ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Κλείδης Κωνσταντίνος
ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΙΑΣ ΤΕ

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Κεντρικής Μακεδονίας» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Εισαγωγή

Αριθμητική Ανάλυση: Ίσως ο βασικότερος κλάδος των εφαρμοσμένων μαθηματικών. Εστιάζεται στη σχεδίαση και κατασκευή αριθμητικών μεθόδων για την προσεγγιστική επίλυση μαθηματικών προβλημάτων. Η ανάπτυξη/εξέλιξη της αριθμητικής ανάλυσης σχετίζεται άμεσα με την ανάπτυξη των Ηλεκτρονικών Υπολογιστών (Η/Υ).

Στόχος: Η προσεγγιστική επίλυση μαθηματικών προβλημάτων που συναντώνται σε όλες τις επιστήμες και την τεχνολογία. Συνήθως έχουμε μαθηματικά μοντέλα τα οποία περιγράφουν διάφορα φαινόμενα ή/και διεργασίες τα οποία εμπλέκουν συνεχείς συναρτήσεις και μεταβλητές. Επειδή η αναλυτική επίλυση είναι σπάνια δυνατή, επιλύουμε το πρόβλημα προσεγγιστικά αφού πρώτα το διακριτοποιήσουμε (τονίζεται ότι ο Η/Υ μπορεί να χειρισθεί μόνο νούμερα).

Το διακριτό πρόβλημα που προκύπτει το ονομάζουμε αριθμητική μέθοδο. Κάθε διακριτό πρόβλημα (ή αριθμητική μέθοδος) για να εφαρμοσθεί (κυρίως στον ηλεκτρονικό υπολογιστή) απαιτεί μια πεπερασμένη, λογική σειρά καλά ορισμένων αριθμητικών πράξεων και λογικών εκφράσεων. Το σύνολο αυτών των βημάτων ονομάζεται *αλγόριθμος*.

Η αριθμητική ανάλυση χωρίζεται σε δύο μέρη:

I. Θεωρητικό μέρος: Κατασκευή αλγορίθμων και μελέτης της ακρίβειάς του και της ευστάθειάς του, δηλαδή ανάλυση των σφαλμάτων τους.

II. Πρακτικό μέρος: Υλοποίηση των αλγορίθμων με τον βέλτιστο τρόπο ή με έναν τρόπο σχεδόν βέλτιστο (σε σχέση με την *ταχύτητα εκτέλεσης* του υπολογιστή και την *απαιτούμενη μνήμη*)

Συνεπώς η διαδικασία επίλυσης ενός μαθηματικού προβλήματος αριθμητικά έχει ως εξής:

Κατασκευάζουμε το μαθηματικό πρόβλημα το οποίο περιγράφεται με συνεχείς συναρτήσεις

↓

(Θεωρία) Κατασκευάζουμε το αντίστοιχο μαθηματικό πρόβλημα το οποίο περιγράφεται με διακριτές συναρτήσεις (αριθμητική μέθοδος) και το οποίο προσεγγίζει το αρχικό πρόβλημα

↓

(Θεωρία) Μελέτη της ακρίβειας και της ευστάθειας

↓

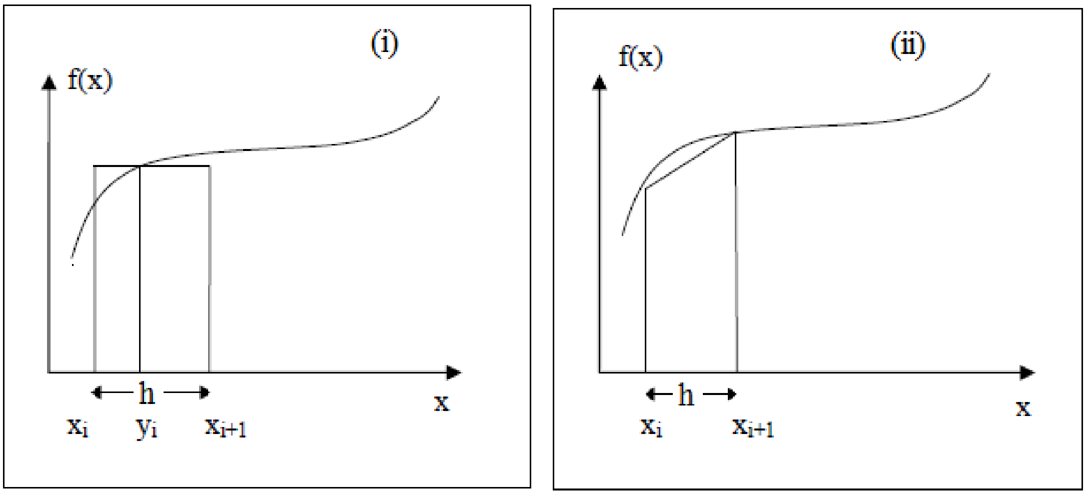
(Πράξη) Κατασκευή αλγορίθμου

↓

(Πράξη) Υλοποίηση αλγόριθμου (Κατασκευή προγράμματος Η/Υ, για επίλυση του προβλήματος με βέλτιστο τρόπο).

Παράδειγμα:

Υπολογισμός του ολοκληρώματος $I = \int_a^b f(x)dx$ με $f:[a,b] \in \Re$



- Ανάπτυξη αριθμητικής μεθόδου:

    (i) Κανόνας παραλληλογράμμου

$$I \cong \frac{h}{2} \sum_{k=0}^{n} f(a + k \cdot h)$$

    (ii) Κανόνας τραπεζίου

$$I \cong \frac{h}{2} \left[f(a) + 2 \sum_{k=0}^{n-1} f(a + k \cdot h) + f(b) \right]$$

$h = \dfrac{b-a}{n}$, όπου n ο αριθμός των διαστημάτων (n>0).

- Θεωρητική μελέτη:
    - Πόσο ακριβής είναι κάθε μέθοδος;
    - Είναι ευσταθής;

- Πρακτική εφαρμογή:
    - Ποιοι είναι οι κατάλληλοι αλγόριθμοι;
    - Πώς υλοποιούνται;

Κεφάλαιο 1

Βασικές έννοιες

1.1 Σφάλματα

Μιλήσαμε για προσεγγιστική επίλυση ενός προβλήματος που σημαίνει ότι τα αποτελέσματά μας θα περιέχουν κάποιο σφάλμα σε σχέση με την ακριβή τους τιμή. Για να μετρήσουμε αυτό το σφάλμα, αλλά και άλλους λόγους, χρησιμοποιούμε δύο ποσότητες:

- Απόλυτο σφάλμα: $E = |x - x_{\pi\rho}|$
- Σχετικό σφάλμα: $\delta = \dfrac{|x - x_{\pi\rho}|}{|x|}, \quad x \neq 0$

όπου x η πραγματική τιμή του μεγέθους που μας ενδιαφέρει και $x_{\pi\rho}$ η χρησιμοποιούμενη προσεγγιστική του τιμή. Το σχετικό σφάλμα δίνεται συνήθως και ως ποσοστό επί τις εκατό, δηλαδή:

$$\delta = 100 \cdot \frac{|x - x_{\pi\rho}|}{|x|}\%, \quad x \neq 0$$

Οι παραπάνω ορισμοί μπορούν να συναντηθούν στην βιβλιογραφία χωρίς τις απόλυτες τιμές. *Ποια ποσότητα αντιπροσωπεύει καλύτερα την προσέγγισή μας και γιατί*;

Παράδειγμα I: Έστω $x = 3.1$ και $x_{\pi\rho} = 3.0$. Τότε $E = 3.1 - 3.0 = 0.1$, $\delta = \dfrac{3.1 - 3.0}{3.1} = 0.032 = 3.2\%$

Παράδειγμα II: Έστω πληθυσμός $x = 10100$ και $x_{\pi\rho} = 10000$. Τότε $E = 10100 - 10000 = 100$ και $\delta = \dfrac{10100 - 10000}{10100} = 0.01 = 1\%$

Παράδειγμα III: Έστω ποσότητα φαρμάκου που πρέπει να χορηγηθεί σε έναν ασθενή $x = 0.01g$ και $x_{\pi\rho} = 0.015g$ η ποσότητα που πραγματικά χορηγείται. Τότε $E = 0.005$ και $\delta = \dfrac{0.005}{0.01} = 0.5 = 50\%$

Παράδειγμα IV: Να υπολογιστεί το απόλυτο και το σχετικό σφάλμα στην προσέγγιση του $x = e$ (βάση των φυσικών λογαρίθμων), από το $x = 2.718$.
Χρησιμοποιώντας μια αριθμομηχανή βρίσκουμε την τιμή e=2.71828 (5 δεκαδικά ψηφία). Τότε $E = 2.71828 - 2.718 = 0.00028$ και $\delta = \dfrac{0.00028}{2.71828} = 0.000104 \cong 0.01\%$.

Από τα παραπάνω γίνεται φανερό ότι το *σχετικό σφάλμα (δ)* είναι καλύτερος δείκτης ακρίβειας, σε σχέση με το *απόλυτο σφάλμα (e)* για την εκτίμηση μίας προσέγγισης.

1.1.1 Κατηγορίες σφαλμάτων

Διακρίνουμε δύο μεγάλες κατηγορίες σφαλμάτων:

(i) Σφάλματα λόγω *μαθηματικού φορμαλισμού*
- μη κατάλληλο σύστημα εξισώσεων
- ανακρίβειες στις τιμές των παραμέτρων του προβλήματος (π.χ. g = 9.81 η σταθερά βαρύτητας) ή λάθη στα αρχικά δεδομένα.

(ii) Σφάλματα κατά την *αριθμητική επίλυση*
- λάθη *λόγω προσέγγισης* των αριθμών (round-off error) π.χ. $\pi = 3.14159...$, $\frac{1}{6} = 0.1666......$ (δηλαδή όταν αγνοούμε πολλά από τα ψηφία των αριθμών.
- λάθη *αποκοπής* (truncation error), π.χ. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...$, δηλαδή όταν αντικαθιστούμε απειροσειρές με πεπερασμένες σειρές.

1.1.2 Προσέγγιση αριθμών

Όταν πρέπει να κάνουμε πράξεις με αριθμούς που έχουν είτε άπειρα ψηφία (π.χ. $\sqrt{2}$, π κ.τ.λ.) ή τόσα πολλά που πρακτικά είναι αδύνατο να τις πραγματοποιήσουμε, χρησιμοποιούμε *προσεγγίσεις* αυτού του αριθμού. Οι προσεγγίσεις γίνονται στον επιθυμητό αριθμό *σημαντικών*[1] ή *δεκαδικών* ψηφίων.

Γενικά ισχύουν τα εξής:

Ένας αριθμός $x_{πρ}$ προσεγγίζει την ακριβή τιμή του αριθμού x με ν σωστά σημαντικά ψηφία όταν ν είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος για τον οποίο ισχύει:

$$\delta = \left| \frac{x - x_{\pi\rho}}{x} \right| \leq 0.5 \cdot 10^{-\nu+1}, \quad x \neq 0 \tag{1.1}$$

Για την προσέγγιση με ν δεκαδικά ψηφία η προηγούμενη σχέση γράφεται:

$$E = \left| x - x_{\pi\rho} \right| \leq 0.5 \cdot 10^{-\nu} \tag{1.2}$$

Η προσέγγιση $x_{πρ}$ προκύπτει με δύο διαδικασίες:

(i) **Αποκοπή**: *Ξεκινάμε από το πιο αριστερό μη-μηδενικό ψηφίο και μετράμε «ν» ψηφία αγνοώντας τα υπόλοιπα.*

(ii) **Στρογγυλοποίηση**: *Παρατηρούμε το «ν +1» ψηφίο του αριθμού. Αν είναι ν≥ 5, τότε αυξάνουμε το «ν» τελευταίο ψηφίο κατά 1 και αγνοούμε τα υπόλοιπα.*

---

[1] Κάθε ψηφίο, στην αρχή ενός αριθμού, που δεν είναι μηδενικό ονομάζεται *σημαντικό ψηφίο*. Έτσι ο αριθμός 87.4 έχει *τρία* σημαντικά ψηφία, ενώ ο 0.005632 έχει *τέσσερα* σημαντικά ψηφία (τα μηδεικά στην αρχή του αριθμού δεν προσμετρούνται.

<u>Παράδειγμα Ι</u>: Ζητείται η προσέγγιση του αριθμού $\sqrt{3}=1.732050808$ με 5 σημαντικά ψηφία, (α) με αποκοπή και (β) με στρογγυλοποίηση.

(α) Αποκοπή: $\sqrt{3}=\underline{1.7320}50808 \Rightarrow \sqrt{3}_{\alpha\pi}^{(5)}=1.7320$

(β) Στρογγυλοποίηση: $\sqrt{3}=\underline{1.7320}\underset{(\nu+1=6^o\ \psi\eta\varphi\iota o)}{5}0808 \Rightarrow \sqrt{3}_{\sigma\tau\rho}^{5}=1.7321$ (το ψηφίο «0» αυξάνεται σε «1»

Το απόλυτο και το σχετικό σφάλμα στην αποκοπή είναι αντίστοιχα $E=5.08\cdot 10^{-5}$ και $\delta=2.93\cdot 10^{-6}$. Η εξ. (1.1) δηλώνει ότι η προσέγγιση σε 5 σημαντικά ψηφία είναι αποδεκτή όταν $\delta \le 0.5\cdot 10^{-5+1}=0.5\cdot 10^{-4}=5\cdot 10^{-5}$, που ικανοποιείται από το αποτέλεσμα που βρήκαμε.

Αντίστοιχα για τη στρογγυλοποίηση βρίσκουμε $E=4.92\cdot 10^{-5}$ και $\delta=2.84\cdot 10^{-5}$. Και σε αυτή την περίπτωση ικανοποιείται η εξ. (1.1).

<u>Ποιος λοιπόν είναι ο πιο σωστός τρόπος να προσεγγίσουμε τον προηγούμενο αριθμό;</u> Η απάντηση είναι: *αυτόν που δίνει το <u>μικρότερο</u> σφάλμα, δηλαδή την <u>στρογγυλοποίηση.</u>*

<u>Παράδειγμα ΙΙ</u>: Ζητείται η προσέγγιση του αριθμού $\pi=3.14159265$ με 5 σημαντικά ψηφία, (α) με αποκοπή και (β) με στρογγυλοποίηση.

(α) Αποκοπή: $\pi=\underline{3.1415}9265 \Rightarrow \pi_{\alpha\pi}^{(5)}=3.1415$

(β) Στρογγυλοποίηση: $\pi=\underline{3.1415}\underset{"\nu+1=6^o\ \psi\eta\varphi\iota o"}{9}265 \Rightarrow \pi_{\sigma\tau\rho}^{(5)}=3.1416$ (το ψηφίο «5» αυξάνεται σε «6»).

Είναι: $0.5\cdot 10^{-5+1}=5\cdot 10^{-5}$. Το απόλυτο και το σχετικό σφάλμα στην αποκοπή είναι αντίστοιχα $E=9.265\cdot 10^{-5}$ και $\delta=2.95\cdot 10^{-5}<5\cdot 10^{-5}$. Έτσι, η εξ. (1.1) δηλώνει ότι η προσέγγιση με αποκοπή σε 5 σημαντικά ψηφία είναι αποδεκτή.

Για τη στρογγυλοποίηση βρίσκουμε $E=7.35\cdot 10^{-6}$ και $\delta=2.35\cdot 10^{-6}<5\cdot 10^{-6}=0.5\cdot 10^{-6+1}$. Αυτό, σε συνδυασμό με την εξ. (1.1) δηλώνει ότι στρογγυλοποίηση μπορεί να γίνει σε 6 σημαντικά ψηφία.

1.2 Μετάδοση σφαλμάτων κατά τους υπολογισμούς

Είναι πάντα σημαντικό για τους υπολογισμούς ή την επεξεργασία δεδομένων να μπορούμε εκτιμήσουμε την «εξέλιξη» των σφαλμάτων που προέρχονται από:

- *Λάθη μετρήσεων* (συστηματικά σφάλματα οργάνων μέτρησης, σφάλματα ανάγνωσης κ.ο.κ.)
- *Λάθη στρογγυλοποίησης και αποκοπής* (από την αναγκαιότητα αναπαράστασης των αριθμών με πεπερασμένο πλήθος σωστών αριθμητικών ψηφίων, για χρήση π.χ. στους Η/Υ)
- *Ανθρώπινα λάθη* (κατά τη μεταφορά ή την εισαγωγή δεδομένων)
- *Λάθη από ενδιάμεσους υπολογισμούς* (όταν το τελικό απτέλεσμα είναι αριθμός που προκύπτει από σειρά υπολογιστικών βημάτων)

Θεωρούμε τις τιμές $x_{\pi\rho}, y_{\pi\rho}$ που προσεγγίζουν δύο αριθμούς x, y. Τα αντίστοιχα σφάλματα είναι $E_x = x - x_{\pi\rho}$, $E_y = y - y_{\pi\rho}$.

- Για την προσέγγιση $x + y \cong x_{\pi\rho} + y_{\pi\rho}$, το σφάλμα είναι: $\boxed{\left|E_{x+y}\right| \le \left|E_x\right| + \left|E_y\right|}$

  Απόδειξη:

  $$E_{x+y} = (x+y) - (x_{\pi\rho} + y_{\pi\rho}) = (x - x_{\pi\rho}) + (y - y_{\pi\rho}) = E_x + E_y \Rightarrow \left|E_{x+y}\right| \le \left|E_x\right| + \left|E_y\right|$$

- Για την προσέγγιση $x - y \cong x_{\pi\rho} - y_{\pi\rho}$, το σφάλμα είναι: $\boxed{\left|E_{x-y}\right| \le \left|E_x\right| + \left|E_y\right|}$

  Απόδειξη:

  $$E_{x+y} = (x-y) - (x_{\pi\rho} - y_{\pi\rho}) = (x - x_{\pi\rho}) - (y - y_{\pi\rho}) = E_x - E_y \Rightarrow \left|E_{x-y}\right| \le \left|E_x\right| + \left|E_y\right|$$

- Για την προσέγγιση $x \cdot y \cong x_{\pi\rho} \cdot y_{\pi\rho}$, το σφάλμα είναι: $\boxed{E_{xy} = x_{\pi\rho}E_y + y_{\pi\rho}E_x}$

  Απόδειξη:

  Έστω $x_1 = x_{\pi\rho} + E_x$ *και* $y_1 = y_{\pi\rho} + E_y$ *δύο τιμές που προσεγγίζουν τα* x, y.

  $$E_{xy} = x_1 \cdot y_1 - x \cdot y = (x_{\pi\rho} + E_x) \cdot (y_{\pi\rho} + E_y) - x \cdot y =$$
  $$= \cancel{x_{\pi\rho}y_{\pi\rho}} + E_x y_{\pi\rho} + E_y x_{\pi\rho} + \cancel{E_x E_y} - \cancel{xy} = x_{\pi\rho}E_y + y_{\pi\rho}E_x$$
  $$\left(x_{\pi\rho}y_{\pi\rho} \cong xy,\ E_x E_y \cong 0\right)$$

- Για την προσέγγιση $\frac{x}{y} \cong \frac{x_{\pi\rho}}{y_{\pi\rho}}$, το σφάλμα είναι: $\boxed{E_{x/y} = \frac{y_{\pi\rho} \cdot E_x - x_{\pi\rho} \cdot E_y}{y_{\pi\rho}^2}}$

  Απόδειξη:

  Έστω $x_1 = x_{\pi\rho} + E_x$ *και* $y_1 = y_{\pi\rho} + E_y$ *δύο τιμές που προσεγγίζουν τα* x, y.

  $$E_{x/y} = \frac{x_1}{y_1} - \frac{x}{y} = \frac{x_{\pi\rho} + E_x}{y_{\pi\rho} + E_y} - \frac{x}{y} = \frac{\cancel{y \cdot x_{\pi\rho}} + y \cdot E_x - \cancel{x \cdot y_{\pi\rho}} - x \cdot E_y}{y \cdot y_{\pi\rho} + \cancel{y \cdot E_y}} \cong$$
  $$\cong \frac{y_{\pi\rho} \cdot E_x - x_{\pi\rho} \cdot E_y}{y_{\pi\rho}^2}$$
  $$\left(\begin{array}{l} y \cdot E_y << y \cdot y_{\pi\rho} \Rightarrow y \cdot E_y \to 0 \\ y \cdot x_{\pi\rho} \cong y \cdot x \cong y_{\pi\rho} \cdot x \\ y \cdot y_{\pi\rho} \cong y_{\pi\rho}^2 \\ y \cdot E_x \cong y_{\pi\rho} \cdot E_x,\ x \cdot E_y \cong x_{\pi\rho} \cdot E_y \end{array}\right)$$

Η *μέγιστη τιμή του απόλυτου σχετικού σφάλματος* για το γινόμενο και για το πηλίκο είναι το άθροισμα των απόλυτων σχετικών σφαλμάτων των αριθμών:

$$\boxed{\left|\delta_{xy}\right| \le \left|\delta_x\right| + \left|\delta_y\right|} \quad \text{και} \quad \boxed{\left|\delta_{x/y}\right| \le \left|\delta_x\right| + \left|\delta_y\right|}$$

Γενικά, για το σφάλμα E μιας ποσότητας $f(x,y)$ ισχύει:

$$E \cong E_x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + E_y \cdot \frac{\partial f}{\partial y},$$

όπου οι μερικές παράγωγοι υπολογίζονται στο σημείο $\left(x_{\pi\rho}, y_{\pi\rho}\right)$.

<u>*Παράδειγμα I*</u>: Να βρεθεί το μέγιστο απόλυτο σφάλμα της έκφρασης $z = 2.3x + 1.4y$ αν οι x, y στρογγυλοποιούνται σε δύο δεκαδικά ψηφία.

$$E_z = E_x \frac{\partial z}{\partial x} + E_y \frac{\partial z}{\partial y} = E_x \cdot 2.3 + E_y \cdot 1.4$$

Αφού οι *x*, *y* στρογγυλοποιούνται σε δύο δεκαδικά ψηφία ισχύει (από εξ. 1.2):

$\left|E_x\right| \le 0.5 \cdot 10^{-2}$ και $\left|E_y \le 0.5 \cdot 10^{-2}\right|$. Άρα, το απόλυτο σφάλμα της *z* είναι:

$\left|E_z\right| \le 2.3 \cdot 0.5 \cdot 10^{-2} + 1.4 \cdot 0.5 \cdot 10^{-2} = \cdots = 0.0185$, που σημαίνει ότι το *μέγιστο απόλυτο σφάλμα* είναι $\left|E_z^{\max}\right| = 0.0185$.

<u>*Παράδειγμα II*</u>: Τα απόλυτα σχετικά σφάλματα για τις τιμές *x, y* είναι αντίστοιχα $\left|\delta_x\right|, \left|\delta_y\right|$. Αν οι μέγιστες τιμές των σφαλμάτων είναι 0.2 και 0.3 να βρεθεί η μέγιστη τιμή του απόλυτου σχετικού σφάλματος της ποσότητας $z = x^2 y$.

$$E_z = E_x \frac{\partial z}{\partial x} + E_y \frac{\partial z}{\partial y} = E_x \cdot 2xy + E_y \cdot x^2$$

$\delta_z = \dfrac{z - z_{\pi\rho}}{z} = \dfrac{E_z}{z} = \dfrac{E_x 2xy + E_y x^2}{x^2 y} = 2\dfrac{E_x}{x} + \dfrac{E_y}{y} = 2\delta_x + \delta_y$. Άρα

$\left|\delta_z\right| \le 2\left|\delta_x\right| + \left|\delta_y\right| \le 2 \cdot 0.2 + 0.3 = 0.7$ (αφού $\left|\delta_x\right| \le 0.2, \left|\delta_y\right| \le 0.3$). Δηλαδή το μέγιστο απόλυτο σχετικό σφάλμα της z είναι: $\left|\delta_z^{\max}\right| = 0.7$.

1.3 Πεπερασμένες και διαιρεμένες διαφορές

Όταν δεν είναι γνωστός ο τύπος μιας συνάρτησης *y= f(x)*, αλλά μπορούμε με μετρήσεις να βρούμε τις τιμές y_i της συνάρτησης, για δοσμένες τιμές x_i της ανεξάρτητης μεταβλητής *x*, είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε κάποιες ιδιότητες της συνάρτησης, καθώς και να ελέγχουμε τις τιμές αυτές για πιθανά λάθη, σχηματίζοντας τις διαφορές $y_{k+1} - y_k$, $k = 0,1,2,\ldots$ Οι τιμές x_k, με k=0, 1, 2, …., ν καθορίζονται από τον μελετητή, οπότε υπάρχουν δύο περιπτώσεις:

- Η τιμή της διαφοράς x_{k+1}-x_k είναι σταθερή. Τότε ορίζουμε τις ***πεπερασμένες διαφορές***.
- Η τιμή της διαφοράς x_{k+1}-x_k δεν είναι σταθερή, για όλες τις τιμές *k*. Τότε ορίζουμε τις ***διαιρεμένες διαφορές***.

1.3.1 Πεπερασμένες διαφορές

Η έννοια των διαφορών είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στην προσέγγιση μιας συνάρτησης με πολυώνυμο, στην παρεμβολή σημείων κ.λπ. όπως θα δούμε στη συνέχεια.

Θεωρούμε τα διακριτά σημεία $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\nu$ του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης *f(x)*. Οι διαφορές:

$$\Delta f_k = f(x_{k+1}) - f(x_k) \text{ ή } \Delta y_k = y_{k+1} - y_k \text{ ή } \Delta f_k = f_{k+1} - f_k$$

ονομάζονται ***προς τα εμπρός διαφορές πρώτης τάξης***, ενώ οι διαφορές:

$$\Delta^2 f_k = \Delta(\Delta f_k) = \Delta f(x_{k+1}) - \Delta f(x_k) = f_{k+2} - 2f_{k+1} + f_k$$

ονομάζονται ***προς τα εμπρός διαφορές δεύτερης τάξης***.

Γενικά, οι ***προς τα εμπρός διαφορές n τάξης*** ορίζονται από τη σχέση:

$$\Delta^n f_k = \Delta(\Delta^{n-1} f_k) = \Delta^{n-1} f_{k+1} - \Delta^{n-1} f_k \qquad (f_k = f(x_k))$$

Ο πιο κάτω πίνακας είναι ο ***πίνακας των προς τα εμπρός διαφορών*** μιας συνάρτησης *f(x)* με πεδίο ορισμού το $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$.

x	$f(x)$	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5
x_1	f_1					
		Δf_1				
x_2	f_2		$\Delta^2 f_1$			
		Δf_2		$\Delta^3 f_1$		
x_3	f_3		$\Delta^2 f_2$		$\Delta^4 f_1$	
		Δf_3		$\Delta^3 f_2$		$\Delta^5 f_1$
x_4	f_4		$\Delta^2 f_3$		$\Delta^4 f_2$	
		Δf_4		$\Delta^3 f_3$		
x_5	f_5		$\Delta^2 f_4$			
		Δf_5				
x_6	f_6					

Οι διαφορές:

$$\nabla f_k = f(x_k) - f(x_{k-1}) = f_k - f_{k-1} \text{ ή } \nabla y_k = y_k - y_{k-1}$$

ονομάζονται ***προς τα πίσω διαφορές πρώτης τάξης***

Γενικά, οι ***προς τα πίσω διαφορές n τάξης*** ορίζονται από τη σχέση:

$$\nabla^n f_k = \nabla(\nabla^{n-1} f_k) = \nabla^{n-1} f_k - \nabla^{n-1} f_{k-1}$$

Ο πιο κάτω πίνακας είναι ο ***πίνακας των προς τα πίσω διαφορών*** μιας συνάρτησης *f(x)* με πεδίο ορισμού το $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$.

x	$f(x)$	∇	∇^2	∇^3	∇^4	∇^5
x_1	f_1					
		∇f_2				
x_2	f_2		$\nabla^2 f_3$			
		∇f_3		$\nabla^3 f_4$		
x_3	f_3		$\nabla^2 f_4$		$\nabla^4 f_5$	
		∇f_4		$\nabla^3 f_5$		$\nabla^5 f_6$
x_4	f_4		$\nabla^2 f_5$		$\nabla^4 f_6$	
		∇f_5		$\nabla^3 f_6$		
x_5	f_5		$\nabla^2 f_6$			
		∇f_6				
x_6	f_6					

Οι διαφορές:

$$\delta f_{k+\frac{1}{2}} = f(x_{k+1}) - f(x_k) = f_{k+1} - f_k$$

ονομάζονται ***κεντρικές διαφορές πρώτης τάξης*** στο σημείο x_{k+1}.

Οι διαφορές:

$$\delta^2 f_k = \delta(\delta f_k) = \delta f_{k+\frac{1}{2}} - \delta f_{k-\frac{1}{2}}$$

ονομάζονται ***κεντρικές διαφορές δεύτερης τάξης*** στο σημείο x_k.

Γενικά, οι ***κεντρικές διαφορές περιττής και άρτιας τάξης*** ορίζονται από τις σχέσεις:

$$\delta^{2n-1} f_{k+\frac{1}{2}} = \delta\left(\delta^{2n-2} f_{k+\frac{1}{2}}\right) = \delta^{2n-2} f_{k+1} - \delta^{2n-2} f_k$$

$$\delta^{2n} f_k = \delta\left(\delta^{2n-1} f_k\right) = \delta^{2n-1} f_{k+\frac{1}{2}} - \delta^{2n-1} f_{k-\frac{1}{2}}$$

Ο πιο κάτω πίνακας είναι ο ***πίνακας των κεντρικών διαφορών*** μιας συνάρτησης *f(x)* με πεδίο ορισμού το $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)$.

x	$f(x)$	δ	δ^2	δ^3	δ^4	δ^5
x_1	f_1					
		$\delta f_{3/2}$				
x_2	f_2		$\delta^2 f_2$			
		$\delta f_{5/2}$		$\delta^3 f_{5/2}$		
x_3	f_3		$\delta^2 f_3$		$\delta^4 f_3$	
		$\delta f_{7/2}$		$\delta^3 f_{7/2}$		$\delta^5 f_{7/2}$
x_4	f_4		$\delta^2 f_4$		$\delta^4 f_4$	
		$\delta f_{9/2}$		$\delta^3 f_{9/2}$		
x_5	f_5		$\delta^2 f_5$			
		$\delta f_{11/2}$				
x_6	f_6					

<u>*Παράδειγμα I*</u>: Να υπολογισθούν οι προς τα εμπρός διαφορές μέχρι πέμπτης τάξης της συνάρτησης $y(x) = x^3 - 3x + 4$, για τις τιμές $x_k = 0,1,2,3,4,5$.

Σύμφωνα με τον ορισμό των προς τα εμπρός διαφορών σχηματίζεται ο ακόλουθος πίνακας διαφορών:

x_k	y_k	Δy_k	$\Delta^2 y_k$	$\Delta^3 y_k$	$\Delta^4 y_k$	$\Delta^5 y_k$
0	4					
		-2				
1	2		6			
		4		6		
2	6		12		0	
		16		6		0
3	22		18		0	
		34		6		
4	56		24			
		58				
5	114					

Παράδειγμα ΙΙ: Να υπολογισθούν οι προς τα πίσω διαφορές μέχρι πέμπτης τάξης της συνάρτησης $y(x)=e^{-x}$, για τις τιμές $x_k = 0.0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$.

Σύμφωνα με τον ορισμό των προς τα πίσω διαφορών σχηματίζεται ο ακόλουθος πίνακας διαφορών:

x_k	y_k	∇y_k	$\nabla^2 y_k$	$\nabla^3 y_k$	$\nabla^4 y_k$	$\nabla^5 y_k$
0.0	1					
		-0.18127				
0.2	0.81873		0.03286			
		-0.14841		-0.00596		
0.4	0.67032		0.0269		0.00109	
		-0.12151		-0.00487		-0.0002
0.6	0.54881		0.02203		0.00089	
		-0.09948		-0.00398		
0.8	0.44933		0.01805			
		-0.08143				
1.0	0.36788					

Παράδειγμα ΙΙΙ: Να κατασκευαστούν οι πίνακες διαφορών Δ, ∇, δ μέχρι και τρίτης τάξης της συνάρτησης $y(x)=x^2-1$, για τις ακέραιες τιμές του $x=1,\ldots,6$.

Σύμφωνα με τους ορισμούς των προς τα εμπρός, των προς τα πίσω και των κεντρικών διαφορών, καθώς και τους πίνακες που κατασκευάσαμε γι' αυτές καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι:

$$\Delta y_k = \nabla y_{k+1} = \delta y_{k+\frac{1}{2}} \quad \text{και γενικά} \quad \Delta^\nu y_k = \nabla^\nu y_{k+\nu} = \delta^\nu y_{k+\frac{\nu}{2}}$$

Δηλαδή, οι αριθμητικές καταχωρήσεις σε έναν πίνακα διαφορών είναι ίδιες σε όλες τις περιπτώσεις, απλά αλλάζουν τα σύμβολα. Κατασκευάζεται λοιπόν ο ακόλουθος πίνακας:

x_k	y_k	Δy_k	$\Delta^2 y_k$	$\Delta^3 y_k$
1	0			
		3		
2	3		2	
		5		0
3	8		2	
		7		0
4	15		2	
		9		0
5	24		2	
		11		
6	35			

$\Delta y_1 = \nabla y_2 = \delta y_{3/2} = 3,\ \Delta y_2 = \nabla y_3 = \delta y_{5/2} = 5,\ \Delta y_3 = \nabla y_4 = \delta y_{7/2} = 7,\ \Delta y_4 = \nabla y_5 = \delta y_{9/2} = 9,$
$\Delta y_5 = \nabla y_6 = \delta y_{11/2} = 11$ *κ.ο.κ.*

Όπως φαίνεται από τον πίνακα, οι διαφορές δεύτερης τάξης είναι όλες ίσες με 2, ενώ οι διαφορές τρίτης τάξης είναι ίσες με 0.

Γενικά: ***οι διαφορές k τάξης ενός πολυωνύμου βαθμού k είναι σταθερές, ενώ οι διαφορές τάξης*** $\geq k+1$ ***είναι μηδενικές.***

1.3.2 Διαιρεμένες διαφορές

Όταν έχουμε τις τιμές $x_1, x_2, x_3, ..., x_\nu$ της ανεξάρτητης μεταβλητής x, για τις οποίες οι διαφορές $x_{k+1} - x_k$ με $k = 0, 1, 2, ..., \nu - 1$ δεν είναι όλες ίσες μεταξύ τους, καθώς και τις αντίστοιχες τιμές $y_1, y_2, y_3, ..., y_\nu$ της εξαρτημένης μεταβλητής $y = y(x)$ ορίζουμε τις <u>*διαρεμένες διαφορές*</u>.

Συγκεκριμένα ονομάζουμε:

- διαιρεμένη διαφορά πρώτης τάξης μεταξύ δύο διαδοχικών σημείων x_k, x_{k+1}:

$$y[x_k, x_{k+1}] = \frac{y(x_{k+1}) - y(x_k)}{x_{k+1} - x_k} = \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}, \quad k = 0, 1, 2, ..., \nu - 1$$

- διαιρεμένη διαφορά δεύτερης τάξης μεταξύ τριών διαδοχικών σημείων x_k, x_{k+1}, x_{k+2}:

$$y[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}] = \frac{y(x_{k+1}, x_{k+2}) - y(x_k, x_{k+1})}{x_{k+2} - x_k}, \quad k = 0, 1, 2, ..., \nu - 2$$

- γενικά διαιρεμένη διαφορά μιοστής τάξης $(1 \le \mu \le \nu)$ μεταξύ $\mu + 1$ διαδοχικών σημείων x_k, $x_{k+1}, ..., x_{k+\mu}$:

$$y[x_k, ..., x_{k+1}] = \frac{y(x_{k+1}, ..., x_{k+\mu}) - y(x_k, ..., x_{k+\mu-1})}{x_{k+1} - x_k}, \quad k = 0, 1, 2, ..., \nu - \mu$$

<u>*Παράδειγμα Ι*</u>: Να υπολογιστούν οι διαφορές μέχρι και τέταρτης τάξης της συνάρτησης $y(x)$, που δίνεται απ' τον πιο κάτω πίνακα τιμών:

x_k	-1	0	2	4	5
y_k	13	2	-14	18	67

Παρατηρούμε ότι η διαφορά $x_{k+1} - x_k$ δεν είναι σταθερή, γεγονός που σημαίνει ότι θα υπολογίσουμε τις διαιρεμένες διαφορές των σημείων.

Χρησιμοποιούμε τους τύπους της προηγούμενης παραγράφου και έχουμε:

$$y[x_0, x_1] = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = -11, \quad y[x_1, x_2] = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -8, \quad y[x_2, x_3] = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = 16,$$

$$y[x_3, x_4] = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3} = 49$$

$$y[x_0, x_1, x_2] = \frac{y[x_1, x_2] - y[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = 1, \quad y[x_1, x_2, x_3] = \frac{y[x_2, x_3] - y[x_1, x_2]}{x_3 - x_1} = 6,$$

$$y[x_2,x_3,x_4]=\frac{y[x_3,x_4]-y[x_2,x_3]}{x_4-x_2}=11$$

$$y[x_0,x_1,x_2,x_3]=\frac{y[x_1,x_2,x_3]-y[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0}=1,$$

$$y[x_1,x_2,x_3,x_4]=\frac{y[x_2,x_3,x_4]-y[x_1,x_2,x_3]}{x_4-x_1}=1$$

$$y[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4]=\frac{y[x_1,x_2,x_3,x_4]-y[x_0,x_1,x_2,x_3]}{x_4-x_0}=0$$

1.4 Μετάδοση σφαλμάτων σε πίνακα διαφορών

Όταν κάποια τιμή μιας συνάρτησης $y=f(x)$είναι λανθασμένη και κατασκευάσουμε τον πίνακα διαφορών, τότε ***το σφάλμα μεταδίδεται στις διαφορές ανώτερης τάξης με <u>διωνυμικούς συντελεστές</u>***.

Έστω ότι υπάρχει σφάλμα ε στην τιμή $y_5 = f(x_5)$. Κατασκευάζουμε έναν πίνακα διαφορών:

x_k	y_k	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
x_1	y_1				
		Δy_1			
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$	
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$		$\Delta^4 y_1+\boldsymbol{\varepsilon}$
		Δy_3		$\Delta^3 y_2+\boldsymbol{\varepsilon}$	
x_4	y_4		$\Delta^2 y_3+\boldsymbol{\varepsilon}$		$\Delta^4 y_2-4\boldsymbol{\varepsilon}$
		$\Delta y_4+\boldsymbol{\varepsilon}$		$\Delta^3 y_3-3\boldsymbol{\varepsilon}$	
x_5	$y_5+\boldsymbol{\varepsilon}$		$\Delta^2 y_4-2\boldsymbol{\varepsilon}$		$\Delta^4 y_3+6\boldsymbol{\varepsilon}$
		$\Delta y_5-\boldsymbol{\varepsilon}$		$\Delta^3 y_4+3\boldsymbol{\varepsilon}$	
x_6	y_6		$\Delta^2 y+\boldsymbol{\varepsilon}_5$		$\Delta^4 y_4-4\boldsymbol{\varepsilon}$
		Δy_6		$\Delta^3 y_5-\boldsymbol{\varepsilon}$	
x_7	y_7		$\Delta^2 y_6$		$\Delta^4 y_5+\boldsymbol{\varepsilon}$
		Δy_7		$\Delta^3 y_6$	
x_8	y_8		$\Delta^2 y_7$		
		Δy_8			
x_9	y_9				

Παραδείγματα υπολογισμών στον πίνακα:

$$(\Delta y_4)_{new}=(y_5+\varepsilon)-y_4=(y_5-y_4)+\varepsilon=\Delta y_4+\varepsilon$$

$$(\Delta^2 y_4)_{new}=(\Delta y_5)_{new}-(\Delta y_4)_{new}=(\Delta y_5-\varepsilon)-(\Delta y_4+\varepsilon)=(\Delta y_5-\Delta y_4)-2\varepsilon$$

κ.ο.κ.

Όπως φαίνεται στον πίνακα, το σφάλμα επηρεάζει μια *τριγωνική περιοχή* και οδηγεί στην εμφάνιση των συντελεστών του αναπτύγματος $(\alpha-\beta)^n$, στις διαφορές ανώτερης τάξης, πολλαπλασιασμένους με το σφάλμα ε. Στον πίνακα, το μέγιστο απόλυτο σφάλμα είναι $|6\varepsilon|$ και η λανθασμένη τιμή της συνάρτησης, δηλ. η y_5, βρίσκεται στην ίδια οριζόντια γραμμή με το $|6\varepsilon|$.

Παρατήρηση:

Όταν δύο διαφορές σε μια στήλη του πίνακα διαφορών, περιέχουν το μέγιστο απόλυτο σφάλμα, τότε η λανθασμένη τιμή βρίσκεται μεταξύ των διαφορών αυτών. Στον προηγούμενο πίνακα, οι διαφορές $\Delta^3 y_3$ και $\Delta^3 y_4$ περιέχουν το μέγιστο σφάλμα $|3\varepsilon|$. Η λανθασμένη τιμή της συνάρτησης βρίσκεται μεταξύ των διαφορών αυτών, όπως διαπιστώνουμε συμπληρώνοντας της διαφορές της αμέσως επόμενης τάξης.

Παράδειγμα I: Στον πίνακα που ακολουθεί υπάρχει μια λανθασμένη τιμή του τριτοβάθμιου πολυωνύμου $y = f(x)$. Να βρεθεί και να διορθωθεί η τιμή αυτή.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
f(x)	-21	-4	1	0	1	4	21	56	115

Κατασκευάζουμε τον πίνακα διαφορών:

x_k	y_k	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
-3	-21				
		17			
-2	-4		-12		
		5		6	
-1	1		-6		2
		-1		8	
0	0		2		-8
		1		0	
1	1		2		12
		3		12	
2	4		14		-8
		17		4	
3	21		18		2
		35		6	
4	56		24		
		59			
5	115				

Εφόσον το πολυώνυμο είναι τρίτου βαθμού θα έπρεπε οι διαφορές 3ης τάξης να είναι σταθερές και οι 4ης τάξης να είναι μηδενικές (§ 1.3.1). Στον πίνακα, οι διαφορές 4ης τάξης είναι οι συντελεστές του διωνύμου:

$$(\alpha-\beta)^4 = \mathbf{1}\cdot\alpha^4 - \mathbf{4}\cdot\alpha^3\beta + \mathbf{6}\cdot\alpha^2\beta^2 - \mathbf{4}\cdot\alpha\beta^3 + \mathbf{1}\cdot\beta^4$$

πολλαπλασιαμένοι με το 2, το οποίο είναι το σφάλμα. Το μέγιστο απόλυτο σφάλμα, δηλ. 12, βρίσκεται στην ίδια οριζόντια ευθεία με την τιμή $y=\mathbf{1}$. Η διορθωμένη τιμή του πολυωνύμου είναι λοιπόν $f(\mathbf{1}) = \mathbf{1} - \mathbf{2} = -\mathbf{1}$.