ΤΕΙ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Κλείδης Κωνσταντίνος
ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΙΑΣ ΤΕ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Κεντρικής Μακεδονίας» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Κεφάλαιο 3

Πολυωνυμική παρεμβολή

Ως πρόβλημα παρεμβολής ορίζουμε το εξής:

Δίνονται οι τιμές μιας συνάρτησης $f(x)$ στα σημεία $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ και ζητείται η προσέγγιση της $f(x)$ από ένα πολυώνυμο $P(x)$ τέτοιο ώστε $f(x_i) = P(x_i), \quad i = 0,1,2,...,n$

Το $P(x)$ ονομάζεται ***πολυώνυμο παρεμβολής***, ή λέμε ότι ***παρεμβάλλει την*** $f(x)$ στα σημεία $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$.

Χρησιμοποιούμε τα πολυώνυμα, αντί άλλων συναρτήσεων, επειδή οι αριθμητικοί υπολογισμοί, η παραγώγιση και η ολοκλήρωση με πολυώνυμα είναι εύκολες διαδικασίες.

Ένα πρώτο παράδειγμα πολυωνύμου που προσεγγίζει μια συνάρτηση $f(x)$ είναι το *πολυώνυμο Taylor*:

$$P(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Αυτή η προσέγγιση είναι ικανοποιητική για μικρό διάστημα γύρω από το x_0.

Στη συνέχεια θα περιγράψουμε τις βασικές μεθόδους που χρησιμοποιούνται για πολυωνυμική παρεμβολή.

3.1 Παρεμβολή Langrange

Μια συνάρτηση $f(x)$ είναι ορισμένη σε διάστημα Δ και είναι γνωστές οι τιμές της στα n+1 σημεία $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ του Δ. Τότε υπάρχει μοναδικό πολυώνυμο $P_n(x)$, το πολύ n –βαθμού, το οποίο παίρνει τις ίδιες τιμές με την $f(x)$ στα σημεία $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$, δηλαδή $f(x_i) = P(x_i), \quad i = 0,1,2,...,n$. Ισχύει:

$$P_n(x) = l_0(x) f(x_0) + l_1(x) f(x_1) + ... + l_n(x) f(x_n) \tag{3.1}$$

όπου τα πολυώνυμα $l_o(x), l_1(x), l_2(x), ..., l_n(x)$ ορίζονται ως εξής:

$$l_k(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{k-1})(x - x_k)...(x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)...(x_k - x_{k-1})(x_k - x_k)...(x_k - x_n)} = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \left(\frac{x - x_i}{x_k - x_i} \right) \tag{3.2}$$

και λέγονται ***συντελεστές ή πολυώνυμα Langrange***, ενώ το $P_n(x)$ λέγεται ***πολυώνυμο παρεμβολής Langrange***.

Το σφάλμα προσέγγισης στο σημείο x είναι:

$$f(x)-P_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n) \tag{3.3}$$

Όπου το ξ εξαρτάται απ' το x και ανήκει στο Δ. Στην πράξη προσδιορίζουμε ένα ***άνω φράγμα*** για το σφάλμα προσέγγισης.

Παράδειγμα Ι: Να βρεθεί το πολυώνυμο Langrange που παρεμβάλλει τη συνάρτηση $f(x)=e^x$ στα σημεία $x_0=-1,\ x_1=0,\ x_2=1$.

Το ζητούμενο πολυώνυμο δίνεται απ' την εξ. (3.1).

$$P_2(x)=l_0(x)f(x_0)+l_1(x)f(x_1)+l_2(x)f(x_2)=\frac{1}{e}l_0(x)+l_1(x)+el_2(x)$$

όπου

$$l_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=\frac{(x-0)(x-1)}{(-1)(-2)}=\frac{1}{2}(x^2-x)$$

$$l_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}=\frac{(x+1)(x-1)}{1\cdot 1}=x^2-1$$

$$l_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=\frac{(x+1)(x-0)}{2\cdot 1}=\frac{1}{2}(x^2+x)$$

Οπότε:

$$P_2(x)=\frac{1}{2e}(x^2-x)+(x^2-1)+\frac{e}{2}(x^2+x)=\left(1+\frac{e}{2}+\frac{1}{2e}\right)x^2+\left(\frac{e}{2}-\frac{1}{2e}\right)x-1$$

Παράδειγμα ΙΙ: Με τα δεδομένα του πίνακα να υπολογισθούν με προσέγγιση οι αριθμοί $\cos\frac{\pi}{12}, \cos\frac{\pi}{5}$. Να βρεθεί επίσης ένα άνω φράγμα για το σφάλμα κάθε προσέγγισης.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Το πολυώνυμο που παρεμβάλλει τη συνάρτηση $f(x)=\cos x$ στα σημεία $x_o=0,\ x_1=\pi/4,\ x_2=\pi/3,\ x_3=\pi/2$ είναι:

$$P_3(x)=l_0(x)\,f(x_0)+l_1(x)\,f(x_1)+l_2(x)\,f(x_2)+l_3(x)\,f(x_3)$$

όπου

$$f(x_0)=f(0)=1,\ f(x_1)=\frac{\sqrt{2}}{2},\ f(x_2)=\frac{1}{2},\ f(x_3)=0$$

Οι συντελεστές Langrange είναι:

$$l_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}=\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\left(0-\frac{\pi}{4}\right)\left(0-\frac{\pi}{3}\right)\left(0-\frac{\pi}{2}\right)}=-\frac{24}{\pi^3}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$l_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}=\frac{x\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\left(\frac{\pi}{4}-0\right)\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{192}{\pi^3}x\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$l_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}=\frac{x\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{\pi}{3}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)}=-\frac{216}{\pi^3}x\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$

Επειδή $f(x_3)=0$ είναι $l_3(x)f(x_3)=0$, οπότε δεν απαιτείται η εύρεση του $l_3(x)$.
Έτσι έχουμε:

$$\cos x\cong P_3(x)=-\frac{24}{\pi^3}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{192}{\pi^3}x\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-$$
$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{216}{\pi^3}x\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\cos x\cong-\frac{12}{\pi^3}\left[2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-8\sqrt{2}x\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+9x\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

- Για $x=\frac{\pi}{12}$ έχουμε:

$$\cos\frac{\pi}{12}\cong-\frac{12}{\pi^3}\left[2\left(-\frac{\pi}{6}\right)\left(-\frac{\pi}{4}\right)\left(-\frac{5\pi}{12}\right)-8\sqrt{2}\frac{\pi}{12}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\left(-\frac{5\pi}{12}\right)+9\frac{\pi}{12}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right]=$$
$$=\frac{12}{\pi^3}\left(-\frac{10\pi^3}{288}-\frac{40\sqrt{2}\pi^3}{576}+\frac{45\pi^3}{864}\right)=\frac{5}{12}+\frac{5\sqrt{2}}{6}-\frac{5}{8}\cong 0.970178$$

Το απόλυτο σφάλμα της προσέγγισης είναι:

$$\left|f\left(\frac{\pi}{12}\right)-P_3\left(\frac{\pi}{12}\right)\right|=\left|\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\left(\frac{\pi}{12}-0\right)\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{3}\right)\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{2}\right)\right|=$$
$$=\left|\frac{\cos\xi}{24}\cdot\frac{\pi}{12}\cdot\left(-\frac{\pi}{6}\right)\cdot\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right|\leq$$
$$\leq\frac{1}{24}\cdot\frac{\pi}{12}\cdot\frac{\pi}{6}\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\frac{5\pi}{12}=\frac{5\pi^4}{82944}\cong 0.00587$$

Στην προηγούμενη διαδικασία χρειάστηκε να υπολογίσουμε $f^{(4)}(\xi)=(\cos\xi)^{(4)}$.
Είναι

$$(\cos\xi)'=-\sin\xi\Rightarrow(\cos\xi)''=(-\sin\xi)'=-\cos\xi\Rightarrow(\cos\xi)'''=(-\cos\xi)'=\sin\xi$$
$$\Rightarrow(\cos\xi)^{(4)}=\cos\xi$$

Ενώ είναι και $|\cos\xi|\le 1$.

- Για $x=\dfrac{\pi}{5}$ έχουμε:

$$\cos\frac{\pi}{5}\cong-\frac{12}{\pi^3}\left[2\left(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{3}\right)\left(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{2}\right)-8\sqrt{2}\frac{\pi}{5}\left(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{3}\right)\left(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{2}\right)+9\frac{\pi}{5}\left(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{2}\right)\right]\cong$$
$$\cong 0.810116$$

Το απόλυτο σφάλμα της προσέγγισης είναι:

$$\left|f\left(\frac{\pi}{5}\right)-P_3\left(\frac{\pi}{5}\right)\right|=\left|\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\left(\frac{\pi}{5}-0\right)\left(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{3}\right)\left(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{2}\right)\right|\le$$
$$\le\frac{1}{24}\cdot\frac{\pi}{5}\cdot\frac{\pi}{20}\cdot\frac{2\pi}{15}\cdot\frac{3\pi}{10}=\frac{\pi^4}{60000}\cong 0.00162$$

3.2 Πολυώνυμο παρεμβολής Newton με διαιρεμένες διαφορές

Ο προσδιορισμός του πολυωνύμου Langrange απαιτεί πολλές πράξεις και έτσι αναζητούμε ένα πιο γρήγορο και συστηματικό τρόπο προσδιορισμού του πολυωνύμου παρεμβολής, ο οποίος βασίζεται στις διαφορές των τιμών $f(x_0), f(x_1), f(x_2),...., f(x_n)$.

Ένα πολυώνυμο $P_n(x)$, n –βαθμού, το οποίο παίρνει τις ίδιες τιμές με την $f(x)$ στα σημεία $x_0,x_1,x_2,...,x_n$ (δηλ. $f(x_i)=P(x_i)$, $i=0,1,2,...,n$) λέγεται ***πολυώνυμο παρεμβολής Newton***, όταν γράφεται στη μορφή:

$$P_n(x)=C_0+C_1\cdot(x-x_0)+C_2\cdot(x-x_0)(x-x_1)+...+C_n\cdot(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})\quad(3.4)$$

όπου $C_0,C_1,C_2,...,C_n$ είναι πραγματικοί αριθμοί που εκφράζονται με τις διαφορές των τιμών $f(x_0), f(x_1), f(x_2),...., f(x_n)$.

Χρησιμοποιώντας τις *διαιρεμένες διαφορές*:

$$f(x_0,x_1)=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0},\quad f(x_0,x_1,x_2)=\frac{f(x_1,x_2)-f(x_0,x_1)}{x_2-x_0},....$$

το πολυώνυμο (3.4) γράφεται ως εξής:

$$P_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)\cdot f(x_0, x_1) + (x - x_0)\cdot(x - x_1)\cdot f(x_0, x_1, x_2) + \ldots$$
$$+ (x - x_0)\cdot(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})\cdot f(x_0, x_1, \ldots, x_n) \tag{3.5}$$

Το σφάλμα προσέγγισης υπολογίζεται όπως και στο πολυώνυμο Langrange (εξ. 3.3).

<u>*Παράδειγμα Ι*</u>: Να βρεθεί το πολυώνυμο Newton (με διαιρεμένες διαφορές), που παρεμβάλλει τη συνάρτηση $f(x)$ με τιμές $f(-1) = 1, f(1) = 2, f(2) = 1$.

Το ζητούμενο πολυώνυμο είναι το:

$$P_2(x) = f(x_0) + (x - x_0)\cdot f(x_0, x_1) + (x - x_0)\cdot(x - x_1)\cdot f(x_0, x_1, x_2)$$

με $x_0 = -1, x_1 = 1, x_2 = 2$ και $f(x_0) = 1, f(x_1) = 2, f(x_2) = 1$

Οι διαιρεμένες διαφορές είναι:

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{2-1}{1+1} = \frac{1}{2},$$

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0} = \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{1}{2}}{2+1} = \frac{\frac{-1-2}{2-1} - \frac{1}{2}}{3} = -\frac{7}{6}$$

Άρα:

$$P_2(x) = 1 + \frac{1}{2}(x+1) - \frac{7}{6}(x+1)\cdot(x-1)$$

<u>*Παράδειγμα ΙΙ*</u>: Να βρεθεί το πολυώνυμο Newton (με διαιρεμένες διαφορές), που παρεμβάλλει τη συνάρτηση $f(x) = 1 + \ln(x-1)$ στα σημεία $x_0 = 2, x_1 = 3, x_2 = 4, x_3 = 6$. Να βρεθεί με προσέγγιση η τιμή $f(2.5)$ και να εκτιμηθεί το σφάλμα.

Το ζητούμενο πολυώνυμο είναι:

$$P_3(x) = f(x_0) + (x - x_0)\cdot f(x_0, x_1) + (x - x_0)\cdot(x - x_1)\cdot f(x_0, x_1, x_2) +$$
$$+ (x - x_0)\cdot(x - x_1)\cdot(x - x_2)\cdot f(x_0, x_1, x_2, x_3)$$

Οι τιμές της συνάρτησης είναι:

$$f(x_0) = f(2) = 1 + \ln(2-1) = 1$$
$$f(x_1) = f(3) = 1 + \ln(3-1) = 1 + 0.693147 = 1.693147$$
$$f(x_2) = f(4) = 1 + \ln(4-1) = 1 + 1.098612 = 2.098612$$
$$f(x_3) = f(6) = 1 + \ln(6-1) = 1 + 1.609438 = 2.609438$$

Οι διαιρεμένες διαφορές είναι:

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{1.693147 - 1}{3-2} = 0.693147,$$

$$f(x_0,x_1,x_2)=\frac{f(x_1,x_2)-f(x_0,x_1)}{x_2-x_0}=\frac{\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}-f(x_0,x_1)}{4-2}=\ldots=-0.143841$$

$$f(x_1,x_2,x_3)=\frac{f(x_2,x_3)-f(x_1,x_2)}{x_3-x_1}=\frac{\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}-\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}}{x_3-x_1}=\ldots=0.01756$$

$$f(x_0,x_1,x_2,x_3)=\frac{f(x_1,x_2,x_3)-f(x_0,x_1,x_2)}{x_3-x_0}=\ldots=0.04035$$

Οπότε:

$$P_3(x)=f(x_0)+(x-x_0)\cdot f(x_0,x_1)+(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot f(x_0,x_1,x_2)+$$
$$+(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot f(x_0,x_1,x_2,x_3)=$$
$$=1+(x-2)\cdot 0.693147-(x-2)(x-3)\cdot 0.143841+(x-2)(x-3)(x-4)\cdot 0.04035$$

Άρα:

$$f(2.5)=P_3(2.5)=1+0.5\cdot 0.693147-0.5\cdot(-0.5)\cdot 0.143841+0.5\cdot(-0.5)(-1.5)\cdot 0.04035\Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(2.5)=0.397665$$

Για το σφάλμα προσέγγισης έχουμε:

$$\left|f(x)-P_3(x)\right|=\left|\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-2)(x-3)(x-4)(x-6)\right|=$$
$$=\left|-\frac{6}{24\cdot(\xi-1)^4}\cdot(2.5-2)\cdot(2.5-3)\cdot(2.5-4)\cdot(2.5-6)\right|=$$
$$=\frac{1.3125}{4\cdot(\xi-1)^4}\leq\frac{1.3125}{4}=0.328125\quad(\xi\neq 2.5)$$

$$\left(f^{(4)}(\xi)=\left(1+\ln(\xi-1)\right)^{(4)}=\left(\frac{1}{\xi-1}\right)'''=\left(-\frac{1}{(\xi-1)^2}\right)''=\left(\frac{2}{(\xi-1)^3}\right)'=-\frac{6}{(\xi-1)^4}\right)$$

3.3 Πολυώνυμο παρεμβολής με πεπερασμένες διαφορές

3.3.1 Προς τα εμπρός διαφορές

Όταν *τα σημεία παρεμβολής* $x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n$ *ισαπέχουν* κατά h, δηλαδή ισχύει: $x_{k+1}-x_k=h,\ \forall\, k=0,1,2,\ldots,n-1$, μπορούμε να θέσουμε: $\frac{x-x_0}{h}=r$. Τότε, το πολυώνυμο παρεμβολής της $f(x)$ γράφεται ως εξής:

$$P_n(x)=f(x_0)+\binom{r}{1}\Delta f_0+\binom{r}{2}\Delta^2 f_0+\ldots+\binom{r}{n}\Delta^n f_0 \tag{3.6}$$

και ονομάζεται ***πολυώνυμο παρεμβολής των Newton-Gregory με τις προς τα εμπρός διαφορές***.

Ο τύπος αυτός χρησιμοποιείται όταν θέλουμε να βρούμε την τιμή μιας συνάρτησης σε σημείο *ξ κοντά στην αρχή του πίνακα τιμών*. Συνήθως, ως x_0 παίρνουμε την τιμή του πίνακα, που βρίσκεται ακριβώς πριν το *ξ*.

<u>Σημείωση:</u>

Ο συμβολισμός $\binom{r}{k}$ «διαβάζεται» r ανά k και δείχνει το *πλήθος των συνδυασμών των* r *στοιχείων σε «ομάδες»* k *στοιχείων <u>χωρίς</u> <u>επανάθεση</u>* (δηλαδή χωρίς να τοποθετούνται τα επιλεγμένα στοιχεία πάλι στο αρχικό σύνολο). Είναι:

$$\binom{r}{k}=\frac{r!}{k!(r-k)!}=\frac{r\cdot(r-1)\cdots(r-(k-1))\cdot\overbrace{(r-k)\cdots 2\cdot 1}^{(r-k)!}}{k!(r-k)!}=$$
$$=\frac{r\cdot(r-1)\cdots(r-(k-1))}{k!},\quad r\in R,\quad k\in N^*$$

π.χ. $\binom{49}{5}=\frac{49!}{5!(49-5)!}=\frac{\overbrace{1\cdot 2\cdot 3\cdots 44}^{44!}\cdot 45\cdots 49}{5!44!}=\frac{45\cdot 46\cdot 47\cdot 48\cdot 49}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=1906884$

<u>*Παράδειγμα Ι*</u>: Για μια συνάρτηση $f(x)$ δίνεται ο πιο κάτω πίνακας τιμών. Με τη βοήθεια του τύπου παρεμβολής Newton (με πεπερασμένες προς τα εμπρός διαφορές), να βρεθεί η τιμή $f(0.5)$.

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	1	0	-1	1	2

Κατασκευάζουμε τον πίνακα πεπερασμένων διαφορών Δ μέχρι και τέταρτης τάξης

$$\begin{array}{cccccc}
x & f(x) & \Delta & \Delta^2 & \Delta^3 & \Delta^4 \\
\hline
0 & 1 & & & & \\
 & & \boxed{-1} & & & \\
1 & 0 & & \boxed{0} & & \\
 & & -1 & & \boxed{3} & \\
2 & -1 & & 3 & & \boxed{-7} \\
 & & 2 & & -4 & \\
3 & 1 & & -1 & & \\
 & & 1 & & & \\
4 & 2 & & & &
\end{array}$$

Το πολυώνυμο παρεμβολής τέταρτου βαθμού είναι το:

$$P_4(x) = f(x_0) + \binom{r}{1}\Delta f_0 + \binom{r}{2}\Delta^2 f_0 + \binom{r}{3}\Delta^3 f_0 + \binom{r}{4}\Delta^4 f_0 =$$

$$= 1 - \binom{r}{1}\cdot 1 + \binom{r}{2}\cdot 0 + \binom{r}{3}\cdot 3 - \binom{r}{4}\cdot 7$$

Επειδή $\frac{x - x_0}{h} = r$ είναι $x = x_0 + r \cdot h$. Ζητάμε την τιμή $f(0.5)$, δηλαδή $x = 0.5$. Επιλέγουμε λοιπόν $x_0 = 0$, ενώ (όπως διαπιστώνουμε από τα δεδομένα μας, $h = 1$. Έτσι $r = 0.5$ και επομένως:

$$f(0.5) \cong P_4(0.5) = 1 - \binom{0.5}{1}\cdot 1 + \binom{0.5}{3}\cdot 3 - \binom{0.5}{4}\cdot 7 =$$

$$= 1 - 0.5 + 3\cdot\frac{0.5\cdot(0.5-1)\cdot(0.5-2)}{3!} - 7\cdot\frac{0.5\cdot(0.5-1)\cdot(0.5-2)\cdot(0.5-3)}{4!} =$$

$$= 1 - 0.5 + 0.1875 + 0.2734375 = 0.9609375$$

3.3.2 Προς τα πίσω διαφορές

Όταν θέλουμε να βρούμε την τιμή της $f(x)$ σ’ ένα σημείο *ξ κοντά στο τέλος του πίνακα τιμών*, χρησιμοποιούμε τον τύπο ***παρεμβολής των Newton-Gregory με τις προς τα πίσω διαφορές***:

$$P_n(x) = f(x_0) - \binom{r}{1}\nabla f_0 + \binom{r}{2}\nabla^2 f_0 - \binom{r}{3}\nabla^3 f_0 + \ldots + (-1)^n \binom{r}{n}\nabla^n f_0 \qquad (3.7)$$

όπου $r = \frac{x_0 - x}{h}$, ενώ ως x_0 παίρνουμε την τιμή του πίνακα, που βρίσκεται ακριβώς μετά το *ξ*.

Παράδειγμα ΙΙ: Να βρεθεί το πολυώνυμο παρεμβολής τρίτου βαθμού, με πεπερασμένες προς τα πίσω διαφορές, που παρεμβάλλει τη συνάρτηση $f(x)$ γνωρίζοντας τον παρακάτω πίνακα τιμών. Να βρεθεί με προσέγγιση η τιμή $f(1.35)$

x	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4
$f(x)$	-1	2	3	0	-2

Το ζητούμενο πολυώνυμο παρεμβολής είναι το:

$$P_3(x) = f(x_0) - \binom{r}{1}\nabla f_0 + \binom{r}{2}\nabla^2 f_0 - \binom{r}{3}\nabla^3 f_0$$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα πεπερασμένων διαφορών ∇ μέχρι και τρίτης τάξης

x	$f(x)$	∇	∇^2	∇^3
1.0	-1			
		3		
1.1	2		-2	
		1		-2
1.2	3		-4	
		-3		$\boxed{5}$
1.3	0		$\boxed{1}$	
		$\boxed{-2}$		
1.4	-2			

Επειδή ζητάμε την τιμή $f(1.35)$ και το $x=1.35$ βρίσκεται κοντά στο τέλος του πίνακα τιμών επιλέγουμε ως x_0 το 1.4, οπότε:

$$r=\frac{x_0-x}{h}=\frac{1.4-x}{0.1}=14-10x$$

Επίσης έχουμε:

$$f(x_0)=-2,\ \nabla f_0=-2,\ \nabla^2 f_0=1,\ \nabla^3 f_0=5$$

Άρα, το πολυώνυμο παρεμβολής γράφεται:

$$P_3(x)=-2-\binom{r}{1}\cdot(-2)+\binom{r}{2}-\binom{r}{3}\cdot 5=-2+2\cdot\binom{14-10x}{1}+\binom{14-10x}{2}-5\cdot\binom{14-10x}{3}=$$

$$=-2+2\cdot(14-10x)+\frac{(14-10x)\cdot(13-10x)}{2!}-\frac{5}{3!}\cdot(14-10x)\cdot(13-10x)(12-10x)$$

.

Έτσι, για $x=1.35$ βρίσκουμε:

$$f(1.35)\cong P_3(1.35)=-2+2\cdot 0.5+\frac{1}{2}\cdot 0.5\cdot(-0.5)-\frac{5}{6}\cdot 0.5\cdot(-0.5)\cdot(-1.5)=-1.4375$$

<u>Γενικές παρατηρήσεις:</u>

1. Στη γενική περίπτωση, το πολυώνυμο παρεμβολής μπορεί να βρεθεί:
   - Με τη μέθοδο Lagrange
   - Με τη μέθοδο Newton (για διαιρεμένες διαφορές)
2. Όταν τα σημεία παρεμβολής $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ ισαπέχουν εφαρμόζεται η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών.
3. Σε περίπτωση που το πολυώνυμο παρεμβολής είναι σχετικά μικρού βαθμού $(n\le 2)$, θα μπορούσε να προσδιοριστεί με την επίλυση ενός συστήματος γραμμικών εξισώσεων.

(π.χ. αν $f(0)=1,\ f(1)=0,\ f(2)=-3$, το πολυώνυμο $P_2(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$, που παρεμβάλλει την $f(x)$ στα σημεία 0.1 και 2, επαληθεύει τις ισότητες:

$$P_2(0)=a_0=1,\ P_2(1)=a_0+a_1+a_2=0,\ P_2(2)=a_0+2a_1+4a_2=-3\Rightarrow$$
$$\Rightarrow a_0=1,\ a_1=0,\ a_2=-1\Rightarrow$$
$$\Rightarrow P_2(x)=1-x^2$$