ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Κλείδης Κωνσταντίνος
ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΙΑΣ ΤΕ

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Κεντρικής Μακεδονίας» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Κεφάλαιο 4

Αριθμητική Ολοκλήρωση

Όταν θέλουμε να υπολογίσουμε ένα *ορισμένο* ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ (το οποίο υποθέτουμε ότι υπάρχει), όπου η $f(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, ενδέχεται να αντιμετωπίσουμε πρόβλημα που μπορεί να οφείλεται σε κάτι απ' τα παρακάτω:

- Δεν είναι γνωστή η συνάρτηση $f(x)$, αλλά μόνο κάποιες τιμές της.
- Το αόριστο ολοκλήρωμα είναι αδύνατο (ή τουλάχιστο δύσκολο) να εκφραστεί με ένα πεπερασμένο πλήθος στοιχειωδών συναρτήσεων.

Στις περιπτώσεις αυτές χρησιμοποιούμε αριθμητικές μεθόδους για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος. Πιο συγκεκριμένα, αντικαθιστούμε τη συνάρτηση μ' ένα πολυώνυμο παρεμβολής και υπολογίζουμε με προσέγγιση την τιμή του ολοκληρώματος (**μέθοδοι Newton-Cotes και Gauss**). Στη συνέχεια θα περιορίσουμε την αναφορά μας στους διάφορους τύπους αριθμητικής ολοκλήρωσης της μεθόδου Newton-Cotes.

Ας υποθέσουμε ότι γνωρίζουμε τις τιμές $f(x_i)$, $i = 0,1,2,....,n$ μιας συνάρτησης $f(x)$, στα σημεία $x_0 = \alpha, x_1, x_2, ..., x_n = \beta$ και ότι $P_n(x)$ είναι το πολυώνυμο που την παρεμβάλλει στα σημεία αυτά, έτσι ώστε να είναι $f(x) = P_n(x)$. Επίσης ας θεωρήσουμε ότι τα σημεία x_i ισαπέχουν. Τότε ισχύει:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \cong \int_{x_0}^{x_n} P_n(x)dx \tag{4.1}$$

Η εξ. (3.3) δίνει το σφάλμα προσέγγισης της συνάρτησης $f(x)$, απ' το πολυώνυμο $P_n(x)$. Έτσι, το σφάλμα κατά τον υπολογισμό της τιμής του ολοκληρώματος αριθμητικά (*σφάλμα αποκοπής*) δίνεται από τη σχέση:

$$\int_{x_0}^{x_n} \left(f(x) - P_n(x) \right) dx = \int_{x_0}^{x_n} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n)dx \tag{4.2}$$

όπου $\xi \in [x_0, x_n]$.

4.1 Κανόνας ή τύπος του τραπεζίου

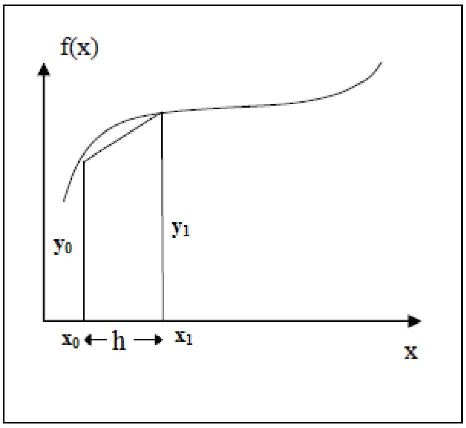
Όταν στο διάστημα ολοκλήρωσης $[\alpha,\beta]$ έχουμε μόνο δύο σημεία x_0, x_1, αυτά αναγκαστικά είναι τα άκρα του. Τότε το πολυώνυμο παρεμβολής είναι πρώτου βαθμού και το ολοκλήρωμα ισούται προσεγγιστικά με το εμβαδό του τραπεζίου, που σχηματίζεται από τα δύο σημεία x_0, x_1 και τις αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

Έτσι έχουμε:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \cong \frac{h}{2}(y_0+y_1) \qquad (4.3)$$

που είναι ο **απλός κανόνας του τραπεζίου.**

Στην περίπτωση που το διάστημα ολοκλήρω-ρωσης $[\alpha,\beta]=[x_0,x_n]$ διαιρεθεί σε n ίσα υποδιαστήματα πλάτους $h=\dfrac{\beta-\alpha}{n}$, τότε θα έχουμε:



$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \cong \frac{h}{2}(y_0+2y_1+2y_2+...+2y_{n-1}+y_n) \qquad (4.4)$$

Ο τύπος αυτός ονομάζεται **σύνθετος κανόνας του τραπεζίου**.

Το σφάλμα σε αυτή την προσέγγιση είναι:

$$E=-\frac{h^2}{12}(\beta-\alpha)f''(\xi), \quad \xi\in(\alpha,\beta) \qquad (4.5)$$

Παράδειγμα Ι: Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I=\int_0^4 \sqrt{x}dx$, με τον κανόνα του τραπεζίου για $n=4$ υποδιαστήματα και να συγκριθεί η προσεγγιστική με την ακριβή τιμή του.

Χωρίζουμε το διάστημα $[x_0,x_4]=[0,4]$ σε 4 ίσα υποδιαστήματα με πλάτος $h=\dfrac{4-0}{4}=1$. Δημιουργούμε τον πιο κάτω πίνακα τιμών:

x_i	0	1	2	3	4
$f(x_i)=y_i$	0	1	1.414	1.732	2

Σύμφωνα με το σύνθετο κανόνα του τραπεζίου (εξ. 4.4) έχουμε:

$$I=\int_{x_0}^{x_4} f(x)dx \cong \frac{h}{2}(y_0+2y_1+2y_2+2y_3+y_4)=0.5\cdot\left(0+2\cdot(1+1.414+1.732)+2\right)=5.146$$

Η ακριβής τιμή του I είναι:

$$I=\int_0^4 x^{1/2}dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^4=\frac{2}{3}\cdot 4^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}\cdot 8=\frac{16}{3}\cong 5.333$$

και επομένως έχουμε σφάλμα: $E=5.333-5.146=0.187$

<u>Παράδειγμα II</u>: Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I=\int_1^3\left(x+\frac{1}{x^2}\right)dx$, με τον κανόνα του τραπεζίου για $n=6$ υποδιαστήματα και να εκτιμηθεί το σφάλμα προσέγγισης. Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός υποδιαστημάτων που απαιτούνται, ώστε το σφάλμα να είναι μικρότερο του 10^{-4};

Χωρίζουμε το διάστημα $[x_0,x_6]=[1,3]$ σε 6 ίσα υποδιαστήματα με πλάτος $h=\frac{x_6-x_0}{n}=\frac{3-1}{6}=\frac{1}{3}$. Δημιουργούμε τον πιο κάτω πίνακα τιμών:

x_i	1	1+1/3	1+2/3	2	2+1/3	2+2/3	3
$f(x_i)=y_i$	2	91/48	152/75	9/4	370/147	532/192	28/9

Σύμφωνα με το σύνθετο κανόνα του τραπεζίου (εξ. 4.4) έχουμε:

$$I\cong\frac{h}{2}\left(y_0+2y_1+2y_2+2y_3+2y_4+2y_5+y_6\right)=$$
$$=\frac{1}{6}\cdot\left(2+2\cdot(1.896+2.027+2.25+2.517+2.807)+3.111\right)=4.684$$

Η ακριβής τιμή του I είναι:

$$I=\int_1^3\left(x+x^{-2}\right)dx=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{1}{x}\right]_1^3=\left(\frac{9}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{2}-1\right)\cong 4.667$$

και επομένως έχουμε σφάλμα: $E=4.684-4.667=0.017$.

Εξάλλου έχουμε (εξ. 4.5):

$$E=-\frac{h^2}{12}(x_6-x_0)\,f''(\xi)=-\frac{1}{9\cdot 12}\cdot(3-1)\cdot\frac{6}{\xi^4}=-\frac{1}{9\xi^4},\ 1<\xi<3\Rightarrow$$
$$\Rightarrow|E|=\frac{1}{9\xi^4}<\frac{1}{9}\cong 0.111$$

Αν έχουμε n υποδιαστήματα, τότε το πλάτος καθενός απ’ αυτά είναι:

$$h=\frac{x_6-x_0}{n}=\frac{3-1}{n}=\frac{2}{n}$$

και το απόλυτο σφάλμα είναι:

$$|E|=\left|-\frac{h^2}{12}(3-1)\,f''(\xi)\right|=\frac{h^2}{6}\cdot\frac{6}{\xi^4}=\frac{h^2}{\xi^4},\ 1<\xi<3$$

Επειδή $\xi^4>1$ είναι $|E|<h^2=\frac{4}{n^2}$ και για να έχουμε $|E|<10^{-4}$ αρκεί να ισχύει:

$$\frac{4}{n^2}\le 10^{-4}\Rightarrow\frac{2}{n}\le 10^{-2}\Rightarrow\frac{n}{2}\ge 100\Rightarrow n\ge 200\,.$$

Αυτό σημαίνει ότι απαιτούνται τουλάχιστον 200 υποδιαστήματα για να έχουμε σφάλμα μικρότερο από 0.0001.

4.2 Κανόνας Simpson

Έστω ότι γνωρίζουμε τις τιμές $f(x_0)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$ μιας συνάρτησης $f(x)$. Το πολυώνυμο $P_2(x)$, που παρεμβάλλει τη συνάρτηση στα σημεία x_0, x_1, x_2 είναι δεύτερου βαθμού. Στην περίπτωση αυτή υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx \cong \int_{x_0}^{x_2} P_2(x)\,dx \tag{4.6}$$

Με τον **απλό κανόνα του Simpson** (ή κανόνα του $\frac{1}{3}$):

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx \cong \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right) \tag{4.7}$$

όπου $y_i = f(x_i)$, $\quad h = \dfrac{x_2 - x_0}{2}$.

Όταν το διάστημα ολοκλήρωσης $[x_0, x_n]$, μπορεί να διαιρεθεί σε $n = 2k$ υποδιαστήματα $\left((x_0, x_2), (x_2, x_4), \ldots, (x_{2k-2}, x_{2k})\right)$, πλάτους h το καθένα $\left(h = \dfrac{x_2 - x_0}{2}\right)$, τότε το ολοκλήρωμα στην εξ. (4.6) υπολογίζεται ως εξής:

$$\int_{x_0}^{x_{2k}} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)\,dx \tag{4.8}$$

Απ’ τις εξ. (4.7) και (4.8) καταλήγουμε στην έκφραση:

$$\int_{x_0}^{x_{2k}} f(x)\,dx \cong \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots + 2y_{2k-2} + 4y_{2k-1} + y_{2k}\right) \tag{4.9}$$

που είναι ο **σύνθετος κανόνας (τύπος) Simpson**.

Η εξ. (4.9) γράφεται και ως εξής:

$$\int_{x_0}^{x_{2k}} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left(y_0 + 4\sum_{\substack{i=1 \\ \beta\eta\mu\alpha\, 2}}^{2k-1} y_i + 2\sum_{\substack{i=2 \\ \beta\eta\mu\alpha\, 2}}^{2k-2} y_i + y_{2k} \right) \tag{4.9.α}$$

Το σφάλμα σε αυτή την προσέγγιση είναι:

$$E = -\frac{h^4}{180}(\beta - \alpha)\, f^{(4)}(\xi),\ \ \xi \in (\alpha, \beta),\ \ \alpha = x_0,\ \ \beta = x_{2k} \tag{4.10}$$

Παράδειγμα Ι: Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I=\int_1^7 f(x)dx$, με τον κανόνα του Simpson, όταν για τη συνάρτηση $f(x)$ δίνεται ο πιο κάτω πίνακας τιμών.

x_i	1	2	3	4	5	6	7
$f(x_i)=y_i$	-1	0	0.5	2	1.5	3	5

Χωρίζουμε το διάστημα $[x_0,x_6]=[1,7]$ σε $n=6$ ίσα υποδιαστήματα με πλάτος $h=\frac{x_6-x_0}{n}=\frac{7-1}{6}=1$. Σύμφωνα με το σύνθετο κανόνα Simpson (εξ. 4.9) ισχύει:

$$I=\int_{x_0}^{x_6} f(x)dx \cong \frac{h}{3}\left(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+2y_4+4y_5+y_6\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(-1+4\cdot 0+2\cdot 0.5+4\cdot 2+2\cdot 1.5+4\cdot 3+5\right)=\frac{28}{3}\cong 9.333$$

Παράδειγμα ΙΙ: Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I=\int_1^2 \ln x dx$, με τον κανόνα του Simpson

(i) Για $n=2$ και

(ii) Για $n=4$ υποδιαστήματα.

Ποιο είναι το μέγιστο σφάλμα σε κάθε προσέγγιση;
Με τι ακρίβεια βρίσκεται το ολοκλήρωμα στη δεύτερη περίπτωση;

(i) Χωρίζουμε το διάστημα ολοκλήρωσης $[1,2]$ στα υποδιαστήματα $[1,1.5]$, $[1.5,2]$, που το καθένα έχει πλάτος $h=0.5$.

Είναι

$$y_0=f(x_0)=f(1)=0,\ y_1=f(1.5)=\ln(1.5)\cong 0.405,\ y_2=f(2)\cong 0.693$$

Σύμφωνα με τον απλό κανόνα Simpson (εξ. 4.7) είναι:

$$I=\int_1^2 \ln x dx \cong \frac{h}{3}\left(y_0+4y_1+y_2\right)=\frac{0.5}{3}\left(0+4\cdot 0.405+0.693\right)=0.3855$$

Το σφάλμα γι' αυτή την προσέγγιση δίνεται απ' την εξ. (4.10):

$$\left.\begin{aligned}&|E|=\left|\frac{h^4}{180}(\beta-\alpha)f^{(4)}(\xi)\right|=\left|\frac{0.5^4}{180}\cdot(2-1)\cdot f^{(4)}(\xi)\right|,\ 1<\xi<2\\ &f'(x)=\frac{1}{x},\ f''(x)=-\frac{1}{x^2},\ f'''(x)=\frac{2}{x^3},\ f^{(4)}(x)=-\frac{6}{x^4}\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow |E|=\frac{1}{480\xi^4}<\frac{1}{480}\cong 0.002$$

(ii) Χωρίζουμε το διάστημα ολοκλήρωσης $[1,2]$ σε 4 υποδιαστήματα $[1,1.25]$, $[1.25,1.5]$, $[1.5,1.75]$, $[1.75,2]$, που το καθένα έχει πλάτος $h=\dfrac{2-1}{4}=0.25$. Οι αντίστοιχες τιμές $y_i = f\left(x_i\right)=\ln x_i$ δίνονται στον πιο κάτω πίνακα:

x_i	1	1.25	1.5	1.75	2
y_i	0	0.223	0.405	0.56	0.693

Σύμφωνα με τον σύνθετο κανόνα Simpson (εξ. 4.9) είναι:

$$I=\int_1^2 \ln x dx \cong \frac{h}{3}\left(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+y_4\right)=$$

$$=\frac{0.25}{3}\left(0+4\cdot 0.223+2\cdot 0.405+4\cdot 0.56+0.693\right)\cong 0.3847$$

Το σφάλμα γι’ αυτή την προσέγγιση είναι (απ’ την εξ. (4.10)):

$$|E|=\left|\frac{h^4}{180}\left(\beta-\alpha\right)f^{(4)}\left(\xi\right)\right|=\frac{0.25^4}{180}\cdot\frac{6}{\xi^4}<\frac{0.25^4}{30}=0.0001$$

Η διαφορά των τιμών του ολκληρώματος όπως υπολογίζονται στις δύο προηγούμενες περιπτώσεις είναι:

$|0.3855-0.3847|=0.0008\leq 0.5\cdot 10^{-2}=0.005$, που σημαίνει ότι στη δεύτερη περίπτωση, το ολκλήρωμα υπολογίστηκε με ακρίβεια δύο δεκαδικών ψηφίων.

<u>**Σημείωση**</u>:

Αν ζητάμε τον υπολογισμό του ολοκληρώματος $I=\int_\alpha^\beta f\left(x\right)dx$, με ***προσέγγιση k δεκαδικών ψηφίων***, με τη μέθοδο Simpson, εργαζόμαστε ως εξής:

- Χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha,\beta]$ σε $n=2$ υποδιαστήματα και υπολογίζουμε το *I*.
- Χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha,\beta]$ σε $n=4$ υποδιαστήματα και υπολογίζουμε το *I*.
- Χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha,\beta]$ σε $n=6$ υποδιαστήματα και υπολογίζουμε το *I* κ.ο.κ.

Σταματάμε όταν η διαφορά δύο διαδοχικών υπολογιζόμενων τιμών τιμών είναι μικρόετερη από $0.5\cdot 10^{-k}$. Η ζητούμενη προσέγγιση είναι το τελευταίο ολοκλήρωμα που έχουμε υπολογίσει.

Παράδειγμα ΙΙΙ: Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I=\int_0^1 e^{x^2}dx$, με τον κανόνα του Simpson και με προσέγγιση τριών δεκαδικών ψηφίων.

(i) Χωρίζουμε το διάστημα ολοκλήρωσης $[0,1]$ σε δύο ίσα υποδιαστήματα $[0,0.5]$, $[0.5,1]$, που το καθένα έχει πλάτος $h=\frac{1-0}{2}=\frac{1}{2}$.

Οι αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης $y_i=f(x_i)=e^{x_i^2}$ δίνονται στον πίνακα:

x_i	0	0.5	1
y_i	1	1.284	2.718

Απ' την εξ. (4.7) βρίσκουμε:

$$I\cong\frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2)=\frac{1}{6}(1+5.136+2.718)=1.47567$$

(ii) Χωρίζουμε το διάστημα ολοκλήρωσης $[0,1]$ σε τέσσερα ίσα υποδιαστήματα $[0,0.25]$, $[0.25,0.5]$, $[0.5,0.75]$, $[0.75,1]$, που το καθένα έχει πλάτος $h=\frac{1-0}{4}=\frac{1}{4}$.

Οι αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης $y_i=f(x_i)=e^{x_i^2}$ δίνονται στον πίνακα:

x_i	0	0.25	0.5	0.75	1
y_i	1	1.064	1.284	1.755	2.718

Απ' την εξ. (4.9) βρίσκουμε:

$$I\cong\frac{h}{3}(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+y_4)=\frac{1}{12}(1+4.256+2.568+7.02+2.718)=1.4635$$

(iii) Χωρίζουμε το διάστημα ολοκλήρωσης $[0,1]$ σε έξι ίσα υποδιαστήματα, που το καθένα έχει πλάτος $h=\frac{1-0}{6}=\frac{1}{6}=0.167$.

Οι αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης $y_i=f(x_i)=e^{x_i^2}$ δίνονται στον πίνακα:

x_i	0	1/6	1/3	1/2	2/3	5/6	1
y_i	1	1.028	1.117	1.284	1.56	2.001	2.718

Απ' την εξ. (4.9) βρίσκουμε:

$$I\cong\frac{h}{3}(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+2y_4+4y_5+y_6)\cong 1.463$$

(iv) Χωρίζουμε το διάστημα ολοκλήρωσης $[0,1]$ σε οκτώ ίσα υποδιαστήματα, που το καθένα έχει πλάτος $h=\frac{1-0}{8}=\frac{1}{8}$.

Οι αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης $y_i = f(x_i) = e^{x_i^2}$ δίνονται στον πίνακα:

x_i	0	0.125	0.25	0.375	0.5	0.625	0.75	0.875	1
y_i	1	1.016	1.064	1.151	1.284	1.478	1.755	2.15	2.718

Απ' την εξ. (4.9) βρίσκουμε:

$$I \cong \frac{h}{3}\left(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+2y_4+4y_5+2y_6+4y_7+y_8\right) \cong 1.4627$$

Παρατηρούμε ότι:

$|1.4627-1.463| = 0.0003 < 0.5\cdot 10^{-3}$, οπότε η τιμή του ολοκληρώματος με προσέγγιση τριών δεκαδικών ψηφίων είναι: $I \cong 1.4627$

4.3 Κανόνας των $\frac{3}{8}$

Όταν το πολυώνυμο παρεμβολής της $f(x)$ είναι τρίτου βαθμού (δηλ. όταν γνωρίζουμε τις τιμές της συνάρτησης $f(x_0),\ f(x_1),\ f(x_2),\ f(x_3)$ σε 4 σημεία x_0, x_1, x_2, x_3 του διαστήματος ολοκλήρωσης) ο προσεγγιστικός τύπος υπολογισμού του ολοκληρώματος

$$I=\int_{x_0}^{x_3} f(x)\,dx \cong \int_{x_0}^{x_3} P_3(x)\,dx \qquad (4.11)$$

είναι ο λεγόμενος **κανόνας Simpson των** $\frac{3}{8}$:

$$I \cong \frac{3h}{8}\left(y_0+3y_1+3y_2+y_3\right) \qquad (4.12)$$

όπου όπου $y_i = f(x_i)$, $\quad h=\frac{x_3-x_0}{3}$.

Στην περίπτωση που το διάστημα ολοκλήρωσης $[x_0, x_n]$ μπορεί να διαιρεθεί σε $n=3k$ ίσα υποδιαστήματα, πλάτους $h=\frac{x_n-x_0}{3k}$ το καθένα, η εξ. (4.12) γενικεύεται **στο σύνθετο κανόνα των** $\frac{3}{8}$:

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_{3k}} f(x)\,dx \cong \frac{3h}{8}\big(&y_0+3y_1+3y_2+2y_3+3y_4+3y_5+2y_6+3y_7+\ldots\\ &\ldots+2y_{3k-3}+3y_{3k-2}+3y_{3k-1}+y_{3k}\big)\end{aligned} \qquad (4.13)$$

Παρατήρηση:

Στην εξ. (4.12), οι ακραίοι όροι του αθροίσματος έχουν συντελεστή 1, οι ενδιάμεσοι όροι με δείκτη πολλαπλάσιο του 3 έχουν συντελεστή 2, ενώ όλοι οι υπόλοιποι όροι έχουν συντελεστή 3.

Το σφάλμα της προσέγγισης αυτής είναι:

$$E = -\frac{h^4}{80}(\beta - \alpha) f^{(4)}(\xi), \ \xi \in (\alpha, \beta), \ \alpha = x_0, \ \beta = x_{3k} \tag{4.14}$$

<u>*Παράδειγμα I*</u>: Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int_0^{1.5} e^{x^2} dx$, με τον κανόνα του Simpson των $\frac{3}{8}$

(iii) Για $n = 3$ και

(iv) Για $n = 6$ υποδιαστήματα.

Ποιο είναι το μέγιστο σφάλμα σε κάθε προσέγγιση;

(i) Χωρίζουμε το διάστημα ολοκλήρωσης $[0,1.5]$ σε 3 ίσα υποδιαστήματα, που το καθένα έχει πλάτος $h = \frac{1.5-0}{3} = \frac{1}{2} = 0.5$.

Οι αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης $y_i = f(x_i) = e^{x_i^2}$ δίνονται στον πίνακα:

x_i	0	0.5	1	1.5
y_i	1	1.284	2.718	9.488

Απ' την εξ. (4.12) βρίσκουμε:

$$I = \int_{x_0}^{x_3} f(x)dx \cong \frac{3h}{8}(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3) =$$

$$= \frac{3}{8} \cdot 0.5 \cdot (1 + 3.852 + 8.154 + 9.488) = 4.217625$$

(ii) Χωρίζουμε το διάστημα ολοκλήρωσης $[0,1.5]$ σε 6 ίσα υποδιαστήματα, που το καθένα έχει πλάτος $h = \frac{1.5-0}{6} = \frac{1.5}{6} = 0.25$.

Οι αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης $y_i = f(x_i) = e^{x_i^2}$ δίνονται στον πίνακα:

x_i	0	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5
y_i	1	1.064	1.284	1.755	2.718	4.771	9.488

Απ' την εξ. (4.13) βρίσκουμε:

$$I=\int_{x_0}^{x_6} f(x)\,dx \cong \frac{3h}{8}\left(y_0+3y_1+3y_2+2y_3+3y_4+3y_5+y_6\right)=$$
$$=\frac{3}{8}\cdot 0.25\cdot\left(1+3.192+3.852+3.51+8.154+14.313+9.488\right)\cong 4.07897$$

Το σφάλμα της προσέγγισης δίνεται απ' την εξ. (4.14):

$$E=-\frac{h^4}{80}(\beta-\alpha)\,f^{(4)}(\xi),\ \ 0<\xi<1.5$$

Είναι ακόμα:

$$f'(x)=2xe^{x^2}\Rightarrow f''(x)=2e^{x^2}\left(1+2x^2\right)\Rightarrow f'''(x)=4xe^{x^2}\left(3+2x^2\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow f^{(4)}(x)=4e^{x^2}\left(3+12x^2+4x^4\right)$$

- Για $h=0.5$ έχουμε:

$$|E|=\frac{0.5^4}{80}\cdot(1.5-0)\cdot f^{(4)}(\xi)=\frac{0.0625}{80}\cdot 1.5\cdot 4\cdot e^{\xi^2}\left(3+12\cdot\xi^2+4\cdot\xi^4\right)<$$
$$<\frac{0.0625}{80}\cdot 1.5\cdot 4\cdot e^{1.5^2}\left(3+12\cdot 1.5^2+4\cdot 1.5^4\right)\cong 2.235$$

- Για $h=0.25$ έχουμε:

$$|E|=\frac{0.25^4}{80}\cdot(1.5-0)\cdot f^{(4)}(\xi)=\frac{0.00390625}{80}\cdot 1.5\cdot 4\cdot e^{\xi^2}\left(3+12\cdot\xi^2+4\cdot\xi^4\right)<$$
$$<\frac{0.00390625}{80}\cdot 1.5\cdot 4\cdot e^{1.5^2}\left(3+12\cdot 1.5^2+4\cdot 1.5^4\right)\cong 0.139$$

Παράδειγμα ΙΙ:

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I=\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx$, με τον κανόνα του Simpson των $\frac{3}{8}$, χρησιμοποιώντας 3 υποδιαστήματα. Να συγκριθει η προσεγγιστική τιμή με την ακριβή τιμή του ολοκληρώματος.

Χωρίζουμε το διάστημα ολοκλήρωσης $[0,1]$ σε 3 ίσα υποδιαστήματα, που το καθένα έχει πλάτος $h=\frac{1-0}{3}=\frac{1}{3}$.

Οι αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης $y_i=f(x_i)=\frac{1}{x_i^2+1}$ δίνονται στον πίνακα:

x_i	0	1/3	2/3	1
y_i	1	9/10	9/13	1/2

Απ' την εξ. (4.12) βρίσκουμε:

$$I = \int_0^1 f\left(x\right)dx \cong \frac{3h}{8}\left(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3\right) =$$

$$= \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(1 + \frac{9}{10} + \frac{9}{13} + \frac{1}{2}\right) \cong 0.3865$$

Η ακριβής τιμή του ολοκληρώματος είναι:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx = \arctan\left(x\right)\Big|_0^1 = \arctan\left(1\right) - \arctan\left(0\right) = \frac{\pi}{4} - 0 \cong 0.785$$