Γ. Διαφορικές Εξισώσεις.

Γ.1. Γενικά.

Μία διαφορική εξίσωση (δ.ε.) είναι μία εξίσωση η οποία δίνει πληροφορίες για τις παραγώγους μιας άγνωστης συνάρτησης και ζητά τον υπολογισμό αυτής της άγνωστης συνάρτησης. Η γενική μορφή μιας δ.ε. είναι η:

$$\mathbf{F(x,y,y',y'',\ldots,y^{(\nu)}) = 0} \qquad (\Gamma.1.1)$$

όπου

- **x** είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή,
- **y=y(x)** είναι η άγνωστη συνάρτηση,
- **$y', y'',\ldots,y^{(\nu)}$** είναι η πρώτη, η δεύτερη, … και η ν-οστή παράγωγος της άγνωστης συνάρτησης y(x).
- **ν** είναι η τάξη της δ.ε. (η τάξη της μεγαλύτερης παραγώγου που εμφανίζεται στην δ.ε.).

Μία συνάρτηση y(x) είναι λύση της δ.ε. (Γ.1.1), όταν την επαληθεύει. Μία συνάρτηση y(x) επαληθεύει την (Γ.1.1), εάν η σχέση αληθεύει όταν θέσουμε σ' αυτήν, στη θέση του y τη συνάρτηση y(x) και στη θέση των παραγώγων (y', y'', …, $y^{(\nu)}$) τις αντίστοιχες παραγώγους της y(x).

Για παράδειγμα η συνάρτηση $y(x) = e^{x^2}$ είναι λύση της δ.ε. πρώτης τάξης:

$$y' - 2xy = 0 \qquad (\Gamma.1.2)$$

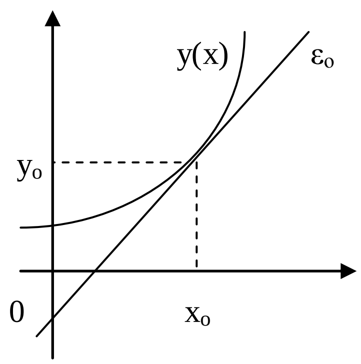
Πράγματι, εάν αντικαταστήσουμε στην Γ.1.2 τις σχέσεις:

$$\left.\begin{array}{l} y(x) = e^{x^2} \\ y'(x) = 2x\,e^{x^2} \end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad 2xe^{x^2} - 2xe^{x^2} = 0 \qquad \text{(αληθινή)}$$

Γεωμετρική ερμηνεία της (Γ.1.2):

Η δοσμένη δ.ε. μπορεί να γραφεί υπό τη μορφή:

$$y' = 2xy$$



και δηλώνει πως η λύση της είναι μία συνάρτηση y(x), της οποίας η πρώτη παράγωγος (δηλαδή η κλίση) σε κάθε σημείο του επιπέδου (x,y) ισούται με το διπλάσιο γινόμενο των συντεταγμένων του σημείου. Άρα η κλίση της y(x) στο σημείο (x_o,y_o), δηλαδή η κλίση της ευθείας ε_o που εφάπτεται στην y(x) στο εν λόγω σημείο, θα είναι ίση με το $2x_oy_o$.

Γ.1.1. Δ.Ε. άμεσα ολοκληρώσιμες.

Οι περισσότερες δ.ε. δεν λύνονται! Ιδιαίτερα οι δ.ε. $2^{ης}$ τάξης και άνω[1]. Μια από τις μορφές που λύνονται εύκολα είναι αυτή των άμεσα ολοκληρώσιμων δ.ε.:

$$\mathbf{y^{(\nu)} = f(x)} \qquad (\Gamma.1.3)$$

Συγκρίνοντας την (Γ.1.1) με την (Γ.1.3) παρατηρούμε πως από στην αναλυτική έκφραση της δεύτερης λείπουν, η άγνωστη συνάρτηση (y(x)) και όλες οι ενδιάμεσοι παράγωγοί της (y', y'', …, $y^{(\nu-1)}$). Έτσι όμως μπορούμε να υπολογίσουμε όλες τις παραγώγους μικρότερης τάξης και την ίδια την άγνωστη y(x), με διαδοχικές ολοκληρώσεις της (Γ.1.3).

Παράδειγμα: Να λυθεί η δ.ε.:

$$y'' = 6x - 2 \qquad (\Gamma.1.4)$$

Λύση:

$$y'(x) = \int y''(x)dx = \int (6x-2)dx = 3x^2 - 2x + c$$

$$y(x) = \int y'(x)dx = \int (3x^2 - 2x + c)dx = x^3 - x^2 + cx + c_2$$

Παρατηρούμε πως η ολοκλήρωση μιας παραγώγου δεν επιτρέπει τον απόλυτο καθορισμό της αρχικής συνάρτησης, την οποία προσδιορίζει κατά προσέγγιση μιας αθροιστικής σταθερής. Εδώ μάλιστα, επειδή υπάρχουν δύο διαδοχικές ολοκληρώσεις, εισάγονται δύο αυθαίρετες σταθερές. Φθάνουμε λοιπόν στο συμπέρασμα:

Η λύση μιας δ.ε. ν-ης τάξης είναι μία συνάρτηση που εξαρτάται από ν-αυθαίρετες σταθερές, και ονομάζεται ν-παραμετρική οικογένεια καμπύλων. Η λύση αυτή καλείται γενική λύση ή γενικό ολοκλήρωμα της δ.ε..

Στο προηγούμενο παράδειγμα η γενική λύση είναι μια διπαραμετρική οικογένεια καμπύλων, μια και είναι λύση μιας δ.ε. 2ης τάξης. Περιλαμβάνει άπειρες συναρτήσεις, των οποίων τα γραφήματα καταλαμβάνουν ολόκληρο το επίπεδο Oxy (όπως φαίνεται και στο επόμενο γράφημα). Συχνά πρέπει να καθορίσουμε την τιμή των αυθαίρετων σταθερών έτσι ώστε να ξεχωρίσουμε μία συνάρτηση από τις άπειρες της γενικής λύσης. Είναι φανερό πως για να προσδιορισθούν οι τιμές των δύο σταθερών c και c_2 θα πρέπει να δοθούν τα κατάλληλα δεδομένα, έτσι ώστε να καταλήξουμε

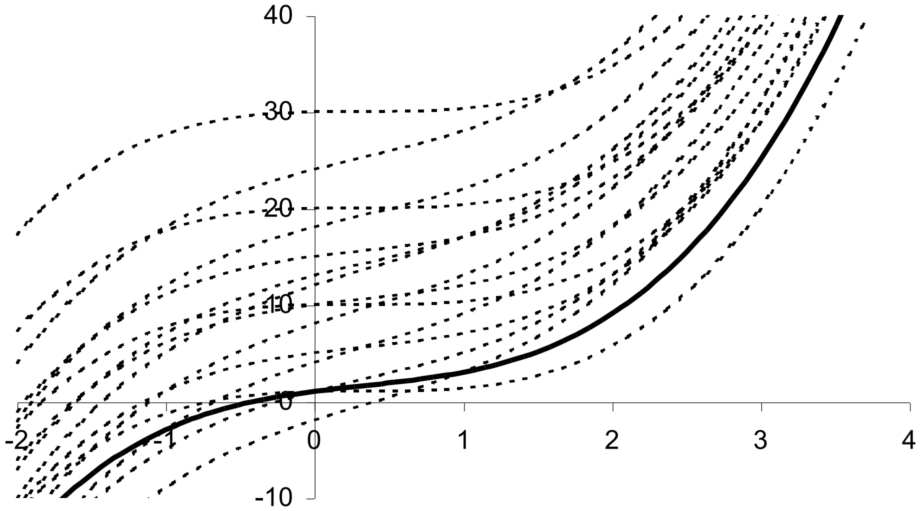
---

[1] *Όπως αναφέρθηκε στην προηγούμενη παράγραφο, τάξη μιας δ.ε. είναι η τάξη της μεγαλύτερης παραγώγου που εμφανίζεται στη δ.ε.*

σε ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους. Τα δεδομένα αυτά θα μπορούσαν να είναι οι συντεταγμένες δύο σημείων του επιπέδου (x_1,y_1) και (x_2,y_2), τα οποία γράφουμε: $y(x_1)=y_1$ και $y(x_2)=y_2$. Με τον τρόπο αυτό επιλέγουμε από το σύνολο των λύσεων τη συνάρτηση εκείνη που διέρχεται από τα δύο αυτά σημεία, τα οποία αποτελούν τις **αρχικές συνθήκες** του προβλήματος. Η συνάρτηση που προκύπτει μετά τον υπολογισμό της τιμής των αυθαίρετων μεταβλητών ονομάζεται **<u>μερική λύση της δ.ε. που αντιστοιχεί στις δοσμένες αρχικές συνθήκες</u>**.

Ο πιο πάνω καθορισμός των αρχικών συνθηκών είναι σπανιότατος. Συνήθως, σαν αρχικές συνθήκες προσδιορίζουμε την τιμή της συνάρτησης και της πρώτης της παραγώγου στο ίδιο σημείο:

Αρχικές συνθήκες: $y(x_o) = y_o$ και $y'(x_o) = y_o'$



Σχ. Γ.1.1. Η διπαραμετρική οικογένεια καμπύλων και η μερική λύση
που αντιστοιχεί στις αρχικές συνθήκες: $y(0)=1$ και $y'(0)=2$.

Ξαναγυρίζοντας στο παράδειγμα, θα υπολογίσουμε τη μερική λύση της δ.ε. που αντιστοιχεί στις αρχικές συνθήκες: $y(0)=1$ και $y'(0)=2$

$$\begin{array}{lc|c|cl} y'(x) = 3x^2 - 2x + c & \text{———} & y'(0)=2 & \longrightarrow & c = 2 \\ y(x) = x^3 - x^2 + cx + c_2 & & y(0)=1 & & c_2, = 1 \end{array}$$

Άρα η μερική λύση:

$$y(x) = x^3 - x^2 + 2x + 1$$
$$y'(x) = 3x^2 - 2x + 2$$

Γενικά συμπεράσματα:

1. Μια διαφορική εξίσωση περιέχει την ανεξάρτητη μεταβλητή, την άγνωστη συνάρτηση και τις παραγώγους αυτής. Η τάξη της δ.ε. είναι ίση με την τάξη της μεγαλύτερης παραγώγου που εμφανίζεται στη δ.ε.. Η γενική μορφή μιας δ.ε. ν-ης τάξης είναι η:
$$\mathbf{F(x,y,y',y'',\ldots,y^{(\nu)}) = 0}$$

2. Λύνουμε την δ.ε. υπολογίζοντας την άγνωστη συνάρτηση που αυτή περιέχει. Μία συνάρτηση y(x) είναι λύση της δ.ε. όταν την επαληθεύει.

3. Η λύση της πιο πάνω δ.ε. περιέχει ν-αυθαίρετες σταθερές και καλείται γενική λύση:
$$\mathbf{y = y(x,c_1,c_2,\ldots,c_\nu)}$$

4. Μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή των αυθαίρετων σταθερών, εάν δοθούν οι αρχικές συνθήκες, η τιμή δηλαδή της συνάρτησηςy(x) και όλων των παραγώγων της μέχρι την τάξη ν-1 (κατά μία μικρότερη από την τάξη της δ.ε.):
$$\mathbf{y(x_o) = y_o\ ,\ \ y'(x_o) = y_o'\ ,\ \ y''(x_o) = y_o''\ ,\ \ldots\ ,\ y^{(\nu-1)}(x_o) = y_o^{(\nu-1)}}$$
οπότε μιλούμε για τον υπολογισμό της μερικής λύσης που αντιστοιχεί στις δοσμένες συνθήκες:
$$y = y(x)$$

5. Έστω η δ.ε. $\mathbf{F(x,y,y',y'',\ldots,y^{(\nu)}) = 0}$**.** Μία συνάρτηση η οποία περιέχει ν αυθαίρετες και γραμμικά ανεξάρτητες σταθερές, ενώ ταυτόχρονα επαληθεύει την δ.ε., θα είναι η γενική λύση της δ.ε. αυτής.

6. Σταθερές που εμφανίζονται υπό τη μορφή c_1+c_2 ή $3c_1+5c_2$ ή $7c_1c_2$, δεν αποτελούν εκφράσεις που περιέχουν 2 αυθαίρετες σταθερές, αλλά μία. Δηλαδή: $3c_1+5c_2 = c$.

Τα παραπάνω δίνουν απάντηση και σε μία απορία που θα μπορούσε να δημιουργηθεί κατά την ανάγνωση της γεωμετρικής ερμηνείας της δ.ε. 1ης τάξηςQ
$$y' = f(x,y)$$
και του ιδιαίτερου παραδείγματος που αντιμετωπίσαμε:
$$y' = 2xy$$

Είπαμε λοιπόν πως η δ.ε. $y'=2xy$ μπορεί να διαβαστεί:

- **«Ζητούμε μία συνάρτηση της οποίας η κλίση (η παράγωγος) στο τυχαίο σημείο του επιπέδου Oxy ισούται με το διπλάσιο του γινομένου των συντεταγμένων του εν λόγω σημείου».**

Στο σημείο αυτό θα μπορούσε να δημιουργηθεί η απορία:

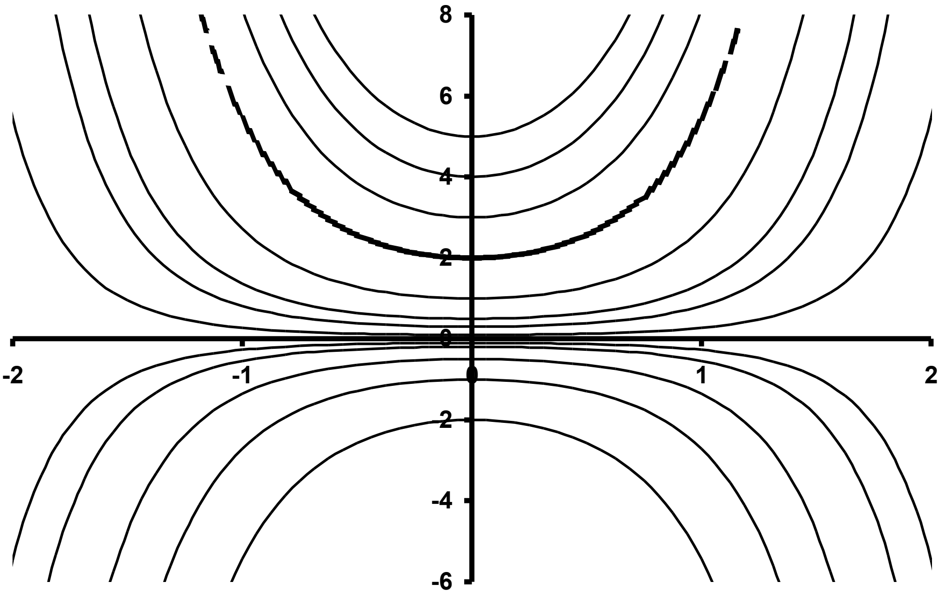
- **«Τι είδους συνάρτηση (καμπύλη) είναι αυτή που διέρχεται από όλα τα σημεία του επιπέδου;»** [μια και το β' μέλος της δ.ε. λειτουργεί για οποιοδήποτε σημείο του R^2]

Η απάντηση τώρα είναι απλή.

- **«Η γενική λύση της y'=2xy δεν είναι μία μόνη συνάρτηση αλλά μια μονοπαραμετρική οικογένεια καμπύλων η οποία μπορεί να καλύπτει όλο το επίπεδο…»**

Όπως θα δούμε στην επόμενη παράγραφο η δ.ε. y' = 2xy λύνεται εύκολα και η γενική της λύση δίνεται από τη σχέση:

$$y = ce^{x^2}$$



Σχ. Γ.1.2.: Η οικογένεια $y = ce^{x^2}$

Εδώ εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε πως η μονοπαραμετρική αυτή συνάρτηση επαληθεύει την δοσμένη δ.ε. και άρα αποτελεί τη γενική της λύση. Στο πιο πάνω γράφημα εμφανίζεται η οικογένεια αυτή καθώς και η μερική λύση που αντιστοιχεί στην αρχική συνθήκη:

$$y(0) = 2$$

για την οποία υπολογίζεται:

$$2 = ce^0$$

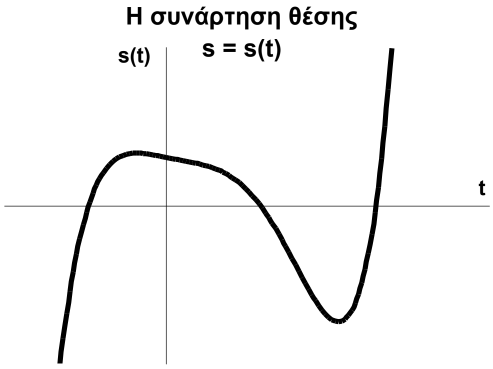
$$c = 2 \quad \text{και}$$

$$y = 2e^{x^2}$$

Γ.1.2. Οι διαφορικές εξισώσεις στην Κινηματική και τη Δυναμική.

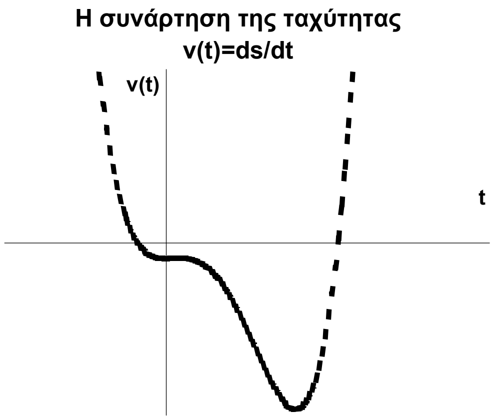
Η πιο απλή μορφή κίνησης είναι η ευθύγραμμη. Έστω λοιπόν μία ευθεία στην οποία έχει ορισθεί ένα σύστημα αναφοράς. Με τον όρο αυτό εννοούμε: **(i)** μία αρχή (ένα κέντρο Ο) πάνω στην ευθεία, **(ii)** τον ορισμό της θετικής φοράς και **(iii)** τον ορισμό του μήκους που αντιστοιχεί στη μονάδα μήκους. Η θέση ενός υλικού σημείου που κινείται πάνω στην ευθεία αυτή, καθορίζεται από την απόστασή του (s) από το κέντρο Ο. Λέμε πως γνωρίζουμε τη λύση του προβλήματος της κίνησης του σημείου, όταν γνωρίζουμε την εξίσωση που την περιγράφει, συναρτήσει του χρόνου t. Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται **<u>συνάρτηση θέσης</u>**:

$$\mathbf{s = s(t)}$$



Είναι γνωστό πως η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης θέσης του κινητού είναι μία νέα συνάρτηση του t, που δίνει την ταχύτητα μετακίνησης του υλικού σημείου:

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt} = \dot{s}(t)$$

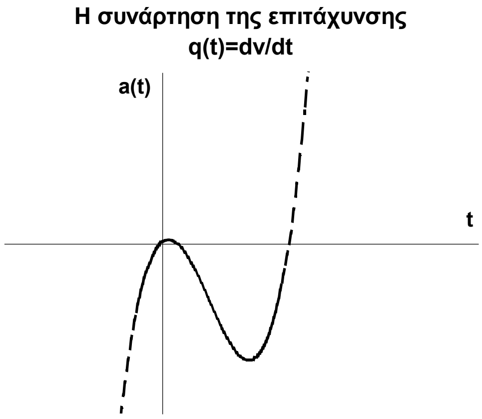


Όμοια, η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης θέσης (η πρώτη παράγωγος της ταχύτητας) δίνει την επιτάχυνση της κίνησης του υλικού σημείου:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2s(t)}{dt^2} = \dot{v}(t) = \ddot{s}(t)$$

Από τους νόμους του Νεύτωνα γνωρίζουμε πως όταν εφαρμόζεται μία δύναμη F σε ένα υλικό σημείο, του προσδίδει επιτάχυνση η οποία είναι ανάλογη της δύναμης, με συντελεστή αναλογίας τη μάζα m του σημείου:

$$\mathbf{F = m*a}$$



Η περίφημη αυτή σχέση ισχύει στην περίπτωση που η δύναμη είναι συγγραμμική με τον άξονα s, πάνω στον οποίο κινείται το υλικό σημείο. Αλλιώς ισχύει στη διανυσματική της μορφή:

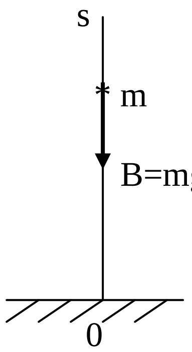
$$\vec{F}(t) = m\vec{a}(t)$$

Στην περίπτωση της ευθύγραμμης κίνησης (που θα μας απασχολήσει κατά κύριο λόγο) καταστρώνουμε τη δ.ε. που περιγράφει την κίνηση ενός υλικού σημείου, κινούμενου κάτω από την επίδραση ενός συνόλου δυνάμεων, δουλεύοντας ως εξής:

- Ξεκινούμε από τη σχέση που περιγράφει τον νόμο του Newton: F=ma
- Αντικαθιστούμε την επιτάχυνση α με τη δεύτερη παράγωγο της άγνωστης συνάρτησης θέσης s(t) [δηλαδή a(t)= $\ddot{s}(t)$]
- Στη θέση του F τοποθετούμε το άθροισμα όλων των δυνάμεων που επιδρούν πάνω στο υλικό σημείο (δηλαδή τη συνισταμένη τους).
- Με τον τρόπο αυτό έχουμε μία δ.ε. $2^{ης}$ τάξης, με άγνωστη συνάρτηση τη συνάρτηση θέσης του σημείου.

Παραδείγματα:

1^o) Ελεύθερη πτώση. Να υπολογισθεί η συνάρτηση θέσης ενός υλικού σημείου που κινείται πάνω σε μία κατακόρυφη ευθεία κάτω από την επίδραση του βάρους του (δεν υπάρχει αντίσταση του αέρα), όταν η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι σταθερή: g = 9,81 m/sec^2.



Λύση: Έστω η ευθεία s, πάνω στην οποία εκτελείται η κίνηση του υλικού σημείου, με το σημείο 0 στο σημείο επαφής της με την επιφάνεια της Γης. Θεωρούμε επίσης πως το μέτρημα του χρόνου ξεκινά από τη στιγμή που ξεκινά η καταγραφή της θέσης του σημείου, κατά την οποία το σημείο βρίσκεται στη θέση s_0, έχοντας ταχύτητα v_0. Δίνονται δηλαδή οι αρχικές συνθήκες:

$$s(0)=s_0 \quad \text{και} \quad v(0)=v_0$$

Η κατάστρωση της δ.ε. της κίνησης ξεκινά όπως είδαμε από τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα:

$$\mathbf{F = ma} \quad \Rightarrow \quad -mg = m\ddot{s}$$

όπου το αρνητικό πρόσημο οφείλεται στο ότι το βάρος έχει αρνητική φορά σε σχέση με τη θετική φορά της ευθείας s. Η δ.ε. που προέκυψε είναι $2^{ης}$ τάξης, άμεσα ολοκληρώσιμη:

$$\ddot{s} = -g \quad \Rightarrow \quad v(t) = \dot{s}(t) = \int -g\,dt = -gt + c_1 \quad \Rightarrow$$

$$s(t) = \int (-gt + c_1)dt = -\frac{1}{2}gt^2 + c_1 t + c_2$$

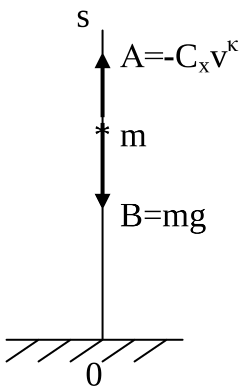
Αντικαθιστώντας στη συνέχεια στις σχέσεις της ταχύτητας και της θέσης [s(t) και v(t)] τις αρχικές συνθήκες που δίνονται, υπολογίζουμε τις τιμές των δύο αυθαίρετων σταθερών:

$$v(0) = v_0 = c_1 \quad \text{και} \quad s(0) = s_0 = c_2$$

οπότε η μερική λύση που αντιστοιχεί στις δοσμένες αρχικές συνθήκες δίνεται:

$$s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + s_0 \qquad \text{και} \qquad v(t) = -gt + v_0$$

2^o) Πτώση με αντίσταση του αέρα. Να υπολογισθεί η συνάρτηση θέσης ενός υλικού σημείου που κινείται πάνω σε μία κατακόρυφη ευθεία κάτω από την επίδραση του βέρους του και της αντίστασης του αέρα.



Λύση: Παρόμοιο πρόβλημα μ’ αυτό του προηγούμενου παραδείγματος. Η αντίσταση του αέρα, που εμφανίζεται εδώ, είναι ένα φαινόμενο ιδιαίτερα περίπλοκο Εξαρτάται

- από την ταχύτητα κίνησης που έχει το κινούμενο σημείο ως προς τον αέρα (θεωρούμε τον αέρα ακίνητο ή προσθέτουμε τις δύο ταχύτητες) και
- από έναν συντελεστή αεροδυναμικής αντίστασης που εξαρτάται από το μέγεθος της μετωπικής επιφάνειάς του, την υφή της επιφάνειάς του και το σχήμα του.

Ο μαθηματικός τύπος με τον οποίο ορίζεται έχει τρία διαφορετικά σκέλη, ανάλογα με το μέγεθος της ταχύτητάς του:

$$A(v) = \left| \begin{array}{ll} -C_x v & \text{για ταχύτητες που δεν ξεπερνούν τα 5 m/sec} \\ -C_x v^2 & \text{για ταχύτητες υποηχητικές (δεν ξεπερνούν τα 330 m/sec)} \\ -C_x v^3 & \text{για υπερηχητικές ταχύτητες} \end{array} \right.$$

όπου το αρνητικό πρόσημο οφείλεται στη ότι η αντίσταση έχει πάντα αντίθετη φορά από την ταχύτητα v. Η δ.ε. της κίνησης είναι όμοια μ’ αυτήν του προηγούμενου παραδείγματος, όπου όμως η εξωτερική δύναμη F περιλαμβάνει, εκτός από το βάρος του σώματος, και την αντίσταση της ατμόσφαιρας.

$$\mathbf{F = ma} \quad \Rightarrow \quad -mg - C_x\dot{s} = m\ddot{s} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{m\ddot{s} + C_x\dot{s} + mg = 0}$$

Πρόκειται για μία δ.ε. 2^{ης} τάξης την οποία θα επιλύσουμε στην παράγραφο των γραμμικών δ.ε..

Γ.1.3. Προβλήματα που οδηγούν σε δ.ε.:

1. Προβλήματα Γεωμετρίας.

Έστω η (συνεχής και παραγωγίσιμη) συνάρτηση $y = f(x)$. Όπως έχουμε κατ' επανάληψη τονίσει, η κλίση της $f(x)$, στο τυχαίο σημείο x, δίνεται από την παράγωγο της συνάρτησης f [την $f'(x)$]. Όταν λοιπόν σε κάποιο πρόβλημα Γεωμετρίας, εμφανίζεται σε κάποια έκφραση η κλίση μιας καμπύλης, ουσιαστικά εμφανίζεται η παράγωγος της συνάρτησης αυτής…

Παράδειγμα: Να βρεθεί η εξίσωση της καμπύλης της οποίας η κλίση σε κάθε σημείο της ισούται με το άθροισμα των δύο συντεταγμένων του σημείου αυτού.

Λύση: Έστω πως η εξίσωση της εν λόγω καμπύλης είναι η: $y=y(x)$. Τότε θα ισχύει πως

$$y' = x + y$$

Η σχέση αυτή ορίζει μια δ.ε., της οποίας η λύση είναι η συνάρτηση που θα έχει την απαιτούμενη ιδιότητα. Προφανώς δεν πρόκειται για μία μόνο καμπύλη αλλά για μια μονοπαραμετρική οικογένεια καμπύλων (όπως είδαμε η γενική λύση μιας δ.ε. $1^{ης}$ τάξης περιέχει και μία αυθαίρετη σταθερά). Η πιο πάνω δ.ε. είναι γραμμική και θα λυθεί σε επόμενη παράγραφο…

2. Προβλήματα ρυθμού μεταβολής.

Ο ρυθμός μεταβολής της τιμής μιας ποσότητας δίνεται από την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης που εκφράζει την ποσότητα αυτή. Επομένως κάθε σχέση που αφορά σε ρυθμό μεταβολής, ορίζει ουσιαστικά μια δ.ε. $1^{ης}$ τάξης.

Παράδειγμα: Ένα ποτήρι νερό, του οποίου η θερμοκρασία μεταβάλλεται με το χρόνο ($\theta(t)$), μεταφέρεται σε ανοικτό χώρο με θερμοκρασία θ_x. Ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας του νερού είναι ανάλογος της διαφοράς ανάμεσα στη θερμοκρασία του νερού και του χώρου, με ένα συντελεστή αναλογίας λ. Να καταστρωθεί η δ.ε. που περιγράφει την μεταβολή της θερμοκρασίας του νερού $\theta(t)$.

Λύση: Μεταφέροντας σε εξίσωση την προηγούμενη έκφραση έχουμε:

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = -\lambda(\theta(t) - \theta_x)$$

όπου το αρνητικό πρόσημο δίνει θετική μεταβολή της θερμοκρασίας του νερού όταν η θερμοκρασία του νερού είναι μικρότερη από τη θερμοκρασία του χώρου [όταν δηλαδή $\theta(t)-\theta_x<0$], και αρνητική μεταβολή στην αντίθετη περίπτωση [$\theta(t)-\theta_x>0$].

Γ.1.4. Δ.Ε. μιας παραμετρικής οικογένειας καμπύλων.

Πρόκειται ουσιαστικά για το αντίθετο πρόβλημα. Μας δίνεται η γενική λύση μιας δ.ε. και πρέπει να υπολογίσουμε την δ.ε.. Η διαδικασία λύσης είναι απλή. Εάν μας δοθεί μια οικογένεια ν-παραμετρική (η οποία να περιέχει ν αυθαίρετες σταθερές) τότε:

- Παραγωγίζουμε την παραμετρική εξίσωση ν φορές και
- απαλείφουμε τις ν αυθαίρετες σταθερές ανάμεσα στης ν+1 σχέσεις που έχουμε (τη σχέση που ορίζει την οικογένεια και τις ν παραγώγους της).

Με τον τρόπο αυτό καταλήγουμε σε μια δ.ε. ν-ης τάξης, που επαληθεύεται από την δοσμένη ν-παραμετρική οικογένεια (οι οποία επομένως θα αποτελεί και τη γενική της λύση –αφού την επαληθεύει).

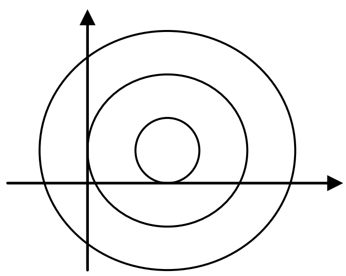
Στη σπάνια περίπτωση όπου, μετά τη ν-οστή παραγώγιση, έχουν χαθεί όλες οι αυθαίρετες σταθερές, η δ.ε. της οικογένειας είναι η σχέση της ν-οστής παραγώγου (και αποφεύγουμε τις απαλοιφές).

Παραδείγματα.

1^o) Να υπολογισθεί η δ.ε. της οικογένειας των ομόκεντρων κύκλων με κέντρο το σημείο (2,1).

Ως γνωστόν η εξίσωση ενός κύκλου με κέντρο το σημείο (κ,λ) και ακτίνα R είναι η:

$$(x-\kappa)^2 + (y-\lambda)^2 = R^2$$



Επομένως η δοσμένη οικογένεια έχει την εξίσωση:

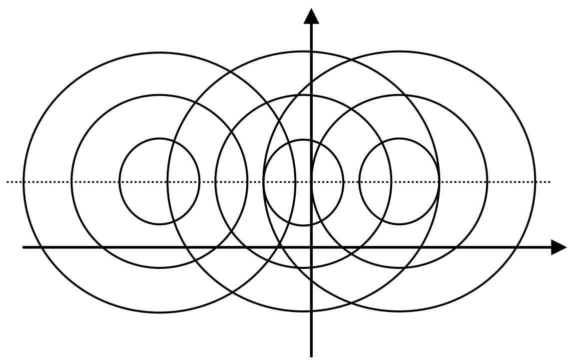
$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = R^2$$

και έχει μια μόνο αυθαίρετη σταθερή, την R. Παραγωγίζοντας μία φορά τη σχέση αυτή, χάνεται η αυθαίρετη σταθερά και έχουμε έτοιμη τη δ.ε. της δοσμένης οικογένειας:

$$2(x-2) + 2(y-1)y'=0 \qquad \Rightarrow \qquad y' = -\frac{x-2}{y-1}$$

2^o) Να υπολογισθεί η δ.ε. της οικογένειας των ομόκεντρων κύκλων, των οποίων το κέντρο βρίσκεται πάνω στην ευθεία y=2.

Τα κέντρα των κύκλων (ανήκουν στην ευθεία y=2) θα έχουν συντεταγμένες (c,2) και η εξίσωση των κύκλων αυτών είναι η:



$$(x-c)^2 + (y-2)^2 = R^2$$

που περιέχει 2 αυθαίρετες σταθερές. Παραγωγίζουμε λοιπόν δύο φορές…

$$2(x-c) + 2(y-2)y' = 0$$

$$\boxed{2 + 2y'^2 + 2(y-2)y'' = 0}$$

και χωρίς απαλοιφή φθάνουμε στη δ.ε. της δι-παραμετρικής οικογένειας των κύκλων.

3) Να βρεθεί η δ.ε. της οικογένειας των εκθετικών συναρτήσεων $y = ce^{x^2}$ (του σχήματος Γ.1.2):

Παραγωγίζουμε μία φορά την πιο πάνω οικογένεια έχουμε

$$y' = 2cxe^{x^2}$$

οπότε απαλείφοντας το c ανάμεσα στις 2 αυτές εξισώσεις, έχουμε:

$$c = ye^{-x^2}$$

και

$$\boxed{y' = 2xy}$$

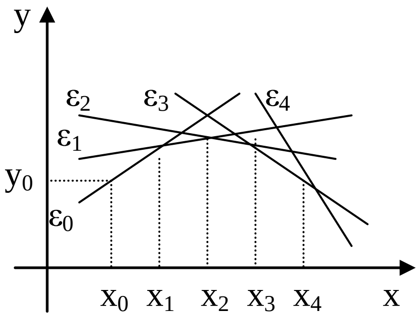
Γ.1.5. Πεδίο εφαπτόμενων, προσεγγιστικές λύσεις.

Ας υποθέσουμε πως μια δ.ε. 1ης τάξης μπορεί να λυθεί ως προς την παράγωγο της άγνωστης συνάρτησης και να γραφεί υπό τη μορφή: $y'=f(x,y)$. Έστω τώρα μια δοσμένη αρχική συνθήκη: $y(x_0)=y_0$. Θέτοντας τις τιμές x_0 και y_0 στο β' μέλος της δ.ε. έχουμε τη σχέση:

$$y'=f(x_0,y_0)=k_0$$

η οποία διαβάζεται: «η παράγωγος –η κλίση- της άγνωστης συνάρτησης y(x) όταν αυτή διέρχεται από το σημείο της αρχικής συνθήκης (x_0,y_0), είναι ίση με το k_0». Άρα η ευθεία (ε_0) η οποία διέρχεται από το σημείο αυτό και έχει κλίση k_0, θα εφάπτεται στην καμπύλη της άγνωστης συνάρτησης (η οποία αντιστοιχεί στην αρχική συνθήκη : $y(x_0)=y_0$).

Στη συνέχεια παίρνοντας σαν αρχική συνθήκη ένα διπλανό σημείο του (x_0,y_0), που να βρίσκεται πάνω στην ευθεία ε_0 (έστω το (x_1,y_1)), υπολογίζουμε μιαν άλλη ευθεία (την ε_1) που εφάπτεται στην άγνωστη συνάρτηση στο σημείο (x_1,y_1). Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο διαπιστώνουμε πως δημιουργούμε μια ακολουθία ευθειών που εφάπτονται στην άγνωστη συνάρτηση στα αντίστοιχα σημεία. Διαπιστώνουμε πως το σύνολο των ευθειών αυτών επιτρέπει να διαφανεί μια καμπύλη, η οποία προσεγγίζει τη μερική λύση της δοσμένης δ.ε. που να αντιστοιχεί στις αρχικές συνθήκες: $y(x_0)=y_0$.



Γενικά η δ.ε. $y' = f(x,y)$ δίνει την παράγωγο (την κλίση) της άγνωστης μονοπαραμετρικής οικογένειας καμπύλων και επομένως ορίζει ένα πεδίο εφαπτόμενων ευθειών στο επίπεδο Oxy.

Γ.1.6. Ασκήσεις.

1η) Δίνεται η δ.ε. $y''' - xy'' + y' + xy - 2e^x = 0$. Να δείξετε πως μια μερική λύση της είναι η συνάρτηση $y(x) = e^x$.

2η) Να βρεθεί η γενική και η μερική λύση της δ.ε.:

$$y'' = \sqrt{x}$$

όταν δίνονται οι αρχικές συνθήκες: $y(0)=5$ και $y'(0) = -2$

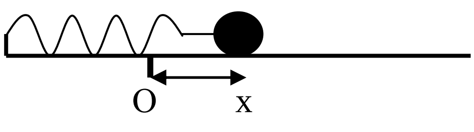
3η) Δίνεται η δ.ε. 2ης τάξης: $y'' - 3y' + 2y = 0$. Θέτοντας στη θέση του y'' το ρ^2, στη θέση του y' το ρ και στη θέση του y το 1, φθάνουμε στην εξίσωση τριωνύμου: $\rho^2 - 3\rho + 2 = 0$, με ρίζες τις ρ_1 και ρ_2. Υπολογίστε τις ρίζες αυτές και δείξτε πως οι συναρτήσεις

$$y_1(x) = e^{\rho_1 x} \quad \text{και} \quad y_2(x) = e^{\rho_2 x}$$

είναι μερικές λύσεις της δοθείσας δ.ε..

4η) Να βρεθεί η δ.ε. της οικογένειας υπερβολών: $y = \dfrac{c}{x}$

5η) Μια σφαίρα μάζας m, «γλιστρά», χωρίς τριβή, πάνω σε ένα οριζόντιο άξονα, πακτωμένη στο άκρο ενός απόλυτα ελαστικού ελατηρίου, με σημείο ισορροπίας το σημείο O του άξονα. Εάν η δύναμη επαναφοράς προς το κέντρο ισορροπίας είναι ανάλογη της απόστασης x από το O, να βρεθεί η δ.ε. της κίνησης.



Γ.2. Δ.Ε. $1^{ης}$ τάξης.

Στο κεφάλαιο αυτό θα αντιμετωπίσουμε δ.ε. οι οποίες περιέχουν μόνο την πρώτη παράγωγο της άγνωστης συνάρτησης (y(x)),

$$F(x,y,y') = 0$$

και επομένως η γενική τους λύση θα είναι μια μονοπαραμετρική οικογένεια καμπύλων, της μορφής:

$$y = y(x,c)$$

Παρ' όλον ότι οι δ.ε. $1^{ης}$ τάξης θεωρούνται εύκολες, τελικά λύνονται μόνον εάν η μορφή τους ανήκει στις γνωστές επιλύσιμες μορφές, ενώ παράλληλα θα πρέπει να λύνονται και τα ολοκληρώματα που θα προκύψουν. Στη συνέχεια θα μελετήσουμε κάποιες μορφές δ.ε. $1^{ης}$ τάξης που λύνονται εύκολα.

Γ.2.1 Δ.Ε. $1^{ης}$ τάξης, χωριζόμενων μεταβλητών.

Στον διαφορικό λογισμό αντιμετωπίσαμε το συμβολισμό dy/dx σαν τον συμβολισμό της πρώτης παραγώγου ο οποίος αντιπροσώπευε το όριο του γνωστού κλάσματος Δy/Δx:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{\Delta y}{\Delta x}\right] \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}\right]$$

Στα πλαίσια μιας δ.ε. επιτρέπεται ο διαχωρισμός των διαφορικών της μεταβλητής και της συνάρτησης. Θεωρούμε δηλαδή το συμβολισμό dy/dx σαν ένα κλάσμα…

Σε μια δ.ε. $1^{ης}$ τάξης χωρίζονται οι μεταβλητές όταν στην εξίσωση μπορούμε να απομονώσουμε στο α' σκέλος της ισότητας όλα τα y με το dy και στο β' σκέλος όλα τα x με το dx. Δηλαδή:

$$F(x,y,y') = 0 \quad \Rightarrow \quad f(y)dy = g(x)dx$$

οπότε η λύση της δ.ε. προκύπτει από την ολοκλήρωση της προηγούμενης σχέσης.

Παράδειγμα $1^{ο}$: Να λυθεί η δ.ε.: $y' = f(x,y) = 2xy$, όταν δίνεται η αρχική συνθήκη $y(0)=e$.

Λύση: Η δοθείσα δ.ε. γράφεται:

$$\frac{dy}{dx} = 2xy \Rightarrow \frac{dy}{y} = 2xdx \Rightarrow \int\frac{dy}{y} = \int 2xdx \Rightarrow \ln y = x^2 + c \Rightarrow$$

$$y(x,c) = e^{x^2+c} = e^{x^2}e^{c} = Ce^{x^2}$$

Θέτοντας την αρχική συνθήκη στη γενική λύση έχουμε:

$$e = Ce^0 \quad ή \quad C = e$$

οπότε η μερική λύση:

$$y(x) = ee^{x^2} = e^{x^2+1}$$

Παρατήρηση: Κατά τη λύση της άσκησης αντικαταστάθηκε η ποσότητα e^c με την C. Δημιουργείται λοιπόν η απορία: Πώς είναι δυνατό να αντικαθιστούμε μία ποσότητα που είναι πάντα θετική [η e^c], με τη σταθερά C, η οποία ανήκει σ' ολόκληρο το R;

Η απάντηση έχει να κάνει με το ότι στις δ.ε. οι αυθαίρετες σταθερές μπορεί να είναι και μιγαδικές. Στη συγκεκριμένη περίπτωση εφαρμόζουμε τον τύπο του Euler, ο οποίος μετατρέπει σε απλό μιγαδικό αριθμό, την εκθετική έκφραση e^{m+ni}. Αποδεικνύεται (εύκολα, με τη βοήθεια των αναπτυγμάτων Mac-Laurin) η σχέση:

$$\boxed{e^{m+ni} = e^m e^{ni} = e^m(\sigma\upsilon\nu n + i\eta\mu n)} \qquad (Γ.2.1)$$

οπότε ισχύει:

$$e^{\ln c+\pi i} = c(\sigma\upsilon\nu\pi + i\eta\mu\pi) = -c$$

Παράδειγμα 2ᵒ: Να βρεθεί η γενική λύση της δ.ε.:

$$y' = -\frac{x-1}{y-2}$$

Λύση:

$$(y-2)dy = -(x-1)dx \quad \Rightarrow \quad \int (y-2)dy = -\int (x-1)dx \quad \Rightarrow$$

$$\frac{(y-2)^2}{2} = -\frac{(x-1)^2}{2} + c$$

ή

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = R^2$$

όπου θέσαμε $R^2 = 2c$, για να καταλήξουμε στη μονοπαραμετρική οικογένεια των ομόκεντρων κύκλων με κέντρο το σημείο (1,2) και ακτίνα R, παρόμοια της οποία είχαμε εξετάσει στο αντίστροφο πρόβλημα του ορισμού της δ.ε. που αντιστοιχεί σε δοσμένη οικογένεια καμπύλων (παράγραφος Γ.1.4.)…

Παράδειγμα 3^o: Σε μία καλλιέργεια βακτηρίων, ο ρυθμός μεταβολής του πληθυσμού τους είναι ανάλογος της τετραγωνικής ρίζας του πλήθους τους.

- Να καταστρωθεί η δ.ε. του προβλήματος (όπου λ ο συντελεστής αναλογίας)
- Να βρεθεί η γενική λύση της δ.ε..
- Να υπολογισθούν οι τιμές των λ και c (όπου c η αυθαίρετη σταθερά) εάν τη στιγμή της αρχικής μέτρησης (t=0) το πλήθος των βακτηρίων της καλλιέργειας ήταν 10^6 και τετραπλασιάστηκε σε 50 ώρες.

Λύση: Το πλήθος των βακτηρίων της καλλιέργειας είναι μία συνάρτηση του χρόνου y(t). Ο ρυθμός μεταβολής της είναι η παράγωγός της. Έτσι η δ.ε. του προβλήματος γράφεται:

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \lambda\sqrt{y} = \lambda y^{1/2}$$

στην οποία οι μεταβλητές χωρίζονται:

$$\int y^{-1/2}dy = \int \lambda dt \Rightarrow 2y^{1/2} = \lambda t + c \Rightarrow$$
$$\sqrt{y} = \frac{\lambda}{2}t + c$$

Αντικαθιστώντας τις δύο συνθήκες του προβλήματος έχουμε:

$$1000 = c$$
$$2000 = 25\lambda + c \quad \text{ή} \quad \lambda = 40$$

Γ.2.2. Ομογενείς δ.ε. 1^{ης} τάξης.

Για να ορισθούν οι ομογενείς δ.ε. χρειάζεται να ορισθεί η έννοια του βαθμού ομογένειας μιας συνάρτησης 2 μεταβλητών.

Ορισμός: Η συνάρτηση f(x,y) λέγεται ομογενής, k-βαθμού ομογένειας όταν ισχύει η σχέση:

$$f(cx,cy) = c^k f(x,y)$$

Παραδείγματα:

1^o) Η $f(x,y) = x^4 + x^2y^2 - xy^3$ είναι ομογενής 4^{ου} βαθμού ομογένειας διότι:

$$f(cx,cy) = (cx)^4 + (cx)^2(cy)^2 - (cx)(cy)^3 = c^4(x^4 + x^2y^2 - xy^3) = c^4f(x,y)$$

2ᵒ) Η συνάρτηση $f(x,y)=\frac{x^2-xy}{y^2}$ είναι ομογενής $0^{ου}$ βαθμού ομογένειας διότι:

$$f(cx,cy)=\frac{(cx)^2-cxcy}{(cy)^2}=\frac{c^2(x^2-xy)}{c^2y^2}=c^0f(x,y)=f(x,y)$$

Στις περιπτώσεις αυτές (όταν έχουμε μηδενικού βαθμού ομογένεια) η συνάρτηση f μπορεί να γραφεί και σαν συνάρτηση του κλάσματος των δύο μεταβλητών (δηλαδή του y/x ή του x/y). Πράγματι:

$$f(x,y)=\frac{x^2-xy}{y^2}=\frac{\frac{x^2-xy}{x^2}}{\frac{y^2}{x^2}}=\frac{1-{}^{y}\!/\!{}_{x}}{\left({}^{y}\!/\!{}_{x}\right)^2}=g(y/x)$$

Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με δ.ε. της μορφής y’ = f(x,y) όπου το β’ μέλος τους είναι συνάρτηση ομογενής, μηδενικού βαθμού ομογένειας, δηλαδή με δ.ε. που μπορούν να γραφούν υπό τη μορφή:

$$\mathbf{y' = \frac{dy}{dx} = f(x,y) = g(y/x)} \qquad (\Gamma.2.2)$$

Πολύ συχνά στις δ.ε. επιδιώκουμε να τις μετατρέψουμε σε δ.ε. χωριζόμενων μεταβλητών, με τη βοήθεια μιας αλλαγής μεταβλητής. Κι ενώ λέγεται «αλλαγή μεταβλητής» στην πραγματικότητα σημαίνει «αλλαγή συνάρτησης».

Έτσι λοιπόν εάν θέσουμε

$$z=\frac{y}{x}$$

ουσιαστικά αντικαθιστούμε την άγνωστη συνάρτηση y(x) με τη z(x). Βέβαια πρέπει να αντικατασταθεί και η παράγωγος y’ με την z’. Παραγωγίζοντας τη σχέση μετατροπής έχουμε:

$$y = xz \quad \Rightarrow \quad y' = z + xz'$$

Αντικαθιστώντας τις δύο προηγούμενες σχέσεις στη δ.ε. (Γ.2.2) έχουμε την νέα έκφρασή της:

$$z + xz' = g(z) \qquad \Rightarrow \qquad x\frac{dz}{dx}=g(z)-z$$

και η τελευταία αυτή μορφή της δ.ε. έχει μεταβλητές που χωρίζονται. Έχουμε:

$$\frac{dz}{g(z)-z}=\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|x|=\int\frac{dz}{g(z)-z}+c$$

απ’ όπου:

$$\boxed{x = Ce^{\int \frac{dz}{g(z)-z}}} \qquad (\Gamma.2.3)$$

όπου θέσαμε και πάλι $C = e^c$.

Παρατηρήσεις:

1. Ο τύπος (Γ.2.3) ορίζει τη λύση της ομογενούς δ.ε. σαν μια συνάρτηση $x=x(z,c)$, δηλαδή θεωρεί το x συνάρτηση της ανεξάρτητης μεταβλητής z. Βέβαια, επειδή στο τελικό αποτέλεσμα ξανα-αντικαθιστούμε το z με το κλάσμα y/x, τελικά η γενική λύση είναι μια πεπλεγμένη συνάρτηση της μορφής
$$\Phi(x\,,y,c) = 0$$
2. Όταν κατά τη λύση μιας δ.ε. χρησιμοποιούμε έτοιμους τύπους επίλυσης (σαν τον Γ.2.3), στους οποίους έχει ενσωματωθεί η αυθαίρετη σταθερά c, τότε κατά τη λύση των ενδιάμεσων ολοκληρωμάτων δεν προσθέτουμε τη σταθερά ολοκλήρωσης (+c).

Παράδειγμα: Να υπολογισθεί η γενική και η μερική λύση της δ.ε.:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}$$

για αρχική συνθήκη: $y(1) = 3$.

Λύση: Παρατηρούμε πως το β' μέλος της δ.ε. είναι ρητό, ενώ ο αριθμητής και ο παρονομαστής είναι ομογενείς συναρτήσεις $2^{ου}$ βαθμού. Επομένως το β' μέλος θα είναι συνάρτηση $0^{ου}$ βαθμού ομογένειας και μπορεί να γραφεί:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy} = \frac{3}{2}\frac{y}{x} - \frac{1}{2\,y/x} = g(y/x) = g(z) \qquad \text{όπου} \quad z = \frac{y}{x}$$

$$\int \frac{dz}{g(z)-z} = \int \frac{dz}{\frac{3z}{2} - \frac{1}{2z} - z} = \int \frac{dz}{\frac{z^2-1}{2z}} = \int \frac{2z}{z^2-1}dz =$$

$$= \int \frac{1}{z^2-1} d(z^2-1) = \ln(z^2-1)$$

Αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα του ολοκληρώματος στον τύπο (Γ.2.3) έχουμε τη γενική λύση:

$$x = ce^{\ln(z^2-1)} \quad \Rightarrow \quad x = c(z^2-1) \quad \Rightarrow \quad x = c(\frac{y^2-x^2}{x^2}) \quad \Rightarrow$$

$$y^2 - x^2 = cx^3$$

όπου θέσαμε c=1/c. Έτσι προκύπτει η γενική λύση της δ.ε.:

$$y(x,c) = \pm\sqrt{cx^3 + x^2}$$

Αντικαθιστώντας στη συνέχεια την αρχική συνθήκη y(1) = 3 υπολογίζουμε την τιμή της σταθεράς:

$$3 = \pm\sqrt{c+1}$$

απ' όπου προκύπτει πως c=8, ενώ παράλληλα απορρίπτεται και το πρόσημο μείον. Καταλήγουμε λοιπόν στη μερική λύση:

$$y(x) = \sqrt{8x^3 + x^2}$$

Γ.2.3. Γραμμικές δ.ε. 1ης τάξης.

Οι γραμμικές δ.ε. 1ης τάξης είναι ίσως οι εξισώσεις που συναντώνται περισσότερα στα προβλήματα Φυσικής γενικά, αλλά και της Μηχανικής ειδικότερα. Η μορφή τους είναι η εξής:

$$A(x)y' + B(x)y = \Gamma(x)$$

ή συνηθέστερα

$$\boxed{y' + P(x)y = Q(x)} \qquad (\Gamma.2.4)$$

όπου P(x)=B(x)/A(x) και Q(x)=Γ(x)/A(x)

Υπολογισμός της γενικής λύσης της γραμμικής δ.ε. (Γ.2.4): Για άλλη μία φορά επιχειρούμε να βρούμε ένα μετασχηματισμό, ο οποίος να μας οδηγεί σε δ.ε. χωριζόμενων μεταβλητών. Ας πάμε ψάχνοντας. Θεωρούμε πως η άγνωστη συνάρτηση y(x) είναι γινόμενο δύο νέων συναρτήσεων (της g(x) και της u(x)), των οποίων τη μορφή αγνοούμε:

$$y(x) = g(x)u(x) \quad \Rightarrow \quad y' = g'u + gu'$$

και η δ.ε. γίνεται

$$g'u + gu' + P(x)gu = Q(x) \quad \Rightarrow \quad g'u + g(u' + P(x)u) = Q(x)$$

Η τελευταία αυτή εξίσωση απλοποιείται (και γίνεται χωριζόμενων μεταβλητών) εάν επιλέξουμε τη συνάρτηση u(x) έτσι ώστε να μηδενίζεται η παρένθεση:

$$u' + P(x)u = 0$$

η σχέση αυτή είναι μία δ.ε. χωριζόμενων μεταβλητών, από την οποία υπολογίζεται η συνάρτηση u(x):

$$\frac{du}{u} = -P(x)dx \quad \Rightarrow \quad \ln u = -\int P(x)dx \quad \Rightarrow$$

$$u(x) = e^{-\int P(x)dx}$$

Επιλέγοντας λοιπόν τη συνάρτηση u όπως πιο πάνω, (οπότε μηδενίζεται η παρένθεση u’ + P(x)u), η δ.ε. γίνεται:

$$g'u(x) = Q(x) \quad \Rightarrow \quad g' = u^{-1}(x)Q(x) \quad \text{οπότε}$$

$$g(x) = \int u^{-1}(x)Q(x)dx = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + c$$

Τώρα πλέον υπολογίζουμε την συνάρτηση y(x):

$$y(x) = u(x)g(x) \qquad \Rightarrow$$

$$\boxed{y(x) = e^{-\int P(x)dx}\left[c + \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\right]} \qquad (\Gamma.2.5)$$

Παράδειγμα 1^o: Να υπολογισθεί η γενική και η μερική λύση της δ.ε.:

$y' = x + y$ με αρχική συνθήκη $y(0) = 0$

Λύση: Γράφοντας τη δ.ε. υπό τη μορφή:

$$y' - y = x$$

διαπιστώνουμε πως είναι γραμμική με $P(x) = -1$ και $Q(x) = x$. Υπολογίζουμε λοιπόν τα δύο ολοκληρώματα που εμφανίζονται στον τύπο (Γ.2.5), εφαρμόζοντας και πάλι την παρατήρηση της προηγούμενης παραγράφου, σύμφωνα με την οποία δεν προσθέτουμε την σταθερά ολοκλήρωσης κατά την επίλυση ολοκληρωμάτων που θα τοποθετηθούν σε γενικό τύπο λύσης, στον οποίο έχει ήδη ενσωματωθεί η σταθερά c.

- $\int P(x)dx = -\int dx = -x$
- $\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx = \int xe^{-x}dx = -\int xde^{-x} = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx =$
  $= -e^{-x}(x+1)$

οπότε η γενική λύση δίνεται από τη σχέση:

$$y(x,c) = e^x[c-e^{-x}(x+1)] = ce^x - x - 1$$

ενώ η μερική λύση $\quad 0 = y(0) = c - 1 \quad$ ή $\quad c = 1$

οπότε

$$y(x) = e^x - x - 1$$

Παράδειγμα 2^o: Να υπολογισθεί η γενική και η μερική λύση της δ.ε.:

$xy' = x^3 + 2y$ με αρχική συνθήκη $y(1) = 2$

Λύση: Γράφοντας τη δ.ε. υπό τη μορφή:

$$y' - 2y/x = x^2$$

διαπιστώνουμε πως είναι γραμμική με $P(x) = -2/x$ [ο συντελεστής του y] και $Q(x) = x^2$. Υπολογίζουμε και πάλι τα δύο ολοκληρώματα του τύπου (Γ.2.5),

- $\int P(x)dx = -\int \frac{2}{x}dx = -2\ln x = \ln x^{-2}$
- $\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx = \int x^2 e^{\ln x^{-2}}dx = \int x^2 x^{-2}dx = \int dx = x$

Η γενική λύση:

$$y(x,c) = e^{-\ln x^{-2}}[c + x] = cx^2 + x^3$$

και η μερική λύση: $\quad 2 = c + 1 \quad$ ή $\quad c = 1$

$$y(x) = x^3 + x^2$$

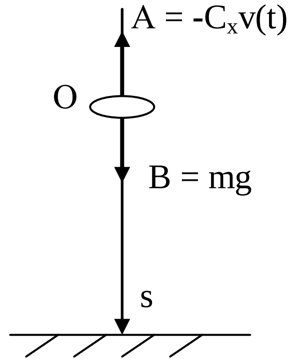
Παράδειγμα 3^o: Ένας αλεξιπτωτιστής πηδάει από το ελικόπτερο και τη στιγμή που ανοίγει το αλεξίπτωτό του (έστω t=0 με s(0)=0) έχει ήδη ταχύτητα πτώσης 15 m/sec. Δίνονται:

- Η αντίσταση του αέρα είναι ανάλογη της ταχύτητας κίνησης (οι ταχύτητες που αναπτύσσονται θεωρούνται μικρές), ενώ ο συντελεστής αεροδυναμικής αντίστασης ισούται με C_x=160 Kgr/sec.
- Η μάζα του αλεξιπτωτιστή m=80 Kgr ($g = 10$ m/sec^2)

Ζητούνται:

- Η κατάστρωση της δ.ε. του προβλήματος.
- Η συνάρτηση της ταχύτητας της κίνησης v=v(t).
- Η συνάρτηση της θέσης s=s(t).
- Η οριακή ταχύτητα με την οποία θα φθάσει στο έδαφος ο αλεξιπτωτιστής.

Λύση: Επιλέγουμε σαν σύστημα αναφοράς την κατακόρυφη ευθεία πάνω στην οποία κινείται ο αλεξιπτωτιστής, με κέντρο O το σημείο στο οποίο «ανοίγει» ολοκληρωτικά το αλεξίπτωτό του, και ξεκινά να μετρά ο χρόνος. Η άγνωστη συνάρτηση, την οποία αναζητούμε, είναι η συνάρτηση θέσης του αλεξιπτωτιστή $s=s(t)$.



Έτσι έχουμε σαν αρχικές συνθήκες τις:

Για $t=0$, $s(0)=0$ m και $v(0) = 20$ m/sec

Στον αλεξιπτωτιστή επιδρούν δύο δυνάμεις:

- Το βάρος του $B = mg$ [θεωρούμε πως δεν απέχει πολύ από την επιφάνεια της Γης].
- Η αντίσταση της ατμόσφαιρας $A = -C_x v(t)$, [είναι ανάλογη της ταχύτητας] όπου το αρνητικό πρόσημο δείχνει πως το διάνυσμα της αντίστασης έχει αντίθετη φορά από αυτό της ταχύτητας.

Θέτοντας $a(t)=\ddot{s}$ και $v(t)=\dot{s}$, η γνωστή σχέση $F = ma$ γίνεται:

$$m\ddot{s} = mg - C_x\dot{s}$$

που είναι μια δ.ε. την οποία δεν ξέρουμε να λύνουμε, διότι είναι $2^{ης}$ τάξης. Παρατηρούμε όμως πως πουθενά δεν εμφανίζεται η συνάρτηση θέσης $s(t)$. Στις περιπτώσεις αυτές θεωρούμε σαν άγνωστη συνάρτηση της δ.ε. την πρώτη παράγωγο [εδώ την ταχύτητα $v(t)$], μειώνοντας με τον τρόπο αυτό την τάξη της δ.ε..

$$m\dot{v} + C_x v = mg \qquad \text{ή} \qquad \dot{v} + \frac{C_x}{m}v = g$$

η οποία είναι γραμμική δ.ε., με $P(t) = \dfrac{C_x}{m}$ και $Q(t) = g$

Λύνουμε λοιπόν τα ολοκληρώματα:

- $\int P(t)dt = \int \frac{C_x}{m}dt = \frac{C_x}{m}t$
- $\int Q(t)e^{\int P(t)dt}dt = \int ge^{\frac{C_x}{m}t}dt = \frac{mg}{C_x}\int e^{\frac{C_x}{m}t}d\frac{C_x}{m}t = \frac{mg}{C_x}e^{\frac{C_x}{m}t}$

Γενική λύση:

$$v(t,c) = e^{-\frac{C_x}{m}t}\left[c + \frac{mg}{C_x}e^{\frac{C_x}{m}t}\right] = ce^{-\frac{C_x}{m}t} + \frac{mg}{C_x} \qquad (\Gamma.2.6)$$

ενώ ολοκληρώνοντας τη σχέση της ταχύτητας, υπολογίζουμε τη συνάρτηση θέσης s(t):

$$s(t,c,c_2) = \int\left[ce^{-\frac{C_x}{m}t} + \frac{mg}{C_x}\right]dt = -c\frac{m}{C_x}e^{-\frac{C_x}{m}t} + \frac{mg}{C_x}t + c_2$$

Αντικαθιστούμε τώρα τις τιμές των ποσοτήτων m, g και C_x, φθάνοντας στις σχέσεις:

$$v(t,c) = ce^{-2t} + 5 \quad \text{και} \quad s(t,c,c_2) = -\frac{c}{2}e^{-2t} + 5t + c_2$$

που αποτελούν τη γενική λύση του προβλήματος. Με τη βοήθεια των αρχικών συνθηκών υπολογίζουμε τις δύο αυθαίρετες σταθερές c και c_2, βρίσκοντας τη μερική λύση που αντιστοιχεί…

v(0) = 15 = c + 5 ή c = 10
s(0) = 0 = -c/2 + c_2 ή c_2 = 5

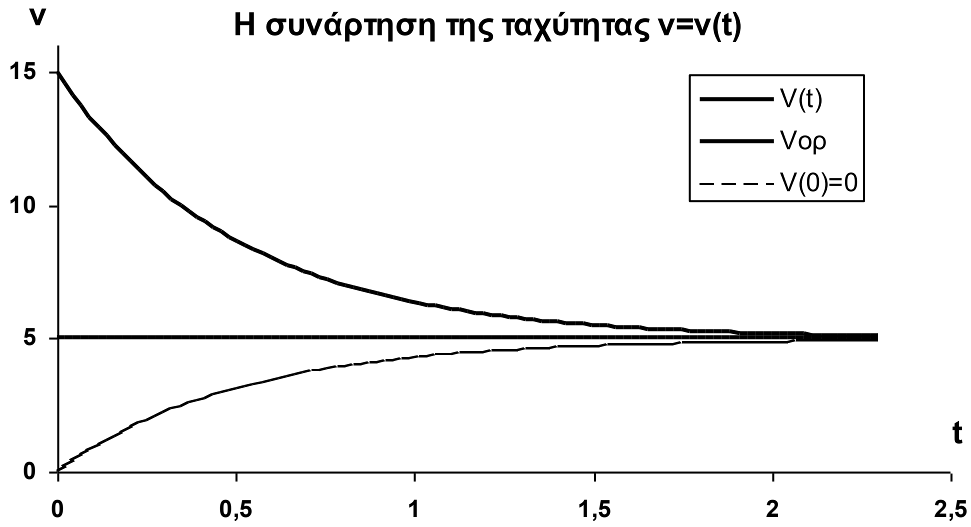
$$v(t) = 10e^{-2t} + 5 \quad \text{και} \quad s(t,c,c_2) = -5e^{-2t} + 5t + 5 \qquad (\Gamma.2.7)$$

Παρατηρήσεις:

1. Στις σχέσεις Γ.2.6 και Γ.2.7 που περιγράφουν τη συνάρτηση της ταχύτητας, παρατηρούμε πως έχουμε το άθροισμα δύο ποσοτήτων. Η πρώτη είναι εκθετική, με αρνητικό εκθέτη και τείνει στο μηδέν όταν μεγαλώνει το t, γι’αυτό και λέγεται «μεταβατική».
2. Η δεύτερη ποσότητα είναι σταθερή και είναι αυτή που θα παραμείνει όταν μηδενιστεί η μεταβατική, για το λόγο αυτό λέγεται παραμένουσα. Ακόμη συχνότερα λέγεται **«οριακή ταχύτητα»,** μια και είναι το όριο της ταχύτητας, όταν ο χρόνος τείνει στο άπειρο.
3. Στη γενική λύση, η παραμένουσα ταχύτητα είναι η $v_\pi = mg/C_x$ και υπολογίζεται χωρίς να λυθεί η δ.ε.. Σκεπτόμαστε πως η οριακή ταχύτητα είναι η ταχύτητα για την οποία η ατμοσφαιρική αντίσταση εξισώνεται με το βάρος του αλεξιπτωτιστή, οπότε μηδενίζεται η συνισταμένη των δυνάμεων που επενεργούν στον αλεξιπτωτιστή. Έτσι αυτός θα εκτελεί μια ευθύγραμμη και ομαλή κίνηση.

$$F_{ολ} = mg - C_x v(t) = 0 \quad \text{απ' όπου} \quad v_{ορ} = \frac{mg}{C_x}$$

Γραφική παράσταση: Στην παρακάτω παράσταση εμφανίζεται η ταχύτητα v(t) όταν έχουμε αρχική συνθήκη: v(0) = 15 m/s, καθώς και αυτή που αντιστοιχεί στην αρχική συνθήκη: v(0) = 0 m/s. Στην πρώτη περίπτωση η ταχύτητα καταλήγει στην οριακή [$v_{ορ}$ = 5 m/s], ξεκινώντας από την v(0) = 15 m/s, διαρκώς μειούμενη. Στη δεύτερη, η ταχύτητα είναι μηδέν [για t=0] και αυξάνει τείνοντας στην οριακή…



Παράδειγμα 4^o: Θα λύσουμε τώρα το παράδειγμα που είδαμε στο 2^o παράδειγμα της παραγράφου Γ.1.3. Ένα ποτήρι νερό, του οποίου η θερμοκρασία μεταβάλλεται με το χρόνο (θ(t)), μεταφέρεται σε ανοικτό χώρο με θερμοκρασία $θ_x$. Ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας του νερού είναι ανάλογος της διαφοράς ανάμεσα στη θερμοκρασία του νερού και του χώρου, με ένα συντελεστή αναλογίας λ. Να βρεθεί η συνάρτηση που περιγράφει την μεταβολή της θερμοκρασίας του νερού θ(t).

Λύση: Είδαμε, στην παράγραφο Γ.1.3, πως η δ.ε. που περιγράφει το πιο πάνω πρόβλημα είναι η:

$$\frac{dθ(t)}{dt} = -λ(θ(t) - θ_x)$$

η οποία μπορεί να θεωρηθεί σαν γραμμική δ.ε., εάν γραφεί υπό τη μορφή:

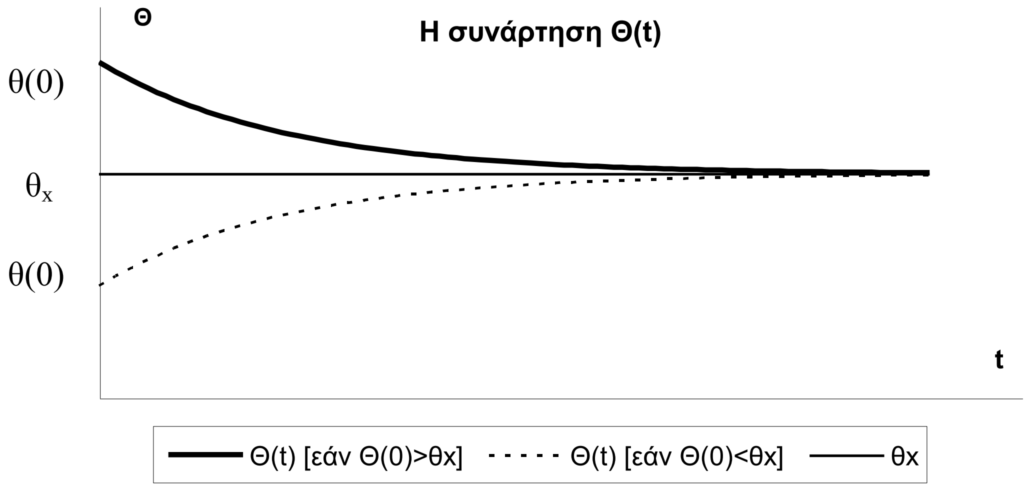
$$\dot{θ} + λθ = λθ_x$$

Λύνεται όμως και σαν χωριζόμενων μεταβλητών:

$$\frac{d\theta}{\theta-\theta_x} = -\lambda dt \quad \Rightarrow \quad \int \frac{d\theta}{\theta-\theta_x} = -\int \lambda dt \quad \Rightarrow \quad \ln(\theta-\theta_x) = -\lambda t + c$$

$$\theta(t) = e^{-\lambda t+c} + \theta_x = Ce^{-\lambda t} + \theta_x$$

όπου θέσαμε $C = e^c$. Σαν άσκηση ας λυθεί από τον αναγνώστη η πιο πάνω δ.ε. και σαν γραμμική (δίνοντας φυσικά το ίδιο αποτέλεσμα).



Γ.2.4. Πλήρεις δ.ε. 1ης τάξης. (Ολοκλήρωση των ολικών διαφορικών)

Στην παράγραφο Α.5, στο κεφάλαιο των μερικών παραγώγων, σε μία θεωρητική άσκηση (το 1ο παράδειγμα) δείξαμε πως η παράσταση: $A = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ είναι ολικό διαφορικό μιας συνάρτησης f όταν ισχύει η ισότητα:

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}} \qquad (Γ.2.8)$$

Στην τωρινή παράγραφο θα ασχοληθούμε με δ.ε. της μορφής:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \qquad (Γ.2.9)$$

Εάν το αριστερό μέλος της δ.ε. (Γ.2.9) είναι ολικό κάποιας συνάρτησης f(x,y) [πράγμα που θα συμβαίνει εάν ισχύει η (Γ.2.8)], τότε η δ.ε. γράφεται:

$$df(x,y) = 0$$

και διαβάζεται:

- «Το ολικό διαφορικό της f είναι μηδέν», ή αλλιώς
- «Η ολική μεταβολή της τιμής της f(x,y), όταν μεταβάλλονται τα x και y είναι μηδέν», ή αλλιώς
- «Η συνάρτηση f(x,y) είναι σταθερή»

Επομένως, στην περίπτωση αυτή, η γενική λύση της δ.ε. (Γ.2.9) είναι η προφανής:

$$f(x,y) = c \qquad (\Gamma.2.10)$$

Άρα το πρόβλημα στις πλήρεις δ.ε. είναι να υπολογίσουμε τη συνάρτηση f(x,y), της οποίας είναι ολικό διαφορικό, το α' μέλος της δ.ε.. Αυτή υπολογίζεται εύκολα αν αναλογισθούμε τη σχέση του ολικού διαφορικού μιας συνάρτησης δύο μεταβλητών:

$$df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

Συγκρίνοντάς το με το ά μέλος της δ.ε. έχουμε πως:

$$P(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{και} \quad Q(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Από τις σχέσεις αυτές προκύπτουν δύο εκφράσεις για τη συνάρτηση f(x,y):

$$f(x,y) = \int P(x)dx + c_1(y) \quad \text{και} \quad f(x,y) = \int Q(y)dy + c_2(x)$$

όπου στην πρώτη ολοκλήρωση [ως προς x] η σταθερά ολοκλήρωσης είναι, εν γένει, μια συνάρτηση του y, μια και το y είναι σταθερό και στη μερική παραγώγιση ως προς x, και στην ολοκλήρωση ως προς x . Όμοια στο δεύτερο ολοκλήρωμα η σταθερά ολοκλήρωσης είναι συνάρτηση του x. Η σύγκριση των δύο αποτελεσμάτων δίνει την πλήρη μορφή της συνάρτησης [κατά προσέγγιση μιας σταθεράς c, η οποία εμφανίζεται στη γενική λύση (Γ.2.10)].

Παράδειγμα 1^o: Να βρεθεί η γενική και η μερική λύση της δ.ε.

$$\mathbf{(2x\text{-}6xy\ln x\text{-}3xy)dx + (3y^2\text{-}3x^2\ln x)dy = 0} \quad , \quad \text{με αρχική συνθήκη: } y(1) = 1.$$

Λύση: Αρχικά θα διαπιστώσουμε το εάν το α’ μέλος της δ.ε. είναι ολικό διαφορικό κάποιας συνάρτησης f(x,y):

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[2x - 6xy\ln x - 3xy\right] = 6x\ln x - 3x$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[3y^2 - 3x^2\ln x\right] = 6x\ln x - 3x$$

Από την ισότητα των προηγούμενων δύο μερικών παραγώγων συμπεραίνουμε πως το α’ μέλος της δ.ε. είναι πράγματι το ολικό διαφορικό μιας συνάρτησης f(x,y). Ας την υπολογίσουμε:

$$f(x,y) = \int\left[2x - 6xy\ln x - 3xy\right]dx = x^2 - 3x^2y\ln x - \frac{3}{2}x^2y + \frac{3}{2}x^2y + c_1(y) =$$
$$= x^2 - 3x^2y\ln x + c_1(y) \quad ^{(1)}$$

$$f(x,y) = \int\left[3y^2 - 3x^2\ln x\right]dy = y^3 - 3x^2y\ln x + c_2(x)$$

Συγκρίνοντας τις δύο εκφράσεις της f(x,y) καταλήγουμε:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 3x^2y\ln x$$

Επομένως, η γενική λύση της δοσμένης δ.ε. είναι η:

$$x^2 + y^2 - 3x^2y\ln x = c$$

ενώ η μερική λύση που αντιστοιχεί στην αρχική συνθήκη της εκφώνησης:

$$1^2 + 1^2 - 3*1^2*1*0 = c \quad \text{οπότε} \quad c = 2$$

που δίνει τη συνάρτηση:

$$x^2 + y^2 - 3x^2y\ln x = 2$$

---

(1) *Η λύση του ολοκληρώματος:*

$$\int 6x\ln x\,dx = 3\int \ln x\,dx^2 = 3x^2\ln x - 3\int x^2 d\ln x = 3x^2\ln x - 3\int x\,dx = 3x^2\ln x - \frac{3}{2}x^2$$

Γ.2.5. Ασκήσεις:

1η) Να βρεθούν οι γενικές και οι μερικές λύσεις των δ.ε., για τις προτεινόμενες αρχικές συνθήκες:

- $2ydy - \frac{\ln x}{x}dx = 0$ $\quad y(1) = 1$
- $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{xy}$ $\quad y(1) = 0$
- $(2x+\eta\mu y)dx + (x\sigma\upsilon\nu y-9y^2-1/y)dy = 0$ $\quad y(0) = 1$
-