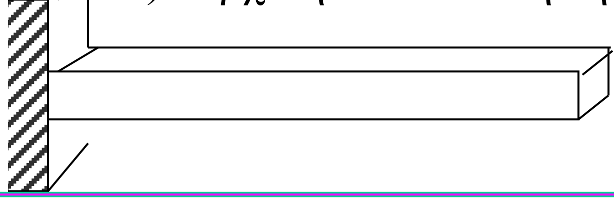
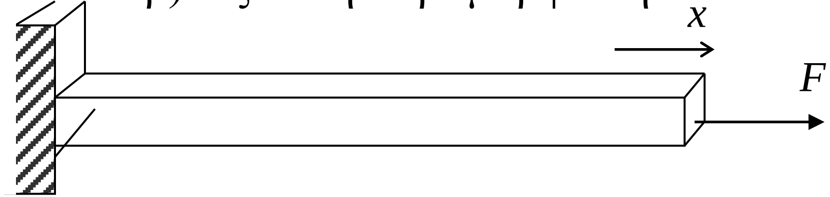
α) Αρχική κατάσταση της ράβδου



β) Αξονική παραμόρφωση

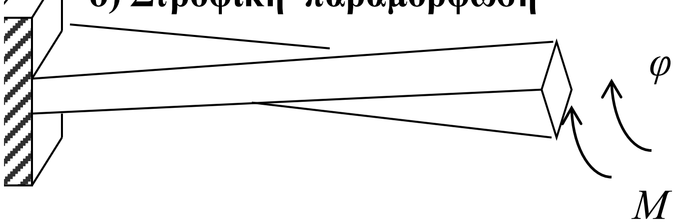


$$F = k_A x \qquad k_A = \frac{EA}{L}$$

γ) Καμπτική παραμόρφωση

$$F = k_k y \qquad k_k = \frac{3EI}{L^3}$$

δ) Στροφική παραμόρφωση

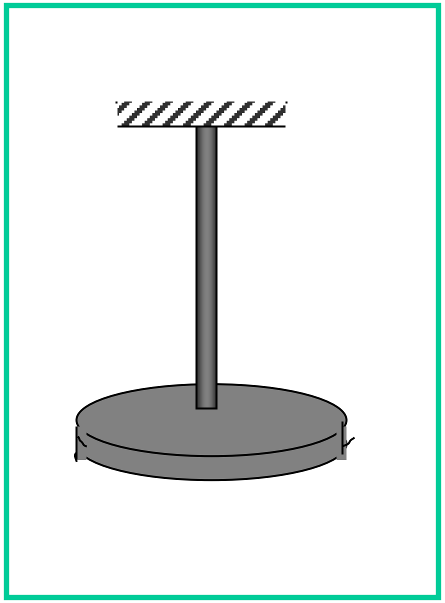


$$M = k_\Sigma \varphi \qquad k_\Sigma = \frac{GJ}{L}$$

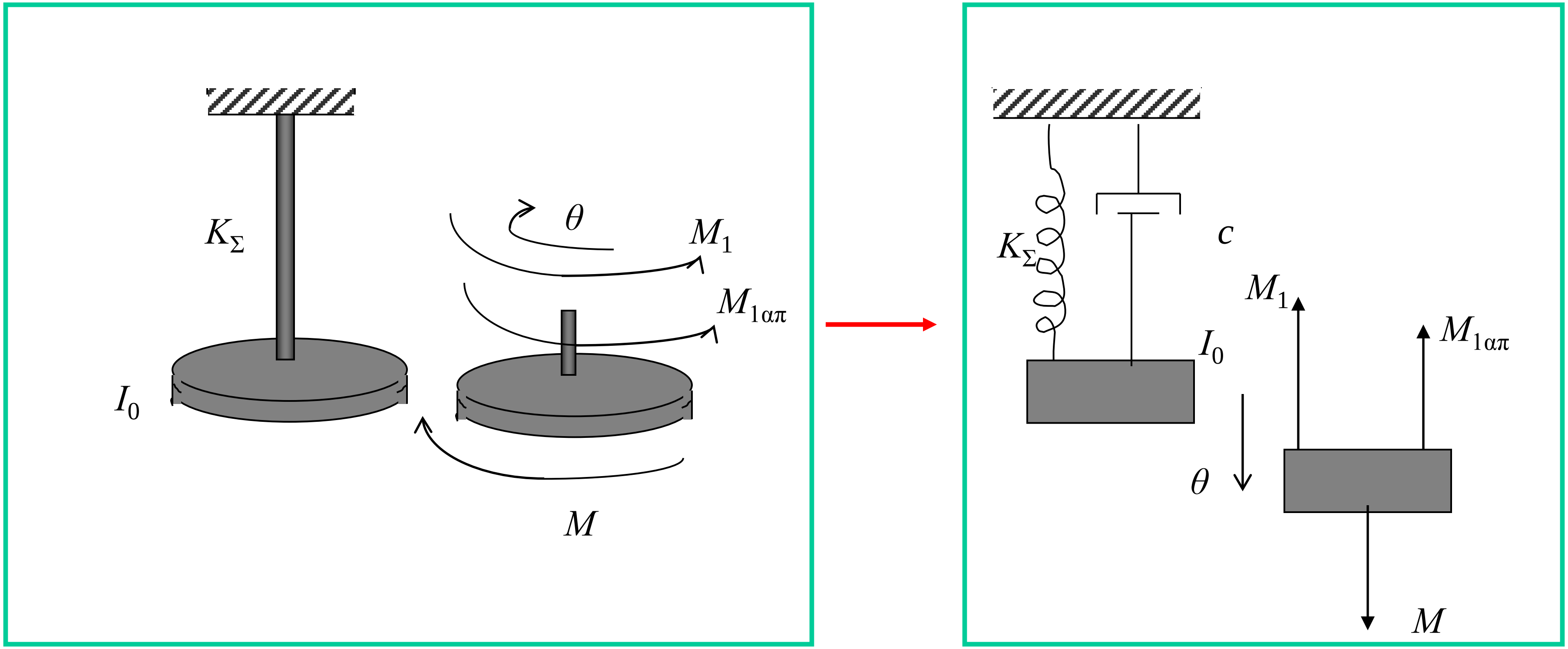
Αν η ράβδος έχει κυκλική διατομή με ακτίνα r τότε η σταθερά J ισούται με την πολική ροπή I_p αδράνειας της διατομής που είναι

$$I_p = \frac{\pi}{2} r^4$$

9. Ο δίσκος του συστήματος έχει μάζα 0.8 kg και δέχεται αρμονική ροπή με πλάτος 12.5 Nm και συχνότητα 700rad/sec. Ο άξονας είναι από ατσάλι και έχει μήκος 1.2 m , με μέτρο διάτμησης $80x10^{9}$ N/m^{2} και πολική ροπή αδράνειας της διατομής $1.57x10^{-8}$ m. Η ροπή αδράνειας της του συστήματος δίσκου-άξονα ως προς το άξονα περιστροφής είναι $1.49x10^{-3}$ kgm^{2}. Να βρεθεί το πλάτος της ταλάντωσης στη μόνιμη κατάσταση. Δίνεται ότι οι αποσβέσεις είναι αμελητέες.



Τα συστήματα είναι ισοδύναμα



Η εξίσωση κίνησης είναι

$$I_0\ddot{\theta} = M_{o\lambda} \Rightarrow I_0\ddot{\theta} = M - M_1 - M_{1\alpha\pi} \Rightarrow I\ddot{\theta} = M_0 \cos\Omega t - k_\Sigma\theta - c\dot{\theta} \Rightarrow$$

$$I\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + k_\Sigma\theta = M_0 \cos\Omega t \qquad (1)$$

Η εξίσωση (1) είναι όμοια με την

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \hat{f}\cos\Omega t \tag{2}$$

αρκεί να θέσουμε

$$m = I_0, \quad k = k_\Sigma, \quad \hat{f} = M_0 \tag{3}$$

Η λύση της (2) είναι

$$x(t) = \hat{x}\cos\left(\Omega t - \varphi_x\right) \tag{4}$$

Όμοια η λύση της (1) είναι

$$\theta(t) = \hat{\theta}\cos\left(\Omega t - \varphi_\theta\right) \tag{5}$$

Το πλάτος της (4) είναι

$$\hat{x} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-n^2\right)^2 + \left(2\zeta n\right)^2}}\frac{\hat{f}}{k} \tag{6}$$

Ανάλογα, το πλάτος της (5) με συνδυασμό των (3), (6) θα είναι

$$\hat{\theta} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-n^2\right)^2 + \left(2\zeta n\right)^2}}\frac{M_0}{k_\Sigma} \tag{7}$$

Επειδή οι αποσβέσεις είναι αμελητέες μπορούμε να θέσουμε c = 0, οπότε

$$\hat{\theta}=\frac{1}{\sqrt{\left(1-n^2\right)^2}}\frac{M_0}{k_\Sigma}\Rightarrow\hat{\theta}=\frac{1}{\left|1-n^2\right|}\frac{M_0}{k_\Sigma} \tag{8}$$

Αρκεί να βρούμε τη στρεπτική στιβαρότητα και την ανοιγμένη συχνότητα διέγερσης .

Η στρεπτική στιβαρότητα του άξονα είναι

$$k_\Sigma=\frac{GI_p}{L}=\frac{80x10^9 1.57x10^{-8}}{1.2}=1.05x10^3\ \text{Nm/rad} \tag{9}$$

Η ιδιοσυχνότητα του συστήματος είναι

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k_\Sigma}{I}}=\sqrt{\frac{1.05x10^3}{1.49x10^{-3}}}=839.5\ \text{rad/sec} \tag{10}$$

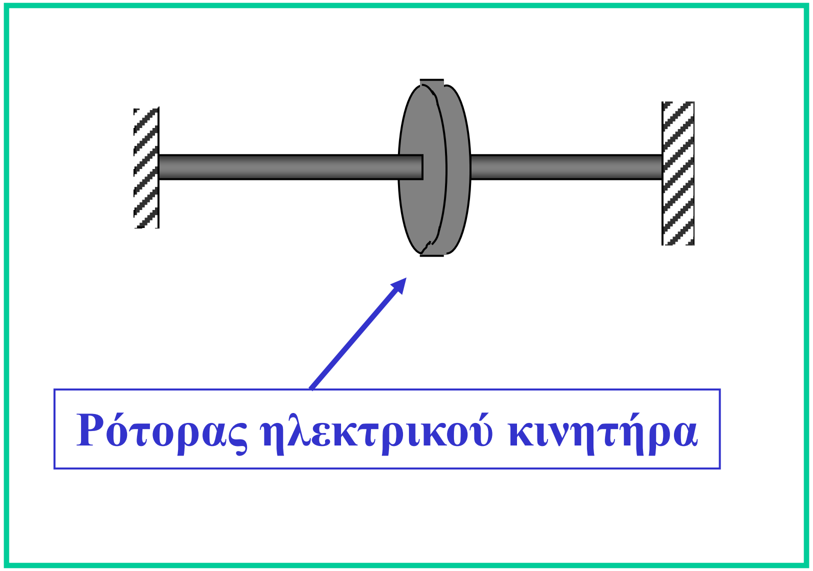
Η ανοιγμένη συχνότητα διέγερσης είναι

$$n=\frac{\Omega}{\omega_0}=\frac{700}{839.5}=0.834 \tag{11}$$

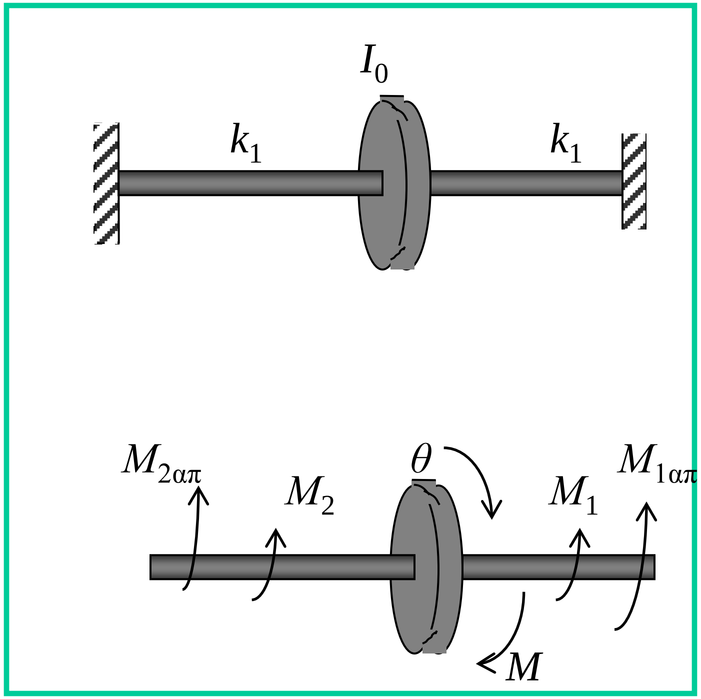
Με αντικατάσταση των (9), (11) στην (8) έχουμε

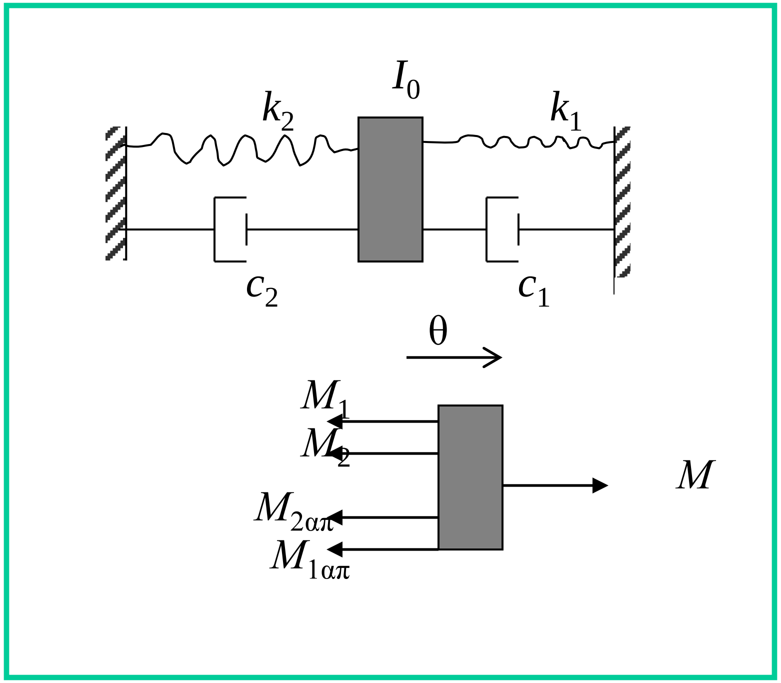
$$\hat{\theta}=\frac{1}{\left|1-n^2\right|}\frac{M_0}{k_\Sigma}\Rightarrow\hat{\theta}=\frac{1}{\left|1-\left(0.834\right)^2\right|}\frac{12.5}{1.05x10^3}\Rightarrow\boxed{\hat{\theta}=0.039\ \text{rad}=2.24^o} \tag{12}$$

8). Ένας ηλεκτρικός κινητήρας θέτει σε κίνηση τους ρότορες δύο μηχανών στα άκρα του, (οι ρότορες των μηχανών δεν δείχνονται στο σχήμα) που έχουν μεγάλη ροπή αδράνειας σε σχέση με το ρότορα του ηλεκτροκινητήρα. Για τη μελέτη της αναπτυσσόμενης στροφικής ταλάντωσης τα άκρα των αξόνων του κινητήρα μπορεί να θεωρηθούν ακίνητα. Στον ρότορα του ηλεκτροκινητήρα ασκείται μια ροπή $M = M_0\cos\Omega t$ με M_0 = 200 Nm και Ω = 500 rad/sec λόγω κάποιας ηλεκτρικής δύναμης. Η ροπή αδράνειας του ρότορα είναι I_0 = 0.025 kgm^2 και οι στιβαρότητες των δοκών είναι $k_1 = k_2$ = 3500 Nm/rad. Να βρεθεί το πλάτος της προκύπτουσας στροφικής ταλάντωσης στη μόνιμη κατάσταση αν οι αποσβέσεις είναι αμελητέες.



Τα συστήματα είναι ισοδύναμα





Έστω ο ρότορας περιστρέφεται κατά γωνία θ λόγω της ροπή M. Τότε και οι άξονες περιστρέφονται κατά την ίδια γωνία.

Στον ρότορα ασκούνται οι ροπές

•M από την ηλεκτρική δύναμη

•M_1 , M_2 από τους άξονες με στιβαρότητα k_1 και k_2 αντίστοιχα.

•$M_{1\alpha\pi}$, $M_{2\alpha\pi}$ από τους μηχανισμούς απόσβεσεις με συντελεστές απόσβεσης c_1 και c_2 αντίστοιχα.

Ισχύει

$$I_0\ddot{\theta} = M_{o\lambda} \Rightarrow I_0\ddot{\theta} = M - M_1 - M_2 - M_{1\alpha\pi} - M_{2\alpha\pi} \tag{1}$$

όπου

$$M = M_0 \cos \Omega t \tag{2}$$

$$M_1 = k_1\theta \quad , \quad M_{1\alpha\pi} = c_1\dot{\theta} \tag{3}$$

$$M_2 = k_2\theta \quad , \quad M_{2\alpha\pi} = c_2\dot{\theta} \tag{4}$$

Με αντικατάσταση των (2), (3), (4) στην (1) έχουμε

$$I_0\ddot{\theta} = M_0 \cos \Omega t - k_1\theta - k_2\theta - c_1\dot{\theta} - c_2\dot{\theta} \Rightarrow I_0\ddot{\theta} + \left(c_1 + c_2\right)\dot{\theta} + \left(k_1 + k_2\right)\theta = M_0 \cos \Omega t \tag{5}$$

Αν θέσουμε

$$k = k_1 + k_2 \qquad\qquad c = c_1 + c_2 \tag{6}$$

τότε η (5) γράφεται

$$I_0\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + k\theta = M_0 \cos \Omega t \tag{7}$$

Η εξίσωση (7) είναι όμοια με την εξίσωση

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \hat{f} \cos \Omega t \tag{8}$$

αρκεί να θέσουμε

$$m = I_0 \quad , \hat{f} = M_0 \tag{9}$$

Η λύση της (8) στη μόνιμη κατάσταση ως γνωστόν είναι

$$x(t) = \hat{x} \cos\left(\Omega t - \varphi_x\right) \tag{10}$$

Άρα και η λύση της (7) θα είναι

$$\theta(t) = \hat{\theta} \cos\left(\Omega t - \varphi_\theta\right) \tag{11}$$

Το πλάτος της (10) ως γνωστόν είναι

$$\hat{x} = \frac{\hat{f}}{\sqrt{\left(k - m\Omega^2\right)^2 + \left(c\Omega\right)^2}} \tag{12}$$

Αντίστοιχα το πλάτος της (11) θα είναι

$$\hat{\theta} = \frac{M_0}{\sqrt{\left(k - I_0\Omega^2\right)^2 + \left(c \cdot \Omega\right)^2}} \tag{13}$$

Επειδή οι αποσβέσεις είναι αμελητέες μπορούμε να θέσουμε c = 0, οπότε

$$\hat{\theta} = \frac{M_0}{\sqrt{\left(k - I_0\Omega^2\right)^2 + \left(0 \cdot \Omega\right)^2}} \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{M_0}{\sqrt{\left(k - I_0\Omega^2\right)^2}} \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{M_0}{\left|k - I_0\Omega^2\right|} \Rightarrow$$

$$\hat{\theta} = \frac{T_0}{\left|k_1 + k_2 - I_0\Omega^2\right|} \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{200}{\left|3500 + 3500 - 0.025 \cdot 500^2\right|} \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{200}{\left|7000 - 6250\right|} \Rightarrow$$

$$\boxed{\hat{\theta} = 14.9^o \qquad \text{ή} \qquad \hat{\theta} = 0.26 \text{ rad}} \tag{14}$$