12. Μια μηχανή μάζας 82 kg στηρίζεται σε ελαστική θεμελίωση. Ένα πείραμα εκτελείται προκειμένου να προσδιοριστεί η στιβαρότητα και το μέτρο απόσβεσης της θεμελίωσης. Όταν η μηχανή διεγείρεται από μια αρμονική δύναμη εύρους 8000 N σε διάφορες συχνότητες, το μέγιστο πλάτος της ταλάντωσης της μηχανής στη μόνιμη κατάσταση είναι 4.1 mm και πετυχαίνεται στη συχνότητα 251.2 rad/sec. Να βρεθεί η στιβαρότητα και το μέτρο απόσβεσης της θεμελίωσης.

Στη μηχανή ασκείται αρμονική δύναμη με πλάτος 8000 N. Όταν η συχνότητα της δύναμης είναι 251.2 rad/sec τότε έχουμε μέγιστο πλάτος ταλάντωσης, δηλαδή συντονισμό. Στην κατάσταση συντονισμού ισχύουν οι σχέσεις

$$n=\sqrt{1-2\zeta^2} \Rightarrow \frac{\Omega}{\omega_0}=\sqrt{1-2\zeta^2} \Rightarrow \omega_0=\frac{\Omega}{\sqrt{1-2\zeta^2}} \Rightarrow \omega_0^2=\frac{\Omega^2}{1-2\zeta^2} \qquad (1)$$

$$X_{\max}=\frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \qquad (2)$$

όπου n είναι η ανοιγμένη συχνότητα και X_{max} το ανοιγμένο εύρος.

Ισχύει

$$x_{\max} = X_{\max} x_{st} \Rightarrow X_{\max} = \frac{x_{\max}}{x_{st}} \Rightarrow X_{\max} = \frac{x_{\max}}{\frac{\hat{f}}{k}} \Rightarrow X_{\max} = \frac{x_{\max} k}{\hat{f}} \Rightarrow$$

$$X_{\max} = \frac{x_{\max} m\omega_0^2}{\hat{f}} \tag{3}$$

Με αντικατάσταση των (1) , (2) στη σχέση (3) έχουμε

$$\frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{x_{\max} m \frac{\Omega^2}{1-2\zeta^2}}{\hat{f}} \Rightarrow \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{x_{\max} m}{\hat{f}} \frac{\Omega^2}{1-2\zeta^2} \Rightarrow$$

$$\left[\frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}\right]^2 = \left[\frac{x_{\max} m}{\hat{f}} \frac{\Omega^2}{1-2\zeta^2}\right]^2 \Rightarrow \frac{1}{4\zeta^2\left(1-\zeta^2\right)} = \frac{x_{\max}^2 m^2 \Omega^4}{\hat{f}^2\left(1-2\zeta^2\right)^2} \Rightarrow$$

$$\left(1-2\zeta^2\right)^2 = \frac{x_{\max}^2 m^2 \Omega^4}{\hat{f}^2} 4\zeta^2\left(1-\zeta^2\right) \Rightarrow$$

$$\left(1-2\zeta^2\right)^2 = \frac{\left(4.1\cdot 10^{-3}\right)^2 (82)^2 (251.2)^4}{8000^2} 4\zeta^2\left(1-\zeta^2\right) \Rightarrow$$

$$\left(1-2\zeta^2\right)^2 = 28.124\zeta^2\left(1-\zeta^2\right) \Rightarrow 1+4\zeta^4-4\zeta^2 = 28.124\zeta^2 - 28.124\zeta^2 \Rightarrow$$

$$32.12\zeta^4 - 32.12\zeta^2 + 1 = 0 \Rightarrow \zeta^4 - \zeta^2 + 0.031 = 0 \qquad (4)$$

Οι θετικές ρίζες της (4) είναι

$$\zeta_1 = 0.18 \;\; \text{και} \;\; \zeta_2 = 0.984 \qquad (5)$$

Όμως από θεωρία στο συντονισμό ισχύει

$$\zeta \leq 0.707 \qquad (6)$$

Οπότε δεκτή είναι μόνο η

$$\boxed{\zeta_1 = 0.18} \qquad (7)$$

Η στιβαρότητα δίνεται από τη σχέση

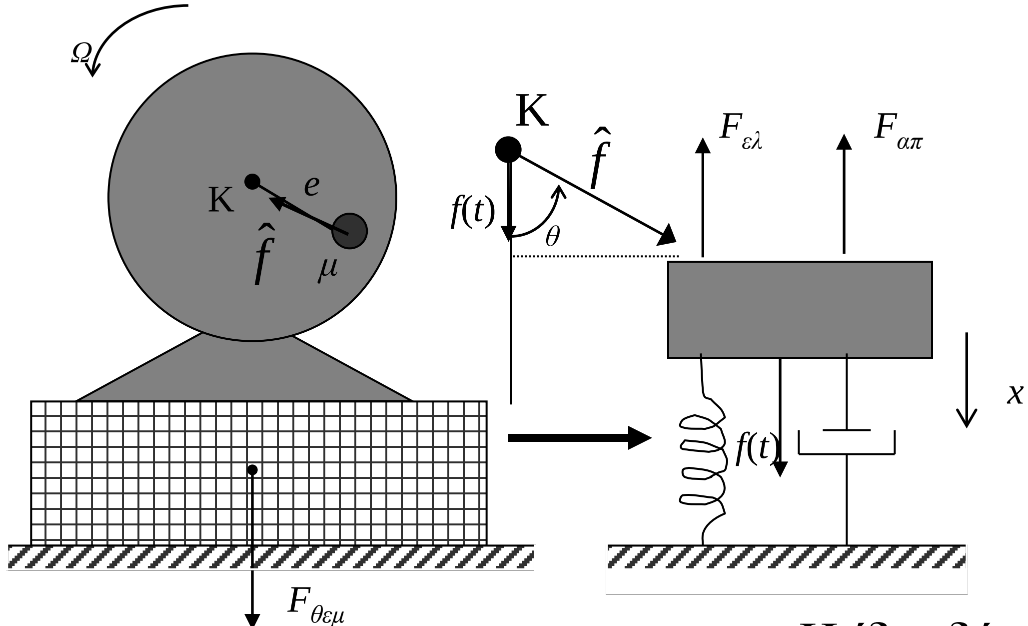
$$k = m\omega_0^2 \qquad (8)$$

Με αντικατάσταση της (1) στην (8) έχουμε

$$k = m\frac{\Omega^2}{1-2\zeta^2} \Rightarrow k = 82\frac{(251.2)^2}{1-2(0.18)^2} \Rightarrow \boxed{k = 5.53x10^6 \text{ N/m}} \qquad (9)$$

1.8 Εφαρμογές

1.8.2 Επιλογή χαρακτηριστικών θεμελίωσης μηχανής που διεγείρεται από αζυγοσταθμία



Μάζα μ βρίσκεται σε απόσταση *e* από το κέντρο Κ μηχανής που περιστρέφεται με συχνότητα Ω

Στη μάζα μ αναπτύσσεται από τη μηχανή κεντρομόλος δύναμη

$$\hat{f} = \mu \Omega^2 e$$

Η ίδια δύναμη αναπτύσσεται και από τη μάζα στη μηχανή αλλά με αντίθετη κατεύθυνση

Η δύναμη που δέχεται η μηχανή κατά την κατακόρυφη κατεύθυνση είναι

$$f(t) = \hat{f} \cos\theta \Rightarrow \qquad \boxed{f(t) = \hat{f} \cos \Omega\, t}$$

Η εξίσωση της ταλάντωσης της μηχανής είναι

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=f(t)\Rightarrow \qquad \boxed{m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=\hat{f}\cos\Omega t}$$

Στη <u>μόνιμη κατάσταση</u> η λύση όπως γνωρίζουμε είναι

$$\boxed{x(t)=\hat{x}\cos\left(\Omega t-\varphi\right)}$$

όπου

$$\hat{x}=\frac{1}{\sqrt{\left(1-n^2\right)^2+\left(2\zeta n\right)^2}}\frac{\hat{f}}{k}$$

Με αντικατάσταση των k, $\hat{f}$ προκύπτει

$$\hat{x}=\frac{1}{\sqrt{\left(1-n^2\right)^2+\left(2\zeta n\right)^2}}\frac{\mu\Omega^2 e}{m\omega_0^2}\Rightarrow \qquad \boxed{\hat{x}=\frac{n^2}{\sqrt{\left(1-n^2\right)^2+\left(2\zeta n\right)^2}}\frac{\mu e}{m}}$$

Διερεύνηση της σχέσης

$$\boxed{\hat{x} = \frac{n^2}{\sqrt{\left(1-n^2\right)^2 + \left(2\zeta n\right)^2}} \frac{\mu e}{m}}$$

1) Για $n \to 0$ ($\Omega \to 0$ χαμηλές συχνότητες) , $\hat{x} \to 0$

2) Για $n \ll 1$ ($\Omega \ll \omega_0$) , $\hat{x} \to \frac{\mu e}{m} n^2 = \frac{\mu e}{k} \Omega^2$

3) Για $n \approx 1$ ($\Omega \approx \omega_0$) , $\hat{x} = \frac{1}{2\zeta} \frac{\mu e}{m}$, εξαρτάται από το ζ

4) Για $n \gg 1$ ($\Omega \gg \omega_0$) , $\hat{x} \to \frac{\mu e}{m}$

5) Για $n \to \infty$ ($\Omega \to \infty$, υψηλές συχνότητες) , $\hat{x} \to \frac{\mu e}{m}$