ΑΝΟΙΧΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

ΤΕΙ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ ΣΕΡΡΕΣ

Μηχανική Ρευστών ΙΙ

Ενότητα 1): Ροή γύρω από σώματα

Δ. Μισηρλής
Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών ΤΕ

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Κεντρικής Μακεδονίας» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Τίτλος ενότητας

Ροή γύρω από σώματα

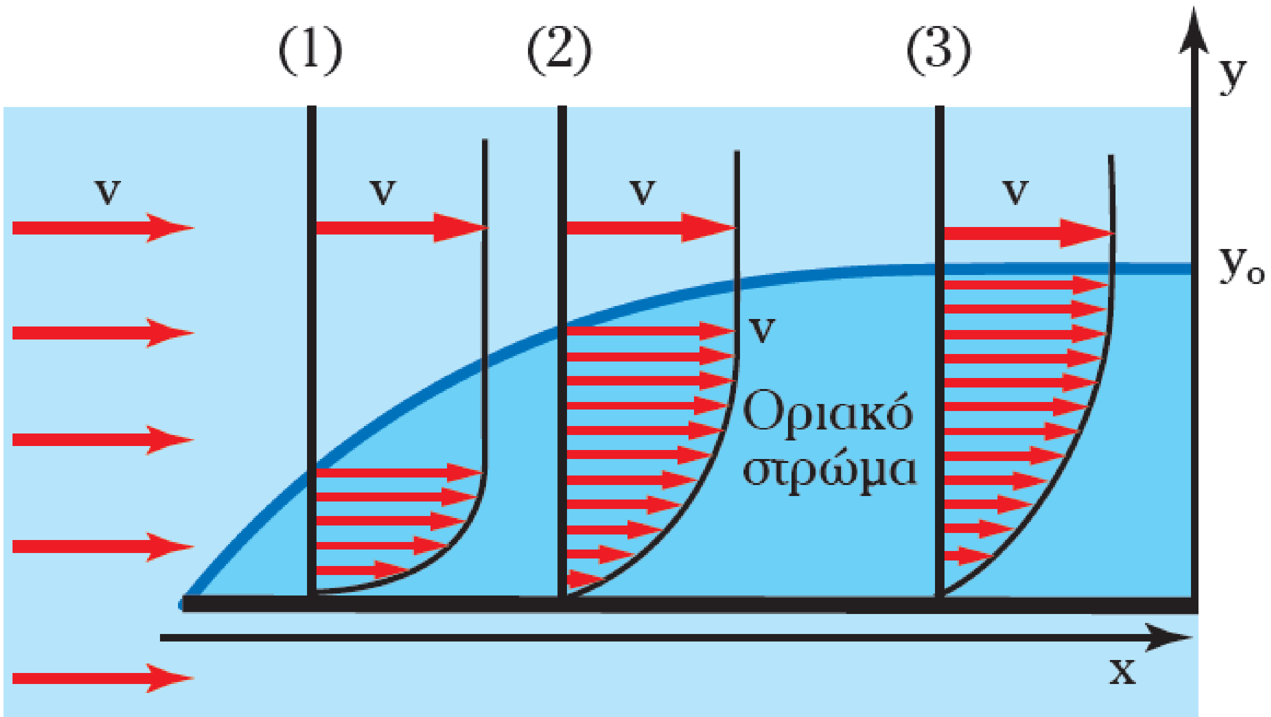
ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Το κεφάλαιο αυτό ασχολείται με τις εξωτερικές ροές γύρω από σώματα τα οποία βρίσκονται μέσα σε αυτές (π.χ. αεροσκάφος, κτίριο, κ.λπ.). Στις ροές αυτές, κοντά στο σώμα και στον απόρρου (wake) αυτού, εμφανίζονται φαινόμενα ιξώδους (τριβές) τόσο λόγω της **διάτμησης της ροής** (διαφορά ταχύτητας), όσο και λόγω της **συνθήκης της μη–ολίσθησης** πάνω στο σώμα. Μακριά από το σώμα η ροή είναι άτριβη λόγω της ομοιομορφίας της ταχύτητας, η οποία έχει ομοιόμορφη κατανομή (σταθερή τιμή). Οι ροές αυτές ονομάζονται "Ανοικτών Οριακών Στρωμάτων".

Στο μάθημα "Μηχανική Ρευστών Ι" ασχοληθήκαμε με εσωτερικές ροές μέσα σε αγωγούς, όπου περιορίζονται σε πάχος από τα τοιχώματα των αγωγών. Εκεί τα οριακά στρώματα αναπτύσσονται στα τοιχώματα, αυξάνονται κατάντη της ροής, ενώνονται κάπου στο εσωτερικό του αγωγού και τελικά καταλαμβάνουν όλη τη διατομή του αγωγού. Αντίθετα, οι εξωτερικές ροές είναι ελεύθερες να επεκταθούν απεριόριστα, όσο παχύ και εάν είναι το οριακό στρώμα.

Η θεωρία του Οριακού Στρώματος που θα παρουσιαστεί παρακάτω, βοηθάει στη μελέτη των εξωτερικών ροών, αλλά συνήθως οι ροές γύρω από γεωμετρικά σύνθετα σώματα απαιτούν είτε μετρήσεις των δυνάμεων και ροπών που εξασκούνται από τη ροή, είτε υπολογιστικές μεθόδους όπως η τεχνολογία της Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής (CFD, Computational Fluid Dynamics).

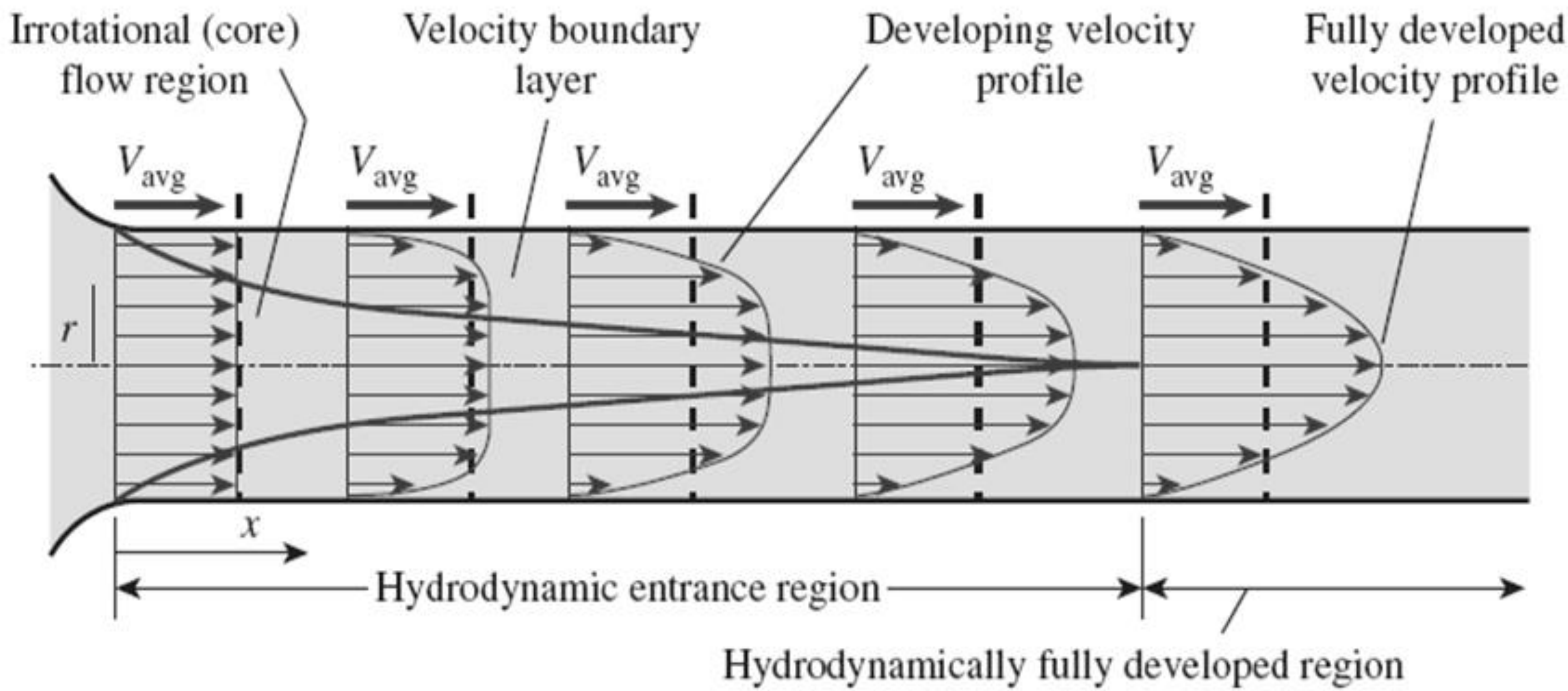
Εξωτερικές ροές γύρω από σώματα είναι αυτές της *αεροδυναμικής* (αεροσκάφη, βλήματα), *υδροδυναμικής* (πλοία, υποβρύχια), *μεταφορών* (αυτοκίνητα, τρένα), *ανεμολογίας* (κτίρια, καμινάδες, γέφυρες, ανεμογεννήτριες) κ.α.



Ροή πάνω σε πλάκα– Εξωτερική ροή

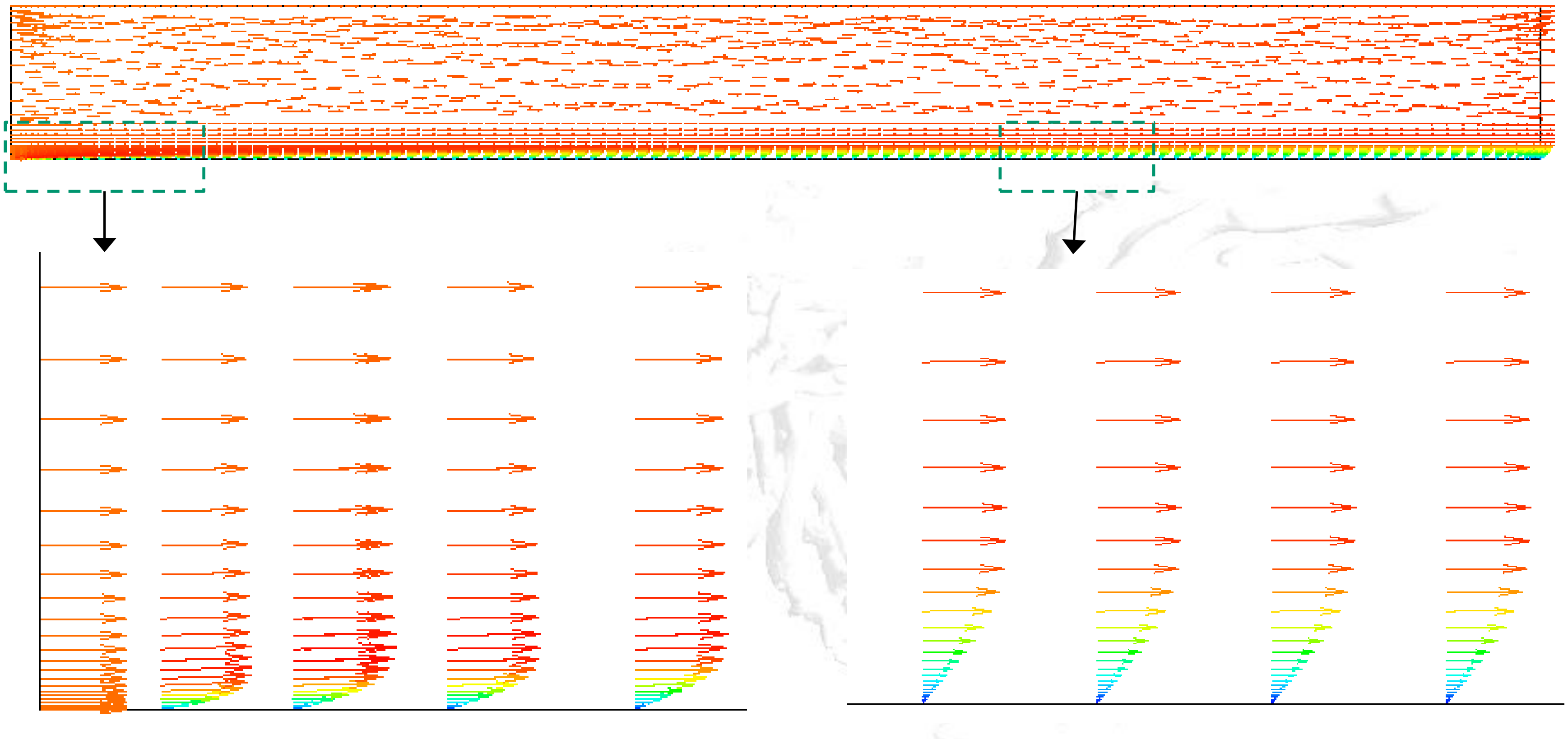
Κοντά στο σώμα εμφανίζονται φαινόμενα ιξώδους (τριβές) τόσο λόγω της **διάτμησης της ροής** (διαφορά ταχύτητας), όσο και λόγω της **συνθήκης της μη–ολίσθησης** πάνω στο σώμα.

Μακριά από το σώμα η ροή είναι άτριβη λόγω της ομοιομορφίας της ταχύτητας, η οποία έχει ομοιόμορφη κατανομή (σταθερή τιμή).

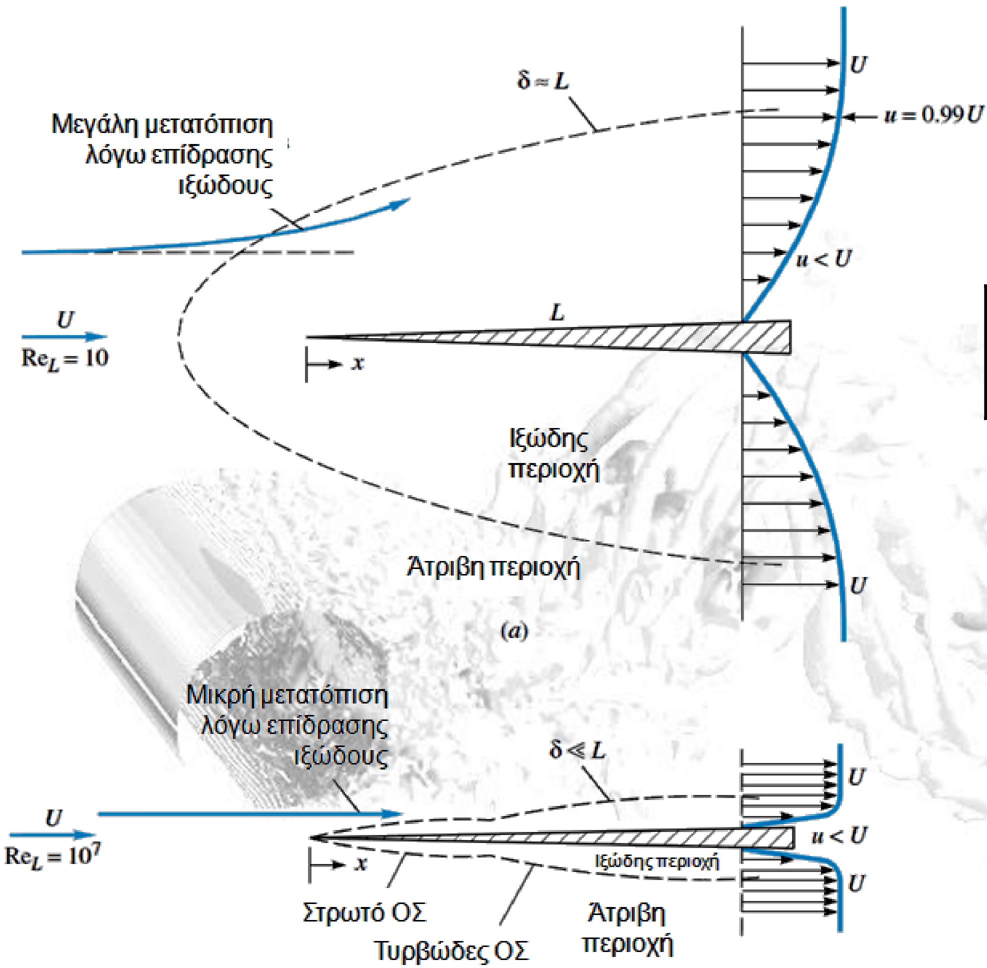


Ροή μέσα σε αγωγό – Εσωτερική ροή

Τα οριακά στρώματα περιορίζονται σε πάχος από τα τοιχώματα των αγωγών. Τα οριακά στρώματα αναπτύσσονται στα τοιχώματα, αυξάνονται κατάντη της ροής, ενώνονται κάπου στο εσωτερικό του αγωγού και τελικά καταλαμβάνουν όλη τη διατομή του αγωγού



Ροή πάνω από πλάκα



$$\mathrm{Re}_x = \frac{U_\infty x}{\nu}$$

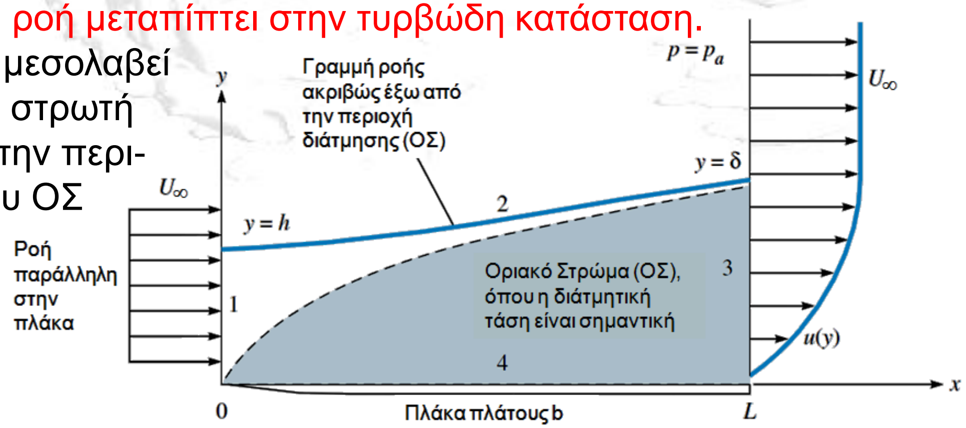
Re_x	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8
$(\delta/x)_{στρ}$	0.050	0.016	0.005		
$(\delta/x)_{τυρ}$			0.022	0.016	0.011

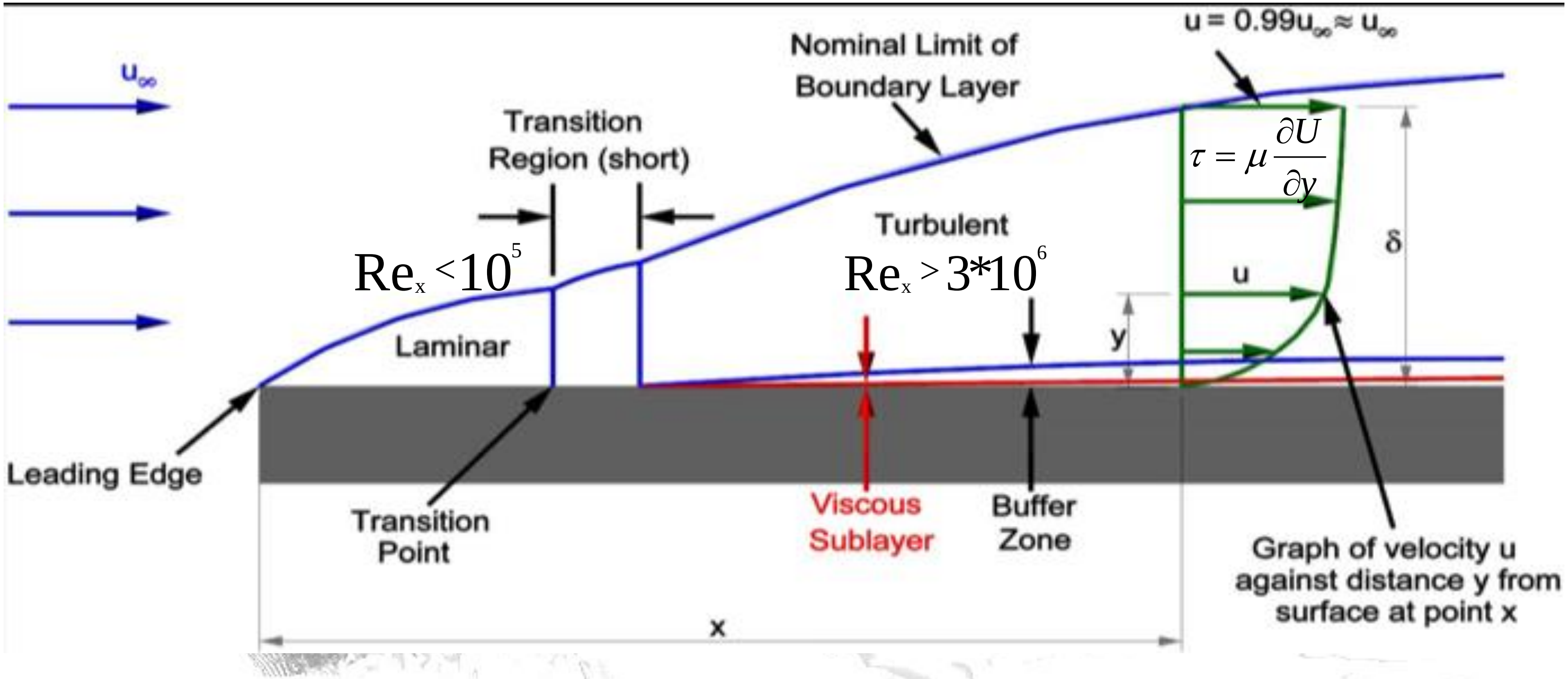
$$\frac{\delta}{x} = \begin{cases} \dfrac{5.0}{\mathrm{Re}_x^{0.5}} & \mathrm{Re}_x < 10^5 \quad στρωτή \\[2ex] \dfrac{0.16}{\mathrm{Re}_x^{1/7}} & \mathrm{Re}_x > 3*10^6 \quad τυρβώδης \end{cases}$$

Για τη μελέτη του ΟΣ θεωρούμε την απλούστερη περίπτωση, δηλαδή αυτή της παράλληλης ροής πάνω από επίπεδη πλάκα. Η πίεση του ρευστού θεωρείται η ίδια παντού μέσα στη ροή αυτή (εκτός της περιοχής μέσα στο ΟΣ, όπως θα δούμε παρακάτω). Επειδή το ρευστό έχει ιξώδες και ως εκ τούτου δημιουργείται η **συνθήκη μη ολίσθησης** πάνω στο τοίχωμα, σύμφωνα με την οποία το ρευστό ακριβώς πάνω στην πλάκα έχει την ταχύτητα της πλάκας, δηλαδή είναι ακίνητο, δημιουργείται μία κατανομή (βαθμίδα, προφίλ) της ταχύτητας ως συνέπεια της διατμητικής τάσης που εμφανίζεται λόγω του ιξώδους. Δηλαδή μεταξύ του ακίνητου ρευστού πάνω στο τοίχωμα και του ρευστού μακριά από την πλάκα που κινείται με ταχύτητα $\mathbf{U_\infty}$, δημιουργούνται όλες οι ενδιάμεσες τιμές ταχύτητας με αποτέλεσμα την ύπαρξη μη-μηδενικής κλίσης **dU/dy** της ταχύτητας κάθετα στην πλάκα, άρα και μη-μηδενικής διατμητικής τάσης **τ=μ(dU/dy)**. Η ύπαρξη της βαθμίδας αυτής οριοθετεί την περιοχή του ΟΣ. Το ΟΣ ορίζεται ως η <u>περιοχή πάχους δ</u> πάνω από την πλάκα, όπου η ταχύτητα είναι μικρότερη από $0.99U_\infty$. Επειδή όλο και περισσότερο ρευστό έρχεται σε επαφή με την πλάκα κατάντη της ροής, χάνεται συνεχώς η ορμή της ροής και το ΟΣ αυξάνει συνεχώς σε πάχος, δηλαδή το δ είναι συνάρτηση της απόστασης από την αρχή της πλάκας, δηλαδή **δ(x)**.

Αρχικά, στο πρώτο τμήμα της πλάκας η ροή είναι στρωτή, επειδή οι διαταραχές που προκαλούνται από τη διάτμηση είναι μικρές και αποσβαίνονται εύκολα από την επίδραση του ιξώδους (τριβές). Όσο όμως αυξάνει το ΟΣ σε πάχος, τόσο μεγαλώνουν οι διαταραχές και σε κάποιο μήκος δεν μπορούν πλέον να "ελεγχθούν" από την επίδραση του ιξώδους και η ροή μεταπίπτει στην τυρβώδη κατάσταση.

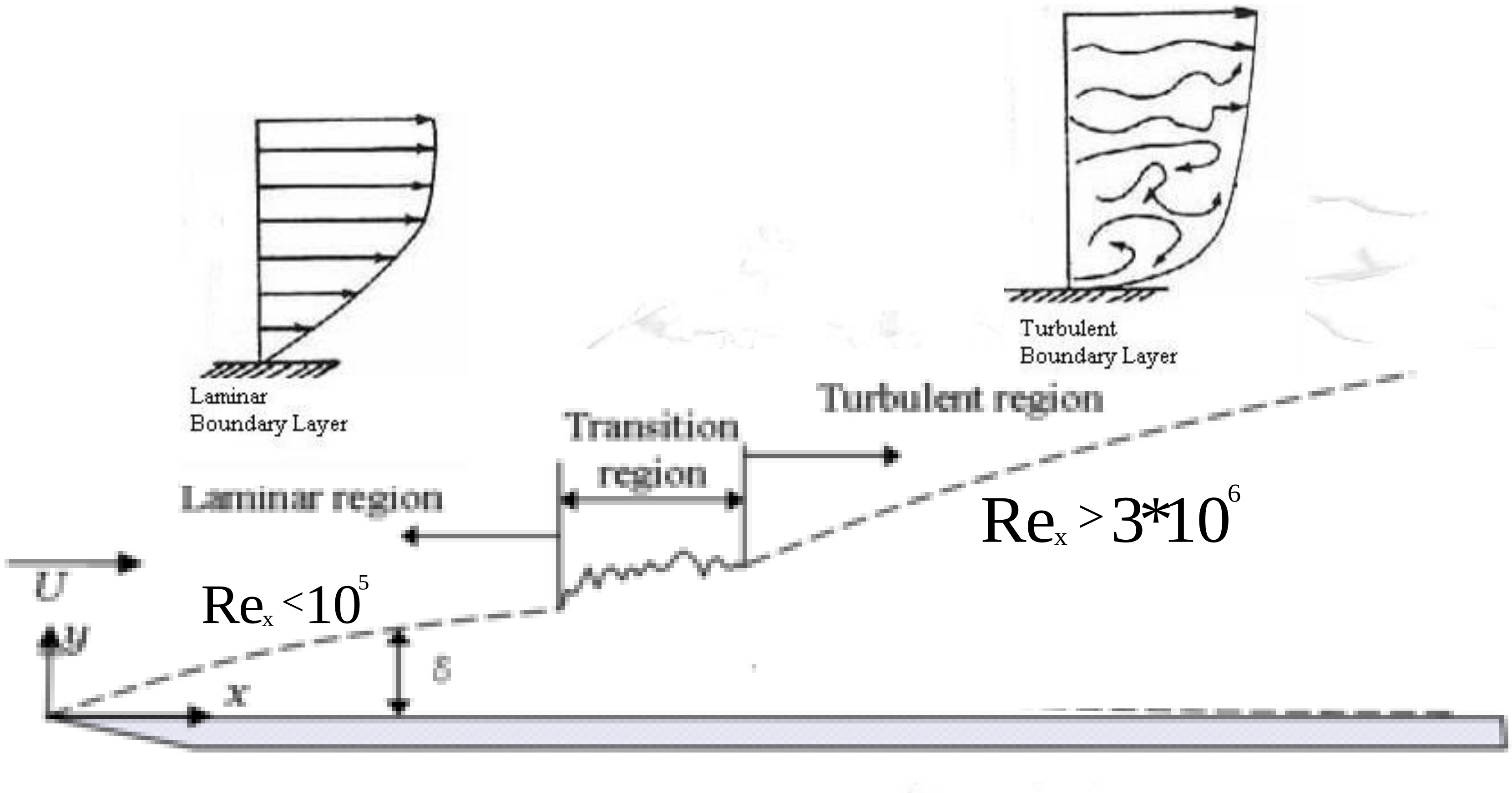
Αυτό δεν γίνεται απότομα, αλλά σταδιακά, οπότε μεσολαβεί μία ενδιάμεση περιοχή όπου η ροή δεν είναι ούτε στρωτή ούτε τυρβώδης και ονομάζεται μεταβατική. Μετά την περιοχή αυτή η ροή είναι τυρβώδης και το πάχος δ του ΟΣ συνεχίζει να αυξάνει συνεχώς. Για $\mathbf{Re_x<10^5}$ η ροή είναι πάντα στρωτή, για $\mathbf{Re_x>3\times10^6}$ είναι πάντα τυρβώδης, ενώ για ενδιάμεσες τιμές μπορεί να είναι στρωτή, τυρβώδης ή μεταβατική.





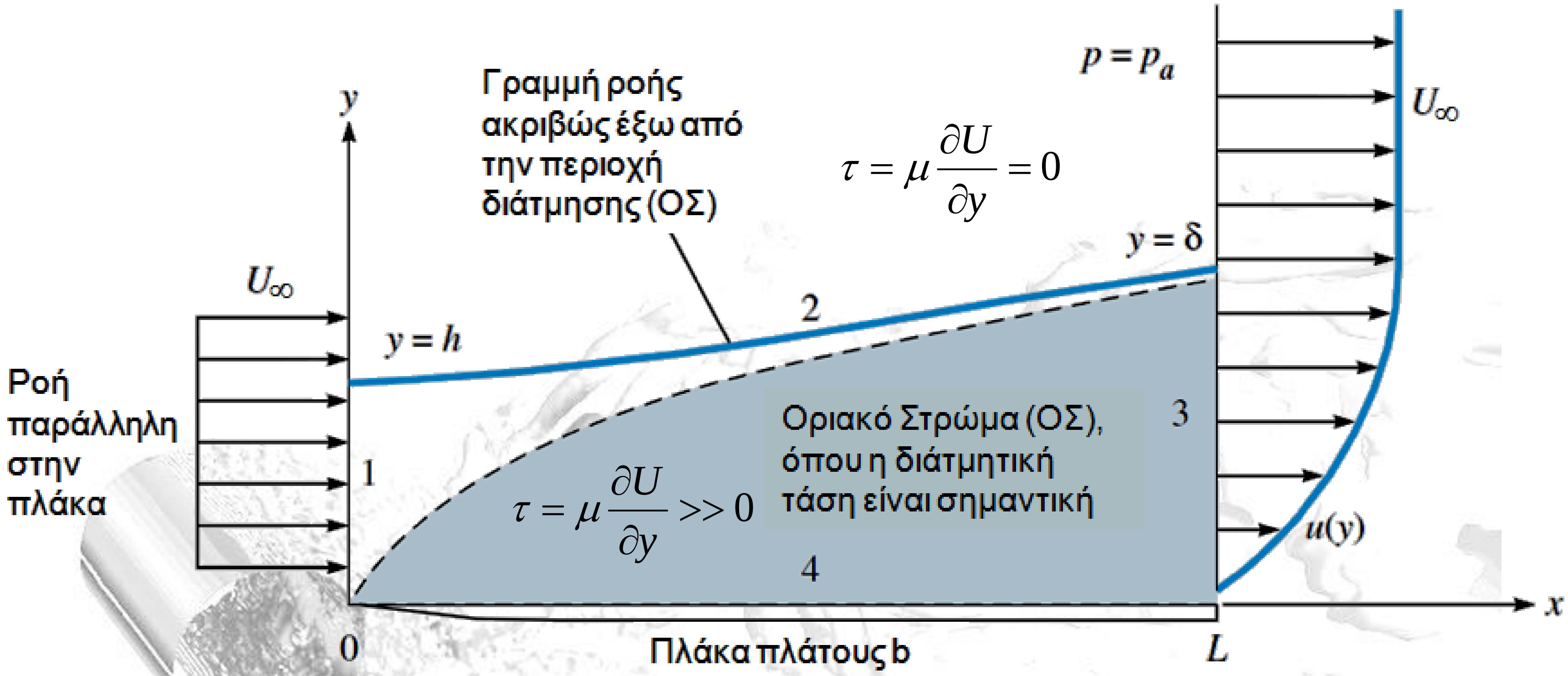
$$\boxed{Re_x = \frac{U_\infty x}{\nu}}$$

$$\boxed{\frac{\delta}{x} = \begin{cases} \dfrac{5.0}{Re_x^{0.5}} & Re_x < 10^5 \\[2ex] \dfrac{0.16}{Re_x^{1/7}} & Re_x > 3*10^6 \end{cases}}$$



$$\boxed{Re_x = \frac{U_\infty x}{\nu}}$$

$$\frac{\delta}{x} = \begin{cases} \dfrac{5.0}{Re_x^{0.5}} & Re_x < 10^5 \\ \dfrac{0.16}{Re_x^{1/7}} & Re_x > 3*10^6 \end{cases}$$



$$\mathrm{Re}_x = \frac{U_\infty x}{\nu}$$

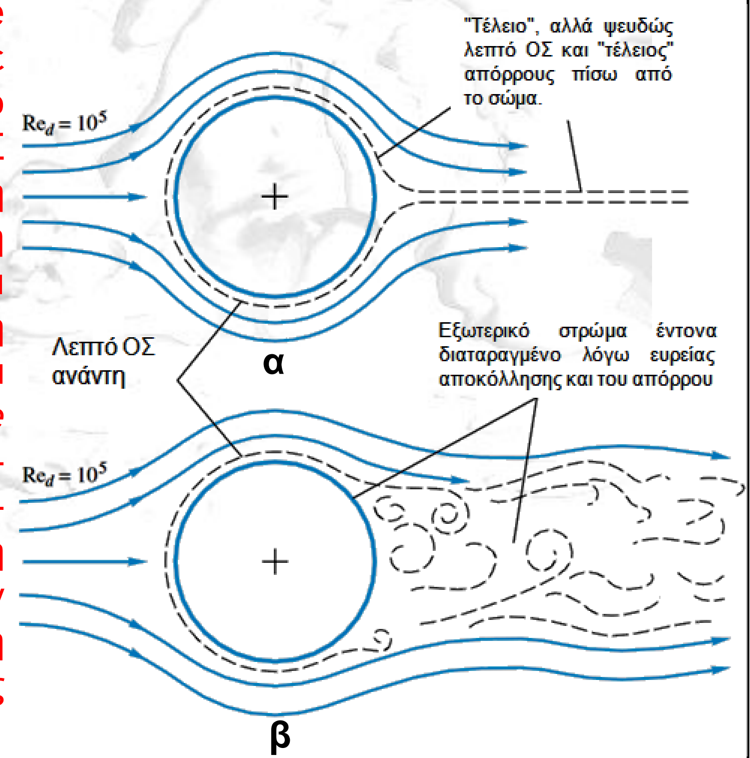
$$\frac{\delta}{x} = \begin{cases} \dfrac{5.0}{\mathrm{Re}_x^{0.5}} & \mathrm{Re}_x < 10^5 \\[2ex] \dfrac{0.16}{\mathrm{Re}_x^{1/7}} & \mathrm{Re}_x > 3*10^6 \end{cases}$$

$1^{η}$ Διάλεξη		

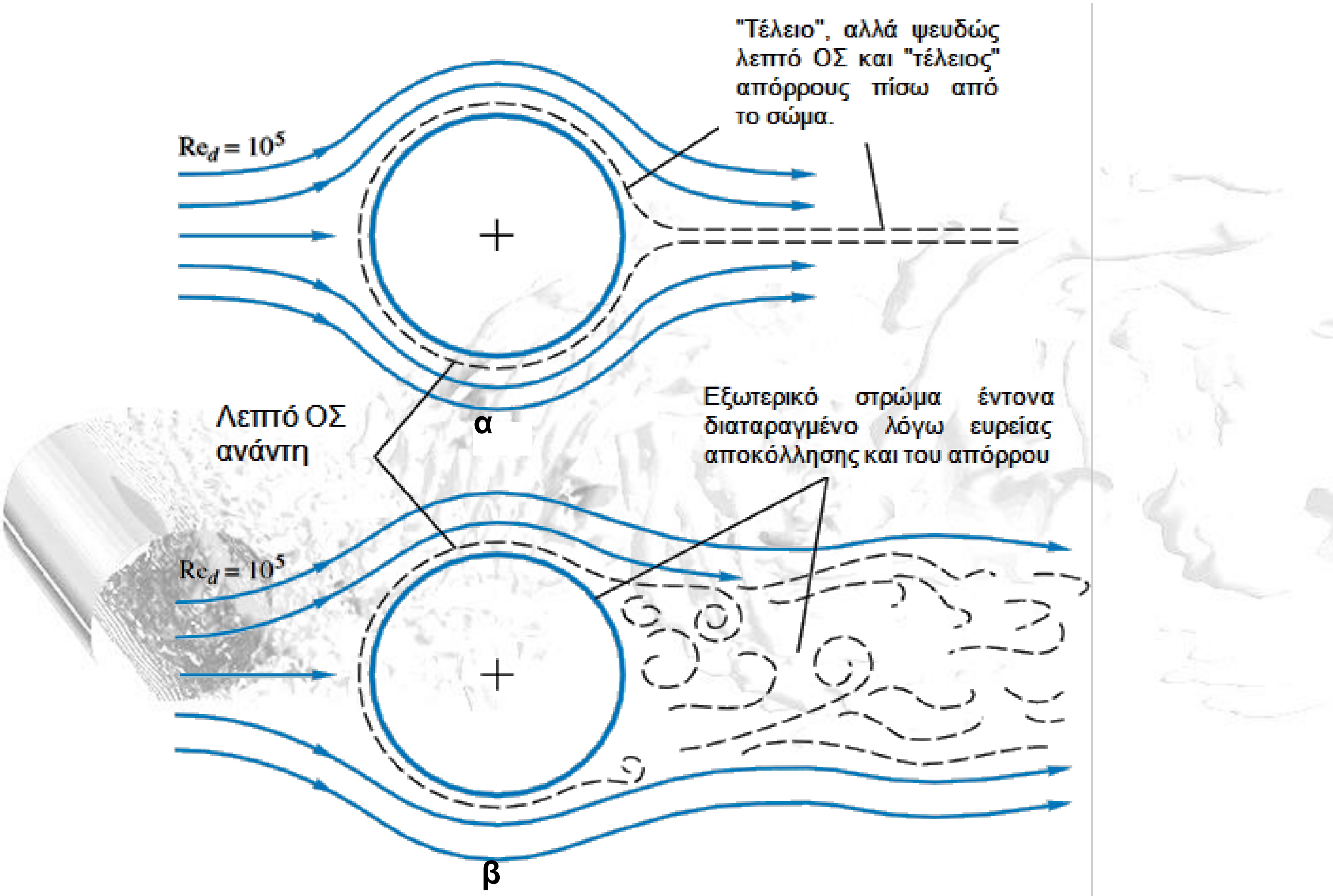
Όπως φαίνεται στον Πίνακα της σελ. 1.3, σε όλες τις περιπτώσεις το ΟΣ είναι πολύ λεπτό, άρα προκαλεί και μικρή μετατόπιση της άτριβης ροής. Συνεπώς η κατανομή της πίεσης πάνω στην πλάκα μπορεί να υπολογιστεί με ασφάλεια από την άτριβη ροή (εξίσωση Bernoulli), σαν να μην υπήρχε το ΟΣ. Αυτή η εξωτερική κατανομή πίεσης προκαλεί τη ροή του ΟΣ καθώς προκαλεί δυνάμεις στην επιφάνεια του σώματος που μεταβάλουν την εξίσωση της ορμής του ΟΣ.

Για λεπτά σώματα, δηλαδή για σώματα που δεν προκαλούν μεγάλο εμπόδιο στην εξωτερική ροή, όπως πλάκες και αεροτομές η αλληλεπίδραση μεταξύ του ΟΣ και της κατανομής πίεσης της άτριβης ροής είναι μία πολύ ακριβής παραδοχή.

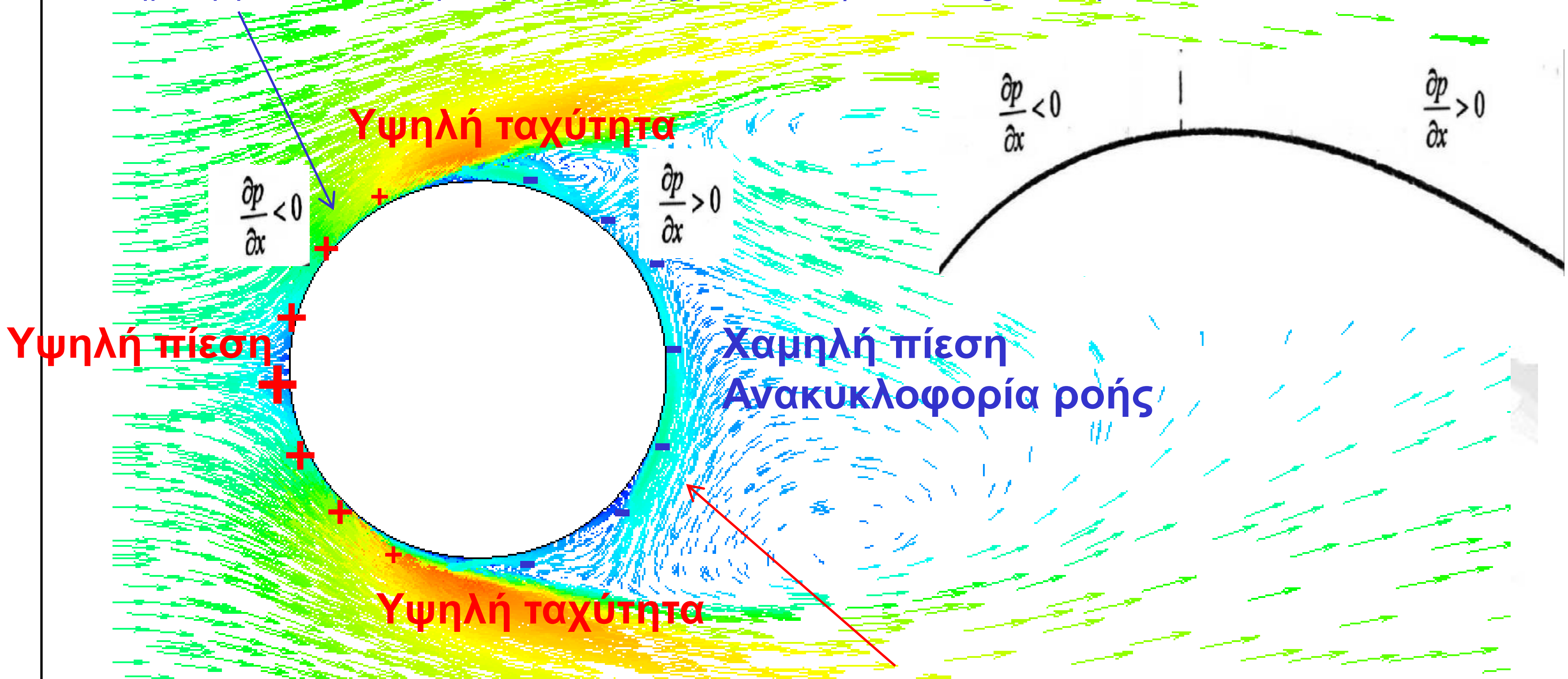
Για "χονδροκομένα" σώματα όμως, ακόμη και για υψηλούς Re υπάρχει ασυνέπεια της μεθόδου της "σύνδεσης" του ΟΣ με την άτριβη ροή. Στο σχήμα (α) φαίνεται η ροή γύρω από κύλινδρο (2D) ή σφαίρα (3D), καθώς και το τέλεια λεπτό ΟΣ γύρω από το σώμα. Εάν αυτή είναι η πραγματικότητα, τότε η θεωρία του ΟΣ ισχύει. Όμως η εικόνα δεν είναι αληθινή, η πραγματικότητα είναι αυτή του σχήματος (β), όπου το ΟΣ είναι λεπτό στο μπροστινό (ανάντη) μέρος του σώματος, όπου η πίεση μειώνεται πάνω στην επιφάνεια (νόμος Bernoulli) και δημιουργείται ευνοϊκή μεταβολή πίεσης (*favorable pressure gradient*). Όμως πίσω από το σώμα η κατάσταση αντιστρέφεται, η πίεση στο σώμα αυξάνει και υπάρχει δυσμενής μεταβολή της πίεσης (*adverse pressure gradient*), οπότε η ροή καταρέει και αποκολλάται από το σώμα, δημιουργώντας έναν μεγάλο, παλλόμενο απόρρου, ο οποίος εξωθεί την εξωτερική ροή. Άρα η παραδοχή της "σύνδεσης" της εξωτερικής, άτριβης ροής με την εσωτερική, λεπτή, ιξώδη ροή του ΟΣ δεν ισχύει.



1.2 Αριθμος Reynolds & Επιδραση της Γεωμετριας

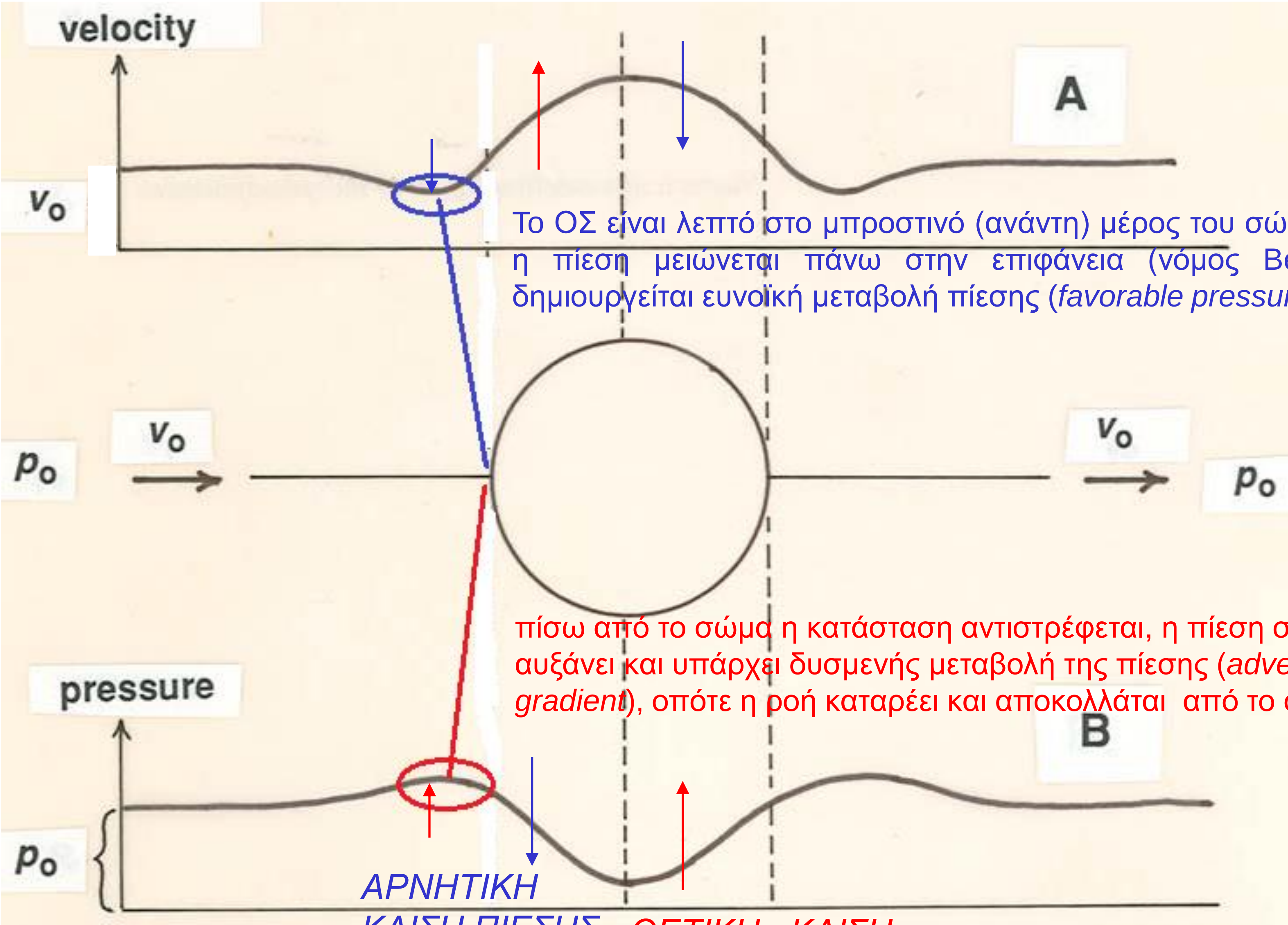


Το ΟΣ είναι λεπτό στο μπροστινό (ανάντη) μέρος του σώματος, όπου η πίεση μειώνεται πάνω στην επιφάνεια (νόμος Bernoulli) και δημιουργείται ευνοϊκή μεταβολή πίεσης (*favorable pressure gradient*)



πίσω από το σώμα η κατάσταση αντιστρέφεται, η πίεση στο σώμα αυξάνει και υπάρχει δυσμενής μεταβολή της πίεσης (*adverse pressure gradient*), οπότε η ροή καταρρέει και αποκολλάται από το σώμα

Ροή γύρω από κύλινδρο

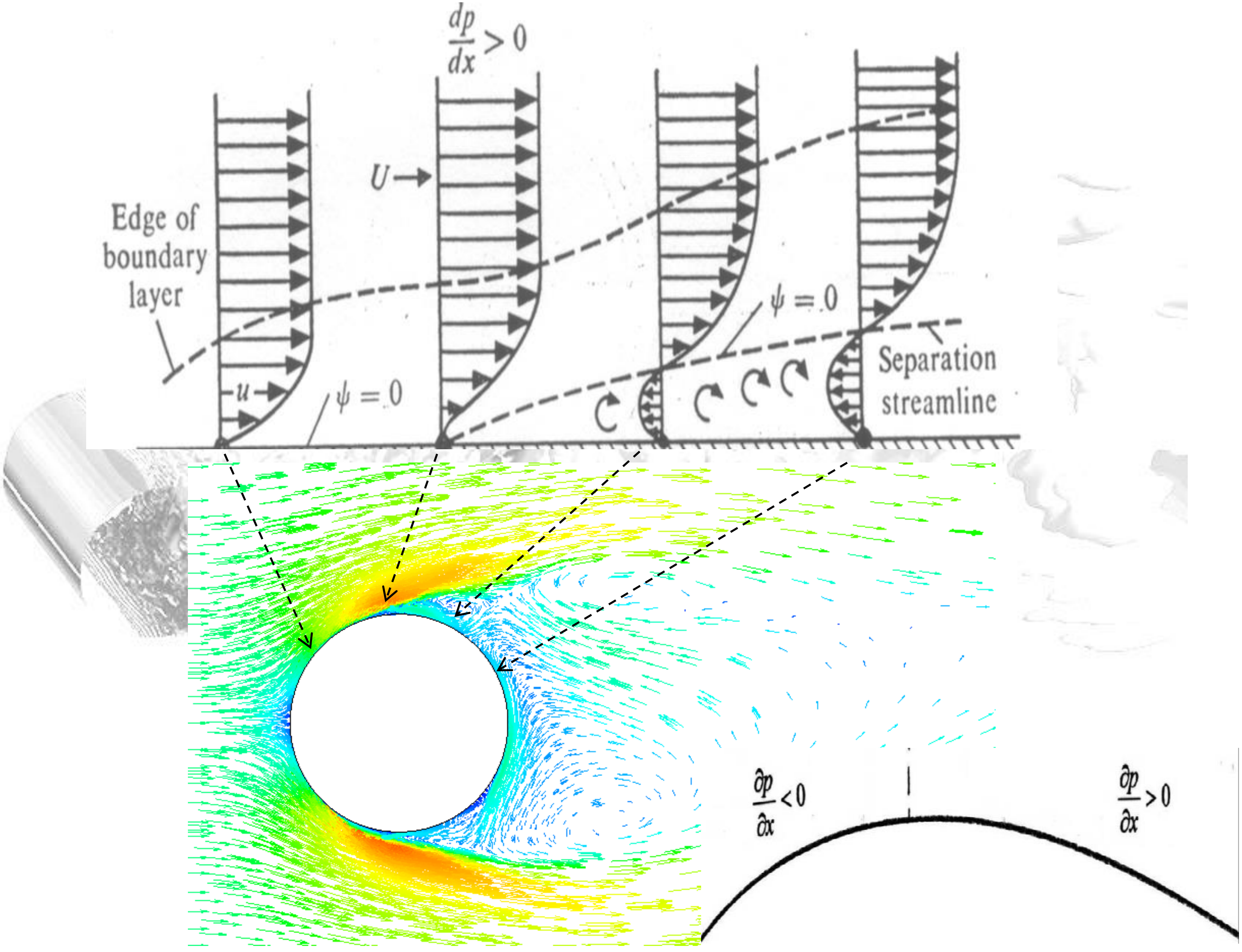


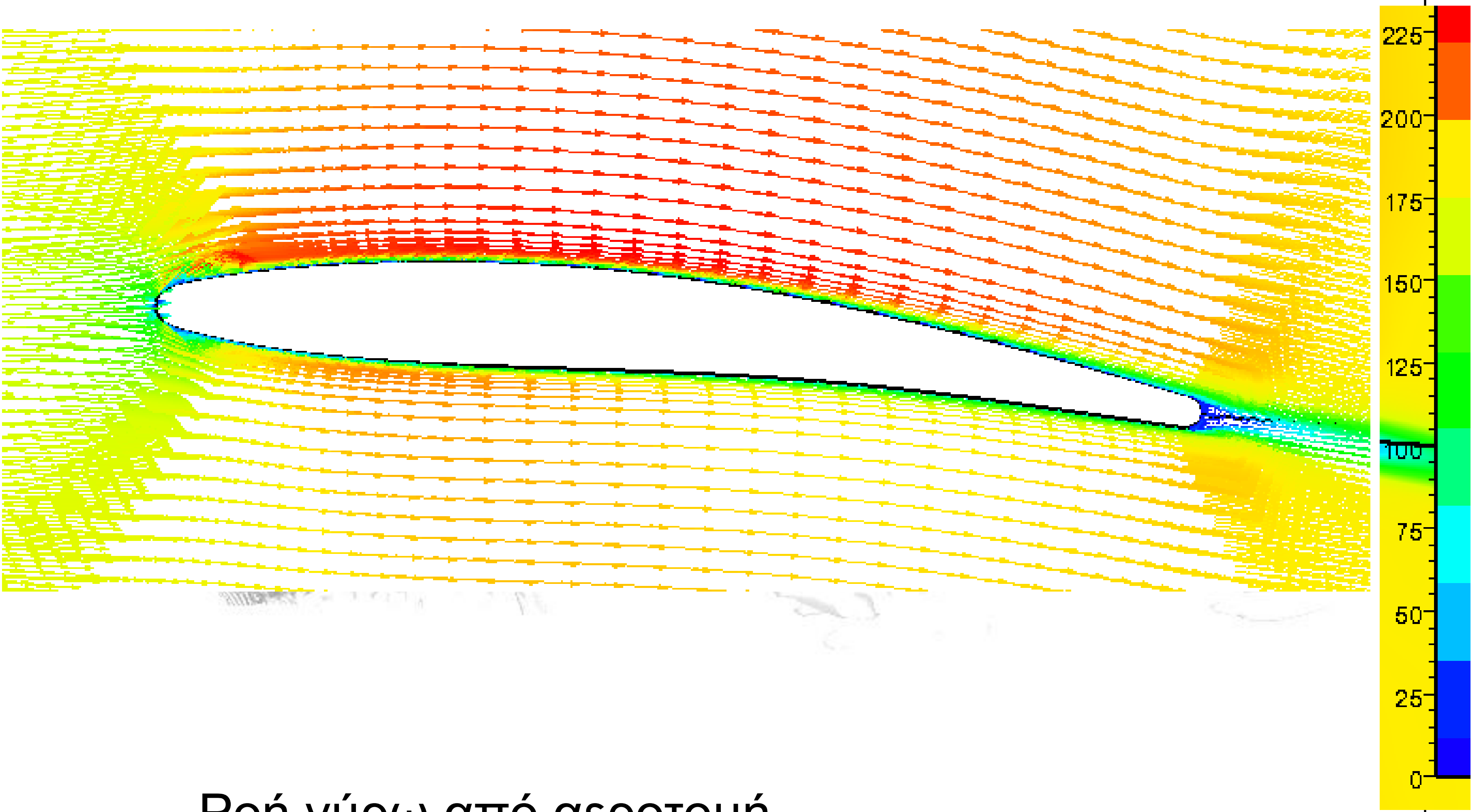
Το ΟΣ είναι λεπτό στο μπροστινό (ανάντη) μέρος του σώματος, όπου η πίεση μειώνεται πάνω στην επιφάνεια (νόμος Bernoulli) και δημιουργείται ευνοϊκή μεταβολή πίεσης (*favorable pressure gradient)*

πίσω από το σώμα η κατάσταση αντιστρέφεται, η πίεση στο σώμα αυξάνει και υπάρχει δυσμενής μεταβολή της πίεσης (*adverse pressure gradient*), οπότε η ροή καταρέει και αποκολλάται από το σώμα

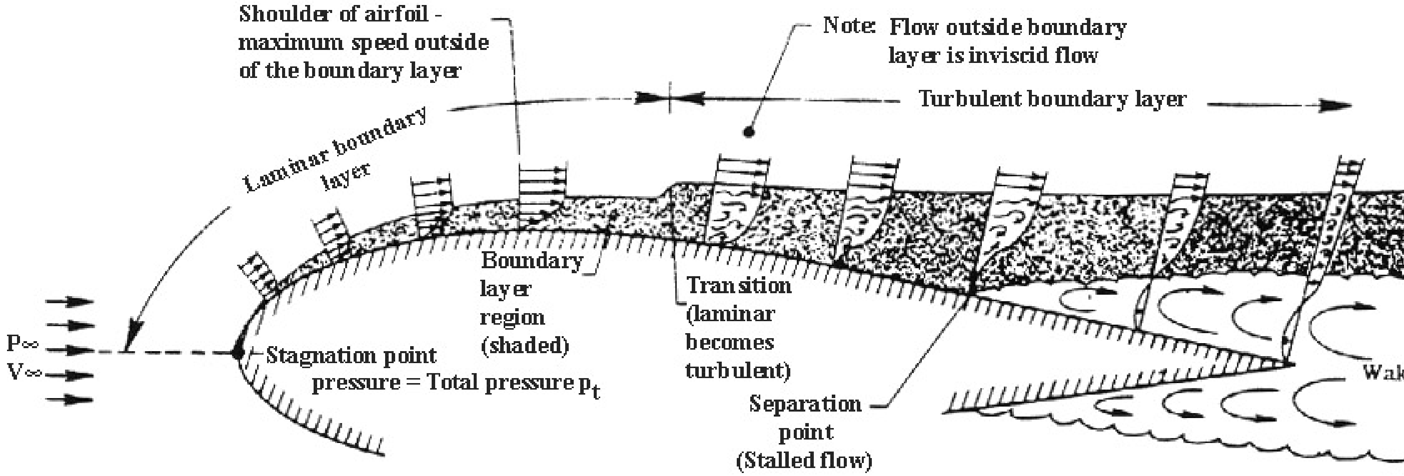
ΑΡΝΗΤΙΚΗ ΚΛΙΣΗ ΠΙΕΣΗΣ

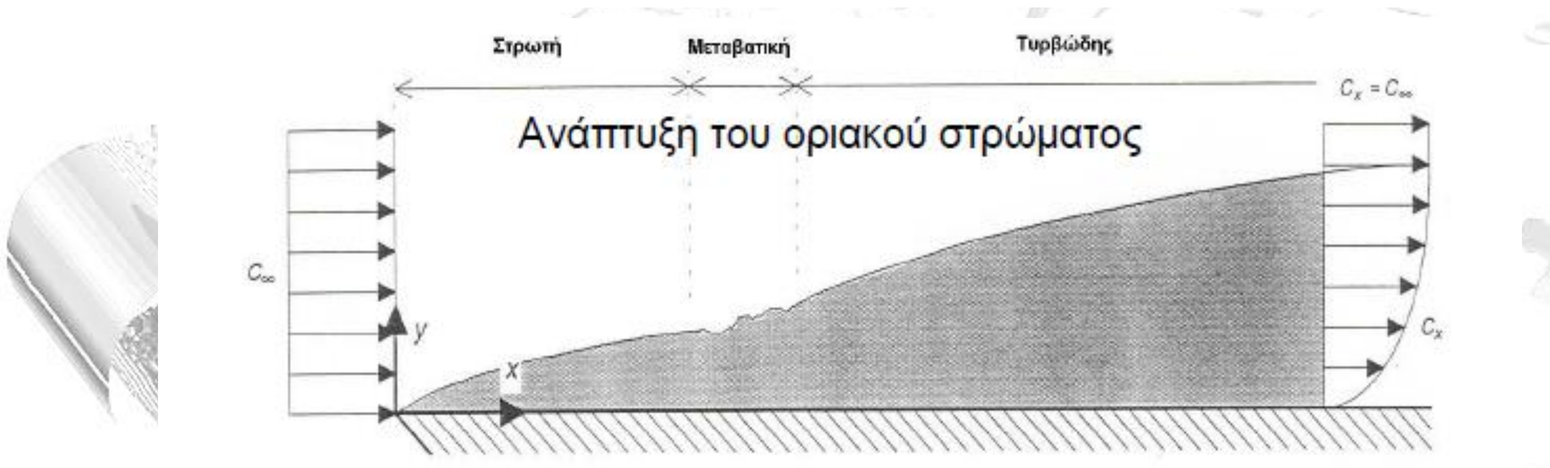
ΘΕΤΙΚΗ ΚΛΙΣΗ ΠΙΕΣΗΣ


$\frac{dp}{dx} > 0$
U
Edge of boundary layer
u
$\psi = 0$
$\psi = 0$
Separation streamline
$\frac{\partial p}{\partial x} < 0$
$\frac{\partial p}{\partial x} > 0$



Ροή γύρω από αεροτομή



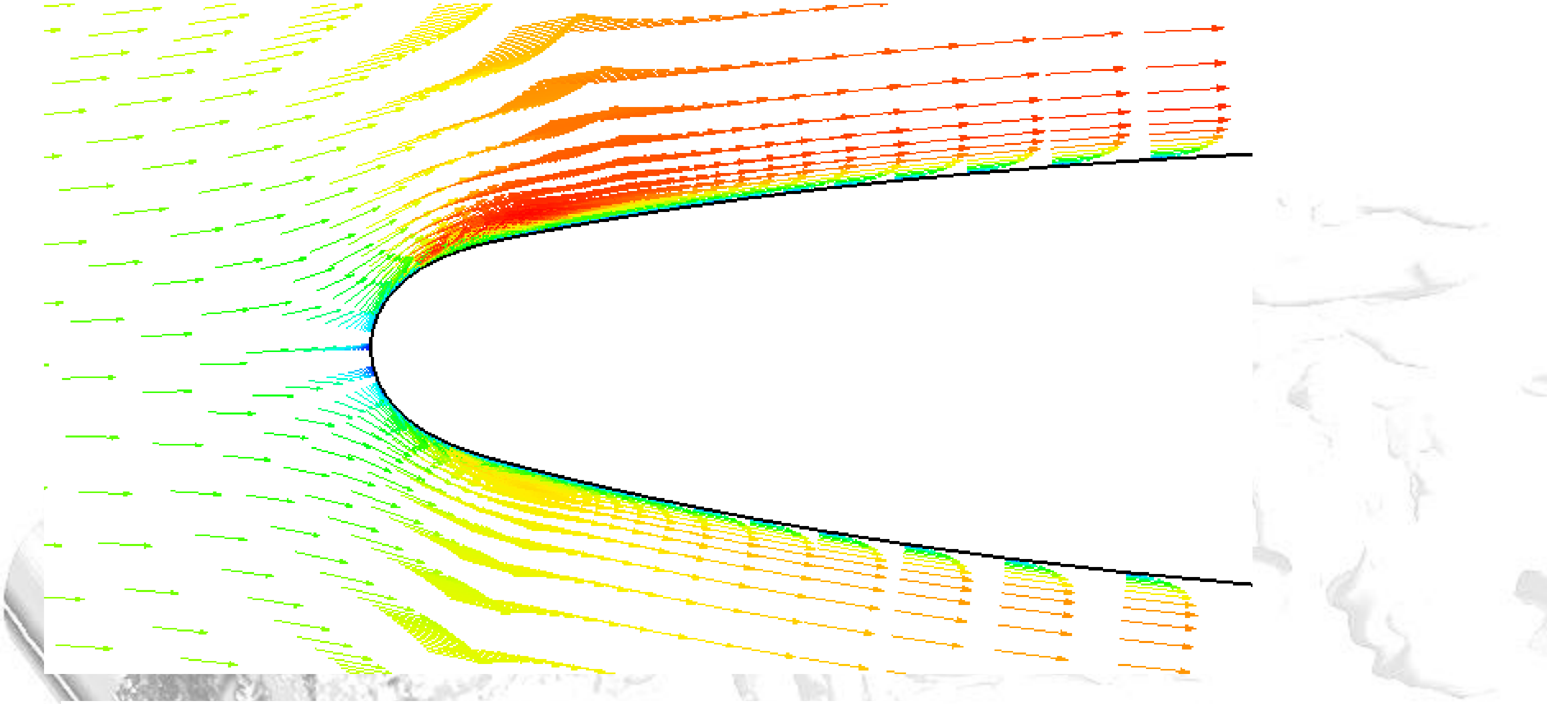


Σημείο ανακοπής στην ακμή προσβολής

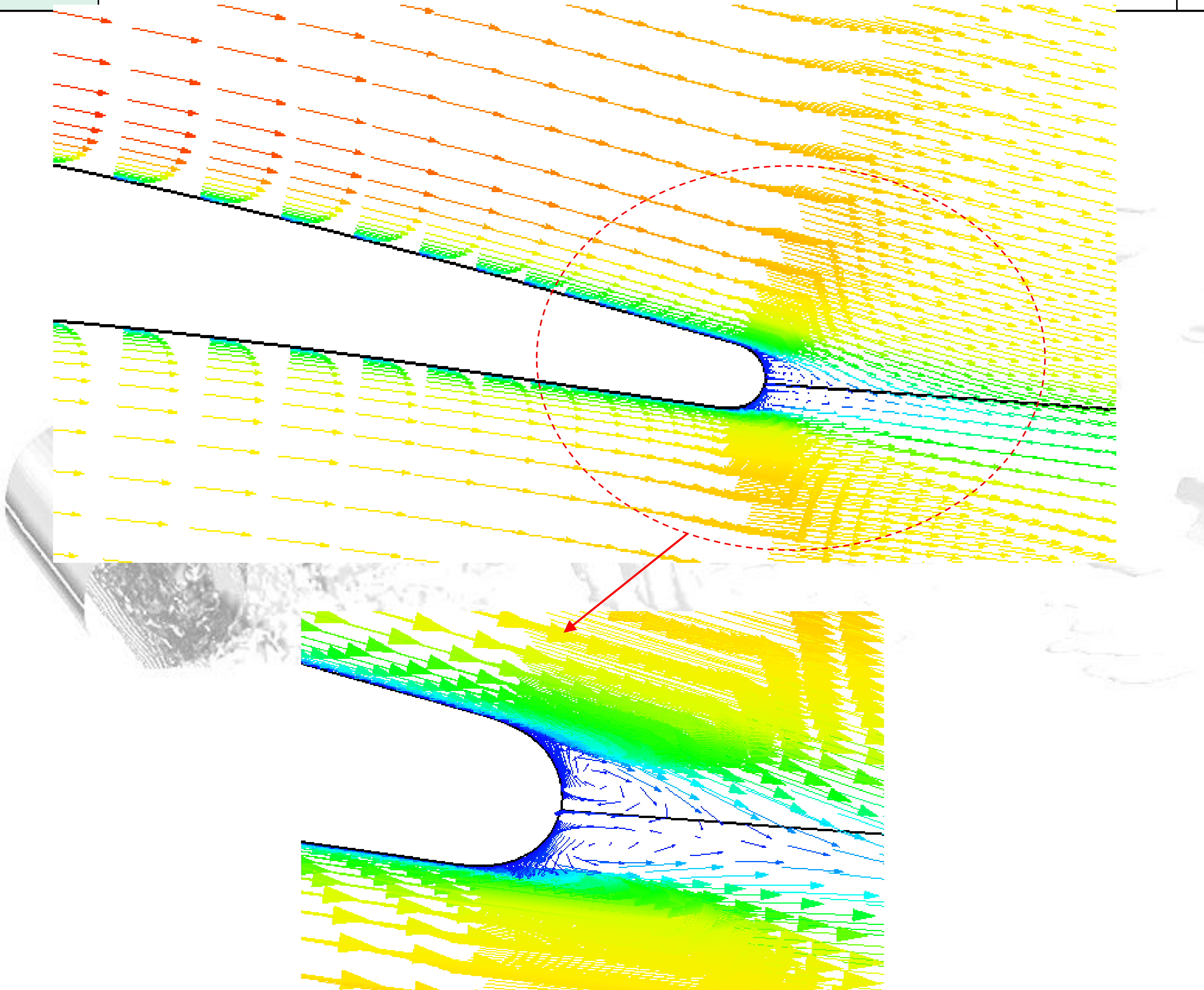
Το οριακό στρώμα αρχικά είναι στρωτό, στη συνέχεια περνάει από μία περιοχή μετάβασης, για να καταλήξει σε πλήρως τυρβώδες οριακό στρώμα.

Η διαδικασία ανάπτυξης του οριακού στρώματος εξαρτάται

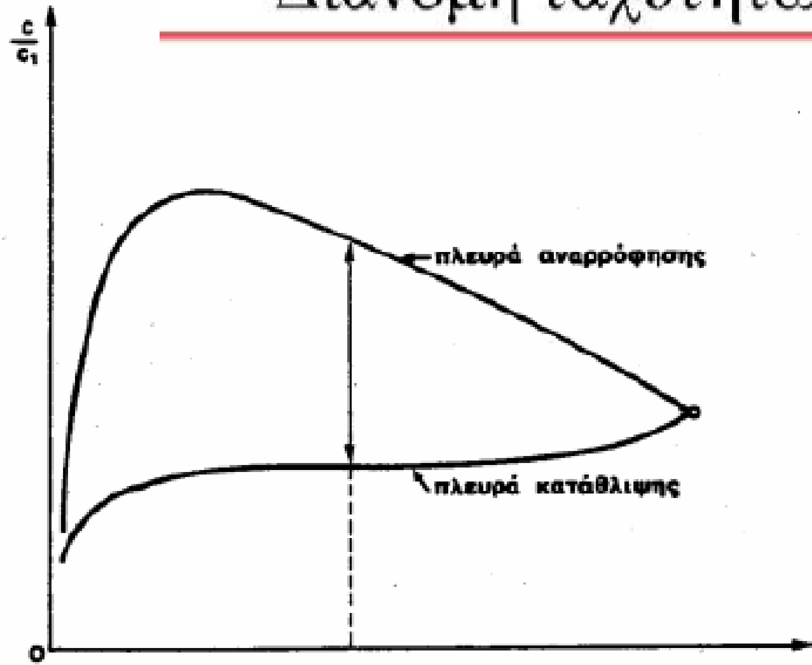
- από τις αρχικές συνθήκες που προκύπτουν από τη γωνία πρόσπτωσης,
- από την κατανομή της πίεσης κατά μήκος του πτερυγίου
- και το επίπεδο τύρβης στην είσοδο του πεδίου ροής.

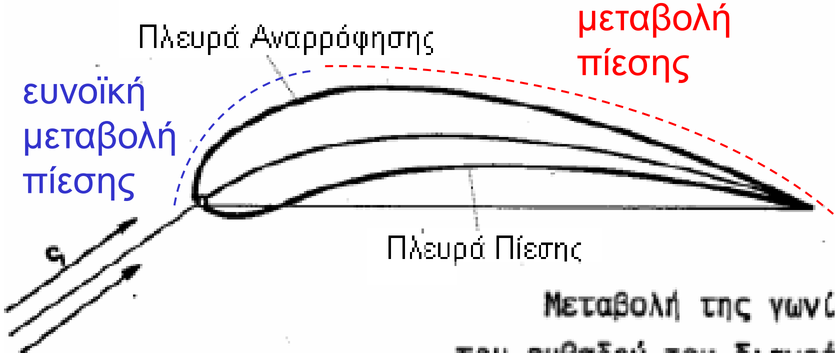


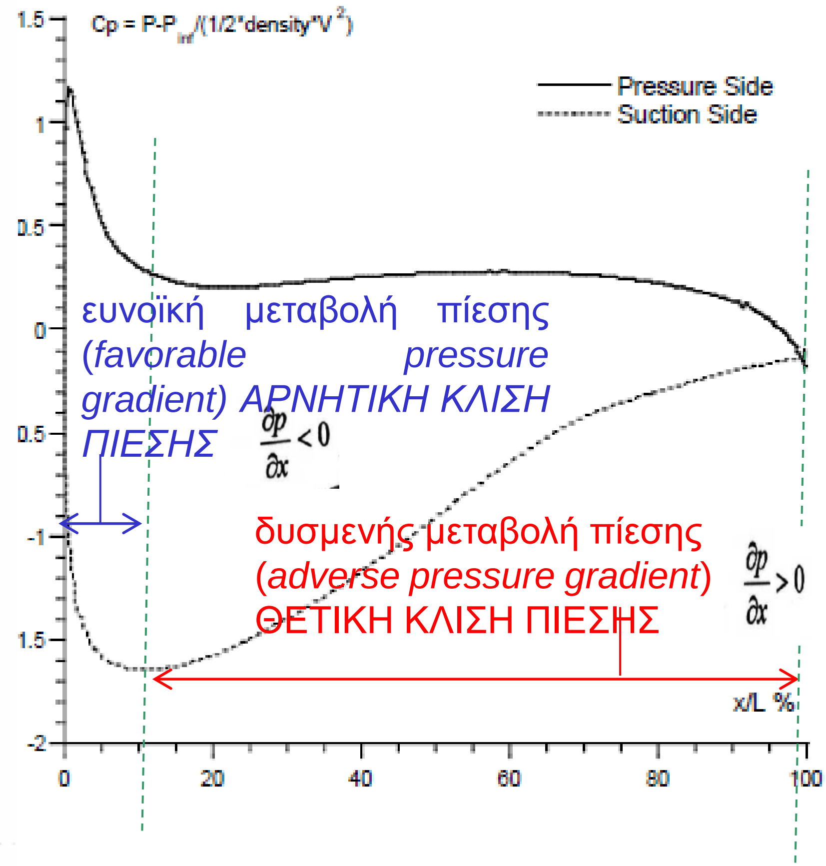

Η ροή κοντά στην ακμή προσβολής



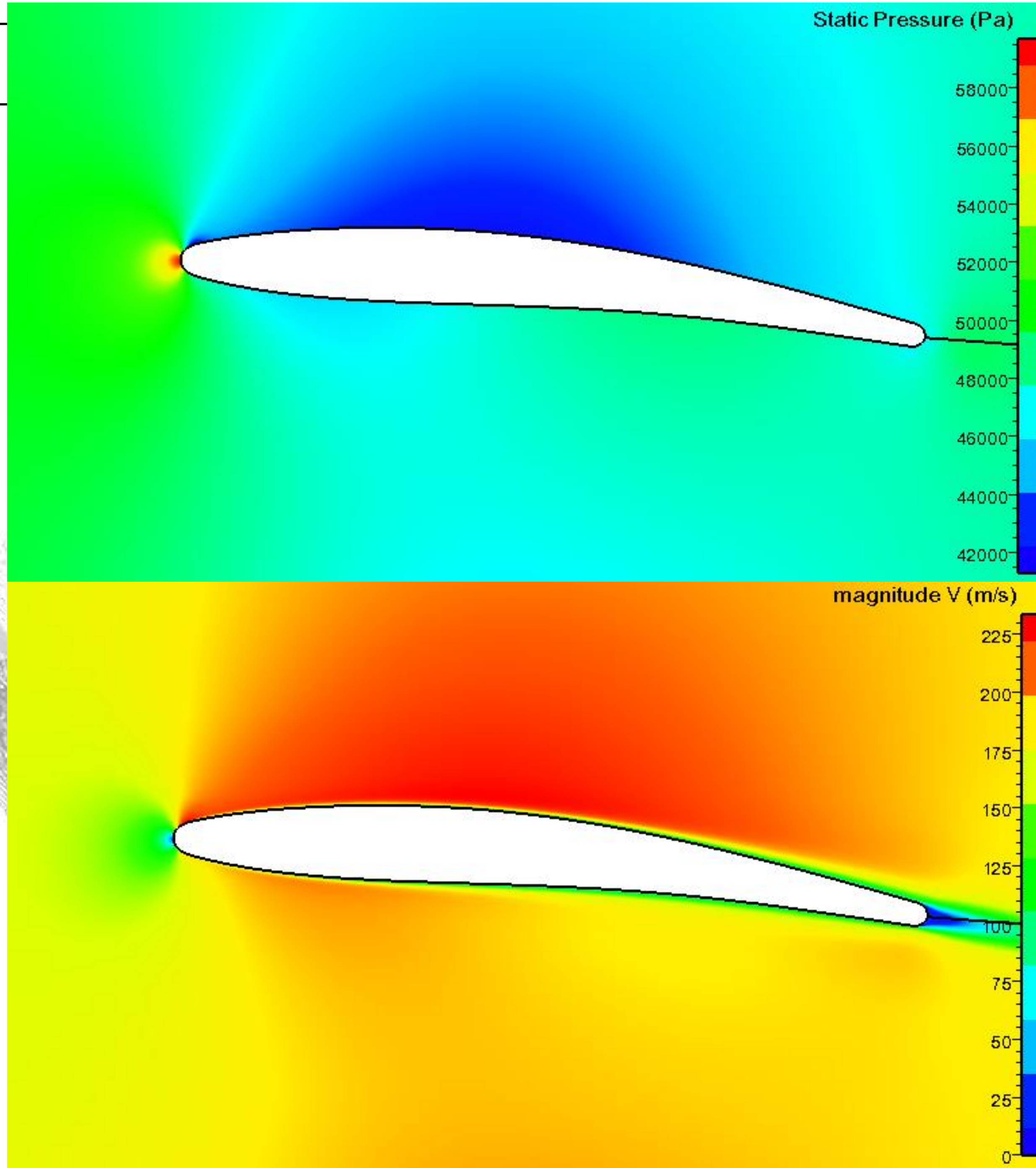
Διανομή ταχυτήτων σε αεροτομές



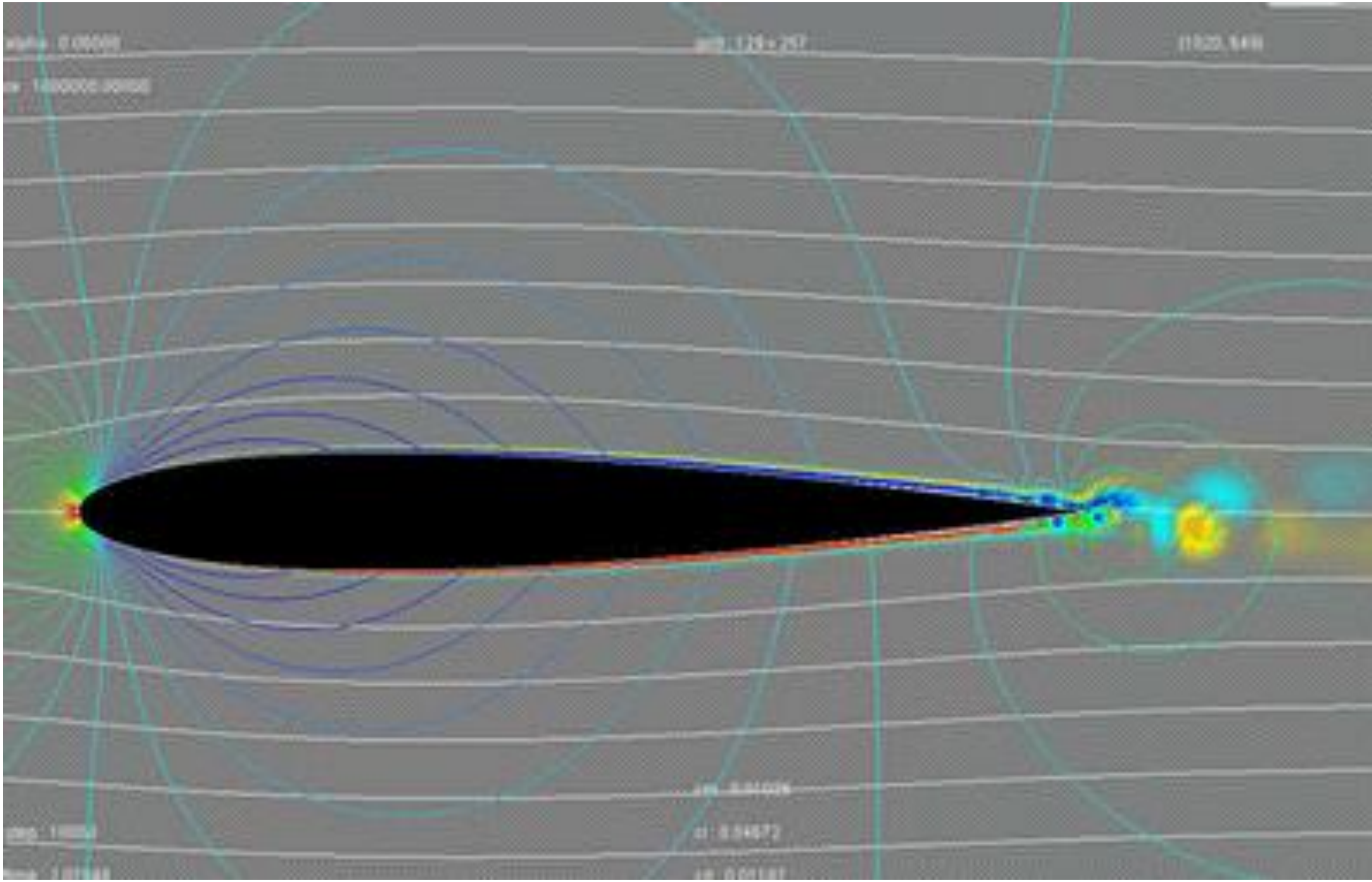




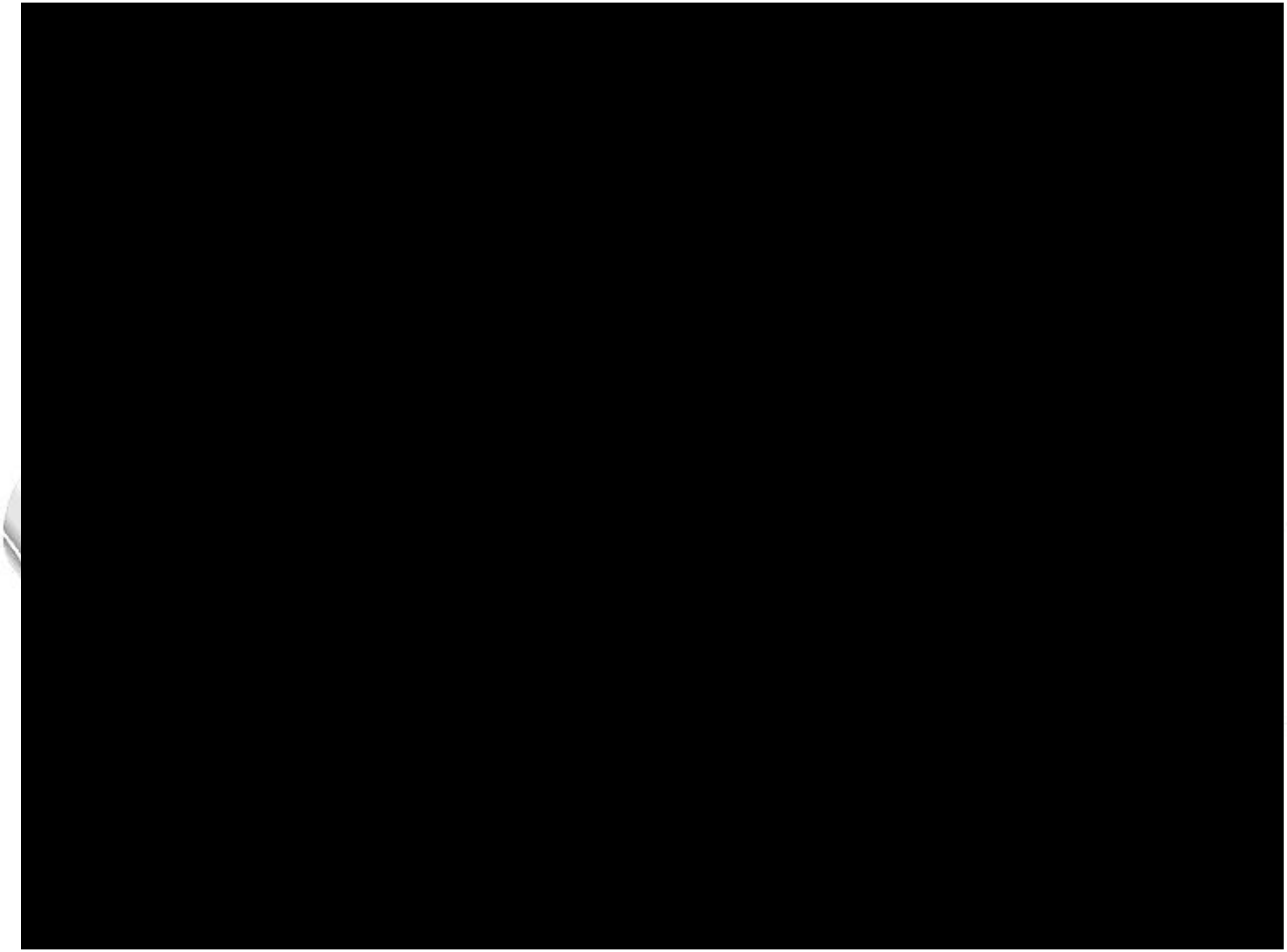
Μεταβολή της γωνίας πρόσπτωσης i_1 προκαλεί μεταβολή του σχήματος και του εμβαδού του διαγράμματος ταχυτήτων.


Static Pressure (Pa)
58000
56000
54000
52000
50000
48000
46000
44000
42000
magnitude V (m/s)
225
200
175
150
125
100
75
50
25
0

1η Διάλεξη



1η Διάλεξη



1.4.2 ΠΑΧΟΣ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗΣ

Μία ενδιαφέρουσα ιδιότητα του ΟΣ είναι ότι αν και είναι λεπτό, προκαλεί μία μετατόπιση της άτριβης ροής μακριά από την πλάκα. Όπως φαίνεται στο σχήμα, οι ροϊκές γραμμές πρέπει να απομακρυνθούν από την πλάκα κατά **δ*(x)**, ώστε να ικανοποιηθεί η συνθήκη διατήρησης της μάζας μεταξύ εισόδου και εξόδου:

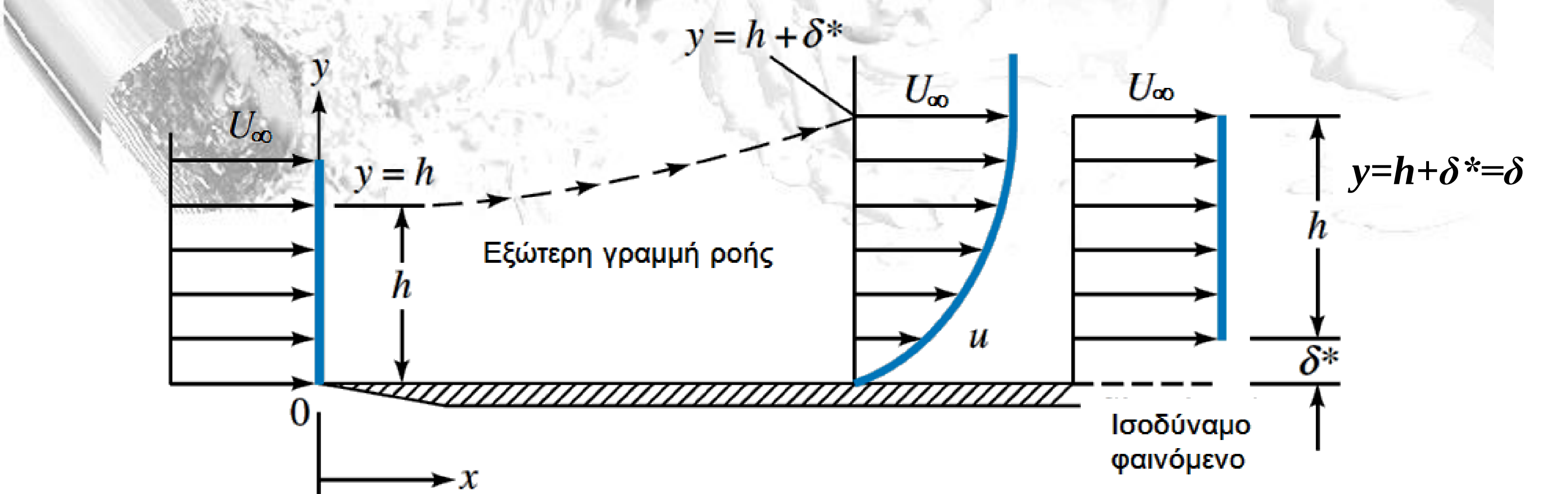
$$\int_0^h \rho U_\infty b \, dy = \int_0^\delta \rho u b \, dy \qquad \delta = h + \delta^*$$

όπου εισάγουμε το μέγεθος **δ*** και το ονομάζουμε **πάχος μετατόπισης** του ΟΣ. Εάν διαγράψουμε το κοινό γινόμενο *ρb* από τα δύο μέλη και προσθαφαιρέσουμε την ταχύτητα U_∞ στο δεξί ολοκλήρωμα, έχουμε:

$$U_\infty h = \int_0^\delta (U_\infty + u - U_\infty)\, dy = U_\infty(h + \delta^*) + \int_0^\delta (u - U_\infty)\, dy$$

και τελικά:

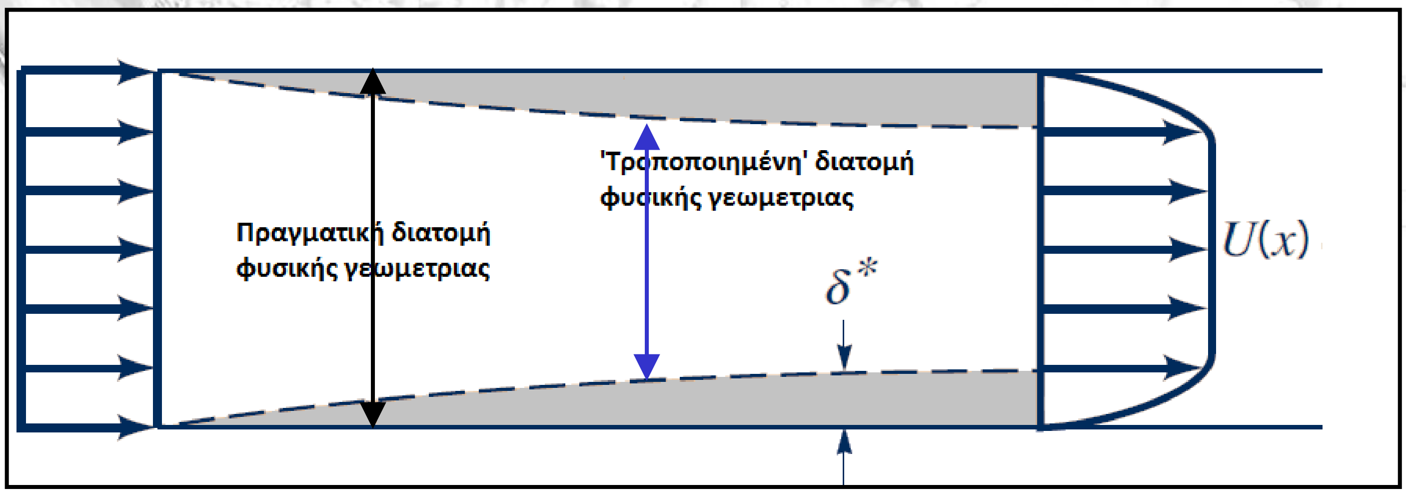
$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dy$$



Το πάχος μετατόπισης αντιπροσωπεύει το πάχος εκείνο κατά το οποίο πρέπει να αυξηθεί το πάχος του σώματος ώστε μια ‘φανταστική’ ομοιόμορφη ατριβής ροή να έχει τα ίδια ρευστομηχανικά χαρακτηριστικά με την πραγματική ροή.

Η προσέγγιση αυτή μας επιτρέπει να προσομοιώσουμε την παρουσία την οποία έχει το οριακό στρώμα στη ροή εκτός της περιοχής του οριακού στρώματος προσθέτοντας το πάχος μετατόπισης στην πραγματική γεωμετρία του τοιχώματος και αντιμετωπίζοντας τη ροή γύρω από το ‘τροποποιημένο’ σώμα ως ατριβή.

$$\delta^* = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dy$$



ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΤΑ VON KÁRMÁN

Η τοπική τιμή της **δύναμης αντίστασης**, **D(x)**, σε μία θέση x (x=0 στην αρχή της πλάκας) που ασκεί το ρευστό στην πλακα, ανεξάρτητα από το εάν η ροή είναι στρωτή ή τυρβώδης, δίνεται από τη σχέση:

$$D(x) = \rho b \int_0^{\delta(x)} u(U_\infty - u)\, dy$$

όπου ρ=πυκνότητα ρευστού [kg/m^3], b=πλάτος πλάκας [m] και u=u(x) τοπική κατανομή της ταχύτητας [m/s]. Η εξίσωση προτάθηκε από τον von Kármán (1921), ο οποίος την εξέφρασε σε πιο "βολική" μορφή, συναρτήσει του **πάχους ορμής**, **θ** (*momentum thickness*), το οποίο αποτελεί μέτρο της ολικής αντίστασης της πλάκας.

$$D(x) = \rho b U_\infty^2 \theta \qquad \theta = \int_0^{\delta} \frac{u}{U_\infty}\left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dy$$

Η παραγώγιση της αντίστασης και επειδή U_∞=σταθερό δίνει:

$$\frac{dD}{dx} = \rho b U_\infty^2 \frac{d\theta}{dx}$$

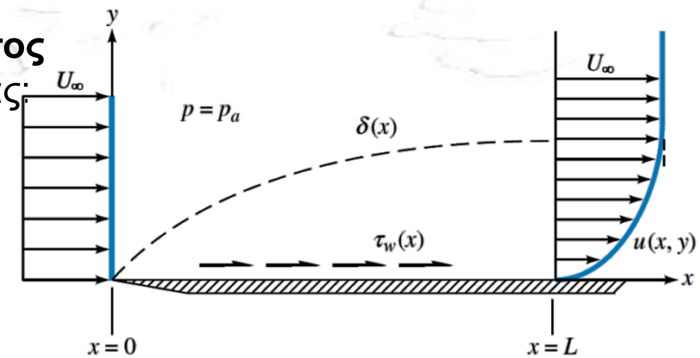
Ο Kármán επίσης υπολόγισε την αντίσταση D(x) από την εξίσωσή της με την ολοκλήρωση της δύναμης που προέρχεται από τη διατμητική τάση σε έναν όγκο ελέγχου γύρω από την πλάκα:

$$D(x) = b \int_0^{x} \tau_w(x)\, dx \quad \text{και παραγωγίζοντας:} \quad \frac{dD}{dx} = b\tau_w$$

Ο Kármán κατέληξε στην ονομαζόμενη ως **σχέση ολοκληρώματος της ορμής** (*momentum-integral relation*) του ΟΣ επίπεδης πλάκας:

$$\tau_w = \rho U_\infty^2 \frac{d\theta}{dx}$$

Η σχέση αυτή ισχύει για στρωτή και τυρβώδη ροή.



Ο Kármán υπέθεσε μία προσεγγιστική κατανομή ταχύτητας για στρωτή ροή παραβολικής μορφής ($2^{ου}$ βαθμού):

$$u(x, y) \approx U_\infty\left(\frac{2y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2}\right) \qquad 0 \leq y \leq \delta(x)$$

Η προσεγγιστική αυτή σχέση επιτρέπει την εκτίμηση τόσο του πάχους ορμής, **θ** όσο και της διάτμησης στο τοίχωμα, **τ_w αλλά και της** τοπικής τιμής της **δύναμης αντίστασης D(x)**

$$\theta = \int_0^\delta \left(\frac{2y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2}\right)\left(1 - \frac{2y}{\delta} + \frac{y^2}{\delta^2}\right) dy \approx \frac{2}{15}\delta \qquad \tau_w = \mu \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} \approx \frac{2\mu U_\infty}{\delta}$$

$$D(x) = \rho b U_\infty^2 \theta$$

Συντελεστής επιφανειακής τριβής της πλάκας:

$$\tau_w = \mu \left.\frac{du}{dy}\right|_{y=0} \Rightarrow C_{f,x} \equiv \frac{\tau_w}{\rho u_\infty^2/2} \Rightarrow C_f = \frac{1}{L}\int_0^L C_{f,x}\,dx \Rightarrow F_D = C_f A \frac{\rho u_\infty^2}{2}$$

στρωτή
$$C_{f,x} = 0.664/\sqrt{\mathrm{Re}_x}$$
$$C_f = 1.328/\sqrt{\mathrm{Re}_L}$$

τυρβώδης
$$C_{f,x} = 0.0592\,\mathrm{Re}_x^{-1/5}$$
$$C_f = 0.074\,\mathrm{Re}_L^{-1/5}$$

μικτή
$$C_f = 0.074\,\mathrm{Re}_L^{-1/5} - 1742\,\mathrm{Re}_L^{-1}$$
$$C_f = \frac{1}{L}\left(\int_0^{x_{cr}} C_{f,x\ \mathrm{laminar}}\,dx + \int_{x_{cr}}^{L} C_{f,x,\ \mathrm{turbulent}}\,dx\right)$$

- Το ΟΣ μπορεί να θεωρηθεί λεπτό εάν είναι, ας πούμε, **$\delta/x<0.1$**. Αυτό συμβαίνει όταν $\delta/x=0.1=$**$5.0\mathrm{Re}_x^{1/2}$** δηλαδή όταν **$\mathrm{Re}_x=2500$**. Για μικρότερους αριθμούς Re_x θεωρούμε ότι η θεωρια του ΟΣ δεν ισχύει, καθώς το πάχος του ΟΣ επηρεάζει σημαντικά την εξωτερική άτριβη ροή.
- Το ανώτερο όριο για στρωτή ροή είναι **$\mathrm{Re}_x=3\times10^6$**. Όσο προχωράμε κατάντη, ο Re_x αυξάνει και κάπου συμβαίνει μετάβαση σε τυρβώδη ροή.