappa x^2 dy \right] dx + \int_\alpha^\beta \left[\int_0^\gamma \kappa x^2 dy \right] dx =$$

$$= \kappa \left[\int_0^\alpha x^2 [y]_0^\delta dx + \int_\alpha^\beta x^2 [y]_0^\gamma dx \right] = \kappa \left[\int_0^\alpha x^2 \delta dx + \int_\alpha^\beta x^2 \gamma dx \right] =$$

$$= \frac{\kappa}{3} \left[\delta \left[x^3 \right]_0^\alpha + \gamma \left[x^3 \right]_\alpha^\beta \right] = \frac{\kappa\delta\alpha^3}{3} + \frac{\kappa\gamma(\beta^3-\alpha^3)}{3}$$

και τέλος:

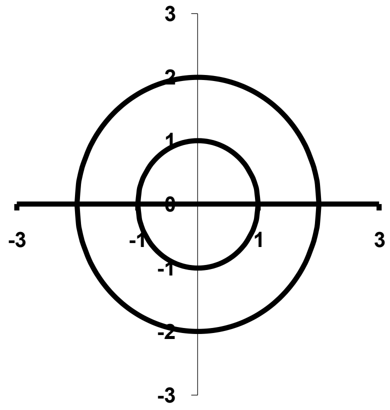
- $$I_O = I_x + I_y = \frac{\kappa\delta\alpha(\alpha^2+\delta^{2)}}{3} + \frac{\kappa\gamma\left[(\beta^3-\alpha^3) + \gamma^2(\beta-\alpha) \right]}{3}$$

2°) Να υπολογισθεί η ροπή αδρανείας I_O της διατομής του διπλανού δακτυλίου, εάν η επιφανειακή πυκνότητά του είναι ανάλογη της απόστασης από το κέντρο O:

$$\rho(x,y) = \kappa\sqrt{x^2 + y^2} = \kappa r^2 = \rho(r).$$

Δίνονται οι εξισώσεις των κύκλων:

$$x^2 + y^2 = 1 \text{ και } x^2 + y^2 = 2^2$$



Λύση: Με την πρώτη ματιά γίνεται φανερό πως πρέπει να χρησιμοποιήσουμε πολικές συντεταγμένες (ο τόπος ολοκλήρωσης ορίζεται με συντεταγμένες γραμμές των πολικών, ενώ η συνάρτηση που ολοκληρώνεται είναι συνάρτηση του r).

- $$I_O = \iint_T \rho(x;y)(x^2+y^2)dxdy = \iint_T \rho(r)r^2 rdrd\theta = \iint_T \kappa r^2 rdrd\theta =$$

$$= \kappa\int_0^{2\pi}\left[\int_1^2 r^3 dr\right]d\theta = \frac{\kappa}{4}\int_0^{2\pi}\left(r^4\right)_1^2 d\theta = \frac{15\kappa}{4}\int_0^{2\pi}d\theta = \frac{15\kappa\pi}{2}$$