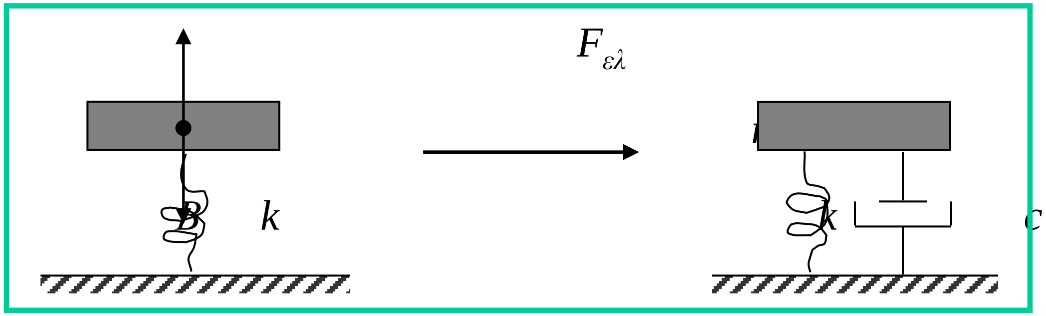
1. Ένα μεταφορικό μέσο μάζας 500 kg στηρίζεται σε ελατήρια έτσι ώστε η στατική μετατόπιση να είναι 1.5 mm. Ποιος είναι ο συντελεστής απόσβεσης ενός αποσβεστήρα που πρέπει να τοποθετηθεί παράλληλα με τα ελατήρια ώστε η απόσβεση του συστήματος να είναι κρίσιμη.



Από ορισμό έχουμε

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{mk}} \qquad (1)$$

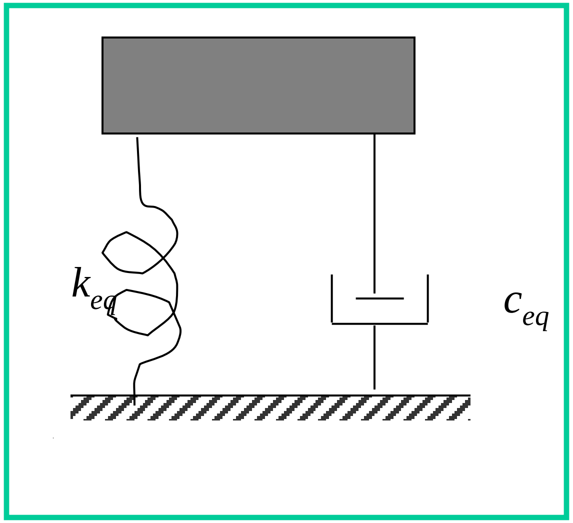
Από το σχήμα, επειδή το σώμα είναι σε ισορροπία , ισχύει

$$B = F_{\varepsilon\lambda} \Rightarrow B = kx_{st} \Rightarrow k = \frac{B}{x_{st}} \qquad (2)$$

Η (1) συνεπάγεται από (2)

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{m\frac{B}{x_{st}}}} \Rightarrow \zeta = \frac{c}{2\sqrt{m\frac{mg}{x_{st}}}} \Rightarrow \zeta = \frac{c}{2m\sqrt{\frac{g}{x_{st}}}} \qquad (3)$$

4). Ένα ηλεκτρονικό όργανο μάζας στηρίζεται σε ελατήρια που έχουν ισοδύναμη στιβαρότητα k_{eq} = 2400 N/m και ισοδύναμο συντελεστή απόσβεσης c_{eq} = 2 Nsec/m. Το όργανο μετατοπίζεται κατά 20mm από τη θέση ισορροπίας και αφήνεται ελεύθερο. Να βρεθεί το πλάτος της ταλάντωσης μετά από χρόνο ίσο με 5 περιόδους και μετά από χρόνο ίσο με 20 περιόδους.



- Το μέτρο απόσβεση είναι

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{mk_{eq}}} \Rightarrow \zeta = \frac{2}{2\sqrt{1\cdot 2400}} \Rightarrow \zeta = 0.0204 \qquad (1)$$

- Επειδή 0≤ ζ<1 το σώμα εκτελεί ταλάντωση με υποκρίσιμη απόσβεση. Ισχύει

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}} = \sqrt{\frac{2400}{1}} = 48.99 rad/\sec \qquad (2)$$

Η συχνότητα απόσβεσης είναι

$$\omega_d = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2} \Rightarrow \omega_d = 48.99\sqrt{1-(0.0204)^2} = 48.97 rad/\sec \qquad (3)$$

Η περίοδος της ταλάντωσης είναι

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\cdot 3.14}{48.97} = 0.128\sec \qquad (4)$$

Η εξίσωση της κίνησης είναι

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + k_{eq}x = 0 \qquad (5)$$

Επειδή ισχύει

$$0 \le \zeta < 1 \qquad (6)$$

η λύση σύμφωνα με τη θεωρία είναι της μορφής

$$x(t) = Ae^{-\delta t}\cos(\omega_d t - \theta) \qquad (7)$$

όπου

$$\delta = \zeta\omega_0 = 0.0294\cdot 48.99 = 1 \qquad (8)$$

Επίσης από θεωρία είναι

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0 + \delta\cdot x_0}{\omega_d}\right)^2} = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{0 + \delta\cdot x_0}{\omega_d}\right)^2} = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\delta\cdot x_0}{\omega_d}\right)^2} = x_0\sqrt{1 + \left(\frac{1\cdot 1}{\omega_d}\right)^2} =$$

$$0.02\sqrt{1 + \left(\frac{1}{48.97}\right)^2} = 0.02\sqrt{1 + 0.00041} = 0.02\text{ m} \qquad (9)$$

Από τη σχέση (7) παρατηρούμε ότι η μετατόπιση $x(t)$ από τη θέση ισορροπίας είναι εξίσωση ταλάντωσης με πλάτος

$$X(t) = Ae^{-\delta t} \tag{10}$$

που ελαττώνεται σε σχέση με το χρόνο.

Ο χρόνος 5 περιόδων είναι

$$t_5 = 5T_d = 5 \cdot 0.128 = 0.64\text{sec} \tag{11}$$

οπότε

$$X(t_5) = 0.02e^{-1 \cdot 0.64} \Rightarrow \boxed{X(t_5) = 0.0106\ \text{m}} \tag{12}$$

Ο χρόνος 20 περιόδων είναι

$$t_{20} = 20T_d = 20 \cdot 0.128 = 2.56\text{sec} \tag{13}$$

οπότε

$$X(t_{20}) = 0.02e^{-1 \cdot 2.56} \Rightarrow \boxed{X(t_{20}) = 0.00154\ \text{m}} \tag{14}$$