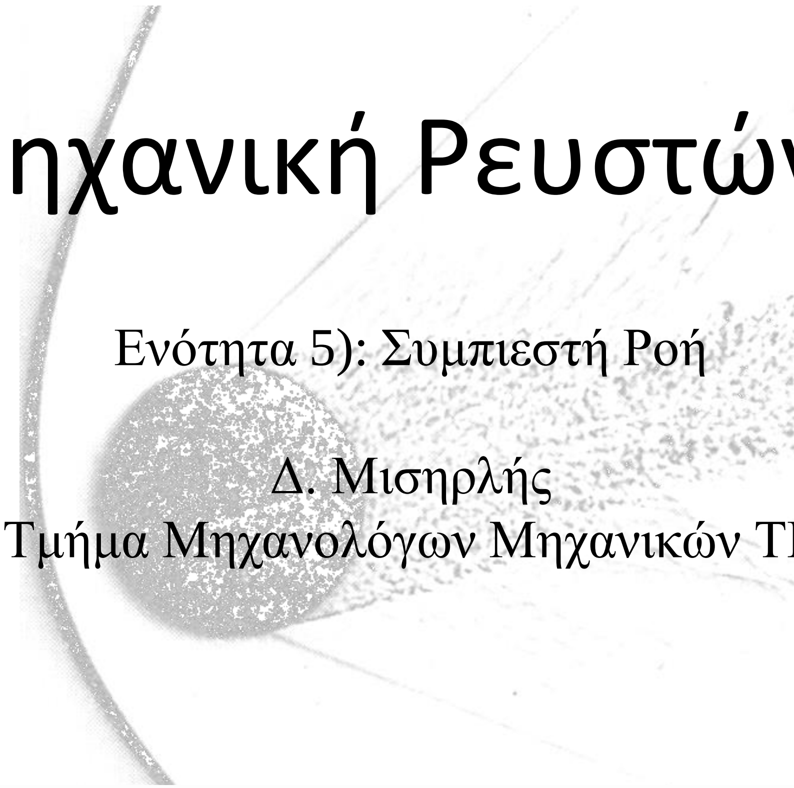
ΑΝΟΙΧΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Μηχανική Ρευστών ΙΙ



Ενότητα 5): Συμπιεστή Ροή

Δ. Μισηρλής
Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών ΤΕ

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

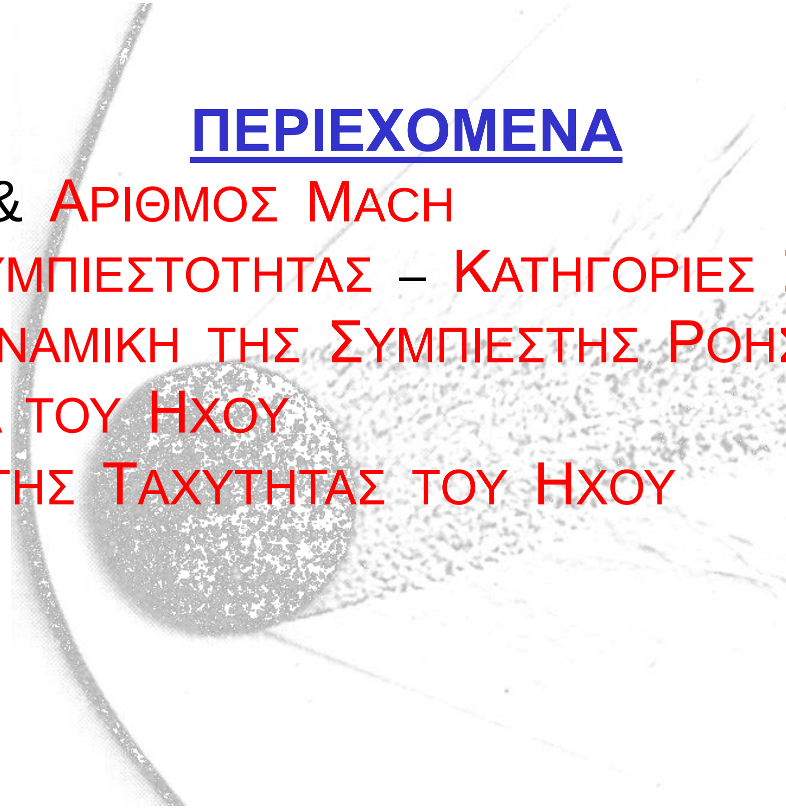
- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Κεντρικής Μακεδονίας» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Τίτλος ενότητας

Συμπιεστή ροή

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ



3.1 Περιγραφή & Αριθμός Mach

Συμπιεστή ροή, ονομάζεται η ροή στην οποία οι μεταβολές της πυκνότητας του ρευστού, λόγω μεταβολών της πίεσης, είναι σημαντικές. Τέτοιας κλίμακας μεταβολές της πίεσης συμβαίνουν σε ροές υψηλής ταχύτητας, συγκρίσιμης με αυτήν του ήχου για το εκάστοτε ρευστό.

Η συμπιεστή ροή δεν συμβαίνει εύκολα σε υγρά, διότι απαιτούνται πιέσεις της τάξης των 1000 [atm]. Αντίθετα, στα αέρια αρκούν λόγοι πίεσης 2:1 για να προκαλέσουν ηχητική ροή (δηλαδή ροή με την ταχύτητα του ήχου). Άρα φαινόμενα συμπιεστότητας δημιουργούνται εύκολα και συχνά σε αέρια ρευστά και για το λόγο αυτό αυτή η περιοχή της Μηχανικής Ρευστών αναφέρεται και ως "Αεριοδυναμική" (*gas dynamics*).

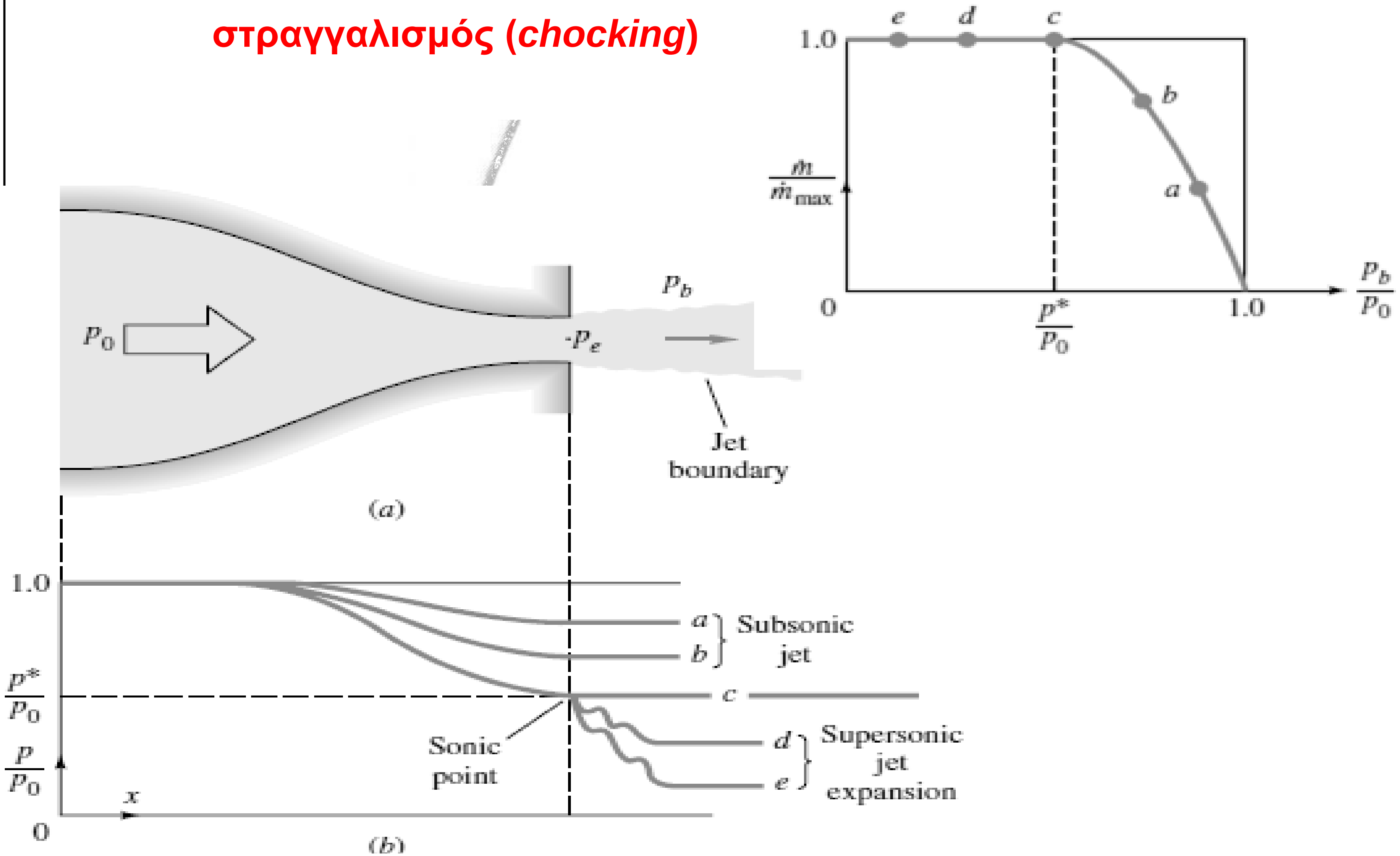
Τα πιο σημαντικά και ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της συμπιεστής ροής είναι:

(α) Ο στραγγαλισμός (*chocking*) των εσωτερικών ροών (π.χ. μέσα σε αγωγούς), όπου η παροχή περιορίζεται δραστικά από την ηχητική κατάσταση της ροής (Ma=1.0).

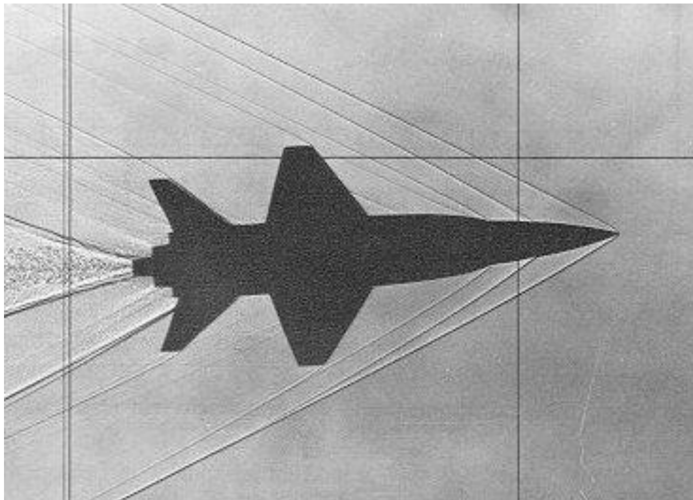
(β) Τα κρουστικά κύματα (shock waves), τα οποία αποτελούν την απότομη χωρική μεταβολή (αποτελούν σχεδόν ασυνέχεια) του πεδίου της πίεσης και άλλων φυσικών μεγεθών (πυκνότητα, ταχύτητα) σε συνθήκες υπερηχητικής ροής.

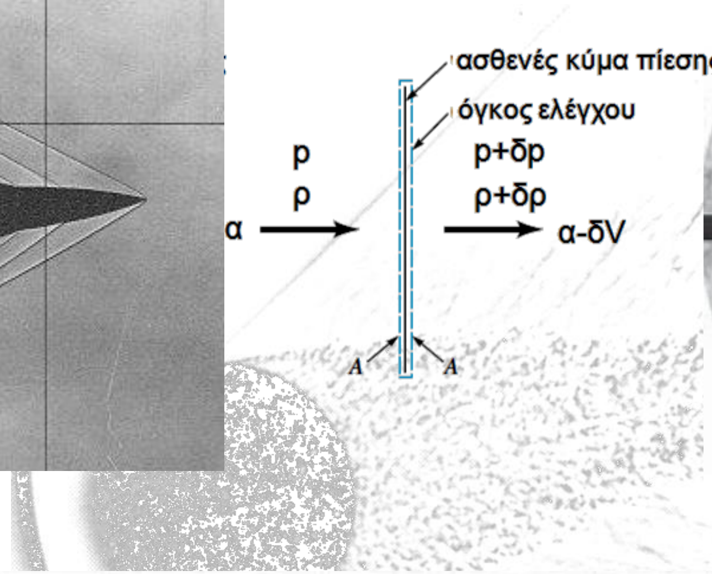
Για τη μελέτη της συμπιεστής ροής, βασικό μέγεθος είναι ο αδιάστατος **αριθμός Mach**, **Ma**, ο οποίος ορίζεται ως ο λόγος της ταχύτητας της ροής προς την ταχύτητα του ήχου του ρευστού, στις συγκεκριμένες συνθήκες που επικρατούν στη ροή (*η ταχύτητα του ήχου είναι θερμοδυναμικό μέγεθος και είναι συνάρτηση της θερμοκρασίας*): **Ma=V/α**, όπου V=ταχύτητα της ροής [m/s] και α=ταχύτητα του ήχου του ρευστού [m/s]. Η ταχύτητα V συνήθως είναι η τοπική τιμή της ταχύτητας του ρευστού, άρα ο αριθμός Mach είναι μεταβλητός στο πεδίο της ροής (σε διαφορετικές θέσεις του χώρου), καθώς μεταβάλλεται τοπικά το V και το α.

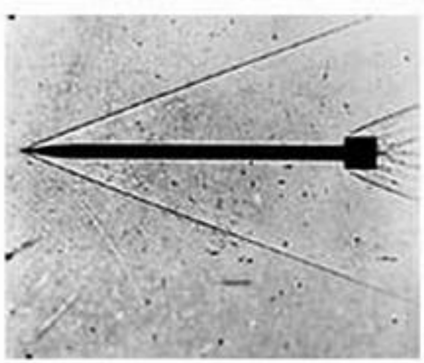
στραγγαλισμός (*chocking*)

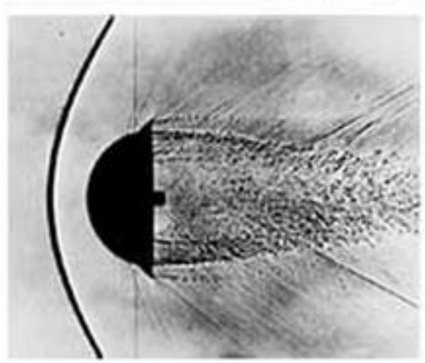


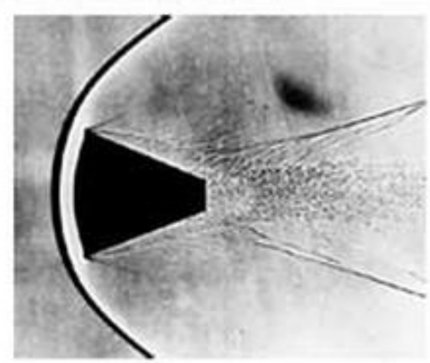
κρουστικά κύματα (shock waves)









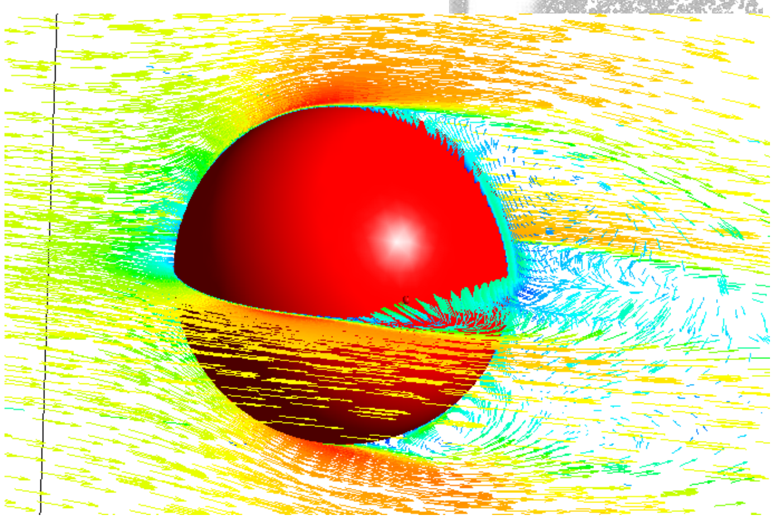


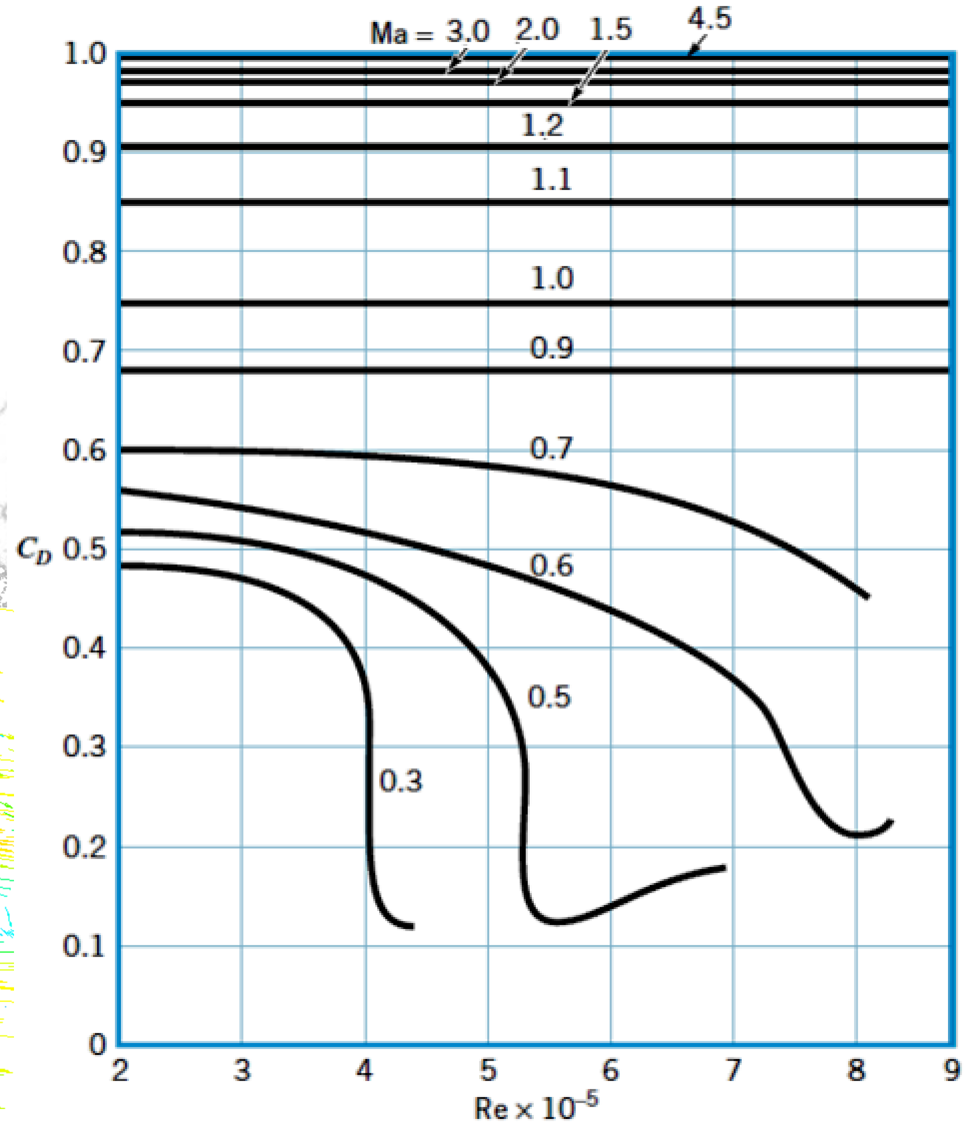
3.2 ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΣΥΜΠΙΕΣΤΟΤΗΤΑΣ – ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΣΥΜΠΙΕΣΤΗΣ ΡΟΗΣ

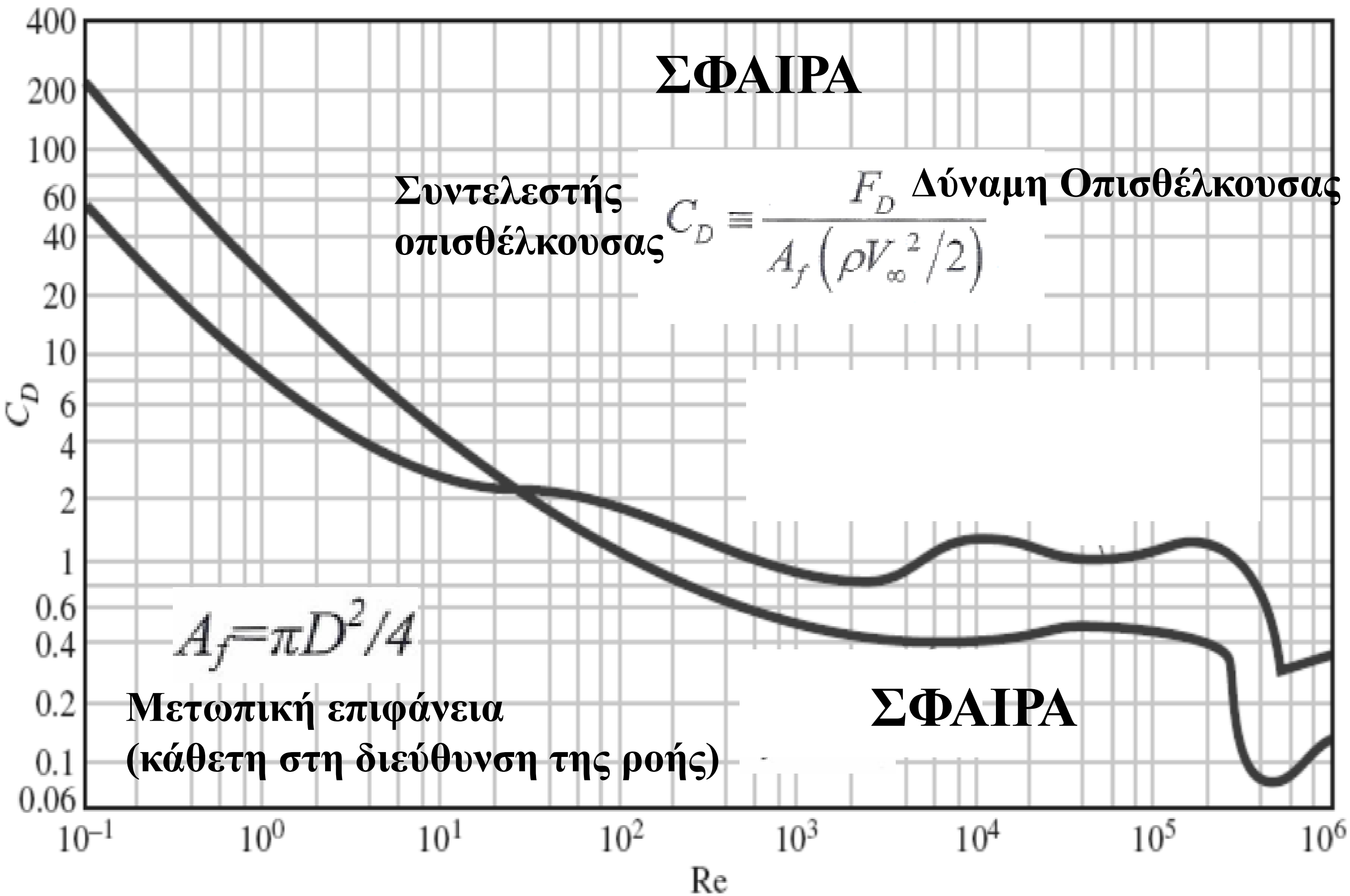
Στο διπλανό σχήμα δίνεται η μεταβολή του συντελεστή αντίστασης C_D της ροής αέρα γύρω από σφαίρα, συναρτήσει του αριθμού Mach και αριθμού Reynolds.

Είναι φανερό ότι η επίδραση της συμπιεστότητας στα χαρακτηριστικά της ροής μπορεί να είναι καθοριστικής σημασίας.

$$C_D \equiv \frac{F_D}{A_f\left(\rho V_\infty^2/2\right)} \qquad A_f = \pi D^2/4$$






ΣΦΑΙΡΑ
Συντελεστής οπισθέλκουσας
$C_D \equiv \frac{F_D}{A_f\left(\rho V_\infty^2/2\right)}$
Δύναμη Οπισθέλκουσας
$A_f = \pi D^2/4$
Μετωπική επιφάνεια
(κάθετη στη διεύθυνση της ροής)
ΣΦΑΙΡΑ
400
200
100
60
40
20
10
6
4
2
1
0.6
0.4
0.2
0.1
0.06
C_D
10^{-1}
10^0
10^1
10^2
10^3
10^4
10^5
10^6
Re

Το κριτήριο της συμπιεστότητας για μία ροή είναι **Ma>0.3**. Η συνθήκη αυτή μπορεί να συμβαίνει σε ορισμένες περιοχές της ροής. Παρ' όλα αυτά, ακόμη και εάν η παραπάνω συνθήκη συμβαίνει μόνο τοπικά και όχι συνολικά σε μία ροή, αυτή χαρακτηρίζεται ως συμπιεστή.

Υπενθυμίζεται ότι οι εξισώσεις της ροής είναι η εξίσωση της συνέχειας (που εκφράζει την Αρχή Διατήρησης της Μάζας) και η εξίσωση της ορμής (που εκφράζει την Αρχή Διατήρησης της Ορμής) και οι δύο άγνωστοί τους είναι η **πίεση** και η **ταχύτητα** του ρευστού. Οι δύο εξισώσεις αυτές ονομάζονται και εξισώσεις Navier–Stokes. Στις διαφορικές εξισώσεις αυτές εμφανίζονται, εκτός από τις συντεταγμένες του χώρου (x, y & z) και τον χρόνο (t), η πυκνότητα, ρ, και το ιξώδες, μ, του ρευστού.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=0.$$

εξίσωση της συνέχειας

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+\rho g_x$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)+\rho g_y$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)+\rho g_z$$

εξισώσεις Navier–Stokes

Στην ασυμπίεστη ροή, Ma<<1.0 η εξίσωση της ενέργειας (που εκφράζει την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας) είναι ανεξάρτητη των εξισώσεων της ροής καθώς η πυκνότητα παραμένει σταθερή (δεν μεταβάλλεται με τη θερμοκρασία, άρα η θερμοκρασία δεν επηρεάζει τις εξισώσεις ροής). Συνεπώς, η ασυμπίεστη ροή απαιτεί την επίλυση μόνο των 2 εξισώσεων της ροής.

Στη συμπιεστή ροή (Ma>0.3), η μεταβολή της πυκνότητας είναι σημαντική και τότε πρέπει να χρησιμοποιηθεί μία καταστατική εξίσωση, η οποία να περιγράφει τη μεταβολή της συναρτήσει της θερμοκρασίας και πίεσης, όπως για παράδειγμα η καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων. Σε αυτήν την περίπτωση όμως, δεν μπορεί να αγνοηθεί η εξίσωση της ενέργειας, η οποία μας δίνει την επίλυση του θερμοκρασιακού πεδίου που είναι απαραίτητο για τον υπολογισμό της πυκνότητας μέσω της καταστατικής εξίσωσης. Συνεπώς για συμπιεστή ροή απαιτείται η επίλυση 4 εξισώσεων: των 2 εξισώσεων της ροής και επιπλέον της εξίσωσης της ενέργειας και της καταστατικής εξίσωσης και οι προς επίλυση άγνωστοι είναι η **πίεση**, η **ταχύτητα**, η **πυκνότητα** και η **θερμοκρασία**.

Η ανάλυση σε συμπιεστή ροή είναι συνεπώς πιο σύνθετη για την ασυμπίεστη ροή και συνήθως γίνεται η παραδοχή της **ισεντροπικής διεργασίας** (δηλαδή ότι η εντροπία παραμένει σταθερή).

$$P = \rho R T \qquad \textbf{Καταστατική εξίσωση}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0.$$

εξίσωση της συνέχειας

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \rho g_x$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) + \rho g_y$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) + \rho g_z$$

εξισώσεις Navier–Stokes

$$P = \rho R T$$

Καταστατική εξίσωση

3.2 ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΣΥΜΠΙΕΣΤΟΤΗΤΑΣ – ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΣΥΜΠΙΕΣΤΗΣ ΡΟΗΣ

Ο αριθμός Mach είναι η βασικότερη παράμετρος σε μία συμπιεστή ροή και η τιμή του είναι ενδεικτική της κατάστασης και του τύπου της συμπιεστής ροής.

Οι αεροδυναμιστές χωρίζουν τις εξωτερικές συμπιεστές ροές στις εξής κατηγορίες:

Α. $Ma<0.3$: **Ασυμπίεστη** ροή. Η επίδραση της πυκνότητας, ρ, είναι αμελητέα.

Β. $0.3<Ma<0.8$: **Υποηχητική** (*subsonic*) ροή. Σημαντική επίδραση της πυκνότητας, χωρίς την εμφάνιση κρουστικών κυμάτων.

Γ. $0.8<Ma<1.2$: **Διηχητική** (*transonic*) ροή. Σημαντική επίδραση της πυκνότητας, με εμφάνιση κρουστικών κυμάτων. Χωρισμός της ροής σε υποηχητική και υπερηχητική περιοχή. Η πτήση παρουσιάζει δυσκολίες στην περίπτωση αυτή.

Δ. $1.2<Ma<3.0$: **Υπερηχητική** (*supersonic*) ροή. Σημαντική επίδραση της πυκνότητας, με εμφάνιση κρουστικών κυμάτων. Δεν υπάρχει υποηχητική περιοχή.

Ε. $3.0<Ma$: **Υπερ–υπερηχητική** (*hypersonic*) ροή. Εμφάνιση ισχυρών κρουστικών κυμάτων και έντονες μεταβολές στα ροϊκα χαρακτηριστικά.

Στις εσωτερικές συμπιεστές ροές το βασικότερο χαρακτηριστικό είναι το εάν υπάρχει υποηχητική ($Ma<1.0$) ή υπερηχητική ($Ma>1.0$) ροή.

Μία άλλη βασική παράμετρος για τη μελέτη της συμπιεστής ροής είναι ο λόγος των ειδικών θερμοχωρητικοτήτων, $\mathbf{k=C_p/C_v}$, όπου:

– C_p: Ειδική θερμοχωρητικότητα, υπό σταθερή πίεση [J/(kg K)].

– C_v: Ειδική θερμοχωρητικότητα, υπό σταθερό όγκο (δηλαδή πυκνότητα) [J/(kg K)].

Τα μεγεθη C_p και C_v είναι θερμοδυναμικές ιδιότητες του ρευστού και διατίθενται σε πίνακες.

Ideal gas specific heat capacities of air

Temperature K	C_P kJ/kg.K	C_v kJ/kg.K	k
250	1.003	0.716	1.401
300	1.005	0.718	1.400
350	1.008	0.721	1.398
400	1.013	0.726	1.395
450	1.020	0.733	1.391
500	1.029	0.742	1.387
550	1.040	0.753	1.381
600	1.051	0.764	1.376
650	1.063	0.776	1.370
700	1.075	0.788	1.364
750	1.087	0.800	1.359
800	1.099	0.812	1.354
900	1.121	0.834	1.344
1000	1.142	0.855	1.336
1100	1.155	0.868	1.331
1200	1.173	0.886	1.324
1300	1.190	0.903	1.318
1400	1.204	0.917	1.313
1500	1.216	0.929	1.309

Για να γίνει πιο κατανοητή η ανάλυση της συμπιεστής ροής και επειδή θα χρησιμοποιηθεί ο λόγος k, κρίνεται σκόπιμη μία συνοπτική αναφορά σε σχετικές έννοιες και ορισμούς της θερμοδυναμικής.

Κάθε ρευστό διαθέτει <u>θερμοδυναμικές ιδιότητες</u>, όπως η πίεση, η πυκνότητα και η θερμοκρασία, οι οποίες μαζί με την ταχύτητα καθορίζουν πλήρως τη ροϊκή κατάστασή του.
Επιπρόσθετα, εάν μας ενδιαφέρει το έργο, η θερμότητα και το ενεργειακό ισοζύγιο, χρησιμοποιούμε και τα παρακάτω μεγέθη:

– **e**: Ειδική δυνητική (*potential*) ενέργεια [J/kg] (**$e=u+0.5V^2+gz$**).
– **h**: Ειδική ενθαλπία, **$h=u+p/\rho$** (u=ειδική εσωτερική ενέργεια [J/kg])
– **s**: Ειδική εντροπία [J/(kg K)].
– **C_p, C_v**: Ειδικές θερμοχωρητικότητες [J/(kg K)].

<u>Ιδανικά Αέρια</u>

Για τον υπολογισμό της συμπιεστής ροής, αρκεί η χρήση μίας οποιασδήποτε καταστατικής σχέσης με τη συνοδεία πινάκων (π.χ. πίνακες ατμού). Συνήθως όμως χρησιμοποιούμε την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων με σταθερές θερμοχωρητικότητες για να κάνουμε την ανάλυσή μας:

$$\rho = \frac{p}{RT} = \frac{p\,\mathrm{MB}}{\Re T} \qquad (1)$$

όπου ρ=πυκνότητα [kg/m^3], p=πίεση [Pa], T=θερμοκρασία [K], MB=Μοριακό Βάρος [kg/kmol], R=η σταθερά αερίου [J/(kg K)] και $\Re$=παγκόσμια σταθερά των αερίων=8314.5 [J/(kmol K)]. Για τον αέρα είναι R=**287 [J/(kg K)]** και το μοριακό του βάρος είναι **28.966 [kg/kmol]**. Επίσης μπορούμε να υποθέσουμε με σχετική ακρίβεια ότι:

$$\mathrm{R} = C_p - C_v = \text{σταθερό} \qquad (2)$$

Οι θερμοχωρητικότητες για τον αέρα είναι: C_p=1007 [J/(kgK)] και C_v=718 [J/(kgK)]. Γενικά για οποιοδήποτε αέριο, οι θερμοχωρητικότητες, άρα και ο λόγος τους k, μεταβάλλονται λίγο με τη θερμοκρασία και άρα <u>μπορούν να θεωρηθούν σταθερές</u>.

Ας θυμηθούμε όμως κάποιους ορισμούς της θερμοδυναμικής:

$$C_V = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_\rho = \frac{du}{dT} = C_V(T) \quad \Rightarrow \quad \boxed{du = C_V(T)dT} \qquad (3)$$

όπου ο ειδικός όγκος, v, αντικαταστάθηκε από την πυκνότητα, ρ, επειδή ρ=1/v. Επίσης:

$$C_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p = \frac{dh}{dT} = C_p(T) \quad \Rightarrow \quad \boxed{dh = C_p(T)dT} \qquad (4)$$

όπου η ενθαλπία, h, είναι συνάρτηση της θερμοκρασίας, T, διότι εξ' ορισμού: **h=u+p/ρ** και λόγω της καταστατικής εξίσωσης (1):

h=u+RT=h(T) (5)

Εάν παραγωγιστεί η (5) τότε **dh=du+RdT** και εάν χρησιμοποιηθεί η σχέση (3), τότε **$dh=C_v(T)dT+RdT$**. Εάν συγκρίνουμε την τελευταία αυτή σχεση με την (4), τότε **$C_p(T)dT=C_v(T)dT+RdT$** ή:

$C_p(T)=C_v(T)+R$ (6)

Εισάγωντας τον λόγο **$k=C_p/C_v$** και με περαιτέρω επεξεργασία των παραπάνω σχέσεων, παίρνουμε:

$$\boxed{C_V = \frac{R}{k-1}} \quad , \quad \boxed{C_p = \frac{kR}{k-1}} \qquad (7)$$

Για τον αέρα είναι k=1.4. Όπως αναφέρθηκε και στην 3.6, ο λόγος k μεταβάλλεται ελαφρά με τη θερμοκρασία, όπου με αύξησή της μειώνεται. Γενικά ο k κυμαίνεται μεταξύ 1.0 και 1.7.

Τέλος σημειώνεται ότι υπάρχουν κι άλλες δύο περιπτώσεις μικρών μεταβολών της πυκνότητας του ρευστού, που όμως δεν αποτελούν καθ' οιονδήποτε τρόπο συμπιεστή ροή και χαρακτηρίζονται από μικρές ταχύτητες: (α) τα κύματα ήχου τα οποία είναι κύματα πίεσης ελάχιστα μικρότερης ή μεγαλύτερης της ατμοσφαιρικής και (β) οι ανωστικές ροές που προκαλούνται λόγω θέρμανσης του ρευστού.

Η σχέση που συνδέει την εντροπία με την ενθαλπία είναι η:

$$\boxed{Tds = dh - \frac{dp}{\rho}} \Rightarrow \boxed{ds = \frac{dh}{T} - \frac{dp}{T\rho}} \qquad (8)$$

και επειδή από την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων (1) ισχυει ότι $\rho T = p/R$, έχουμε ότι:

$$\boxed{ds = \frac{dh}{T} - R\frac{dp}{p}} \qquad (9)$$

Εάν ολοκληρωθεί η σχέση (9) μεταξύ δύο καταστάσεων 1 και 2:

$$\boxed{\int_1^2 ds = \int_1^2 \frac{dh}{T} - R\int_1^2 \frac{dp}{p}} \qquad (10)$$

αλλά επειδή υποθέσαμε ότι οι C_p και C_v είναι σταθερές και ανεξάρτητες της θερμοκρασίας, η (4) γίνεται: **$dh = C_p dT$**, οπότε η (10) γράφεται ως:

$$\boxed{\int_1^2 ds = C_p \int_1^2 \frac{dT}{T} - R\int_1^2 \frac{dp}{p}} \Longrightarrow \boxed{s_2 - s_1 = C_p \ln\frac{T_2}{T_1} - R\ln\frac{p_2}{p_1}} \qquad (11)$$

και δίνει τη μεταβολή της εντροπίας πάνω από ένα κρουστικό κύμα, όπου 1 είναι η κατάσταση πριν το κύμα και 2 η κατάσταση μετά το κύμα. Εάν τώρα γίνει η υπόθεση ότι η διεργασία 1→2 είναι ισεντροπική ($s_1 = s_2$), τότε η (11) γράφεται ως:

$$\boxed{\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{k}{k-1}} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{k}} \qquad (12)$$

δηλαδή για ένα ιδανικό αέριο, με σταθερές C_p και C_v, το οποίο ρέει ισεντροπικά ισχύει ότι **p/ρ^k=σταθερό**.

Για την καλύτερη κατανόηση της ταχύτητας του ήχου, ας θεωρήσουμε ένα ασθενές κύμα πίεσης, το οποίο είναι στοιχειωδώς λεπτό και κινείται με την ταχύτητα του ήχου, α, μέσα σε ένα ακίνητο ρευστό, πυκνότητας ρ. Μπροστά από το κύμα το ρευστό βρίσκεται σε πίεση p, ενώ πίσω από αυτό η ταχύτητά του ρευστού έχει μεταβληθεί λίγο κατά δV, όπως επίσης η πυκνότητα και η πίεση έχουν μεταβληθεί κατά δρ και δp, αντίστοιχα. Εάν θεωρήσουμε έναν απειροελάχιστα λεπτό όγκο ελέγχου, ο οποίος περιλαμβάνει το κύμα και κινείται με την ταχύτητα του και επίσης θεωρήσουμε ότι το κύμα κινείται με σταθερή ταχύτητα μόνο σε μία διεύθυνση, τότε ο όγκος ελέγχου είναι αδρανειακός.

Για έναν παρατηρητή που κινείται μαζί με τον όγκο ελέγχου, φαίνεται ότι υπάρχει ροή ταχύτητας α προς αυτόν με πίεση p και πυκνότητα ρ, ενώ πίσω του η ροή απομακρύνεται με ταχύτητα (α–δV) και βρίσκεται σε πίεση (p+δp) και πυκνότητα (ρ+δρ).

Εφαρμόζοντας την εξίσωση της συνέχειας πριν και μετά το κύμα, παίρνουμε:

$$\rho A \alpha = (\rho+\delta\rho)\, A\, (\alpha-\delta V) \qquad (13)$$

ή $\rho\alpha = \rho\alpha - \rho\delta V + \alpha\delta\rho - \delta\rho\delta V$. Επειδή ο όρος **δρδV** είναι πολύ μικρότερος των όρων **ρδV** και **αδρ**, μπορεί να αγνοηθεί, οπότε η (13) γίνεται:

$$\boldsymbol{\rho\delta V = \alpha\delta\rho} \qquad (14)$$

Εφαρμόζοντας την εξίσωση διατήρησης της γραμμικής ορμής, **αγνοώντας τις τριβες**, παίρνουμε:

$$-\alpha\rho\alpha A + (\alpha-\delta V)(\rho+\delta\rho)(\alpha-\delta V)A = pA - (p+\delta p)A \qquad (15)$$

Εάν θεωρήσουμε πάλι αμελητέους τους όρους ανώτερης τάξης και συνδυάζοντας τις (13) και (15), έχουμε:

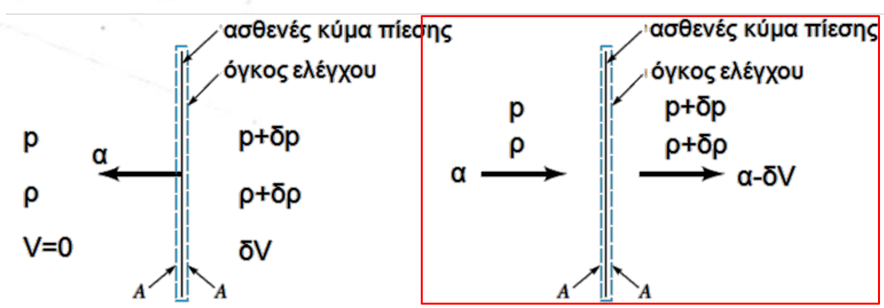
$$-\alpha\rho\alpha A + (\alpha-\delta V)\rho\alpha A = -\delta p A \qquad (16)$$

ή αντίστοιχα: $\boldsymbol{\rho\delta V = \delta p/\alpha}$ (17)

Από τις εξισώσεις της συνέχειας (14) και της ορμής (17), παίρνουμε ότι: $\boldsymbol{\alpha^2 = \delta p/\delta\rho}$ (18)

ή

$$\boxed{\alpha = \sqrt{\frac{\delta p}{\delta \rho}}} \qquad (19)$$



3.4 Η Ταχυτητα του Ηχου

Η εξίσωση (19) μπορεί να εξαχθεί επίσης από την εξίσωση διατήρησης της ενέργειας, αγνοώντας πάλι τις τριβές και θεωρώντας ότι η δυναμική ενέργεια κατάντη και ανάντη του κύματος δεν μεταβάλλεται. Εάν επιπλέον θεωρήσουμε ότι η άτριβη κίνηση του κύματος γίνεται και αδιαβατικά (μηδενική μετάδοση θερμοτητας), τότε η όλη διεργασία είναι ισεντροπική οπότε η εξίσωση (19) γράφεται ως:

$$\boxed{\alpha = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s}} \qquad (20)$$

Η σχέση αυτή υποδηλώνει ότι μπορούμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα του ήχου, εάν καθορίσουμε την κλίση της πίεσης με την πυκνότητα σε συνθήκες σταθερής εντροπίας. Συγκεκριμένα για ιδανικά αέρια, όπου ισχύει η σχέση (12), δηλαδή **p/ρ^k=C**, παραγωγίζοντας έχουμε:

$$\boxed{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = Ck\rho^{k-1} = \frac{p}{\rho^k}k\rho^{k-1} = \frac{p}{\rho}k = RTk} \qquad (21)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (20) και (21), έχουμε για ιδανικό αέριο:

$$\boxed{\alpha = \sqrt{RTk}} \qquad (21)$$

Γενικότερα, για κάθε ρευστό, αέριο ή υγρό, το μέτρο ελαστικότητας, Ε, ορίζεται ως:

$$\boxed{E = \frac{dp}{d\rho/\rho} = \rho\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s} \qquad (22)$$

οπότε σε συνδυασμό με την (20), η ταχύτητα του ήχου σε οποιοδήποτε ρευστό είναι:

$$\boxed{\alpha = \sqrt{\frac{E}{\rho}}} \qquad (23)$$

Η ταχύτητα του ήχου για αέρα και νερό δίνονται σε πινακοποιημένη μορφή στις επόμενες δύο σελίδες, μαζί με άλλες φυσικές ιδιότητές τους. Η ταχύτητα του ήχου στο νερό είναι πολλαπλάσια απ’ ότι στον αέρα.

Φυσικές Ιδιότητες του Αέρα σε Κανονική Ατμοσφαιρική Πίεση

Θερμοκρασία (°C)	Πυκνότητα ρ (kg/m^3)	Ειδικό Βάρος γ (N/m^3)	Δυναμικό Ιξώδες μ (N·s/m^2)	Κινηματικό Ιξώδες ν (m^2/s)	Λόγος Ειδικών Θερμοχωρητικοτήτων k (—)	Ταχύτητα Ήχου α (m/s)
−40	1.514	14.85	1.57 E − 5	1.04 E − 5	1.401	306.2
−20	1.395	13.68	1.63 E − 5	1.17 E − 5	1.401	319.1
0	1.292	12.67	1.71 E − 5	1.32 E − 5	1.401	331.4
5	1.269	12.45	1.73 E − 5	1.36 E − 5	1.401	334.4
10	1.247	12.23	1.76 E − 5	1.41 E − 5	1.401	337.4
15	1.225	12.01	1.80 E − 5	1.47 E − 5	1.401	340.4
20	1.204	11.81	1.82 E − 5	1.51 E − 5	1.401	343.3
25	1.184	11.61	1.85 E − 5	1.56 E − 5	1.401	346.3
30	1.165	11.43	1.86 E − 5	1.60 E − 5	1.400	349.1
40	1.127	11.05	1.87 E − 5	1.66 E − 5	1.400	354.7
50	1.109	10.88	1.95 E − 5	1.76 E − 5	1.400	360.3
60	1.060	10.40	1.97 E − 5	1.86 E − 5	1.399	365.7
70	1.029	10.09	2.03 E − 5	1.97 E − 5	1.399	371.2
80	0.9996	9.803	2.07 E − 5	2.07 E − 5	1.399	376.6
90	0.9721	9.533	2.14 E − 5	2.20 E − 5	1.398	381.7
100	0.9461	9.278	2.17 E − 5	2.29 E − 5	1.397	386.9
200	0.7461	7.317	2.53 E − 5	3.39 E − 5	1.390	434.5
300	0.6159	6.040	2.98 E − 5	4.84 E − 5	1.379	476.3
400	0.5243	5.142	3.32 E − 5	6.34 E − 5	1.368	514.1
500	0.4565	4.477	3.64 E − 5	7.97 E − 5	1.357	548.8
1000	0.2772	2.719	5.04 E − 5	1.82 E − 4	1.321	694.8

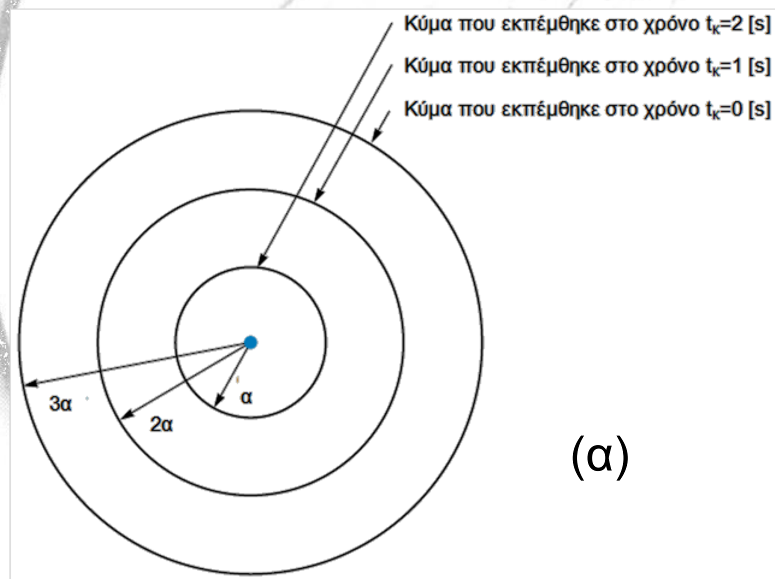
Φυσικές Ιδιότητες του Νερού

Θερμοκρασία (°C)	Πυκνότητα ρ (kg/m^3)	Ειδικό Βάρος γ (kN/m^3)	Δυναμικό Ιξώδες μ (N·s/m^2)	Κινηματικό Ιξώδες ν (m^2/s)	Επιφανειακή Τάση σ (N/m)	Πίεση Ατμών p_v [N/m^2(abs)]	Ταχύτητα Ήχου α (m/s)
0	999.9	9.806	1.787 E − 3	1.787 E − 6	7.56 E − 2	6.105 E + 2	1403
5	1000.0	9.807	1.519 E − 3	1.519 E − 6	7.49 E − 2	8.722 E + 2	1427
10	999.7	9.804	1.307 E − 3	1.307 E − 6	7.42 E − 2	1.228 E + 3	1447
20	998.2	9.789	1.002 E − 3	1.004 E − 6	7.28 E − 2	2.338 E + 3	1481
30	995.7	9.765	7.975 E − 4	8.009 E − 7	7.12 E − 2	4.243 E + 3	1507
40	992.2	9.731	6.529 E − 4	6.580 E − 7	6.96 E − 2	7.376 E + 3	1526
50	988.1	9.690	5.468 E − 4	5.534 E − 7	6.79 E − 2	1.233 E + 4	1541
60	983.2	9.642	4.665 E − 4	4.745 E − 7	6.62 E − 2	1.992 E + 4	1552
70	977.8	9.589	4.042 E − 4	4.134 E − 7	6.44 E − 2	3.116 E + 4	1555
80	971.8	9.530	3.547 E − 4	3.650 E − 7	6.26 E − 2	4.734 E + 4	1555
90	965.3	9.467	3.147 E − 4	3.260 E − 7	6.08 E − 2	7.010 E + 4	1550
100	958.4	9.399	2.818 E − 4	2.940 E − 7	5.89 E − 2	1.013 E + 5	1543

Ένα σημαντικό συμπέρασμα της σχέσης (22) είναι ότι εάν ένα ρευστό είναι αληθινά ασυμπίεστο (δηλαδή $\partial\rho=0$), τότε θα έχει άπειρο μέτρο ελαστικότητας, Ε, άρα και άπειρη ταχύτητα ήχου, α. Συνεπώς η συνθήκη ασυμπιεστότητας ενός ρευστού είναι μόνο μία εξιδανίκευση της πραγματικότητας που δεν ισχύει στην πράξη, καθώς όλα τα ρευστά είναι συμπιέσιμα.

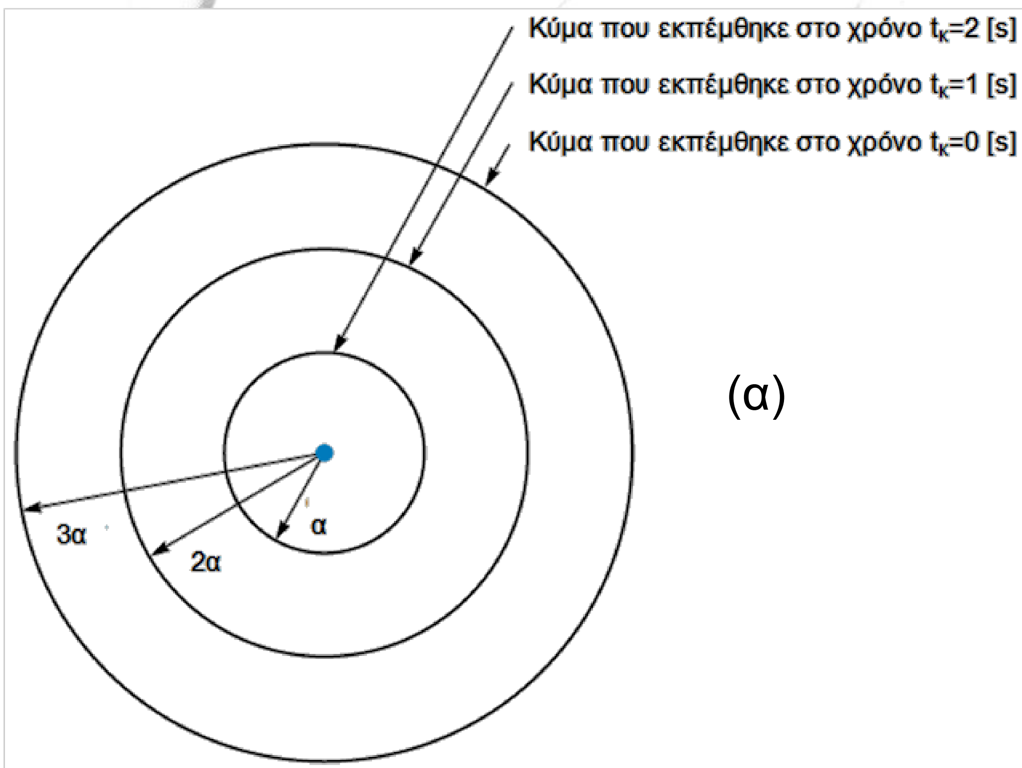
Για να επιδειχθεί καλύτερα η σημασία και οι φυσικές συνέπειες της ταχύτητας του ήχου, ας θεωρήσουμε την εξής απλή περίπτωση. Έστω ότι υπάρχει σημειακή πηγή ασθενών κυμάτων πίεσης (π.χ. ακουστικών). Τα κύματα αυτά έχουν σφαιρικό σχήμα και όσο περνάει ο χρόνος επεκτείνονται σε όλες τις διευθύνσεις του χώρου ομοιόμορφα, διατηρώντας το σφαιρικό τους σχήμα και το κέντρο τους (σημείο εκπομπής), με αυξανόμενη όμως διάμετρο, όπως φαίνεται στο σχήμα (α) της επόμενης σελίδας 3.15. Εάν το κύμα πίεσης εκπέμπεται σε μία χρονική στιγμή $t_κ$, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε την ακτίνα της σφαίρας του κύματος για κάθε χρονική στιγμή t, ως $\mathbf{r = (t - t_κ)α}$.

Εάν η πηγή είναι σταθερή στο χώρο, τότε προκύπτει η συμμετρική διάταξη του σχήματος (α).



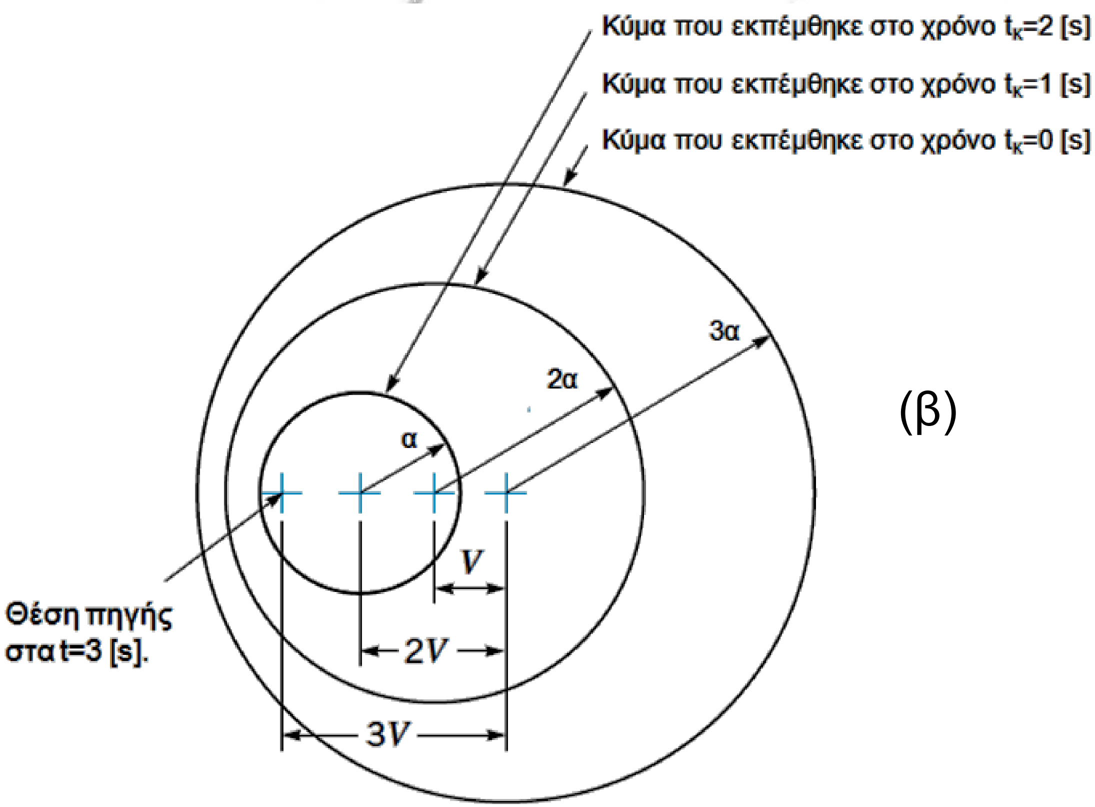
(α)

1. Όταν η πηγή και το ρευστό δεν κινούνται, τα κύματα πίεσης είναι συμμετρικά και ένας παρατηρητής οπουδήποτε στο πεδίο αντιλαμβάνεται τον ήχο με μία σταθερή συχνότητα. Όταν η πηγή (ή το ρευστό) κινείται, τα κύματα είναι ασύμμετρα και ο βαθμός της ασυμμετρίας εξαρτάται από το μέγεθος της ταχύτητας V, συγκεκριμένα από το λόγο της με την ταχύτητα του ήχου, α.



(α)

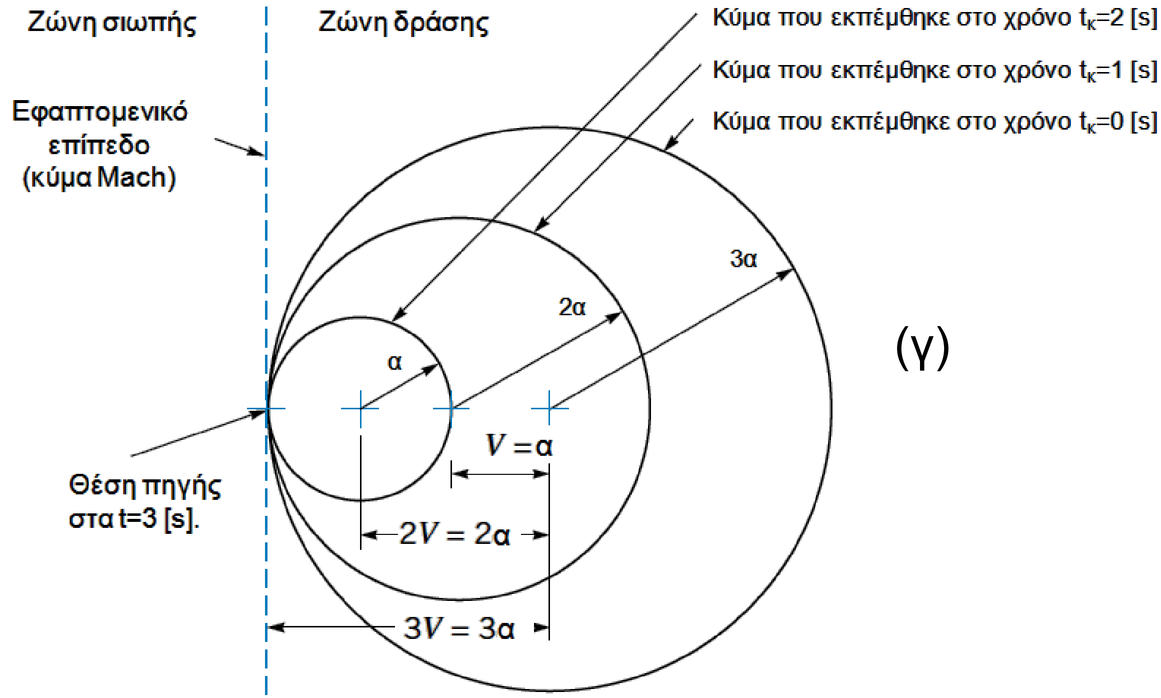
2. Όταν **V/α<1** (**υποηχητική** ροή), όπως στο σχήμα (β), τότε ο παρατηρητής ακούει διαφορετική συχνότητα ήχου, ανάλογα με τη θέση του σχετικά με την πηγή. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται **Doppler**. Η πίεση μπορεί να ταξιδεύει παντού μέσα στο πεδίο, αλλά όχι συμμετρικά,δηλαδή όχι με την ίδια ταχύτητα σε όλες τις διευθύνσεις.



(β)


PHYSICS-ANIMATIONS.COM

3. Όταν **V/α=1** (**ηχητική** ροή), όπως στο σχήμα (γ), δεν υπάρχουν κύματα πίεσης μπροστά από την κινούμενη πηγή και ο παρατηρητής που βρίσκεται εκεί δεν ακούει ήχο, παρά μόνο όταν φτάσει σε αυτόν η πηγή. Για ροή που κινείται με την ταχύτητα του ήχου σε ένα σταθερό σημείο του χώρου (παρατηρητής), όλα τα κύματα πίεσης είναι εφαπτομενικά σε ένα επίπεδο το οποίο είναι κάθετο στη ροή και περνάει από το σημείο εκπομπής (πηγή). Η συγκέντρωση όλων αυτών των κυμάτων στη θέση αυτή, σημαίνει ότι υπάρχει σημαντική τοπική μεταβολή της πίεσης στις δύο πλευρές του επιπέδου αυτού. Το επίπεδο αυτό ονομάζεται συχνά **κύμα Mach**. Σημειώνεται ότι η επικοινωνία της πληροφορίας γίνεται μόνο κατάντη του κύματος Mach και η ζώνη αυτή ονομάζεται **ζώνη δράσης**, ενώ η ζώνη ανάντη του κύματος Mach ονομάζεται **ζώνη σιωπής**.

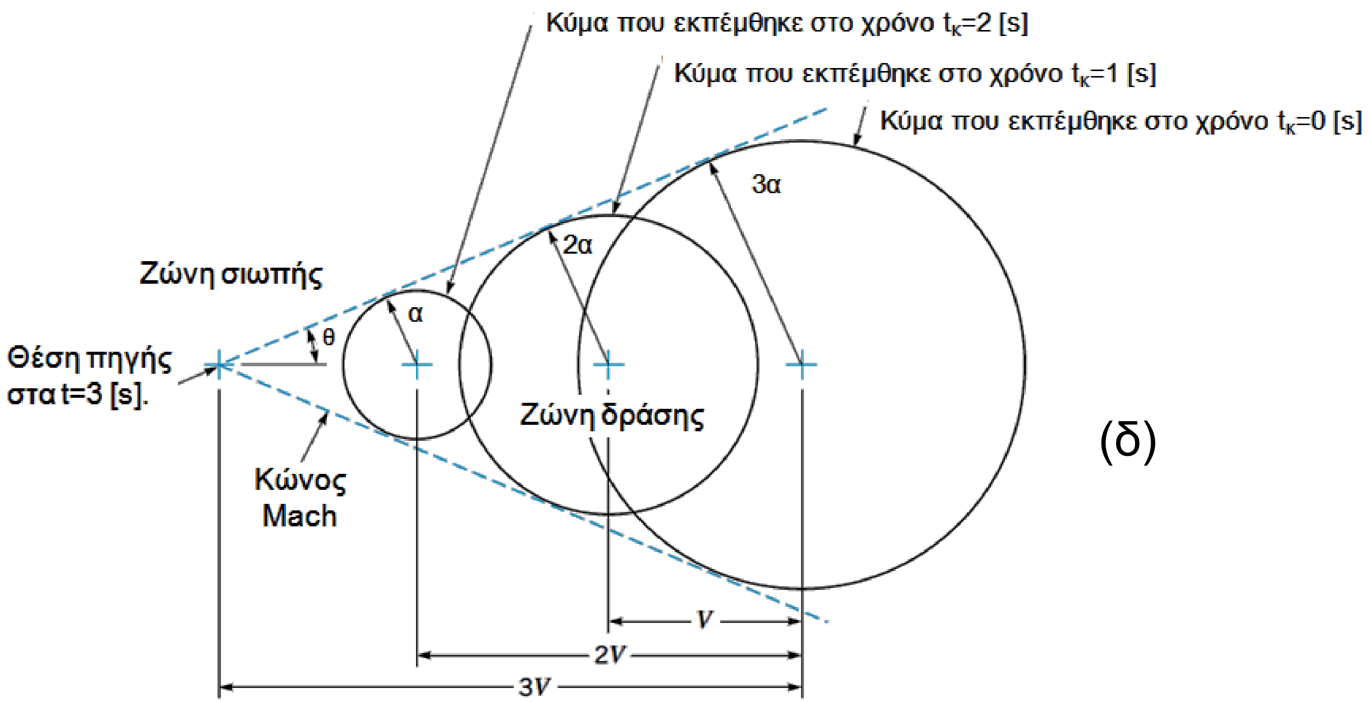


(γ)


PHYSICS-ANIMATIONS.COM

4. Όταν **V/α>1** (**υπερηχητική** ροή), τότε παρουσιάζεται η διάταξη του σχήματος (δ). Τότε μπορούμε να σχεδιάσουμε έναν κώνο (**κώνος Mach**), ο οποίος εφάπτεται των κυμάτων πίεσης και ο οποίος αποτελεί τη **ζώνη δράσης**, ενώ ο χώρος εκτός του κώνου τη **ζώνη σιωπής**. Η κορυφή του κώνου σε κάθε χρονική στιγμή συμπίπτει με τη θέση της πηγής τη στιγμή αυτή. Όπως και στην περίπτωση της ηχητικής ροής, η επικοινωνία της πληροφορίας είναι δυνατή μόνο μέσα στο εσωτερικό του κώνου. Από το σχήμα προκύπτει ότι η γωνία του κώνου θ δίνεται από τη σχέση:

$$\boxed{\sin\theta = \frac{\alpha}{V} = \frac{1}{Ma}} \quad (24)$$

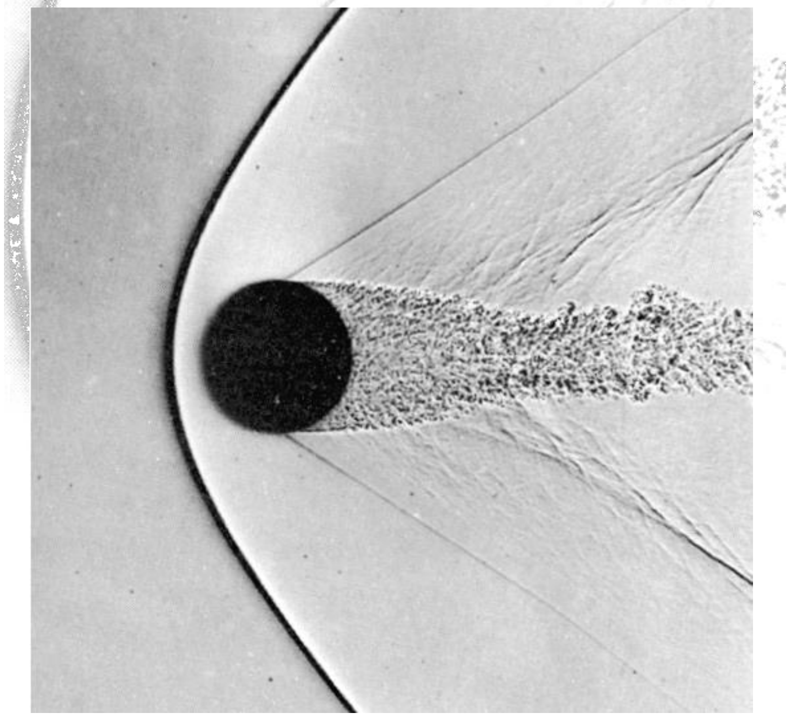


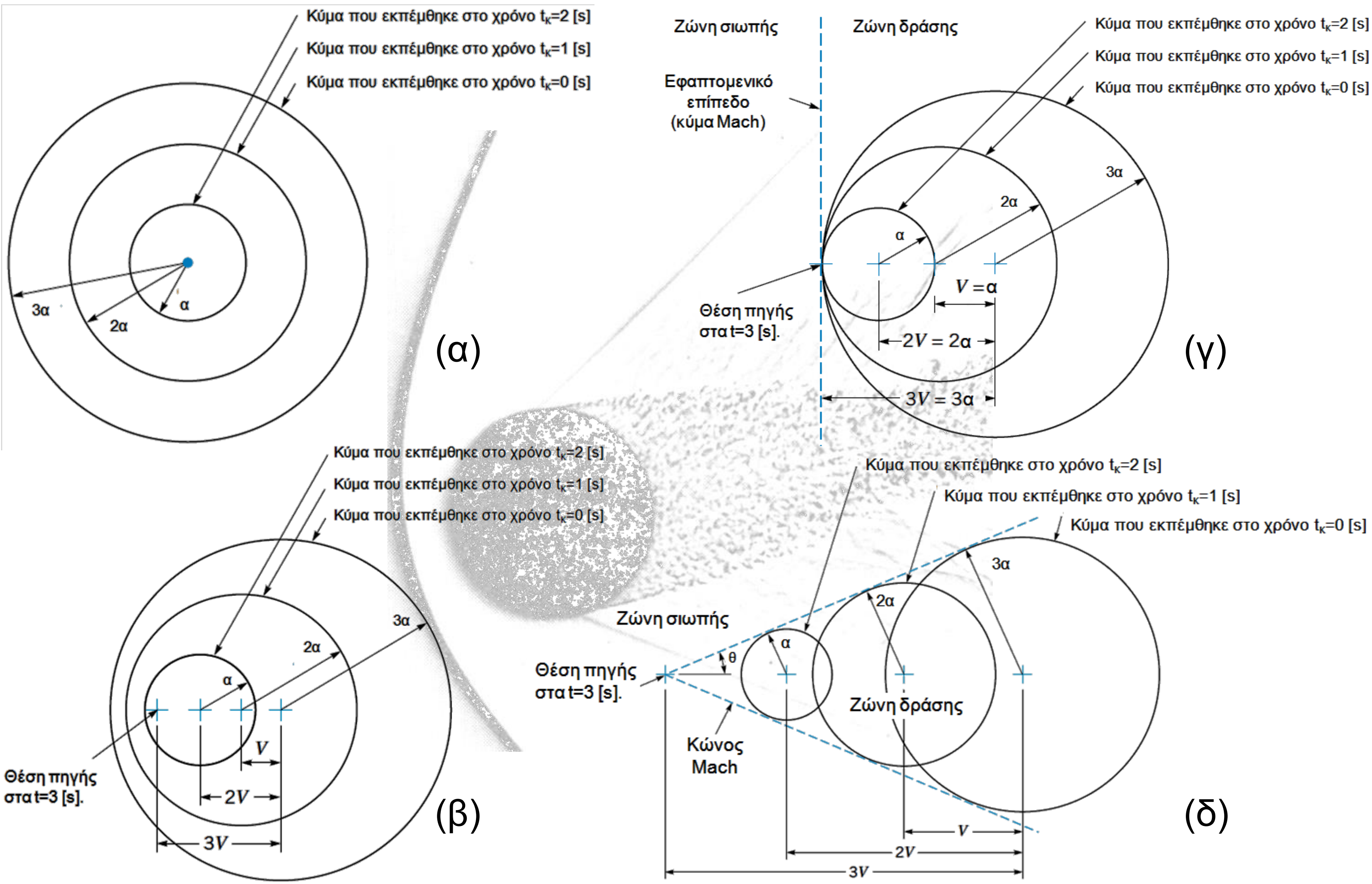
(δ)


PHYSICS-ANIMATIONS.COM

Η συγκέντρωση πίεσης στα όρια του κώνου, συνεπάγεται μεγάλη τοπική μεταβολή της πίεσης, άρα και πυκνότητας. Η οπτικοποίηση αυτής της μεγάλης διαφοροποίησης, γίνεται δυνατή με ειδικες μεθόδους, όπως η μέθοδος schlieren, η σκιαγράφηση (shadow graph) κ.α.

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η ροη αέρα Mach=1.53 γύρω από σφαίρα. Η απεικόνιση έγινε με τη μέθοδο σκιαγράφησης. Φαίνεται καθαρά με την παχιά μαύρη καμπύλη η "ασυνέχεια" των παραμέτρων της ροής (πυκνότητα, πίεση), όπως επίσης και το τυρβώδες οριακό στρώμα που καταλήγει στον απόρρου πίσω από τη σφαίρα.




Κύμα που εκπέμθηκε στο χρόνο tκ=2 [s]
Κύμα που εκπέμθηκε στο χρόνο tκ=1 [s]
Κύμα που εκπέμθηκε στο χρόνο tκ=0 [s]
α
2α
3α
(α)
Ζώνη σιωπής
Ζώνη δράσης
Εφαπτομενικό επίπεδο (κύμα Mach)
Κύμα που εκπέμθηκε στο χρόνο tκ=2 [s]
Κύμα που εκπέμθηκε στο χρόνο tκ=1 [s]
Κύμα που εκπέμθηκε στο χρόνο tκ=0 [s]
3α
2α
α
V = α
Θέση πηγής στα t=3 [s].
2V = 2α
3V = 3α
(γ)
Κύμα που εκπέμθηκε στο χρόνο tκ=2 [s]
Κύμα που εκπέμθηκε στο χρόνο tκ=1 [s]
Κύμα που εκπέμθηκε στο χρόνο tκ=0 [s]
3α
2α
α
V
Θέση πηγής στα t=3 [s].
2V
3V
(β)
Κύμα που εκπέμθηκε στο χρόνο tκ=2 [s]
Κύμα που εκπέμθηκε στο χρόνο tκ=1 [s]
Κύμα που εκπέμθηκε στο χρόνο tκ=0 [s]
3α
2α
α
θ
Ζώνη σιωπής
Θέση πηγής στα t=3 [s].
Ζώνη δράσης
Κώνος Mach
V
2V
3V
(δ)

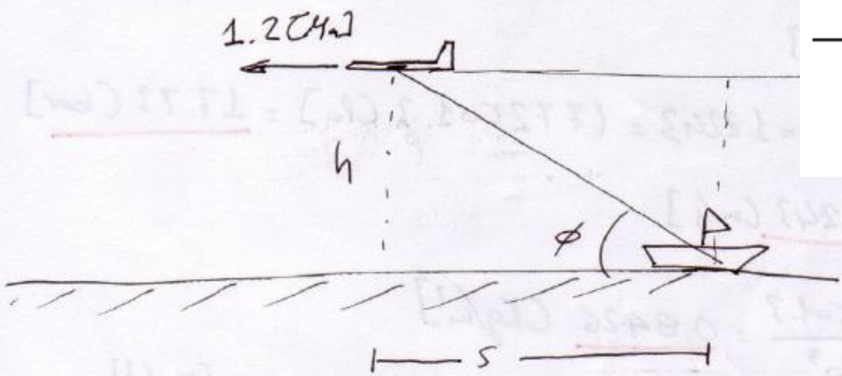
4ο ΘΕΜΑ (3.0 μονάδες): ΗΜ/ΝΙΑ: 30 ΙΟΥΝΙΟΥ 2011

Πολεμικό μαχητικό αεροσκάφος πετάει σε ύψος 850 [m] πάνω από τη θάλασσα με ταχύτητα 1.2 [Ma]. Ο αέρας έχει θερμοκρασία 35 [°C]. Υπολογίστε το χρόνο μετά την έλευση του αεροσκάφους πάνω από παρατηρητή που βρίσκεται άνω σε πολεμικό πλοίο, που αυτός θα ακούσει τον ήχο του αεροπλάνου.

Φυσικές Ιδιότητες του Αέρα σε Κανονική Ατμοσφαιρική Πίεση

Θερμοκρασία (°C)	Πυκνότητα ρ (kg/m³)	Ειδικό Βάρος γ (N/m³)	Δυναμικό Ιξώδες μ (N·s/m²)	Κινηματικό Ιξώδες ν (m²/s)	Λόγος Ειδικών Θερμοχωρητικοτήτων k (—)	Ταχύτητα Ήχου α (m/s)
15	1.225	12.01	1.80 E − 5	1.47 E − 5	1.401	340.4
20	1.204	11.81	1.82 E − 5	1.51 E − 5	1.401	343.3
25	1.184	11.61	1.85 E − 5	1.56 E − 5	1.401	346.3
30	1.165	11.43	1.86 E − 5	1.60 E − 5	1.400	349.1
40	1.127	11.05	1.87 E − 5	1.66 E − 5	1.400	354.7

4 $\alpha(35^\circ C) = \frac{349.1+354.7}{2} = 351.9$ [m/s]



$$V = 1.2\cdot\alpha = 422.28 \text{ [m/s]}$$

$$\tan\phi = \frac{h}{s} = \frac{h}{V\cdot t} \Rightarrow t = \frac{h}{V\cdot\tan\phi} = \frac{850}{422.28\times\tan 56.44^\circ} = 1.34 \text{ [s]}$$

$$\phi = \sin^{-1}\left(\frac{1}{M_a}\right) = \sin^{-1}(0.8333) = 56.44^\circ$$

ΗΜ/ΝΙΑ: 22 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2011

4° ΘΕΜΑ (3.0 μονάδες):

Αέρας συμπιέζεται ισεντροπικά από τα 8 στα 43 [bar], και η θερμοκρασία του πριν από τη συμπίεση είναι 75 [°C]. Οι ειδικές θερμοχωρητικότητες του αέρα, δηλαδή υπό σταθερή πίεση και σταθερό όγκο, θεωρούνται σταθερές και ίσες με 1.009 και 0.722 [KJ/(kgK)] αντίστοιχα. Να υπολογίσετε:

(α) Τη θερμοκρασία του αέρα μετά τη συμπίεση. (***1.0 μονάδα***).
(β) Την πυκνότητα του αέρα πριν και μετά τη συμπίεση. (***1.0 μονάδα***).
(γ) Τη μεταβολή ενθαλπίας και εντροπίας του αέρα κατά τη συμπίεση. (***1.0 μονάδα***).

4ο ΘΕΜΑ:

$$\left.\begin{array}{l} C_p = 1009\ [J/kgK] \\ C_v = 722\ \text{-//-} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} R = C_p - C_v = 287\ [J/kgK] \\ K = \frac{C_p}{C_v} = 1.398\ [-] \end{array}$$

α) Ισεντροπική διεργασία:

$$\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{k}{k-1}} \Rightarrow \frac{43}{8} = \left(\frac{T_2}{75+273.15}\right)^{\frac{1.398}{1.398-1}} \Rightarrow \quad = 348.15\ K$$

$$\frac{43}{8} = \left(\frac{T_2}{348.15}\right)^{3.513} \rightarrow T_2 = \left(43/8\right)^{1/3.513} \times 348.15 \Rightarrow \underline{T_2 = 561.92\ [K]}$$

β)

$$\rho = \frac{P}{RT} \xrightarrow{1} \rho_1 = \frac{P_1}{RT_1} = \frac{8\times10^5}{287\times348.15} = \underline{8.01\ [kg/m^3]}$$

$$\xrightarrow{2} \rho_2 = \frac{P_2}{RT_2} = \frac{43\times10^5}{287\times561.92} = \underline{26.66\ [kg/m^3]}$$

γ)

$$\Delta h = C_p(T_2 - T_1) = 1009(561.92 - 348.15) = 215693.93\ [J/kg]$$

$$\Delta s = C_p \ln\frac{T_2}{T_1} - R\ln\frac{P_2}{P_1} = 1009 \times \ln\frac{561.92}{348.15} - 287\ln\frac{43\times10^5}{8\times10^5} = \cancel{4930.52\ [J/kg/K]}$$

$$= 0.37\ [J/kg/K]$$

$$\simeq 0.0$$