Γ.2. Δ.Ε. $2^{ης}$ τάξης.

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με δ.ε. οι οποίες περιέχουν μέχρι και τη δεύτερη παράγωγο της άγνωστης συνάρτησης (y(x)). Ως γνωστόν οι γενική μορφή μιας τέτοιας δ.ε. είναι η:

$$F(x,y,y',y'') = 0$$

και επομένως η γενική τους λύση θα είναι μια διπαραμετρική οικογένεια καμπύλων, της μορφής:

$$y = y(x,c_1,c_2)$$

Στις παραγράφους που ακολουθούν θα ασχοληθούμε μόνο με γραμμικές δ.ε. $2^{ης}$ ταξης. Οι εξισώσεις αυτές λύνονται εύκολα και με τρόπο συστηματικό, ενώ είναι και ιδιαίτερα χρήσιμες σε θέματα Μηχανικής (ταλαντώσεις).

Γ.3.1. Γραμμικές δ.ε. $2^{ης}$ τάξης, με σταθερούς συντελεστές και μηδενικό β' μέλος (Ομογενείς).

Πρόκειται για δ.ε. της μορφής:

$$\boldsymbol{\alpha y'' + \beta y' + \gamma y = 0} \quad \textbf{με} \quad \boldsymbol{\alpha,\beta,\gamma} \in \mathrm{R}$$

ή καλύτερα

$$\boxed{\mathbf{y'' + ay + by = 0}} \qquad (\Gamma.3.1)$$

όπου τα $a = \beta/\alpha$ και $b = \gamma/\alpha$ είναι πραγματικές σταθερές.

Στην επίλυση των δ.ε. αυτής της μορφής μας βοηθούν κάποια θεωρήματα τα οποία θα αναφέρουμε στη συνέχεια και τα οποία αποδεικνύονται πολύ εύκολα. Αρχικά όμως χρειαζόμαστε τον ορισμό των γραμμικά ανεξάρτητων συναρτήσεων.

Ορισμός: ν συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής ονομάζονται γραμμικά ανεξάρτητες όταν δεν είναι δυνατό οποιαδήποτε από αυτές να γραφεί σαν γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων ν-1 συναρτήσεων.

Για ευκολότερη κατανόηση θα δώσουμε το παράδειγμα τριών συναρτήσεων και δύο συναρτήσεων (περίπτωση που μας ενδιαφέρει άμεσα).

i) Οι συναρτήσεις $f_1(x)$, $f_2(x)$ και $f_3(x)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες όταν καμιά απ' αυτές δεν μπορεί να γραφεί σαν γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων δύο. Για παράδειγμα, δεν μπορούν να υπάρξουν σταθερές α και β, για τις οποίες να ισχύει η σχέση:

$$f_1(x) = \alpha f_2(x) + \beta f_3(x)$$

ii) Όμοια, στην περίπτωση των δύο συναρτήσεων, οι $f_1(x)$ και $f_2(x)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες όταν δεν υπάρχει σταθερά α, για την οποία να ισχύει:

$$f_1(x) = \alpha f_2(x)$$

ή αλλιώς

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \alpha$$

Άρα οι συναρτήσεις:

$$f_1(x) = x^2 ,\ f_2(x) = 3x ,\ f_3(x) = e^x ,\ f_4(x) = e^{3x} \quad \text{κ.λ.π.}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητες ανά δύο, ενώ οι συναρτήσεις:

$$f_1(x) = x^2 ,\ f_2(x) = 3x^2 ,\ f_3(x) = -5x^2 ,\ f_4(x) = ex^2 \quad \text{κ.λ.π.}$$

είναι, ανά δύο, γραμμικά εξαρτημένες.

Γενικό Θεώρημα: Έστω η δ.ε. $y'' + ay' + by = 0$. Εάν οι συναρτήσεις $y_1(x)$ και $y_2(x)$ είναι δύο γραμμικά ανεξάρτητες μερικές λύσεις της δ.ε. αυτής, τότε:

- Λύσεις της δ.ε. θα είναι και οι συναρτήσεις $c_1y_1(x)$ και $c_2y_2(x)$.
- Λύση της δ.ε. θα είναι επίσης και το άθροισμα $y(x,c_1,c_2) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$
- Η τελευταία αυτή συνάρτηση θα είναι η γενική λύση της δοθείσας δ.ε..

Ας αποδείξουμε εδώ πως εάν οι γραμμικά ανεξάρτητες συναρτήσεις $y_1(x)$ και $y_2(x)$ είναι λύσεις της δ.ε. [άρα την επαληθεύουν], τότε λύση της θα είναι και η $y(x,c_1,c_2) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η y επαληθεύει τη δ.ε.:

$$\left.\begin{aligned} y &= y_1 + y_2 \\ y' &= y_1' + y_2' \\ y'' &= y_1'' + y_2'' \end{aligned}\right| \begin{matrix} [y''+ay'+by = 0] \\ \Longrightarrow \end{matrix} \quad y_1''+y_2'' + a(y_1'+y_2') + b(y_1 + y_2) = 0 \Longrightarrow$$

$$\underbrace{(y_1'' + ay_1' + by_1)}_{=0} + \underbrace{(y_2'' + ay_2' + by_2)}_{=0} = 0$$

όπου η κάθε παρένθεση μηδενίζεται επειδή οι συναρτήσεις $y_1(x)$ και $y_2(x)$ είναι λύσεις της δ.ε.. Τέλος η συνάρτηση $y(x,c_1,c_2) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ είναι η γενική λύση της δ.ε. $y''+ay+by = 0$ [η οποία είναι $2^{ης}$ τάξης], διότι την επαληθεύει, ενώ περιέχει δύο αυθαίρετες σταθερές(1).

Επομένως η επίλυση της δ.ε. (Γ.3.1) καταλήγει στην αναζήτηση δύο γραμμικά ανεξάρτητων μερικών λύσεών της. Αναζητούμε λοιπόν μερικές λύσεις της μορφής $y(x) = e^{px}$ (όπου το p είναι μια σταθερά, πραγματική ή μιγαδική). Παραγωγίζουμε δύο φορές την y και θέτουμε τις y, y' και y'' στη δ.ε.:

$$\left.\begin{array}{l} y \;= e^{px} \\ y' \;= pe^{px} \\ y'' = p^2e^{px} \end{array}\right| \begin{array}{c} [y''+ay'+by = 0] \\ \Longrightarrow \end{array} \quad p^2e^{px} + ape^{px} + be^{px} = 0 \;\Longrightarrow$$

$$e^{px}(p^2+ap+b) = 0$$

Επειδή η συνάρτηση e^{px} δεν μηδενίζεται ποτέ(2), η πιο πάνω εξίσωση επαληθεύεται όταν μηδενίζεται το δευτεροβάθμιο πολυώνυμο (ως προς p) της παρένθεσης. Καταλήγουμε λοιπόν πως η συνάρτηση e^{px} είναι λύση της γραμμικής δ.ε. όταν το p είναι ρίζα του τριωνύμου:

$$\boxed{\mathbf{p^2 + ap + b = 0}} \qquad (Γ.3.2)$$

που ονομάζεται **χαρακτηριστική εξίσωση (χ.ε.) της γραμμικής δ.ε..** Έχουμε λοιπόν τη γενική μέθοδο λύσης της γραμμικής - ομογενούς δ.ε. …

Γενική μέθοδος: Έστω η δ.ε. $y''+ay'+by = 0$. Υπολογίζουμε τις δύο ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης:

$$p^2 + ap + b = 0 \qquad τις \qquad \rho_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

---

(1) *Είναι αναγκαίο το να βρεθούν 2 μερικές λύσεις γραμμικά ανεξάρτητες. Εάν για παράδειγμα, οι συναρτήσεις $y_1(x)$ και $y_2(x)$ ήταν γραμμικά εξαρτημένες, τότε θα ίσχυε η σχέση: $y_1(x) = \kappa y_2(x)$, οπότε η «γενική λύση»*

$$y(x,c_1,c_2) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = c_1\kappa y_2(x) + c_2y_2(x) = y_2(x)[c_1\kappa+c_2] = Cy_2(x)$$

περιέχει μόνο μία αυθαίρετη σταθερά.

(2) *Όπως είδαμε στην παράγραφο Γ.2.1, ο τύπος του Euler για την εκθετική συνάρτηση με μιγαδικό εκθέτη:*

$$e^{m+ni} = e^m e^{ni} = e^m(\sigma\upsilon\nu\, n + i\eta\mu\, n)$$

δίνει αρνητικές τιμές (εάν για παράδειγμα n=π). Δεν υπάρχει όμως όρισμα (δηλ. τιμή για το n), που να μηδενίζει την εκθετική συνάρτηση.

οπότε έχουμε δύο μερικές λύσεις της δ.ε., που είναι γραμμικά ανεξάρτητες (εάν $\rho_1 \neq \rho_2$). Επομένως η γενική λύση δίνεται από τη σχέση:

$$\boxed{y(x, c_1, c_2) = c_1 e^{\rho_1 x} + c_2 e^{\rho_2 x}} \qquad (\Gamma.3.3)$$

Διακρίνουμε τις παρακάτω τρεις περιπτώσεις, ανάλογα με το είδος των ριζών της χαρακτηριστικής εξίσωσης: Την περίπτωση των δύο πραγματικών διακεκριμένων ριζών, την περίπτωση μιας διπλής πραγματικής ρίζας και την περίπτωση των μιγαδικών ριζών. Ας το δούμε αναλυτικά…

i) Η χ.ε. έχει δύο πραγματικές ρίζες.

Η διακρίνουσα της χ.ε. [$\Delta = a^2 - 4b$] είναι θετική και η λύση περιγράφεται από τη σχέση Γ.3.3.

Παράδειγμα: Να υπολογισθεί η γενική και η μερική λύση της δ.ε.
$y'' + y' - 6y = 0$ με αρχικές συνθήκες $y(0) = 1$ και $y'(0) = 7$.

Λύση: Γράφουμε την χ.ε. και υπολογίζουμε τις ρίζες της:

$$p^2 + p - 6 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \rho_1 = -3 \text{ και } \rho_2 = 2$$

Η γενική λύση:

$$\mathbf{y(x,c_1,c_2) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x}}$$

Για τον υπολογισμό της μερικής λύσης είμαστε υποχρεωμένοι να βρούμε την παράγωγο της γενικής λύσης:

$$\mathbf{y'(x,c_1,c_2) = -3c_1 e^{-3x} + 2c_2 e^{2x}}$$

Αντικαθιστώντας στις σχέσεις των y και y’, τις αρχικές συνθήκες $y(0) = 1$ και $y'(0) = 7$, καταλήγουμε σε ένα σύστημα 2 εξισώσεων με αγνώστους τις δύο αυθαίρετες σταθερές:

$$\left.\begin{array}{r} c_1 + c_2 = 1 \\ -3c_1 + 2c_2 = 7 \end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} c_1 = -1 \ ^{(1)} \\ c_2 = 2 \end{array}$$

---

(1) *Εάν οι αρχικές συνθήκες ήταν $y(0) = 1$ και $y'(0) = 2$, τότε η τιμή των σταθερών θα ήταν $c_1=0$ και $c_2=1$, πράγμα που δεν ενοχλεί καθόλου…*

και η μερική λύση που προκύπτει:

$$\mathbf{y(x) = -e^{-3x} + 2e^{2x}}$$

ii) Η χ.ε. έχει μία διπλή πραγματική ρίζα.

Η διακρίνουσα της χ.ε. [$\Delta = a^2-4b$] μηδενίζεται και δίνει μία διπλή πραγματική ρίζα: $\rho_1=\rho_2=\rho$. Το πρόβλημα στην περίπτωση αυτή είναι πως η χ.ε. δίνει μία μόνο μερική λύση της δ.ε. [την $y_1(x)=e^{\rho x}$], ενώ χρειαζόμαστε δύο (και μάλιστα γραμμικά ανεξάρτητες). Θα δείξουμε πως στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση $y_2(x) = xe^{\rho x}$ είναι επίσης μερική λύση της δ.ε., ενώ είναι γραμμικά ανεξάρτητη της y_1.

Πράγματι, παραγωγίζουμε την y_2 και αντικαθιστούμε στη δ.ε.:

$$\left.\begin{aligned} y_2(x) &= xe^{\rho x} \\ y_2'(x) &= e^{\rho x} + \rho xe^{\rho x} = e^{\rho x}(\rho x+1) \\ y_2''(x) &= \rho e^{\rho x} + \rho e^{\rho x}(\rho x+1) = \rho e^{\rho x}(\rho x+2) \end{aligned}\right| \quad \begin{array}{c}[y''+ay'+by = 0] \\ \Rightarrow \end{array}$$

$$\rho e^{\rho x}(\rho x+2) + ae^{\rho x}(\rho x+1) + bxe^{\rho x} = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$e^{\rho x}[\rho^2x+2\rho+a\rho x+a+bx] = e^{\rho x}[x(\rho^2+a\rho+b) + 2\rho + a] = 0$$

Το περιεχόμενο της αγκύλης είναι ίσο με το μηδέν διότι:

- είναι μηδέν η παρένθεση $(\rho^2+a\rho+b)$, μια και είναι η ρ είναι ρίζα του τριωνύμου $p^2+ap+b = 0$.
- Το a είναι ίσο με το -2ρ, διότι είναι ο συντελεστής του πρωτοβάθμιου όρου στο τριώνυμο: p^2+ap+b [(1)].

Άρα η γενική λύση της ομογενούς δ.ε. όταν η χ.ε. έχει μία διπλή ρίζα ρ, δίνεται από τη σχέση:

$$\boxed{\mathbf{y(x,c_1,c_2) = c_1e^{\rho x} + c_2xe^{\rho x}}} \qquad (\Gamma.3.4)$$

[(1)] *Ως γνωστό εάν οι ρ_1 και ρ_2 είναι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης, τότε αυτή γράφεται σαν γινόμενο παραγόντων:*

$$p^2+ap+b = (x-\rho_1)(x-\rho_2) = p^2 - (\rho_1+\rho_2)p + \rho_1\rho_2$$

απ' όπου προκύπτουν οι γνωστοί τύποι του Vieta:

$$a = -(\rho_1+\rho_2) \quad \text{και} \quad b = \rho_1\rho_2$$

επομένως, στην περίπτωση της διπλής ρίζας ($\rho=\rho_1=\rho_2$) ισχύει: $a= -2\rho$

Παράδειγμα: Να υπολογισθεί η γενική και η μερική λύση της δ.ε.
$y'' - 10y' + 25y = 0$ με αρχικές συνθήκες $y(0) = 1$ και $y'(0) = 2$.

Λύση: Γράφουμε την χ.ε. και υπολογίζουμε τις ρίζες της:

$$p^2 - 10p + 25 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \rho_1 = \rho_2 = 5$$

Η γενική λύση:

$$\mathbf{y(x,c_1,c_2) = c_1e^{5x} + c_2xe^{5x}}$$

Για τον υπολογισμό της μερικής λύσης είμαστε υποχρεωμένοι να βρούμε την παράγωγο της γενικής λύσης:

$$\mathbf{y'(x,c_1,c_2) = 5c_1e^{5x} + c_2e^{5x} + 5c_2xe^{5x} = e^{5x}(5c_1 + c_2 + 5c_2x)}$$

Αντικαθιστώντας στις σχέσεις των y και y', τις αρχικές συνθήκες $y(0) = 1$ και $y'(0) = 2$, καταλήγουμε σε ένα σύστημα 2 εξισώσεων με αγνώστους τις δύο αυθαίρετες σταθερές:

$$\left.\begin{array}{r} c_1 \quad = 1 \\ 5c_1 + c_2 = 2 \end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} c_1 = 1 \\ c_2 = -3 \end{array}$$

οπότε η μερική λύση:

$$\mathbf{y(x) = e^{5x} - 3xe^{5x}}$$

iii) Η χ.ε. έχει δύο μιγαδικές (συζυγείς) ρίζες.

Η περίπτωση αυτή είναι κάπως πιο πολύπλοκη, αλλά και η πιο ενδιαφέρουσα σε επίπεδο εφαρμογών, μια και σ' αυτήν εντάσσονται τα προβλήματα των ταλαντώσεων.

Έστω πως η χ.ε. έχει τις παρακάτω συζυγείς μιγαδικές ρίζες:

$$\rho_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-a \pm \sqrt{-|\Delta|}}{2} = -\frac{a}{2} \pm i\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2} = m \pm ni$$

όπου η διακρίνουσα Δ είναι αρνητική και για το λόγο αυτό υπολογίζουμε ως εξής: $\sqrt{\Delta} = \sqrt{-|\Delta|} = \sqrt{-1}\sqrt{|\Delta|} = i\sqrt{|\Delta|}$ όπου I είναι η φανταστική μονάδα, ενώ θέσαμε:

$m = -a/2$ το πραγματικό μέρος του μιγαδικού και
$n = \sqrt{|\Delta|}/2$ το φανταστικό μέρος του μιγαδικού

Η γενική λύση γράφεται κατά τα γνωστά:

$$y(x, c_1, c_2) = c_1 e^{(m+ni)x} + c_2 e^{(m-ni)x}$$

Η σχέση αυτή παρουσιάζει τη γενική λύση της δ.ε.. Εφαρμόζοντας όμως τη σχέση του Euler που αφορά στις εκθετικές συναρτήσεις με μιγαδικό εκθέτη:

$$e^{\pm ix} = \sigma\upsilon\nu x + i\eta\mu x$$

φθάνουμε σε ένα αποτέλεσμα πιο κατανοητό και λειτουργικό:

$$y(x, c_1, c_2) = c_1 e^{(m+ni)x} + c_2 e^{(m-ni)x} = c_1 e^{mx} e^{inx} + c_2 e^{mx} e^{-inx} =$$

$$= e^{mx}\left[c_1(\sigma\upsilon\nu nx + i\eta\mu nx) + c_2(\sigma\upsilon\nu nx - i\eta\mu nx\right] =$$

$$= e^{mx}\left[\sigma\upsilon\nu nx(c_1 + c_2) + \eta\mu nx(c_1 - c_2)i\right] \Rightarrow$$

$$\boxed{y(x,A,B) \;= e^{mx}(A\sigma\upsilon\nu nx + B\eta\mu nx)} \qquad (\Gamma.3.5)$$

όπου θέσαμε δύο νέες αυθαίρετες σταθερές $A = c_1 + c_2$ και $B = i(c_1 - c_2)$. Μπορούμε να απλοποιήσουμε κι άλλο την παράσταση της γενικής λύσης, πολλαπλασιάζοντας και διαιρώντας με την ποσότητα:

$$\sqrt{A^2 + B^2}$$

$$y(x, A, B) = e^{mx}(A\sigma\upsilon\nu nx + B\eta\mu nx) =$$

$$= \sqrt{A^2 + B^2}\, e^{mx}\left[\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}\sigma\upsilon\nu nx + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}\eta\mu nx\right]$$

Παρατηρούμε πως οι ποσότητες:

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad \text{και} \quad \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

ανήκουν στο διάστημα [-1,1], ενώ το άθροισμα των τετραγώνων τους ισούται με τη μονάδα. Άρα υπάρχει κάποια γωνία φ για την οποία ισχύει:

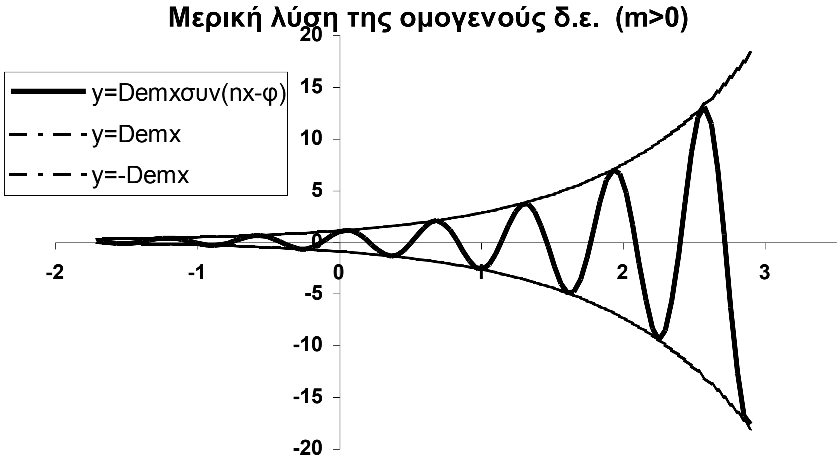
$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad \text{και} \quad \eta\mu\varphi = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

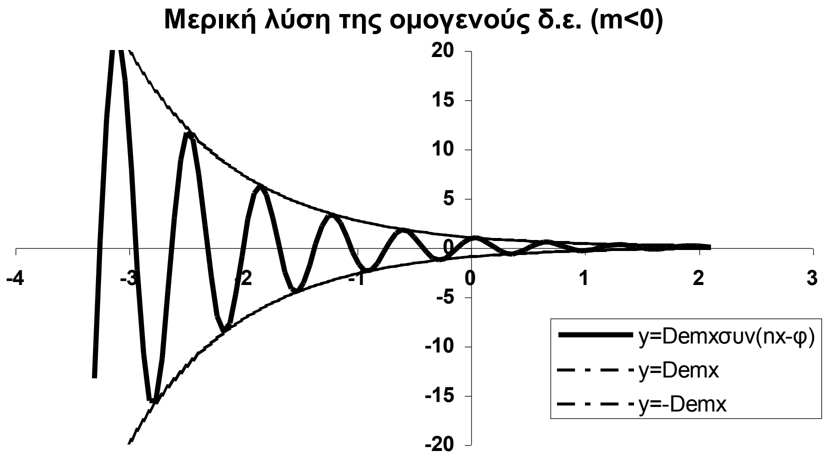
Θέτοντας τέλος $D = \sqrt{A^2 + B^2}$, έχουμε την τελική μορφή της γενικής λύσης, με αυθαίρετες σταθερές τις D και φ:

$$y(x, D, \phi) = De^{mx}\left[\sigma\upsilon\nu\phi\,\sigma\upsilon\nu nx + \eta\mu\phi\,\eta\mu nx\right] \Rightarrow$$

$$\boxed{y(x, D, \phi) = De^{mx}\,\sigma\upsilon\nu(nx - \phi)\ ^{(1)}} \qquad (Γ.3.6)$$

Η γενική λύση που περιγράφεται από τη σχέση Γ.3.6 παρουσιάζει μια ημιτονοειδή καμπύλη με μεταβαλλόμενο πλάτος. Στη σχέση αυτή η σταθερά D είναι συντελεστής του πλάτους της ημιτονοειδούς καμπύλης, ενώ η σταθερά φ καλείται διαφορά φάσης. Το συνολικό πλάτος της καμπύλης αυξάνει (καθώς αυξάνει το x) όταν ο συντελεστής m του εκθέτη (το πραγματικό μέρος της μιγαδικής ρίζας) είναι θετικός. Αντίθετα, το συνολικό πλάτος της καμπύλης φθίνει όταν m<0 (2).





Σχ. Γ.3.1. Δύο μερικές λύσεις της δ.ε. y''+ay'+by = 0, όταν η διακρίνουσα της χ.ε. είναι αρνητική.
Στο 1^o έχουμε το a<0 [m>0] , ενώ στο 2^o έχουμε το a>0 [m<0].

---

(1) *Όπου χρησιμοποιήσαμε τον τύπο συνασυνβ-ημαημβ = συν(α-β)*

(2) *Να θυμίσουμε πως m = -a/2 , οπότε θα είναι αρνητικό όταν ο συντελεστής a του y', στη δ.ε. θα είναι θετικός.*

Παράδειγμα: Να υπολογισθεί η γενική και η μερική λύση της δ.ε.
$y'' + 2y' + 65y = 0$ με αρχικές συνθήκες $y(0) = 5$ και $y'(0) = 1$.

Λύση: Παρατηρούμε αρχικά πως ο συντελεστής του y' είναι θετικός. Άρα το πραγματικό μέρος των μιγαδικών ριζών θα είναι αρνητικό και το πλάτος της ημιτο-νοειδούς καμπύλης θα φθίνει. Γράφουμε την χ.ε. και υπολογίζουμε τις ρίζες της:

$$p^2 + 2p + 65 = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$\rho_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-260}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-256}}{2} = \frac{-2 \pm 16i}{2} = -1 \pm 8i$$

Γράφουμε την γενική λύση απ' ευθείας από τη σχέση (Γ.3.6):

$$y(x, D, \phi) = De^{-x}\sigma\upsilon\nu(8x - \phi)$$

ενώ για τον υπολογισμό της μερικής λύσης χρειαζόμαστε και την παράγωγο:

$$y'(x, D, \phi) = -De^{-x}\sigma\upsilon\nu(8x-\phi) - 8De^{-x}\eta\mu(8x-\phi) =$$
$$= -De^{-x}\left[\sigma\upsilon\nu(8x-\phi) + 8\eta\mu(8x-\phi)\right]$$

Θέτοντας στις σχέσεις αυτές τις αρχικές συνθήκες, καταστρώνουμε ένα σύστημα 2 εξισώσεων με αγνώστους τα D και φ, τα οποία και υπολογίζουμε:

$$5 = y(0) = D\sigma\upsilon\nu(-\varphi) \qquad D = \frac{5}{\sigma\upsilon\nu(-\phi)}$$

$$1 = y'(0) = -D[\sigma\upsilon\nu(-\varphi) + 8\eta\mu(-\varphi)] \qquad 1 = -5 - 40\varepsilon\varphi(-\varphi)$$

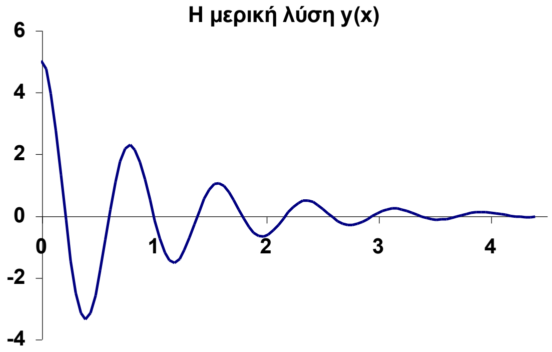
ή

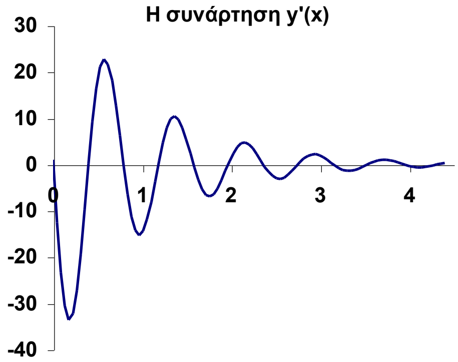
$\varepsilon\varphi(-\varphi) = -3/20$ ή $-\varphi = -0{,}1489$ rad ή $\boxed{\boldsymbol{\varphi = 0{,}1489 \text{ rad}}}$
και $\boxed{\mathbf{D = 5{,}056}}$

οπότε η μερική λύση:

$$y(x) = 5{,}056\ e^{-x}\sigma\upsilon\nu(8x - 0{,}1489\ ) \quad \text{και}$$
$$y'(x) = -5{,}056\ e^{-x}\left[\sigma\upsilon\nu(8x - 0{,}1489\ ) + 8\eta\mu(8x - 0{,}1489\ )\right]$$

Στα επόμενα γραφήματα εμφανίζεται η γραφική παράσταση των δύο αυτών συναρτήσεων:





Σχ. Γ.3.2. Μερική λύση της δ.ε. $y'' + 2y' + 65y = 0$.
Αριστερά η y(x) και δεξιά η y'(x). Παρατηρείστε πως
η παράγωγος έχει μεγαλύτερο πλάτος διακύμανσης, ενώ παρουσιάζει
ακρότατα (η y') εκεί που η y μηδενίζεται (αναμενόμενο…).

Γ.3.2. Γραμμικές δ.ε. 2ης τάξης, με σταθερούς συντελεστές και μη μηδενικό β' μέλος.

Πρόκειται για δ.ε. της μορφής:

$$\mathbf{y'' + ay + by = f(x) \qquad \text{με } a,b} \in \mathrm{R} \qquad (Γ.3.1)$$

Η λύση της δ.ε. Γ.3.1 στηρίζεται στην παρακάτω πρόταση:

Εάν η συνάρτηση $y_\mu(x)$ είναι μία μερική λύση της Γ.3.1 και η $y_O(x,c_1,c_2)$ είναι η λύση της αντίστοιχης ομογενούς ($y''+ay'+by=0$), τότε το άθροισμα:

$$y(x,c_1,c_2) = y_O(x,c_1,c_2) + y_\mu(x) \qquad (Γ.3.2)$$

θα είναι η γενική λύση της Γ.3.1.

Απόδειξη: Εάν η συνάρτηση $y(x,c_1,c_2)$ (το άθροισμα δηλαδή της γενικής λύσης της ομογενούς με μία οποιαδήποτε μερική λύση της πλήρους) επαληθεύει την δ.ε. Γ.3.1, τότε θα είναι όντως η γενική της λύση, μια και περιέχει δύο αυθαίρετες σταθερές.

$$\left.\begin{aligned} y &= y_O + y_\mu \\ y' &= y_O' + y_\mu' \\ y'' &= y_O'' + y_\mu'' \end{aligned}\right| \Longrightarrow \quad \begin{aligned} &y_O''+ y_\mu'' + a(y_O' + y_\mu') + b(y_O + y_\mu) = f(x) \Longrightarrow \\ &(y_O''+ay_O'+by_O) + (y_\mu''+ay_\mu'+by_\mu) = f(x) \end{aligned}$$

$$(y_O''+ay_O'+by_O) + (y_\mu''+ay_\mu'+by_\mu) = f(x)$$

Είναι φανερό πως η σχέση αυτή ισχύει διότι η πρώτη παρένθεση είναι ίση με το μηδέν (η y_O είναι λύση της ομογενούς) ενώ η δεύτερη παρένθεση ισούται με το f(x) (η y_μ είναι λύση της πλήρους).

Επομένως για να λύσουμε τη δ.ε. Γ.3.1 θα πρέπει να υπολογίσουμε μία μερική λύση της. Στον υπολογισμό αυτό μας βοηθάει η μορφή της συνάρτησης του β' μέλους (η f(x)), μια και η μορφή της μας αποκαλύπτει τη μορφή της συνάρτησης που θα αποτελέσει τη μερική λύση y_μ. Ας μελετήσουμε τρεις χαρακτηριστικές περιπτώσεις για τη μορφή της συνάρτησης f(x)…

α) Η συνάρτηση f(x) είναι πολυωνυμική: Έστω λοιπόν πως η f είναι πολυωνυμική συνάρτηση ν-ου βαθμού [έστω δηλαδή πως f(x)=p(x)]. Τότε αναζητούμε τη μερική λύση επίσης σαν πολυωνυμική συνάρτηση ν-ου βαθμού [y_μ=q(x)]. Ας δούμε ένα παράδειγμα: Να υπολογισθεί μια μερική λύση της δ.ε.

$$y'' + 2y' + 3y = x^2 - 2$$

Η πολυωνυμική συνάρτηση του β' μέλους της δ.ε. είναι $2^{ου}$ βαθμού. Άρα αναζητούμε μια μερική λύση που να είναι επίσης πολυωνυμική συνάρτηση $2^{ου}$ βαθμού. Έστω λοιπόν

$$y_\mu(x) = q(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

Υιοθετούμε δηλαδή σαν y_μ τη γενική έκφραση της δευτεροβάθμιας πολυωνυμικής συνάρτησης. Αντικαθιστούμε την y_μ στη δ.ε. οπότε έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} y_\mu = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \\ y_\mu' = 2\alpha x + \beta \\ y_\mu'' = 2\alpha \end{array}\right| \Longrightarrow \quad 2\alpha + 2(2\alpha x + \beta) + 3(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) = x^2 - 2 \quad \Longrightarrow$$

$$3\alpha x^2 + (4\alpha+3\beta)x + (2\alpha+2\beta+3\gamma) = x^2 - 2$$

Στην τελευταία αυτή σχέση εξισώνονται 2 πολυωνυμικές συναρτήσεις. Για να συμβαίνει αυτό πρέπει οι συντελεστές των ομοιόβαθμων όρων να είναι ίσοι. Επομένως καταλήγουμε στο σύστημα 3 εξισώσεων με 3 αγνώστους:

$$\left.\begin{array}{l} 3\alpha = 1 \\ 4\alpha + 3\beta = 0 \\ 2\alpha + 2\beta + 3\gamma = -2 \end{array}\right| \Longrightarrow \quad \begin{array}{l} \alpha = 1/3 \\ \beta = -4/9 \\ \gamma = 20/27 \end{array}$$

οπότε η μερική λύση είναι η:

$$y_\mu = x^2/3 - 4x/9 + 20/27$$

Στην ιδιαίτερη περίπτωση όπου ο συντελεστής b της δ.ε. είναι μηδέν θα υπάρχει πρόβλημα αντιστοίχισης του μεγιστοβάθμιου όρου της πολυωνυμικής συνάρτησης του β μέλους. Πράγματι, εάν δίνεται η δ.ε.:

$$y'' + 3y' = x^2 + x - 1$$

και υιοθετήσουμε για τη μερική λύση τη μορφή:

$$y_\mu(x) = q(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \qquad [y_\mu'=2\alpha x + \beta \quad \text{και} \quad y_\mu''=2\alpha]$$

τότε, αντικαθιστώντας στην δ.ε. την y_μ, θα έχουμε:

$$2\alpha + 3(2\alpha x + \beta) = x^2 + x - 1$$

οπότε δεν αντιστοιχίζεται ο όρος x^2. Για το λόγο αυτό:

Στην ιδιαίτερη περίπτωση όπου ο συντελεστής b της δ.ε. είναι μηδέν, αναζητούμε τη μερική λύση της δ.ε. υπό τη μορφή:

$$\mathbf{y_\mu(x) = xq(x) = x(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x}$$

Παρατήρηση: Εάν ο συντελεστής a της δ.ε. είναι ίσος με μηδέν υιοθετούμε τη μερική λύση της αρχικής περίπτωσης: $y_\mu(x) = q(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, ενώ εάν μηδενίζονται ταυτόχρονα τα a και b, τότε η δ.ε. είναι άμεσα ολοκληρώσιμη.

$$y'' = f(x)$$

Παράδειγμα: Να υπολογισθεί η γενική και η μερική λύση της δ.ε. $y'' + y'/5 = x^2 - 5$ για αρχικές συνθήκες: $y(0) = 1$ και $y'(0) = 276$

Λύση: Αρχικά λύνουμε την αντίστοιχη ομογενή:

$$y'' + y'/5 = 0$$

με χαρακτηριστική εξίσωση:

$$p^2 + p/5 = 0$$

με πραγματικές ρίζες:

$$p_1 = 0 \quad \text{και} \quad p_2 = -1/5$$

οπότε η γενική λύση της ομογενούς

$$\mathbf{y_O(x) = c_1 + c_2 e^{-x/5}}$$

Αναζητούμε τώρα την λύση της δοσμένης δ.ε. υπό τη μορφή:

$$y_\mu(x) = xq(x) = x(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x$$

με παραγώγους

$$y_\mu'(x) = 3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma \quad \text{και} \quad y_\mu''(x) = 6\alpha x + 2\beta$$

Αντικαθιστούμε στη δ.ε. και υπολογίζουμε:

$$6\alpha x + 2\beta + (3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma)/5 = x^2 - 5$$

ή

$$3\alpha x^2/5 + (6\alpha + 2\beta/5)x + 2\beta + \gamma/5 = x^2 - 5$$

απ' όπου προκύπτει το σύστημα:

$$\begin{aligned} 3\alpha/5 \qquad &= 1 \\ 6\alpha + 2\beta/5 \quad &= 0 \\ 2\beta + \gamma/5 &= -5 \end{aligned}$$

με λύση: $\alpha = 5/3$, $\beta = -25$ και $\gamma = 275$

Άρα η αναζητούμενη μερική λύση και η γενική λύση της δοσμένης δ.ε.:

$$y_\mu(x) = \frac{5}{3}x^3 - 25x^2 + 275x$$

και

$$\boxed{\mathbf{y(x,c_1,c_2) = y_O(x,c_1,c_2) + y_\mu(x) = c_1 + c_2 e^{-x/5} + \frac{5}{3}x^3 - 25x^2 + 275x}}$$

Για τον υπολογισμό της μερικής λύσης που αντιστοιχεί στις αρχικές συνθήκες του προβλήματος, χρειάζεται και η παράγωγος της γενικής λύσης:

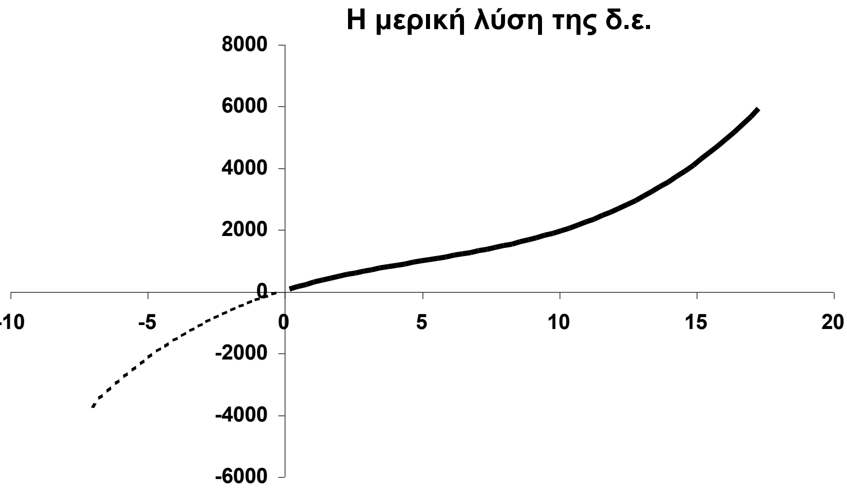
$$y'(x,c_1,c_2) = -\frac{c_2}{5}e^{-x/5} + 5x^2 - 50x + 275$$

και αντικαθιστώντας τις αρχικές συνθήκες, έχουμε:

$$1 = c_1 + c_2 \qquad\qquad c_1 = 6$$

$$276 = -\frac{c_2}{5} + 275 \qquad\qquad c_2 = -5$$

$$\mathbf{y(x,c_1,c_2) = 6 - 5e^{-x/5} + \frac{5}{3}x^3 - 25x^2 + 275x}$$



β) Η συνάρτηση f(x) είναι γινόμενο εκθετικής επί πολυωνυμική: Έστω λοιπόν πως η συνάρτηση f του β' μέλους της δ.ε. είναι της μορφής:

$$\mathbf{f(x) = p(x)e^{kx}}$$

όπου η πολυωνυμική συνάρτηση είναι ν-οστού βαθμού, ενώ το k είναι πραγματική σταθερή ($k \in R$).

Ξεχωρίζουμε τρεις υποπεριπτώσεις:

- Ο συντελεστής k δεν είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης της αντίστοιχης ομογενούς (δηλαδή η e^{kx} δεν είναι μερική λύση της ομογενούς). Στην περίπτωση αυτή αναζητούμε την μερική λύση υπό τη μορφή:

$$y_\mu(x) = q(x)e^{kx}$$ (1)

- Ο συντελεστής k είναι μονή ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης της αντίστοιχης ομογενούς (δηλαδή η e^{kx} είναι μερική λύση της ομογενούς). Στην περίπτωση αυτή αναζητούμε την μερική λύση υπό τη μορφή:

$$y_\mu(x) = xq(x)e^{kx}$$

- Ο συντελεστής k είναι διπλή ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης της αντίστοιχης ομογενούς (δηλαδή οι e^{kx} και xe^{kx} είναι μερικές λύσεις της ομογενούς). Στην περίπτωση αυτή αναζητούμε την μερική λύση υπό τη μορφή:

$$y_\mu(x) = x^2q(x)e^{kx}$$

---

(1) *Όπου, ως συνήθως, το q(x) είναι το γενικό πολυώνυμο ν-οστού βαθμού.*

Παράδειγμα: Να υπολογισθεί η γενική και η μερική λύση της δ.ε.
$y'' + y' - 2y = (x-1)e^x$ για αρχικές συνθήκες: $y(0)=1$ και $y'(0)=-1$

Λύση: Αρχικά λύνουμε την αντίστοιχη ομογενή:

$$y'' + y' - 2y = 0$$

με χαρακτηριστική εξίσωση:

$$p^2 + p - 2 = 0$$

με πραγματικές ρίζες:

$$p_1 = -2 \quad \text{και} \quad p_2 = 1$$

οπότε η γενική λύση της ομογενούς

$$\mathbf{y_O(x,c_1,c_2) = c_1e^{-2x} + c_2e^{-x}}$$

Επειδή ο συντελεστής του x στον εκθέτη του e (στο β' μέλος της δ.ε.) είναι και μονή ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης, αναζητούμε τη μερική λύση υπό τη μορφή:

$$y_\mu(x) = xq(x)e^x = x(\alpha x+\beta)e^x = (\alpha x^2+\beta x)e^x$$

με παραγώγους

$$y_\mu'(x) = [\alpha x^2 + (2\alpha+\beta)x + \beta]e^x \quad \text{και}$$
$$y_\mu''(x) = [\alpha x^2 + (4\alpha+\beta)x + 2\alpha + 2\beta]e^x$$

Αντικαθιστούμε στη δ.ε. και υπολογίζουμε:

$$[\alpha x^2 + (4\alpha+\beta)x + 2\alpha+2\beta]e^x + [\alpha x^2 + (2\alpha+\beta)x + \beta]e^x - 2(\alpha x^2+\beta x)e^x = (x-1)e^x$$
$$(6\alpha x + 2\alpha+3\beta)e^x = (x-1)e^x$$

απ' όπου προκύπτει το σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l} 6\alpha = 1 \\ 2\alpha + 3\beta = -1 \end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \alpha = 1/6 \\ \beta = -4/9 \end{array}$$

και η γενική λύση της πλήρους δ.ε.:

$$\boxed{\mathbf{y(x,c_1,c_2) = y_O(x,c_1,c_2) + y_\mu(x) = c_1e^{-2x} + c_2e^{-x} + (\tfrac{1}{6}x^2 - \tfrac{4}{9}x)e^x}}$$

Για τον υπολογισμό της μερικής λύσης χρειαζόμαστε την 1η παράγωγο:

$$\mathbf{y'(x,c_1,c_2) = -2c_1e^{-2x} + c_2e^{-x} + \left[\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{9}x - \frac{4}{9}\right]e^x}$$

Θέτοντας στη συνάρτηση και στην παράγωγο τις τιμές των αρχικών συνθηκών, υπολογίζουμε την τιμή των αυθαίρετων σταθερών:

$$\left.\begin{array}{l} 1 = c_1 + c_2 \\ 2 = -2c_1 + c_2 - 4/9 \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} c_1 = -13/27 \\ c_2 = 40/27 \end{array}}$$

γ) Η συνάρτηση f(x) είναι άθροισμα ημιτόνου ή (και) συνημιτόνου: Έστω λοιπόν πως η συνάρτηση f του β' μέλους της δ.ε. είναι της μορφής:

$$\mathbf{f(x)} = f(x)=aημ(kx)+bσυν(kx)$$

όπου τα k, a και b είναι πραγματικές σταθερές ($k,a,b \in R$).

Ξεχωρίζουμε τρεις υποπεριπτώσεις:

- Η χαρακτηριστική εξίσωση της αντίστοιχης ομογενούς **<u>δεν έχει</u>** σαν ρίζες τους φανταστικούς αριθμούς (όχι μιγαδικούς) $\pm ki$ (1). Στην περίπτωση αυτή αναζητούμε την μερική λύση υπό τη μορφή:

$$y_p(x)= λημ(kx)+μσυν(kx) \quad όπου \quad λ,μ \in R$$

- Η χαρακτηριστική εξίσωση της αντίστοιχης ομογενούς **<u>έχει</u>** σαν ρίζες τους φανταστικούς αριθμούς (όχι μιγαδικούς) $\pm ki$ (1). Στην περίπτωση αυτή αναζητούμε την μερική λύση υπό τη μορφή:

$$y_p(x)= x[λημ(kx)+μσυν(kx)] \quad όπου \quad λ,μ \in R$$

Παράδειγμα: Να υπολογισθεί η γενική και η μερική λύση της δ.ε.
$y'' + 16y = ημ(4x)$ για αρχικές συνθήκες: $y(0) = 0$ και $y'(0) = 0$

Λύση: Αρχικά λύνουμε την αντίστοιχη ομογενή:

$$y'' + 16y = 0$$

με χαρακτηριστική εξίσωση:

$$p^2 + 16 = 0$$

με φανταστικές ρίζες:

$$p_1 = -4i \quad και \quad p_2 = 4i$$

---

(1) Για να έχει η χ.ε. της ομογενούς δ.ε. μιγαδική ρίζα θα πρέπει να είναι μηδέν ο συντελεστής του y' (a=0, οπότε η ομογενής δ.ε. γράφεται: $y''+k^2y=0$). Τότε η χ.ε. είναι η:

$$p^2 + k^2 = 0 \;\Rightarrow\; p^2 = -k^2 \;\Rightarrow\; p_{1,2} = \pm ki$$

οπότε η γενική λύση της ομογενούς

$$\mathbf{y_O(x,D,\varphi) = D\sigma\upsilon\nu(4x\text{-}\varphi)}$$

Επειδή ο συντελεστής του x στο ημίτονο (4, στο β’ μέλος της δ.ε.) είναι και ο συντελεστής του i της φανταστικής ρίζας της χαρακτηριστικής εξίσωσης, αναζητούμε τη μερική λύση υπό τη μορφή:

$$y_p(x)= x[\lambda\eta\mu(4x)+\mu\sigma\upsilon\nu(4x)]$$

με παραγώγους

$$y_\mu'(x) = (\lambda-4\mu x)\eta\mu(4x) + (\mu+4\lambda x)\sigma\upsilon\nu(4x) \quad \text{και}$$
$$y_\mu''(x) = -(8\mu+16\lambda x)\eta\mu(4x) + (8\lambda-16\mu x)\sigma\upsilon\nu(4x)$$

Αντικαθιστούμε στη δ.ε. και υπολογίζουμε:

$$-(8\mu+16\lambda x)\eta\mu(4x) + (8\lambda-16\mu x)\sigma\upsilon\nu(4x) +16x[\lambda\eta\mu(4x)+\mu\sigma\upsilon\nu(4x)] = \eta\mu(4x)$$
$$-8\mu\eta\mu(4x) + 9\lambda\sigma\upsilon\nu(4x) = \eta\mu(4x)$$

απ’ όπου έχουμε $\mu= -1/8$, $\lambda=0$. Άρα η γενική λύση της δ.ε. είναι η:

$$\boxed{\mathbf{y(x,D,\varphi) = y_O(x,D,\varphi) + y_\mu(x) = D\sigma\upsilon\nu(4x\text{-}\varphi) - \frac{1}{8}x\sigma\upsilon\nu(4x)}}$$

Για τον υπολογισμό της μερικής λύσης χρειαζόμαστε την $1^η$ παράγωγο:

$$y'(x,D,\varphi) = -4D\eta\mu(4x-\varphi) - \frac{1}{8}\sigma\upsilon\nu(4x) + \frac{1}{2}x\eta\mu(4x)$$

Θέτοντας στη συνάρτηση και στην παράγωγο τις τιμές των αρχικών συνθηκών, υπολογίζουμε την τιμή των αυθαίρετων σταθερών:

$$0 = D\sigma\upsilon\nu(-\varphi)$$
$$0 = -4D\eta\mu(-\varphi) - 1/8$$

Από την $1^η$ εξίσωση δεν μπορούμε να συμπεράνουμε πως D=0, αντίθετα, πρέπει να επιλέξουμε τη γωνία φ έτσι ώστε συν(-φ) = 0. Έχουμε επομένως:

$$\varphi = \pi/2 \quad \text{και} \quad D = 1/32$$

οπότε, η μερική λύση που αντιστοιχεί στις μηδενικές αρχικές συνθήκες:

$$\boxed{\mathbf{y(x)} = \frac{1}{32}\,\mathbf{συν(4x\text{-}π/2)} - \frac{1}{8}\,\mathbf{xσυν(4x)}}$$

με γραφική παράσταση: