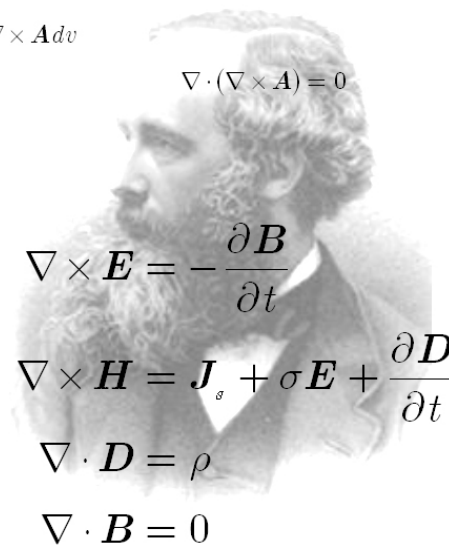
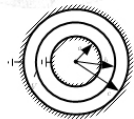
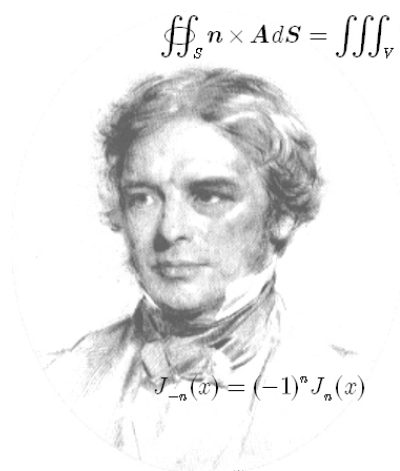


# ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ



# **ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ**

I	ΟΙ ΒΑΣΙΚΟΙ ΝΟΜΟΙ ΤΟΥ ΗΛΕΚΤΡΟΣΤΑΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ
---	---

ΟΡΙΣΜΟΙ

Σχετική διηλεκτρική σταθερά	$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$
Μοναδιαίο διάνυσμα σε ευθύγραμμο τμήμα AB με φορά από το A στο B	$\mathbf{e}_{AB} = \frac{\mathbf{R}_{AB}}{R_{AB}}$

<b>I.1</b>	Φορτίο γραμμής μήκους $l$ με διανεμημένο φορτίο γραμμικής πυκνότητας $\rho_l$	$q_l = \int_l dq_l = \int_l \rho_l dl$
<b>I.2</b>	Φορτίο επιφάνειας $S$ με διανεμημένο φορτίο επιφανειακής πυκνότητας $\rho_s$	$q_s = \iint_S dq_s = \iint_S \rho_s dS$
<b>I.3</b>	Φορτίο όγκου $V$ με διανεμημένο φορτίο χωρικής πυκνότητας $\rho$	$q_V = \iiint_V dq_V = \iiint_V \rho dV$

ΔΥΝΑΜΕΙΣ – ΕΡΓΟ

<b>I.4</b>	Δύναμη ανάμεσα στα σημειακά φορτία $q_A$ και $q_B$ σε μέσο διηλεκτρικής σταθεράς $\epsilon$ , όπου $\mathbf{R}_{AB}$ η διανυσματική απόσταση των φορτίων (Νόμος <i>Coulomb</i> )	$\mathbf{F}_{AB} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_A q_B}{R_{AB}^3} \mathbf{R}_{AB} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_A q_B}{R_{AB}^2} \mathbf{e}_{AB}$
<b>I.5</b>	Συνολική δύναμη που ασκείται στο φορτίο $q$ από σύστημα φορτίων ( $\mathbf{R}_i = \mathbf{r} - \mathbf{r}_i$ )	$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = \frac{q}{4\pi\epsilon} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{R_i^3} \mathbf{R}_i$
<b>I.6</b>	Δύναμη που ασκείται σε σημειακό φορτίο $q$ από γραμμικό φορτίο πυκνότητας $\rho_l$ ( $\mathbf{R}$ : διανυσματική απόσταση του φορτίου $q$ από το στοιχείο $dl'$ )	$\mathbf{F}_l = \frac{q}{4\pi\epsilon} \int_{l'} \frac{\rho_l \mathbf{R}}{R^3} dl'$
<b>I.7</b>	Δύναμη που ασκείται σε σημειακό φορτίο $q$ από επιφανειακό φορτίο πυκνότητας $\rho_s$	$\mathbf{F}_s = \frac{q}{4\pi\epsilon} \iint_{s'} \frac{\rho_s \mathbf{R}}{R^3} dS'$
<b>I.8</b>	Δύναμη που ασκείται σε σημειακό φορτίο $q$ από χωρικό φορτίο πυκνότητας $\rho$	$\mathbf{F}_V = \frac{q}{4\pi\epsilon} \iiint_{V'} \frac{\rho \mathbf{R}}{R^3} dV'$
<b>I.9</b>	Έργο κατά τη μετακίνηση σημειακού φορτίου $q$ από το σημείο A στο σημείο B	$W_{AB} = \int_A^B dW = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = q \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$

I.10	Έργο της δύναμης του πεδίου σημειακού φορτίου $Q$ για τη μετακίνηση σημειακού φορτίου $q$ από το σημείο $A$ στο σημείο $B$	$W_{AB} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon} \int_A^B \frac{dr}{r^2} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon} \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$
------	--	---

**ΗΛΕΚΤΡΙΚΗ ΠΕΔΙΑΚΗ ΕΝΤΑΣΗ – ΒΑΘΜΩΤΟ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ**

I.11	Ορισμός ηλεκτρικής πεδιακής έντασης	$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q}$
I.12	Νόμος του αστροβίλου του ηλεκτροστατικού πεδίου	$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0, \text{ (ολοκληρωτική μορφή)}$ $\nabla \times \mathbf{E} = 0, \text{ (διαφορική μορφή)}$
I.13	Διαφορά δυναμικού από το σημείο $A$ στο σημείο $B$	$U_{AB} = \frac{W_{AB}}{q} = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$
I.14	Βαθμωτό ηλεκτρικό δυναμικό σημείου $P$ ως προς το σημείο αναφοράς των δυναμικών $K$	$\phi_P = U_{PK} = \frac{W_{PK}}{q} = \int_P^K \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$
I.15	Διαφορά δυναμικού ανάμεσα στα σημεία $A$ και $B$	$U_{AB} = \phi_A - \phi_B = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$
I.16	Συσχέτιση ηλεκτρικής πεδιακής έντασης και συνάρτησης δυναμικού	$\mathbf{E} = -\nabla\phi$
I.17	Βαθμωτό ηλεκτρικό δυναμικό πεδίου που δημιουργείται από σημειακό φορτίο $Q$	$\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_K} \right) \xrightarrow{r_K \rightarrow \infty} \phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon r}$
I.18	Βαθμωτό ηλεκτρικό δυναμικό πεδίου που δημιουργείται από σημειακά και διανεμημένα ηλεκτρικά φορτία	$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left( \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{R_i} + \int_{V'} \frac{\rho_l dV'}{R} + \iint_{S'} \frac{\rho_s dS'}{R} + \iiint_{V'} \frac{\rho dV'}{R} \right)$
I.19	Διαφορική εξίσωση δυναμικής γραμμής	$\mathbf{E} \times d\mathbf{l} = 0$
I.20	Διαφορική εξίσωση δυναμικής γραμμής σε καρτεσιανές συντεταγμένες	$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}$
I.21	Διαφορική εξίσωση δυναμικής γραμμής σε κυλινδρικές συντεταγμένες	$\frac{d\rho}{E_\rho} = \frac{\rho d\varphi}{E_\varphi} = \frac{dz}{E_z}$
I.22	Διαφορική εξίσωση δυναμικής γραμμής σε σφαιρικές συντεταγμένες	$\frac{dr}{E_r} = \frac{rd\theta}{E_\theta} = \frac{r \sin\theta d\varphi}{E_\varphi}$
I.23	Παραμετρική εξίσωση δυναμικών γραμμών πεδίου σημειακών φορτίων $q_1, q_2, \dots, q_n$ , τοποθετημένων στην ίδια ευθεία. $\theta_i$ η γωνία που συνδέει την ευθεία μεταξύ του φορτίου $q_i$ και του σημείου παρατήρησης με την ευθεία των φορτίων.	$\sum_{i=1}^n q_i \cos\theta_i = C$ $C$ : παραμετρική σταθερά

**ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΚΕΝΤΡΟ ΒΑΡΟΥΣ – ΠΟΛΥΠΟΛΙΚΟ ΑΝΑΠΤΥΓΜΑ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ**

I.24	Θέση του ηλεκτρικού κέντρου βάρους (ΗΚΒ) ενός συστήματος σημειακών και διανεμημένων φορτίων ( $\alpha$ : διανυσματική απόσταση του ΗΚΒ από την αρχή των αξόνων)	$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^n q_i \mathbf{r}_i' + \int_{l'} \rho_l \mathbf{r}' dl' + \iint_{S'} \rho_s \mathbf{r}' dS' + \iiint_{V'} \rho \mathbf{r}' dV'}{\sum_{i=1}^n q_i + \int_{l'} \rho_l dl' + \iint_{S'} \rho_s dS' + \iiint_{V'} \rho dV'}$
I.25	Δυναμικό του πεδίου που δημιουργείται από σύστημα φορτίων σε απομακρυσμένο σημείο που απέχει απόσταση $R_0$ από το ηλεκτρικό κέντρο βάρους του συστήματος	$\phi = \frac{\sum_{i=1}^n q_i + \int_{l'} \rho_l dl' + \iint_{S'} \rho_s dS' + \iiint_{V'} \rho dV'}{4\pi\epsilon R_0}$
I.26	Διπολική ροπή ηλεκτρικού διπόλου, (συστήματος δύο φορτίων $+q$ και $-q$ που βρίσκονται σε απόσταση $a$ ). Θετική φορά του $\alpha$ από το $-q$ προς το $+q$ .	$\mathbf{M} = q\mathbf{a}$
I.27	Ηλεκτρική διπολική ροπή συστήματος φορτίων	$\mathbf{p} = \mathbf{M} = \sum_{i=1}^n q_i \mathbf{r}_i$
I.28	Μονοπολικός όρος αναπτύγματος του δυναμικού	$\phi_m(\mathbf{r}) = \frac{q_{o\lambda}}{4\pi\epsilon r} \quad (\text{av } q_{o\lambda} \neq 0)$
I.29	Διπολικός όρος αναπτύγματος δυναμικού	$\phi_d = \frac{\mathbf{M} \cdot \mathbf{r}_0}{4\pi\epsilon r^2} = \frac{\mathbf{M} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon r^3} \quad (\text{av } q_{o\lambda} = 0)$
I.30	Δυναμικό του σημειακού ηλεκτρικού διπόλου ( $a \rightarrow 0$ και $q \rightarrow \infty$ . Δίπολο στον άξονα $z$ με κέντρο στην αρχή των αξόνων)	$\phi = \frac{\mathbf{M} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon r^3} = -\frac{1}{4\pi\epsilon} \mathbf{M} \cdot \nabla \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{q\alpha \cos\theta}{4\pi\epsilon r^2}$
I.31	Τετραπολικός όρος αναπτύγματος δυναμικού	$\phi_q(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon r^3} \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{2} \left[ 3 \left( \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_i}{r} \right)^2 - r_i^2 \right] \right\} \quad (\text{av } q_{o\lambda} = 0, \mathbf{M} = 0)$ $= \frac{1}{4\pi\epsilon r^3} \left[ \sum_{i=1}^n \frac{q_i r_i^2}{2} (3 \cos^2 \theta_i - 1) \right]$
I.32	Δυναμικό του γραμμικού ή αξονικού τετραπόλου	$\phi = \frac{q\alpha^2}{4\pi\epsilon r^3} (3 \cos^2 \theta - 1)$

**ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ GAUSS – ΔΙΗΛΕΚΤΡΙΚΗ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ**

I.33	Διηλεκτρική μετατόπιση ή πυκνότητα ηλεκτρικής ροής	$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$
I.34	Διηλεκτρική μετατόπιση σε ανισότροπο μέσο	$D_x = \epsilon_{xx} E_x + \epsilon_{xy} E_y + \epsilon_{xz} E_z$ $D_y = \epsilon_{yx} E_x + \epsilon_{yy} E_y + \epsilon_{yz} E_z$ $D_z = \epsilon_{zx} E_x + \epsilon_{zy} E_y + \epsilon_{zz} E_z$ $\epsilon_{xy} = \epsilon_{yx}, \epsilon_{xz} = \epsilon_{zx}, \epsilon_{yz} = \epsilon_{zy}$

<b>I.35</b>	Ηλεκτρική ροή που διέρχεται από επιφάνεια $S$ , όπου $\mathbf{n}$ το κάθετο στην επιφάνεια μοναδιαίο διάνυσμα	$N = \iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS$
<b>I.36</b>	Στερεά γωνία με την οποία φαίνεται η επιφάνεια $S$ από απόσταση $\mathbf{r}$	$\Omega = \iint_S \frac{\mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}}{r^3}$
<b>I.37</b>	Στοιχειώδης ροή που διέρχεται από το στοιχείο επιφάνειας $dS$ , το οποίο φαίνεται υπό στερεά γωνία $d\Omega$ από το σημειακό φορτίο $Q$	$dN = \frac{Q}{4\pi} d\Omega$
<b>I.38</b>	Νόμος του Gauss	$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_{\text{ολ}}, \text{ (ολοκληρωτική μορφή)}$ $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \text{ (διαφορική μορφή)}$
<b>I.39</b>	Οριακές συνθήκες σε διαχωριστική επιφάνεια δύο μέσων. $\mathbf{n}_0$ μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στη διαχωριστική επιφάνεια με φορά από το μέσο 1 προς το μέσο 2	$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n}_0 = \rho_s \Rightarrow D_{n2} - D_{n1} = \rho_s$ $\mathbf{n}_0 \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0 \Rightarrow E_{t1} = E_{t2}$

II	ΑΓΩΓΟΙ, ΠΥΚΝΩΤΕΣ, ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ
----	---

ΑΓΩΓΙΜΑ ΣΩΜΑΤΑ

II.1	Ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό ενός αγωγού σε ηλεκτροστατική ισορροπία	$\mathbf{E} = 0, \mathbf{D} = 0, \rho = 0$
II.2	Δυναμικό σε κάθε σημείο του αγωγού	$\phi = const.$
II.3	Ηλεκτρική πεδιακή ένταση στην επιφάνεια ενός αγωγού ( $\mathbf{n}_0$ το προς τα έξω κάθετο στην επιφάνεια του αγωγού μοναδιαίο διάνυσμα)	$\mathbf{E} = E_n \mathbf{n}_0$
II.4	Διηλεκτρική μετατόπιση στην επιφάνεια ενός αγωγού	$\mathbf{D} = D_n \mathbf{n}_0 = Dn_0 = \rho_s \mathbf{n}_0$
II.5	Θεώρημα αμοιβαιότητας του Green για σημειακά φορτία (1 <sup>η</sup> κατάσταση: $\phi_i, q_i$ , 2 <sup>η</sup> κατάσταση: $\phi'_i, q'_i$ )	$\sum_{i=1}^n \phi_i q'_i = \sum_{i=1}^n \phi'_i q_i$
II.6	Θεώρημα αμοιβαιότητας του Green για σύστημα $n$ αγωγών	$\sum_{i=1}^n \phi_i Q'_i = \sum_{i=1}^n \phi'_i Q_i$
II.7	Γενική διαφορική εξίσωση της συνάρτησης δυναμικού (εξίσωση Poisson)	$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon}$
II.8	Διαφορική εξίσωση της συνάρτησης δυναμικού σε χώρο χωρίς χωρικά φορτία (εξίσωση Laplace)	$\nabla^2 \phi = 0$

ΠΥΚΝΩΤΕΣ – ΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΤΑ

II.9	Χωρητικότητα πυκνωτή	$C = \frac{Q}{U} = \frac{\iint_{S_A} \epsilon E dS}{\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}$
II.10	Χωρητικότητα σφαιρικού πυκνωτή με ακτίνα εσωτερικού οπλισμού $a$ και ακτίνα εξωτερικού οπλισμού $b$	$C = 4\pi\epsilon \frac{ab}{b-a}$
II.11	Χωρητικότητα μεμονωμένου σφαιρικού αγωγού ακτίνας $a$ μέσα σε απέραντο διηλεκτρικό ( $b \rightarrow \infty$ )	$C = 4\pi\epsilon a$

<b>Π.12</b>	Χωρητικότητα κυλινδρικού πυκνωτή με ακτίνα εσωτερικού αγωγού $a$ και ακτίνα εξωτερικού αγωγού $b$	$C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{b}{a}}$
<b>Π.13</b>	Χωρητικότητα επίπεδου πυκνωτή ( $S$ : επιφάνεια πλακών, $d$ : απόσταση πλακών)	$C = \epsilon \frac{S}{d}$
<b>Π.14</b>	Ισοδύναμη χωρητικότητα πυκνωτών σε παράλληλη σύνδεση	$C = \sum_{i=1}^n C_i$
<b>Π.15</b>	Ισοδύναμη χωρητικότητα πυκνωτών συνδεδεμένων σε σειρά	$C = \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} \right)^{-1}$
<b>Π.16</b>	Σχέσεις μετατροπής διάταξης πυκνωτών από αστέρα σε τρίγωνο ( $C_a, C_b, C_c$ : χωρητικότητες συνδεσμολογίας τριγώνου)	$C_a = \frac{C_2 C_3}{C_1 + C_2 + C_3} \quad C_b = \frac{C_1 C_3}{C_1 + C_2 + C_3}$ $C_c = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2 + C_3}$
<b>Π.17</b>	Σχέσεις μετατροπής διάταξης πυκνωτών από τρίγωνο σε αστέρα ( $C_1, C_2, C_3$ : χωρητικότητες συνδεσμολογίας αστέρα)	$C_1 = \frac{C_a C_b + C_b C_c + C_a C_c}{C_a}$ $C_2 = \frac{C_a C_b + C_b C_c + C_a C_c}{C_b}$ $C_3 = \frac{C_a C_b + C_b C_c + C_a C_c}{C_c}$

**ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΓΩΓΙΜΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ**

<b>Π.18</b>	Γραμμικές σχέσεις δυναμικών και φορτίων των αγωγών ενός συστήματος	$\phi_1 = p_{11}Q_1 + p_{12}Q_2 + \dots + p_{1n}Q_n$ $\phi_2 = p_{21}Q_1 + p_{22}Q_2 + \dots + p_{2n}Q_n$ ..... $\phi_n = p_{n1}Q_1 + p_{n2}Q_2 + \dots + p_{nn}Q_n$
<b>Π.19</b>	Συντελεστές δυναμικού ( $\text{Farad}^{-1}$ )	$p_{ij} \geq 0, \quad p_{ij} = p_{ji}$
<b>Π.20</b>	Γραμμικές σχέσεις φορτίων και δυναμικών των αγωγών ενός συστήματος	$Q_1 = c_{11}\phi_1 + c_{12}\phi_2 + \dots + c_{1n}\phi_n$ $Q_2 = c_{21}\phi_1 + c_{22}\phi_2 + \dots + c_{2n}\phi_n$ ..... $Q_n = c_{n1}\phi_1 + c_{n2}\phi_2 + \dots + c_{nn}\phi_n$
<b>Π.21</b>	Συντελεστές χωρητικότητας ( $c_{ii}$ ) και επαγωγής ( $c_{ij}, i \neq j$ )	$c_{ii} > 0, \quad c_{ij} = c_{ji} \leq 0$
<b>Π.22</b>	Συνολικό φορτίο κλειστού συστήματος	$\sum_{i=1}^n Q_i = 0$
<b>Π.23</b>	Συντελεστές χωρητικότητας σε κλειστό σύστημα	$\sum_{i=1}^n c_{ij} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$



<b>II.24</b>	Ορισμός μερικών χωρητικότητων	$C_{ij} = -c_{ij} (i \neq j), C_{ii} = c_{i1} + c_{i2} + \dots + c_{in} = \sum_{j=1}^n c_{ij}$
<b>II.25</b>	Γραμμικές σχέσεις φορτίων και δυναμικών ενός συστήματος με συντελεστές τις μερικές χωρητικότητες του συστήματος	$Q_1 = C_{11}\phi_1 + C_{12}(\phi_1 - \phi_2) + \dots + C_{1n}(\phi_1 - \phi_n)$ $Q_2 = C_{21}(\phi_2 - \phi_1) + C_{22}\phi_2 + \dots + C_{2n}(\phi_2 - \phi_n)$ ..... $Q_n = C_{n1}(\phi_n - \phi_1) + C_{n2}(\phi_n - \phi_2) + \dots + C_{nn}\phi_n$
<b>II.26</b>	Μερικές χωρητικότητες σε κλειστό σύστημα	$C_{ii} = 0$

**ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ**

<b>II.27</b>	Δυναμική ενέργεια πεδίου σημειακών φορτίων	$W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \phi_i$
<b>II.28</b>	Δυναμική ενέργεια πεδίου χωρικά κατανεμημένου φορτίου	$W_e = \frac{1}{2} \iiint_V \phi \rho dV$
<b>II.29</b>	Δυναμική ενέργεια πεδίου επιφανειακά κατανεμημένου φορτίου	$W_e = \frac{1}{2} \iint_S \phi \rho_s dS$
<b>II.30</b>	Ενέργεια πεδίου συστήματος $n$ αγωγών	$W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \phi_i Q_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_{ij} Q_i Q_j = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \phi_i \phi_j$
<b>II.31</b>	Ενέργεια πυκνωτή	$W = \frac{1}{2} QU = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$
<b>II.32</b>	Πυκνότητα ενέργειας σε γραμμικό και ισότροπο μέσο	$w_e = \frac{1}{2} \epsilon \mathbf{E}^2 = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{2} \frac{\mathbf{D}^2}{\epsilon}$
<b>II.33</b>	Συνολική ενέργεια πεδίου	$W_e = \iiint w_e dV = \frac{1}{2} \iiint \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dV$ $= \frac{1}{2} \iiint \epsilon \mathbf{E}^2 dV = \frac{1}{2} \iiint \frac{\mathbf{D}^2}{\epsilon} dV$
<b>II.34</b>	Πυκνότητα ενέργειας πεδίου σε μη γραμμικό μέσο	$w_e = \int_0^D \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D}$

**ΗΛΕΚΤΡΟΣΤΑΤΙΚΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ – ΠΙΕΣΗ**

<b>II.35</b>	Ηλεκτροστατική πίεση στην επιφάνεια φορτισμένου αγωγού	$\mathbf{p} = \frac{d\mathbf{F}}{dS} = w_e \mathbf{n}_0 = \frac{1}{2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D})\mathbf{n}_0 = \frac{1}{2}\epsilon E^2 \mathbf{n}_0 = \frac{1}{2} \frac{D^2}{\epsilon} \mathbf{n}_0 = \frac{\rho_s^2}{2\epsilon} \mathbf{n}_0$
<b>II.36</b>	Συνολική δύναμη που ασκεί το πεδίο πάνω σε φορτισμένο αγωγό	$\mathbf{F} = \oiint_S \mathbf{p} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{2} \oiint_S \epsilon E^2 dS = \frac{1}{2\epsilon} \oiint_S \rho_s^2 dS$
<b>II.37</b>	Οι κατά $x, y, z$ συνιστώσες της δύναμης $\mathbf{F}_i$ που ασκείται στον $i$ -στό αγωγό ενός συστήματος αγωγών ( $W_e$ η αποθηκευμένη ενέργεια του πεδίου, $W_s$ η ενέργεια που καταβάλλουν οι τυχόν εξωτερικές ηλεκτρικές πηγές)	$F_{i,x} = \frac{\partial W_s}{\partial x_i} - \frac{\partial W_e}{\partial x_i}, F_{i,y} = \frac{\partial W_s}{\partial y_i} - \frac{\partial W_e}{\partial y_i},$ $F_{i,z} = \frac{\partial W_s}{\partial z_i} - \frac{\partial W_e}{\partial z_i}$
<b>II.38</b>	$x$ -συνιστώσα της δύναμης μεταξύ απομονωμένων αγωγών (με σταθερά φορτία)	$F_{i,x} = -\frac{\partial W_e}{\partial x_i}, F_{i,x} = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n Q_j \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i},$ $F_{i,x} = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial p_{jk}}{\partial x_i} Q_j Q_k$
<b>II.39</b>	Μεταβολή της ενέργειας σε σύστημα αγωγών με σταθερά δυναμικά	$\delta W_e = \delta W_m = \frac{1}{2} \delta W_s = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \phi_j \delta Q_j$
<b>II.40</b>	$x$ -συνιστώσα της δύναμης μεταξύ αγωγών με σταθερά δυναμικά	$F_{i,x} = \frac{\partial W_e}{\partial x} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \phi_j \frac{\partial Q_j}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial c_{jk}}{\partial x_i} \phi_j \phi_k$
<b>II.41</b>	$x$ -συνιστώσα της δύναμης στους οπλισμούς πυκνωτή σε σταθερή τάση ή με σταθερό φορτίο	$F_x = \frac{1}{2} U^2 \frac{\partial C}{\partial x}$
<b>II.42</b>	Δύναμη σε διηλεκτρική πλάκα που εισέρχεται σε πυκνωτή ( $t$ το πλάτος των οπλισμών, $\epsilon$ η διηλεκτρική σταθερά της πλάκας, $d$ το ύψος της πλάκας)	$\mathbf{F} = \frac{\delta W_m}{\delta x} \mathbf{x}_0 = \frac{1}{2}(\epsilon - \epsilon_0) \frac{U^2 t}{d} \mathbf{x}_0$
<b>II.43</b>	Πίεση σε διηλεκτρική πλάκα που εισέρχεται σε πυκνωτή ( $t$ το πλάτος των οπλισμών, $\epsilon$ η διηλεκτρική σταθερά της πλάκας, $d$ το ύψος της πλάκας)	$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{F}}{td} = \frac{1}{2}(\epsilon - \epsilon_0) \left(\frac{U}{d}\right)^2 \mathbf{x}_0 = \frac{1}{2}(\epsilon - \epsilon_0) E^2 \mathbf{x}_0$

<b>III</b>	<b>Η ΥΛΗ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ</b>
------------	------------------------

**ΠΟΛΩΣΗ ΔΙΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ**

<b>III.1</b>	Συνολική ροπή των διπόλων που περιέχονται στον όγκο $\delta V$ , όπου $N$ ο αριθμός διπόλων ανά μονάδα όγκου και $\mathbf{p}_i$ η διπολική ροπή του $i$ -στού διπόλου	$\mathbf{p}_t = \sum_{i=1}^{N\delta V} \mathbf{p}_i$
<b>III.2</b>	Το διάνυσμα της πόλωσης ή πόλωση $\mathbf{P}$	$\mathbf{P} = \lim_{\delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\delta V} \sum_{i=1}^{N\delta V} \mathbf{p}_i$
<b>III.3</b>	Συνολική διπολική ροπή απειροστού όγκου $dV$ διηλεκτρικού	$d\mathbf{p} = \mathbf{P}(x, y, z)dV$
<b>III.4</b>	Δυναμικό που οφείλεται στα δέσματα φορτία των διπόλων του διηλεκτρικού που καταλαμβάνει όγκο $V'$ και περικλείεται από την κλειστή επιφάνεια $S'$	$\phi_b = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( -\iiint_{V'} \frac{\nabla' \cdot \mathbf{P}}{R} dV' + \iint_{S'} \frac{\mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}'}{R} \right)$
<b>III.5</b>	Πυκνότητα ισοδύναμου συστήματος φορτίων χωρικά διανεμημένων στον κενό ύλης όγκο $V'$	$\rho_b = -\nabla \cdot \mathbf{P}$
<b>III.6</b>	Πυκνότητα ισοδύναμου συστήματος φορτίων επιφανειακά διανεμημένων στην επιφάνεια $S'$	$\rho_{sb} = P_n = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}_0$
<b>III.7</b>	Το δυναμικό στον χώρο ισούται με το άθροισμα του δυναμικού των αληθινών φορτίων και των φορτίων πόλωσης	$\phi = \phi_0 + \phi_b$
<b>III.8</b>	Το δυναμικό πεδίου που οφείλεται σε μη ομογενές διηλεκτρικό. $P_n$ και $P'_n$ είναι οι κάθετες συνιστώσες του διανύσματος της πόλωσης στις δύο όψεις των διαχωριστικών επιφανειών των περιοχών $S'$	$\phi_b = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ -\iiint_{V'} \frac{\nabla \cdot \mathbf{P}}{R} dV' + \iint_{S'} \frac{(P_n + P'_n)}{R} dS' \right]$
<b>III.9</b>	Πυκνότητα φορτίων πόλωσης στη διαχωριστική επιφάνεια δύο διαφορετικών διηλεκτρικών υλικών (Η φορά των $\mathbf{P}, \mathbf{P}', \mathbf{n}_0, \mathbf{n}'_0$ από το αντίστοιχο μέσο προς τη διαχωριστική επιφάνεια).	$\rho_{sb} = P_n + P'_n = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}_0 + \mathbf{P}' \cdot \mathbf{n}'_0$
<b>III.10</b>	Δυναμικό υφιστάμενου πεδίου κατά την παρουσία διηλεκτρικού (όπου $\rho$ και $\rho_s$ είναι οι πυκνότητες των αληθινών χωρικών και επιφανειακών φορτίων)	$\phi = \phi_0 + \phi_b = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \iiint_{V'} \frac{(\rho + \rho_b)}{R} dV' + \iint_{S'} \frac{(\rho_s + \rho_{sb})}{R} dS' \right]$
<b>III.11</b>	Πυκνότητα ισοδύναμου συστήματος χωρικά διανεμημένων φορτίων (ελεύθερα φορτία)	$\rho_f = \rho + \rho_b$

III.12	Πυκνότητα ισοδύναμου συστήματος επιφανειακά διανεμημένων φορτίων	$\rho_{sf} = \rho_s + \rho_{sb}$
III.13	Το σύνολο των φορτίων πόλωσης είναι ίσο με μηδέν	$Q_b = 0$

**ΤΑ ΠΕΔΙΑΚΑ ΜΕΓΕΘΗ ΣΕ ΔΙΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΜΕΣΑ**

III.14	Ο νόμος του Gauss σε διηλεκτρικά μέσα	$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0}(\rho + \rho_b) \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$
III.15	Το διάνυσμα της διηλεκτρικής μετατόπισης	$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$
III.16	Σχέσεις μεταξύ των διανυσμάτων $\mathbf{P}$ , $\mathbf{E}$ , $\mathbf{D}$ σε γραμμικά ισότροπα διηλεκτρικά υλικά, (όπου $x_e$ η ηλεκτρική (ή διηλεκτρική) επιδεκτικότητα του υλικού)	$\mathbf{P} = x_e \epsilon_0 \mathbf{E}$ $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + x_e \epsilon_0 \mathbf{E} = \epsilon_0(1 + x_e) \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E}$
III.17	Σχετική διηλεκτρική σταθερά του υλικού	$\epsilon_r = 1 + x_e$
III.18	Σχέση μεταξύ των διανυσμάτων $\mathbf{D}$ και $\mathbf{P}$	$\mathbf{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \mathbf{E} = \frac{1 + x_e}{x_e} \mathbf{P} = \frac{\epsilon_r}{x_e} \mathbf{P} = \frac{\epsilon_r}{\epsilon_r - 1} \mathbf{P} = \frac{\epsilon}{\epsilon - \epsilon_0} \mathbf{P}$

**ΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΣΤΗ ΔΙΑΧΩΡΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΔΥΟ ΔΙΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ**

III.19	Οριακές συνθήκες στη διαχωριστική επιφάνεια για την ηλεκτρική πεδιακή ένταση και τη διηλεκτρική μετατόπιση (φορά του διανύσματος $\mathbf{n}_0$ από το μέσο 1 προς το μέσο 2)	$E_{t_1} = E_{t_2}$ $D_{n_2} - D_{n_1} = \rho_s \Rightarrow \epsilon_0(E_{n_2} - E_{n_1}) = \rho_{sf}$
III.20	Οριακή συνθήκη στη διαχωριστική επιφάνεια για την πόλωση	$P_{n_1} - P_{n_2} = \rho_{sb}$
III.21	Οριακές συνθήκες στην περίπτωση που το μέσο 1 είναι αγωγίμο, ενώ το μέσο 2 διηλεκτρικό με διηλεκτρική σταθερά $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$	$D_n = \rho_s$ $P_n = -\rho_{sb}$ $\epsilon_0 E_n = \rho_{sf}$
III.22	Σχέση μεταξύ $\rho_{sb}$ και $\rho_s$	$\rho_{sb} = -P_n = -\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon} D_n = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \rho_s$
III.23	Σχέση μεταξύ $\rho_{sf}$ και $\rho_s$	$\rho_{sf} = \epsilon_0 \frac{D_n}{\epsilon} = \frac{D_n}{\epsilon_r} = \frac{\rho_s}{\epsilon_r}$

III.24	Σχέση μεταξύ $\rho_b$ και $\rho$	$\rho_b = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \rho$
III.25	Σχέση μεταξύ των $\rho$ , $\rho_f$ και $\rho_b$	$\rho_f = \rho + \rho_b = \frac{\rho}{\epsilon_r} = -\frac{\rho_b}{\epsilon_r - 1}$
III.26	Πυκνότητα των δέσμιων φορτίων σε μη ομογενές διηλεκτρικό	$\rho_b = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \rho - \frac{\mathbf{D} \cdot \nabla(\epsilon_r)}{\epsilon_r^2} = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \rho - \epsilon_0 \frac{\mathbf{E} \cdot \nabla(\epsilon_r)}{\epsilon_r}$
III.27	Πυκνότητα των ελεύθερων φορτίων σε μη ομογενές διηλεκτρικό	$\rho_f = \rho_b + \rho = \frac{\rho - \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \nabla(\epsilon_r)}{\epsilon_r}$

**ΠΟΛΩΣΗ ΔΙΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΥΚΝΩΤΗ**

III.28	Διηλεκτρική μετατόπιση $\mathbf{D} = \mathbf{D}_0 = \rho_s \mathbf{x}_0$	
III.29	Ηλεκτρική πεδιακή ένταση $\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon} = \frac{\rho_s}{\epsilon_r \epsilon_0} \mathbf{x}_0 = \frac{\mathbf{E}_0}{\epsilon_r}$	
III.30	Πόλωση	$\mathbf{P} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \mathbf{D} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \rho_s \mathbf{x}_0 = \epsilon_0 (\mathbf{E}_0 - \mathbf{E})$
III.31	Πυκνότητα των δέσμιων φορτίων στην αριστερή πλάκα $x = 0$	$\rho_{sb} = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \rho_s$
III.32	Πυκνότητα των ελεύθερων φορτίων στην αριστερή πλάκα $x = 0$	$\rho_{sf} = \rho_s + \rho_{sb} = \frac{\rho_s}{\epsilon_r}$
III.33	Πυκνότητα χωρικών φορτίων πόλωσης	$\rho_b = -\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$

**ΔΥΟ ΔΙΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΣΤΡΩΜΑΤΑ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΟΠΛΙΣΜΩΝ ΣΦΑΙΡΙΚΟΥ ΠΥΚΝΩΤΗ**

<p><b>III.34</b></p>	<p>Διηλεκτρική μετατόπιση</p> $\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \mathbf{r}_0, (a < r < b)$	
<p><b>III.35</b></p>	<p>Ηλεκτρική πεδιακή ένταση</p> $\mathbf{E}_1 = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon_1} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_1 r^2} \mathbf{r}_0, (a < r < c)$ $\mathbf{E}_2 = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon_2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_2 r^2} \mathbf{r}_0, (c < r < b)$	
<p><b>III.36</b></p>	<p>Πόλωση</p>	$\mathbf{P}_1 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{\varepsilon_1} \mathbf{D} = \frac{Q(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)}{4\pi\varepsilon_1 r^2} \mathbf{r}_0, (a < r < c)$ $\mathbf{P}_2 = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_0}{\varepsilon_2} \mathbf{D} = \frac{Q(\varepsilon_2 - \varepsilon_0)}{4\pi\varepsilon_2 r^2} \mathbf{r}_0, (c < r < b)$
<p><b>III.37</b></p>	<p>Επιφανειακές πυκνότητες των φορτίων πόλωσης στις επιφάνειες των δύο οπλισμών</p>	$\rho_{sb1}(r = a) = -\frac{Q(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)}{4\pi\varepsilon_1 a^2}$ $\rho_{sb2}(r = b) = \frac{Q(\varepsilon_2 - \varepsilon_0)}{4\pi\varepsilon_2 b^2}$
<p><b>III.38</b></p>	<p>Επιφανειακές πυκνότητες των φορτίων πόλωσης στις δύο όψεις της διαχωριστικής επιφάνειας των δύο υλικών</p>	$\rho_{sb1}(r = c) = \frac{Q(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)}{4\pi\varepsilon_1 c^2}$ $\rho_{sb2}(r = c) = -\frac{Q(\varepsilon_2 - \varepsilon_0)}{4\pi\varepsilon_2 c^2}$
<p><b>III.39</b></p>	<p>Επιφανειακές πυκνότητες των ελεύθερων φορτίων στις τρεις διαχωριστικές επιφάνειες</p>	$\rho_{sf}(r = a) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_{r1} a^2} = \frac{\rho_{s1}(r = a)}{\varepsilon_{r1}}$ $\rho_{sf}(r = c) = \frac{Q}{4\pi c^2} \left( \frac{1}{\varepsilon_{r2}} - \frac{1}{\varepsilon_{r1}} \right)$ $\rho_{sf}(r = b) = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_{r2} b^2} = \frac{\rho_{s2}(r = b)}{\varepsilon_{r2}}$

**ΠΟΛΩΣΗ ΔΙΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟΥ ΠΥΚΝΩΤΗ ΜΕ ΜΗ ΟΜΟΓΕΝΕΣ ΔΙΗΛΕΚΤΡΙΚΟ**

<p><b>III.40</b></p>	<p>Διηλεκτρική σταθερά</p> $\varepsilon(r) = \varepsilon_0 \varepsilon_r(r) = \varepsilon_0 \frac{b}{r}$	
<p><b>III.41</b></p>	<p>Διηλεκτρική μετατόπιση</p> $\mathbf{D} = \frac{Q}{2\pi r} \mathbf{r}_0$	
<p><b>III.42</b></p>	<p>Ηλεκτρική πεδιακή ένταση</p> $\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon(r)} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 b} \mathbf{r}_0$	
<p><b>III.43</b></p>	<p>Πόλωση</p>	$\mathbf{P} = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \mathbf{D} = \frac{Q}{2\pi b} \frac{b-r}{r} \mathbf{r}_0$

III.44	Επιφανειακές πυκνότητες των φορτίων πόλωσης στις επιφάνειες των δύο οπλισμών	$\rho_{sb}(r = a) = -\frac{Q(b-a)}{2\pi ab}$ $\rho_{sb}(r = b) = 0$
III.45	Πυκνότητα χωρικών φορτίων πόλωσης	$\rho_b = \frac{Q}{2\pi br}$
III.46	Πυκνότητα των αληθινών χωρικών φορτίων	$\rho = -\frac{1}{r} \frac{\partial(rD)}{\partial r} = 0$
III.47	Πυκνότητες για τα ελεύθερα φορτία	$\rho_{sf}(r = a) = \rho_s(r = a) + \rho_{sb}(r = a) = \frac{Q}{2\pi b}$ $\rho_f = \rho + \rho_b = \rho_b = \frac{Q}{2\pi br}$ $\rho_{sf}(r = b) = \rho_s(r = b) + \rho_{sb}(r = b) = \rho_s(r = b) = -\frac{Q}{2\pi b}$

**ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΣΕ ΔΙΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΥΛΙΚΑ**

III.48	Πυκνότητα δύναμης που ασκείται στα χωρικά διανεμημένα φορτία (αληθινά και πόλωσης) σε διηλεκτρικό υλικό	$f = \rho \mathbf{E} - (\nabla \cdot \mathbf{P}) \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_r} \mathbf{E} - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_r} (\mathbf{E} \cdot \nabla \epsilon_r) \mathbf{E}$
III.49	Πυκνότητα δύναμης που ασκείται σε πολωμένο διηλεκτρικό	$f = \frac{d\mathbf{F}}{dV} = \rho \mathbf{E} + (\mathbf{P} \cdot \nabla) \mathbf{E} = \rho \mathbf{E} + \frac{1}{2} (\epsilon - \epsilon_0) \nabla (E^2)$
III.50	Το διάνυσμα της μηχανικής τάσης που εκφράζει την ανά μονάδα επιφανείας δύναμη	$T_n = \epsilon_0 \left[ (\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} - \frac{1}{2} E^2 \mathbf{n}_0 \right]$
III.51	Το μέτρο του διανύσματος της τάσης	$T_n = \frac{1}{2} \epsilon E^2$
III.52	Πίεση κάθετα στη διαχωριστική επιφάνεια δύο διηλεκτρικών (φορά από το μέσο 2 προς το μέσο 1)	$\mathbf{p}_{21} = \frac{1}{2} (\epsilon_2 - \epsilon_1) E_1^2 \mathbf{n}_0$

IV	<b>ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΤΟΥ ΗΛΕΚΤΡΟΣΤΑΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ</b>
----	--

**ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ ΚΑΤΟΠΤΡΙΣΜΟΥ**

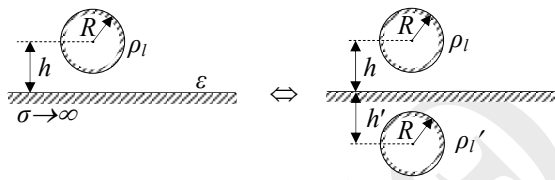
	<b>Φορτίο πάνω από αγωγίμο επίπεδο</b>	
IV.1	Τιμή και θέση του κατοπτρικού φορτίου	$q' = -q, \quad h' = h$
IV.2	Δύναμη ασκούμενη στο φορτίο από το αγωγίμο επίπεδο	$\mathbf{F} = -\frac{q^2}{16\pi\epsilon h^2} \mathbf{z}_0$

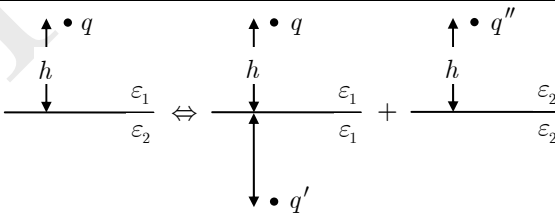
	<b>Φορτίο έξω από αγωγίμη σφαίρα</b>	
IV.3	Λόγος αποστάσεων σημείων μηδενικού δυναμικού από τα φορτία (Απολλώνεια σφαίρα)	$\frac{r_1}{r_2} = -\frac{q}{q'} = k = const.$
IV.4	Τιμή του κατοπτρικού φορτίου και απόστασή του από το κέντρο της σφαίρας	$q' = -\frac{R}{d}q, \quad b = \frac{R^2}{d}$

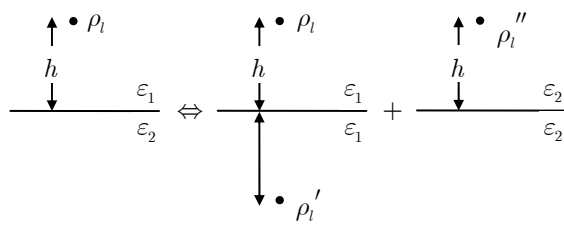
	<b>Δύο ίσοι, παράλληλοι, φορτισμένοι κύλινδροι απείρου μήκους με ίσα και αντίθετα φορτία</b>	
IV.5	Διαφορά δυναμικού μεταξύ των αγωγών	$U = \frac{\rho_l}{\pi\epsilon} \ln\left(\frac{h + \sqrt{h^2 - R^2}}{R}\right)$
IV.6	Ανά μονάδα μήκους χωρητικότητα του συστήματος	$C = \frac{\rho_l}{U} = \frac{\pi\epsilon}{\ln\left(\frac{h + \sqrt{h^2 - R^2}}{R}\right)}$



IV.7	Διαφορά δυναμικού μεταξύ των αγωγών ( $h \gg R$ )	$U = \frac{\rho_l}{\pi\epsilon} \ln\left(\frac{2h}{R}\right)$
IV.8	Ανά μονάδα μήκους χωρητικότητα του συστήματος ( $h \gg R$ )	$C = \frac{\rho_l}{U} = \frac{\pi\epsilon}{\ln\left(\frac{2h}{R}\right)}$

<b>Φορτισμένος κύλινδρος παράλληλος προς αγώγιμο επίπεδο</b>		
IV.9	Δυναμικό του κυλίνδρου ως προς το αγώγιμο επίπεδο	$U = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon} \ln\left(\frac{h + \sqrt{h^2 - R^2}}{R}\right)$
IV.10	Ανά μονάδα μήκους χωρητικότητα του συστήματος	$C = \frac{\rho_l}{U} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln\left(\frac{h + \sqrt{h^2 - R^2}}{R}\right)}$
IV.11	Δυναμικό του κυλίνδρου ως προς το αγώγιμο επίπεδο ( $h \gg R$ )	$U = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon} \ln\left(\frac{2h}{R}\right)$
IV.12	Ανά μονάδα μήκους χωρητικότητα του συστήματος ( $h \gg R$ )	$C = \frac{\rho_l}{U} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln\left(\frac{2h}{R}\right)}$

<b>Φορτίο κοντά στη διαχωριστική επιφάνεια δύο διηλεκτρικών μέσων</b>		
IV.13	Τιμές κατοπτρικών φορτίων	$q' = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q, \quad q'' = \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q$

<b>Γραμμικό φορτίο κοντά στη διαχωριστική επιφάνεια δύο διηλεκτρικών μέσων</b>		
IV.14	Γραμμικές πυκνότητες ειδώλων	$\rho_l' = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \rho_l, \quad \rho_l'' = \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \rho_l$

<b>V</b>	<b>ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΠΕΔΙΟ ΡΟΗΣ ΜΟΝΙΜΩΝ ΡΕΥΜΑΤΩΝ</b>
----------	--

**ΕΞΙΣΩΣΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ – ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ ΟΗΜ**

<b>V.1</b>	Ένταση ηλεκτρικού ρεύματος και πυκνότητα ρεύματος	$I = \iint_s \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \iint_s \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS$
<b>V.2</b>	Εξίσωση συνέχειας της ηλεκτρικής ροής	$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$
<b>V.3</b>	Εξίσωση συνέχειας της ηλεκτρικής ροής στη μόνιμη κατάσταση	$\oiint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (\text{ολοκληρωτική μορφή})$ $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (\text{διαφορική μορφή})$
<b>V.4</b>	Νόμος του Ohm (σημειακή διατύπωση)	$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$

**ΗΛΕΚΤΡΕΓΕΡΤΙΚΗ ΔΥΝΑΜΗ – ΗΛΕΚΤΡΙΚΗ ΑΝΤΙΣΤΑΣΗ**

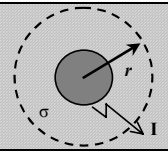
<b>V.5</b>	Νόμος του Ohm (μακροσκοπική διατύπωση)	$V = RI$
<b>V.6</b>	Ηλεκτρική αντίσταση αγωγού αγωγιμότητας $\sigma$ , μήκους $l$ και διατομής $S$	$R = \frac{V}{I} = \frac{1}{\sigma} \frac{l}{S}$
<b>V.7</b>	Συνολική αντίσταση $n$ αντιστάσεων συνδεδεμένων σε σειρά	$R = R_1 + R_2 + \dots + R_n = \sum_{i=1}^n R_i$
<b>V.8</b>	Συνολική αντίσταση $n$ αντιστάσεων συνδεδεμένων παράλληλα	$R = \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} \right)^{-1}$
<b>V.9</b>	Ηλεκτρεγερτική δύναμη $E$ . $\mathbf{E}_t = \mathbf{E} + \mathbf{E}_s$ , όπου $\mathbf{E}_s$ η “ηλεκτροχωριστική” πεδιακή ένταση της πηγής.	$E = \int_{(-)}^{(+)} \mathbf{E}_s \cdot d\mathbf{l} = \oint_C \mathbf{E}_s \cdot d\mathbf{l} = \oint_C \mathbf{E}_t \cdot d\mathbf{l}$
<b>V.10</b>	Ηλεκτρική τάση στην έξοδο πηγής με εσωτερική αντίσταση $r$ και αντίσταση εξωτερικού φορτίου $R$	$E = I(R + r)$
<b>V.11</b>	Νόμος ρευμάτων του Kirchhoff	$\sum_{i=1}^n I_i = 0$

V.12	Νόμος τάσεων του Kirchhoff (όπου $n$ ο αριθμός των πηγών και $k$ ο αριθμός των αντιστάσεων του βρόχου)	$\sum_{i=1}^n E_i = \sum_{i=1}^k I_i R_i + \sum_{i=1}^n I_i r_i$
V.13	Ηλεκτρική αντίσταση αγωγού μεταβλητής διατομής	$R = \frac{V}{I} = \frac{1}{\sigma} \frac{\int_{(l)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}{\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}$
V.14	Χρόνος χαλάρωσης $T$ μέσου με διηλεκτρική σταθερά $\epsilon$ και αγωγιμότητα $\sigma$	$RC = \frac{\epsilon}{\sigma} = T$
V.15	Υπολογισμός ηλεκτρικής αντίστασης με βάση τις αντιστάσεις μεταξύ απειροστά γειτονικών ισοδυναμικών επιφανειών	$R = \int_0^l \frac{du_1}{\iint_S \frac{\sigma h_2 h_3}{h_1} du_2 du_3}$
V.16	Υπολογισμός ηλεκτρικής αντίστασης με βάση τις αντιστάσεις των απειροστών ρευματικών σωλήνων	$R = \frac{1}{\iint_S \frac{du_2 du_3}{\int_0^l \frac{h_1}{\sigma h_2 h_3} du_1}}$
V.17	Νόμος του Joule – Ισχύς απωλειών λόγω θερμότητας	$p = \frac{dP}{dV} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} = \frac{\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}}{\sigma}$

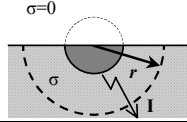
**ΕΞΙΣΩΣΗ LAPLACE – ΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ**

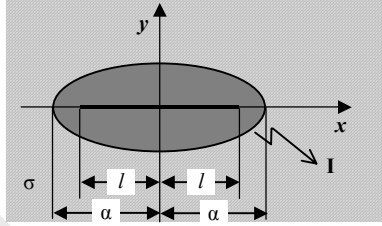
V.18	Διαφορική εξίσωση Laplace για το πεδίο ροής μονίμων ρευμάτων	$\nabla \cdot \nabla \phi = \nabla^2 \phi = 0$
V.19	Οριακές συνθήκες σε διαχωριστική επιφάνεια	$(\mathbf{J}_1 - \mathbf{J}_2) \cdot \mathbf{n}_0 = 0 \Rightarrow J_{n_1} = J_{n_2}$ $(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \times \mathbf{n}_0 = 0 \Rightarrow \frac{J_{t_1}}{\sigma_1} = \frac{J_{t_2}}{\sigma_2}$
V.20	Οριακές συνθήκες σε διαχωριστική επιφάνεια κατά το μεταβατικό φαινόμενο	$J_{n_1} - J_{n_2} = \frac{\partial \rho_s}{\partial t}$

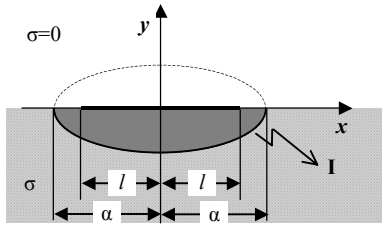
**ΓΕΙΩΤΕΣ**

Σφαιρικός Γειωτής ακτίνας $a$		
V.21	Συνάρτηση δυναμικού	$\phi(r) = \frac{I}{4\pi\sigma r}$
V.22	Τάση διάβασης	$U_0 = \frac{I}{4\pi\sigma a}$

V.23	Αντίσταση διάβασης γειωτή	$R_0 = \frac{1}{4\pi\sigma a}$
------	---------------------------	--------------------------------

<b>Ημισφαιρικός Γειωτής ακτίνας <math>a</math></b>		
V.24	Συνάρτηση δυναμικού	$\phi(r) = \frac{I}{2\pi\sigma r}$
V.25	Τάση διάβασης	$U_0 = \frac{I}{2\pi\sigma a}$
V.26	Αντίσταση διάβασης γειωτή	$R_0 = \frac{1}{2\pi\sigma a}$

<b>Ελλειψοειδής Γειωτής</b>		
V.27	Συνάρτηση Δυναμικού	$\phi(x, y) = \frac{I}{8\pi\sigma l} \ln \left[ \frac{x+l+\sqrt{(x+l)^2+y^2}}{x-l+\sqrt{(x-l)^2+y^2}} \right]$
V.28	Τάση Διάβασης	$U_0 = \frac{I}{8\pi\sigma l} \ln \left( \frac{a+l}{a-l} \right)$
V.29	Αντίσταση διάβασης γειωτή	$R_0 = \frac{1}{8\pi\sigma l} \ln \left( \frac{a+l}{a-l} \right)$

<b>Ημιελλειψοειδής Επιφανειακός Γειωτής (οι ίδιες σχέσεις ισχύουν και για τον κατακόρυφο με απλή αλλαγή αξόνων (όπου x θέτουμε y και όπου y θέτουμε το -x))</b>		
V.30	Συνάρτηση δυναμικού	$\phi(x, y) = \frac{I}{4\pi\sigma l} \ln \left[ \frac{x+l+\sqrt{(x+l)^2+y^2}}{x-l+\sqrt{(x-l)^2+y^2}} \right]$
V.31	Τάση διάβασης	$U_0 = \frac{I}{4\pi\sigma l} \ln \left( \frac{a+l}{a-l} \right)$

V.32	Αντίσταση διάβασης γειωτή	$R_0 = \frac{1}{4\pi\sigma l} \ln\left(\frac{a+l}{a-l}\right)$
------	---------------------------	--



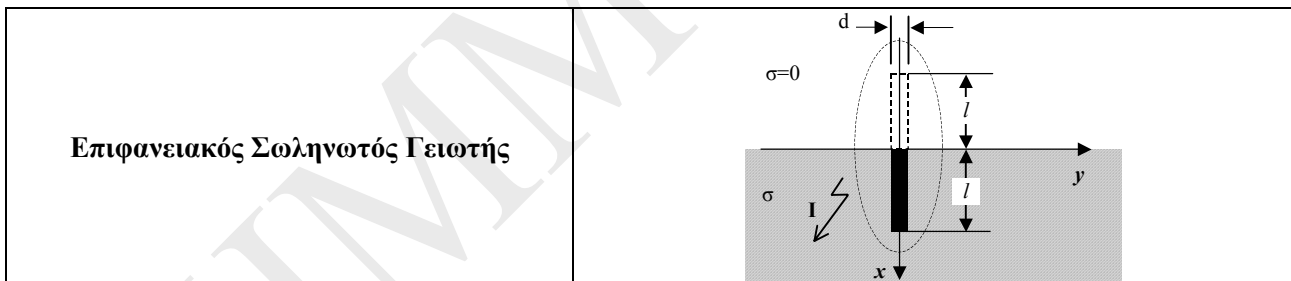
V.33	Συνάρτηση δυναμικού	$\phi(x, y) = \frac{I}{8\pi\sigma l} \ln \left[ \frac{x+l + \sqrt{(x+l)^2 + y^2}}{x-l + \sqrt{(x-l)^2 + y^2}} \right]$
------	---------------------	--

V.34	Τάση διάβασης	$U_0 = \frac{I}{8\pi\sigma l} \ln \left( \frac{l + \sqrt{l^2 + d^2/4}}{-l + \sqrt{l^2 + d^2/4}} \right)$
------	---------------	--

V.35	Αντίσταση διάβασης γειωτή	$R_0 = \frac{1}{8\pi\sigma l} \ln \left( \frac{l + \sqrt{l^2 + d^2/4}}{-l + \sqrt{l^2 + d^2/4}} \right)$
------	---------------------------	--

V.36	Τάση διάβασης (για $d \ll 2l$ )	$U_0 \cong \frac{I}{4\pi\sigma l} \ln\left(\frac{4l}{d}\right)$
------	---------------------------------	---

V.37	Αντίσταση διάβασης γειωτή (για $d \ll 2l$ )	$R_0 \cong \frac{1}{4\pi\sigma l} \ln\left(\frac{4l}{d}\right)$
------	---	---



V.38	Συνάρτηση δυναμικού	$\phi(x, y) = \frac{I}{4\pi\sigma l} \ln \left[ \frac{x+l + \sqrt{(x+l)^2 + y^2}}{x-l + \sqrt{(x-l)^2 + y^2}} \right]$
------	---------------------	--

V.39	Τάση διάβασης	$U_0 = \frac{I}{4\pi\sigma l} \ln \left( \frac{l + \sqrt{l^2 + d^2/4}}{-l + \sqrt{l^2 + d^2/4}} \right)$
------	---------------	--

V.40	Αντίσταση διάβασης γειωτή	$R_0 = \frac{1}{4\pi\sigma l} \ln \left( \frac{l + \sqrt{l^2 + d^2/4}}{-l + \sqrt{l^2 + d^2/4}} \right)$
------	---------------------------	--

V.41	Τάση διάβασης (για $d \ll l$ )	$U_0 \cong \frac{I}{2\pi\sigma l} \ln\left(\frac{4l}{d}\right)$
------	--------------------------------	---

V.42	Αντίσταση διάβασης γειωτή (για $d \ll l$ )	$R_0 \cong \frac{1}{2\pi\sigma l} \ln\left(\frac{4l}{d}\right)$
------	--	---

**VI**
**ΤΟ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ**
**ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΤΟΥ ΠΕΔΙΟΥ**

<b>VI.1</b>	Πυκνότητα ενέργειας του ηλεκτρικού πεδίου σε γραμμικό και ισότροπο μέσο	$w_e = \frac{1}{2} \varepsilon E^2$
<b>VI.2</b>	Πυκνότητα ενέργειας του μαγνητικού πεδίου σε γραμμικό και ισότροπο μέσο	$w_m = \frac{1}{2} \mu H^2$
<b>VI.3</b>	Πυκνότητα ενέργειας του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου σε γραμμικό και ισότροπο μέσο	$w = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2$
<b>VI.4</b>	Ειδική ισχύς απωλειών Joule όπου $T = \varepsilon / \sigma$ είναι η χρονική σταθερά χαλάρωσης γραμμικού και ισότροπου μέσου	$p_t = \sigma E^2 = \frac{\varepsilon}{T} E^2$
<b>VI.5</b>	Πυκνότητα διαδιδόμενης ισχύος (πραγματικό διάνυσμα Poynting)	$\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$
<b>VI.6</b>	Πυκνότητα ενέργειας του ηλεκτρικού πεδίου σε μη γραμμικό μέσο	$w_e = \int_0^{\mathbf{D}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D}$
<b>VI.7</b>	Πυκνότητα ενέργειας του μαγνητικού πεδίου σε μη γραμμικό μέσο	$w_m = \int_0^{\mathbf{B}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}$
<b>VI.8</b>	Ειδική ισχύς απωλειών Joule όπου $T = \varepsilon / \sigma$ είναι η χρονική σταθερά χαλάρωσης ανομοιογενούς, ανισότροπου ή μη γραμμικού μέσου	$p_t = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$

**ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΟΥ MAXWELL**

<b>VI.9</b>	Εξίσωση στροφής της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου (1 <sup>η</sup> εξίσωση Maxwell)	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$
<b>VI.10</b>	Εξίσωση στροφής της έντασης του μαγνητικού πεδίου (2 <sup>η</sup> εξίσωση Maxwell)	$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$
<b>VI.11</b>	Καταστατικές εξισώσεις	$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$

VI.12	Εξίσωση απόκλισης της μαγνητικής επαγωγής (3 <sup>η</sup> εξίσωση Maxwell)	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
VI.13	Εξίσωση απόκλισης της διηλεκτρικής μετατόπισης (4 <sup>η</sup> εξίσωση Maxwell)	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$
VI.14	Μαγνητική ροή που διέρχεται από επιφάνεια S	$\Phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$
VI.15	Ολοκληρωτική μορφή της 3 <sup>ης</sup> εξίσωσης Maxwell	$\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$
VI.16	Νόμος του Gauss (ολοκληρωτική μορφή της 4 <sup>ης</sup> εξίσωσης Maxwell)	$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q$
VI.17	Εξίσωση συνέχειας	$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$
VI.18	Εξίσωση συνέχειας για χρονικά αμετάβλητες καταστάσεις	$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$

**ΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΣΕ ΔΙΑΧΩΡΙΣΤΙΚΕΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ**

VI.19	Συνέχεια της κάθετης στην επιφάνεια συνιστώσας της μαγνητικής επαγωγής ( $\mathbf{n}_0$ μοναδιαίο κάθετο στην επιφάνεια διάνυσμα με κατεύθυνση από το μέσο 1 προς το μέσο 2)	$(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \mathbf{n}_0 = 0$ ή $B_{n_2} = B_{n_1}$
VI.20	Διαφορά των κάθετων στην επιφάνεια (με επιφανειακά φορτία) συνιστωσών της διηλεκτρικής μετατόπισης	$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n}_0 = \rho_s$ ή $D_{n_2} - D_{n_1} = \rho_s$
VI.21	Συνέχεια της εφαπτομενικής στην επιφάνεια συνιστώσας της έντασης του μαγνητικού πεδίου	$\mathbf{n}_0 \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = \mathbf{0}$ ή $E_{t_1} - E_{t_2} = 0$
VI.22	Διαφορά των εφαπτομενικών στην επιφάνεια (με επιφανειακά ρεύματα) συνιστωσών της έντασης μαγνητικού πεδίου $\boldsymbol{\kappa}_0 = \mathbf{t}_0 \times \mathbf{n}_0$ , $\mathbf{t}_0$ : μοναδιαίο εφαπτομενικό διάνυσμα	$\mathbf{n}_0 \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{K}$ ή $H_{t_1} - H_{t_2} = \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\kappa}_0$
VI.23	Διαφορά των εφαπτομενικών στην επιφάνεια (για απουσία επιφανειακών ρευμάτων) συνιστωσών της έντασης μαγνητικού πεδίου	$\mathbf{n}_0 \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{0}$ ή $H_{t_1} = H_{t_2}$

**ΝΟΜΟΣ ΤΗΣ ΔΥΝΑΜΗΣ LORENZ**

<b>VI.24</b>	Νόμος της δύναμης Lorenz σε σημειακή μορφή	$\mathbf{f} = \rho(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$
<b>VI.25</b>	Νόμος της δύναμης Lorenz σε ολοκληρωτική μορφή	$\iiint_V \mathbf{f} dV = \iiint_V \rho(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) dV$



<b>VII</b>	<b>ΜΑΓΝΗΤΟΣΤΑΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ</b>
------------	-----------------------------

<b>ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ AMPERE – ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ</b>
--

<b>VII.1</b>	Νόμος του Ampère	$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ (διαφορική μορφή) $\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$ (ολοκληρωτική μορφή)
<b>VII.2</b>	Ένταση μαγνητικού πεδίου ευθύγραμμου αγωγού αμελητέας διατομής	$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi r} \boldsymbol{\varphi}_0$
<b>VII.3</b>	Ένταση μαγνητικού πεδίου ευθύγραμμου αγωγού κυκλικής διατομής με σταθερή πυκνότητα ρεύματος	$r \geq a : \quad \mathbf{H} = \frac{I}{2\pi r} \boldsymbol{\varphi}_0$ $r \leq a : \quad \mathbf{H} = \frac{Ir}{2\pi a^2} \boldsymbol{\varphi}_0$
<b>VII.4</b>	Ένταση μαγνητικού πεδίου ομοαξονικού καλωδίου	$r \leq a : \quad \mathbf{H} = \frac{Ir}{2\pi a^2} \boldsymbol{\varphi}_0$ $b \geq r \geq a : \quad \mathbf{H} = \frac{I}{2\pi r} \boldsymbol{\varphi}_0$ $c \geq r \geq b : \quad \mathbf{H} = \frac{I}{2\pi r} \frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2} \boldsymbol{\varphi}_0$ $r \geq c : \quad \mathbf{H} = \mathbf{0}$

<b>ΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΔΥΝΑΜΙΚΑ – ΜΑΓΝΗΤΙΚΗ ΡΟΠΗ</b>
--

<b>VII.5</b>	Βαθμωτό μαγνητικό δυναμικό	$\mathbf{H} = -\nabla \phi_m$
<b>VII.6</b>	Διανυσματικό μαγνητικό δυναμικό	$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$
<b>VII.7</b>	Διανυσματική εξίσωση Poisson	$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}$ (διαφορική μορφή) $\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \oint \frac{I d\mathbf{l}}{r}$ (ολοκληρωτική μορφή)
<b>VII.8</b>	Μαγνητική ροπή	$\mathbf{M} = \frac{1}{2} \iiint_V \mathbf{r}' \times \mathbf{J} dV$
<b>VII.9</b>	Σχέση μαγνητικής ροπής και διανυσματικού μαγνητικού δυναμικού	$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{\mathbf{M} \times \mathbf{r}}{r^3}$
<b>VII.10</b>	Σχέση μαγνητικής ροπής και μαγνητικής επαγωγής	$\mathbf{B} = \frac{\mu}{4\pi} \left[ \frac{3(\mathbf{M} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{M}}{r^3} \right]$

VII.11	Μαγνητική ροπή κυκλικού βρόχου	$\mathbf{M} = \pi a^2 I \mathbf{z}_0$
--------	--------------------------------	---------------------------------------

**ΝΟΜΟΣ BIOT-SAVARD**

VII.12	Νόμος των Biot-Savard	$\mathbf{B} = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{r}}{r^3} dV$
VII.13	Νόμος των Biot-Savard για συρματόμορφο αγωγό	$\mathbf{B} = \frac{\mu I}{4\pi} \oint_C \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}$
VII.14	Στοιχειώδης νόμος των Biot-Savart για συρματόμορφο αγωγό	$d\mathbf{B} = \frac{\mu I}{4\pi} \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ**

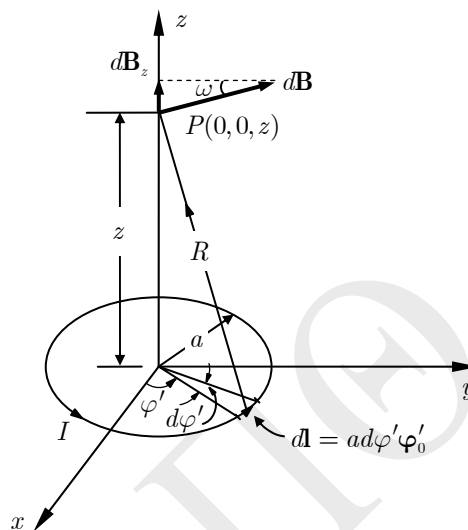
**A. Πεδίο ευθύγραμμου αγωγού πεπερασμένου μήκους**

VII.15	Μαγνητικό διανυσματικό δυναμικό $\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \left( \frac{z - z_1 + R_1}{z - z_2 + R_2} \right) \mathbf{z}_0$	
VII.16	Μαγνητική επαγωγή $\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[ \frac{r}{R_1(z - z_1 + R_1)} - \frac{r}{R_2(z - z_2 + R_2)} \right] \boldsymbol{\varphi}_0$ $\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \boldsymbol{\varphi}_0$	

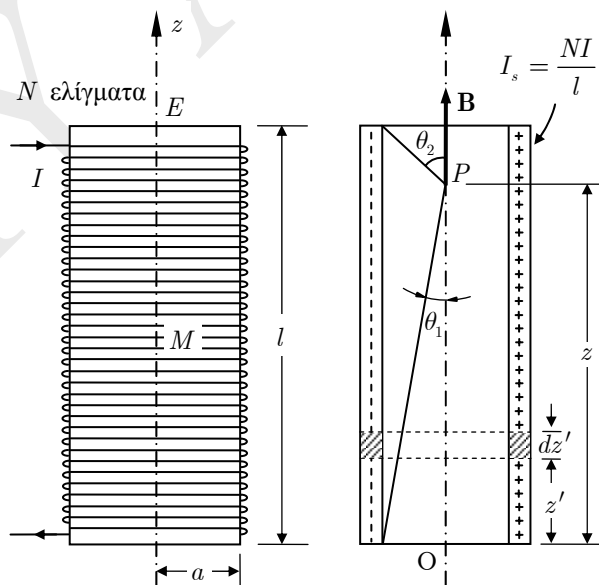
**B. Πεδίο αγωγίμης λωρίδας**

VII.17	Πεδίο αγωγίμης λωρίδας πλάτους 2l και επιφανειακής κατανομής ρεύματος $I_s$ $\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I_s}{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{x^2 + (l-y)^2}{x^2 + (l+y)^2} \right] \mathbf{x}_0 - \left( \arctan \frac{y-l}{x} - \arctan \frac{y+l}{x} \right) \mathbf{y}_0 \right\}$	
VII.18	Πεδίο αγωγίμης λωρίδας πλάτους 2l και επιφανειακής κατανομής ρεύματος $I_s$ με $l \rightarrow \infty$ $\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I_s}{2} \frac{x}{ x } \mathbf{y}_0$	

<b>Γ. Πεδίο κυκλικού βρόχου ακτίνας <math>a \ll r</math></b>	
<b>VII.19</b>	Μαγνητικό διανυσματικό δυναμικό $\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I a^2}{4 r^2} \sin \theta \boldsymbol{\varphi}_0$
<b>VII.20</b>	Μαγνητική επαγωγή $\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I a^2}{4 r^2} (2 \cos \theta \mathbf{r}_0 + \sin \theta \boldsymbol{\theta}_0)$
<b>VII.21</b>	Πεδίο στον άξονα του κυκλικού βρόχου $\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I a^2}{2 (a^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{z}_0$
<b>VII.22</b>	Πεδίο στο κέντρο του κυκλικού βρόχου $\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2a} \mathbf{z}_0$



<b>Δ. Πεδίο σωληνοειδούς</b>	
<b>VII.23</b>	Πεδίο στον άξονα σωληνοειδούς μήκους $l$ $\mathbf{B} = \frac{\mu N I}{2l} \left[ \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} + \frac{l-z}{\sqrt{a^2 + (l-z)^2}} \right] \mathbf{z}_0$
<b>VII.24</b>	Πεδίο στο κέντρο σωληνοειδούς μήκους $l$ $\mathbf{B} = \frac{\mu N I}{\sqrt{4a^2 + l^2}} \mathbf{z}_0$
<b>VII.25</b>	Πεδίο στο κέντρο σωληνοειδούς πολύ μεγάλου μήκους $l$ $\mathbf{B} \cong \frac{\mu N I}{l} \mathbf{z}_0$
<b>VII.26</b>	Πεδίο στα άκρα σωληνοειδούς μήκους $l$ $\mathbf{B} = \frac{\mu N I}{2\sqrt{a^2 + l^2}} \mathbf{z}_0$
<b>VII.27</b>	Πεδίο στα άκρα σωληνοειδούς πολύ μεγάλου μήκους $l$ $\mathbf{B} \cong \frac{\mu N I}{2l} \mathbf{z}_0$



**ΜΑΓΝΗΤΙΚΗ ΡΟΗ – ΑΥΤΕΠΑΓΩΓΗ**

<b>VII.28</b>	Μαγνητική ροή	$\Phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$
<b>VII.29</b>	Πεπλεγμένη μαγνητική ροή από πηνίο $N$ σπειρών	$\Psi = N\Phi$

VII.30	Συντελεστής αυτεπαγωγής	$L = \frac{\Psi}{I}$
VII.31	Αυτεπαγωγή δακτυλιοειδούς πηνίου ορθογωνικής διατομής (ύψος $d$ , εσωτερική ακτίνα $a$ , εξωτερική ακτίνα $b$ )	$L = \frac{\mu N^2 d}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$
VII.32	Αυτεπαγωγή δακτυλιοειδούς πηνίου κυκλικής διατομής (ύψος $d$ , εμβαδόν διατομής $S$ , απόσταση άξονα πηνίου – κέντρου δακτυλίου $r_m$ )	$L = \frac{\mu N^2 S}{2\pi r_m}$
VII.33	Αυτεπαγωγή σωληνοειδούς μεγάλου μήκους $l$	$L = \frac{\mu N^2 \pi a^2}{l}$
VII.34	Αυτεπαγωγή ομοαξονικού καλωδίου ( $a$ : ακτίνα εσωτερικού αγωγού και $b$ : εσωτερική ακτίνα εξωτερικού αγωγού)	εξωτερική : $L_e = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$ εσωτερική : $L_i = \frac{\mu_0}{8\pi}$
VII.35	Αυτεπαγωγή γραμμής δύο παράλληλων κυλινδρικών αγωγών ( $d$ : απόσταση των αξόνων των 2 αγωγών και $a$ : ακτίνα κάθε αγωγού)	$L_e = \frac{\mu_0}{\pi} \ln\left(\frac{d-a}{a}\right)$
VII.36	Αυτεπαγωγή γραμμής δύο παράλληλων κυλινδρικών αγωγών ( $d \gg a$ , $d$ : απόσταση των αξόνων των 2 αγωγών και $a$ : ακτίνα κάθε αγωγού)	$L_e \cong \frac{\mu_0}{\pi} \ln\left(\frac{d}{a}\right)$ $L \cong \frac{\mu_0}{4\pi} + \frac{\mu_0}{\pi} \ln\left(\frac{d}{a}\right)$

**ΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΔΥΝΑΜΙΚΑ – ΜΑΓΝΗΤΙΚΗ ΡΟΠΗ**

VII.37	Δύναμη σε φορτίο $q$ που κινείται με ταχύτητα $\mathbf{v}$ σε ηλεκτρομαγνητικό πεδίο ( $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ )	$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$
VII.38	Νόμος Laplace (στοιχειώδης δύναμη σε απειροστό μήκος ρευματοφόρου αγωγού)	$d\mathbf{F} = I(d\mathbf{l} \times \mathbf{B})$
VII.39	Συνολική δύναμη ηλεκτρομαγνητικού πεδίου σε αγωγίμο βρόχο	$\mathbf{F} = \mathbf{0}$
VII.40	Ροπή αγωγίμου βρόχου	$\mathbf{T} = \mathbf{M} \times \mathbf{B}$
VII.41	Δυνάμεις μεταξύ παράλληλων αγωγών	$\mathbf{F} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi a} \mathbf{y}_0$
VII.42	Διαφορά δυναμικού εξαιτίας του φαινομένου Hall	$V_H = \frac{IBl}{NeS} = \frac{IBl}{Neld} = \frac{IB}{Ned}$

## VIII

## ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΗ ΕΠΑΓΩΓΗ

## Ο ΝΟΜΟΣ ΤΗΣ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΗΣ ΕΠΑΓΩΓΗΣ ΤΟΥ FARADAY

VIII.1	Διαφορική διατύπωση του νόμου της ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής του Faraday	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$
VIII.2	Ολοκληρωτική διατύπωση του νόμου της ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής του Faraday	$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial \Psi}{\partial t}$

## ΕΠΑΓΩΓΗ

VIII.3	Ηλεκτρική ένταση που αναπτύσσεται σε αγώγιμη ράβδο κινούμενη με ταχύτητα $\mathbf{v}$ σε μαγνητικό πεδίο επαγωγής $\mathbf{B}$	$\mathbf{E}_m = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$
VIII.4	Ηλεκτρεγερτική δύναμη επαγόμενη σε αγώγιμη ράβδο μήκους $l$ κινούμενη κάθετα με ταχύτητα $v$ σε μαγνητικό πεδίο επαγωγής $\mathbf{B}$	$E = vBl$
VIII.5	Ηλεκτρεγερτική δύναμη επαγόμενη σε αγώγιμο βρόχο κινούμενο με ταχύτητα $\mathbf{v}$ σε χρονικά αμετάβλητο μαγνητικό πεδίο επαγωγής $\mathbf{B}$	$E = \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$
VIII.6	Ηλεκτρεγερτική δύναμη επαγόμενη σε αγώγιμο βρόχο κινούμενο με ταχύτητα $\mathbf{v}$ σε χρονικά μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο επαγωγής $\mathbf{B}$	$E = \oint_C (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$ ή $E = -\iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$
VIII.7	Ένταση του ηλεκτρικού πεδίου συναρτήσει των δυναμικών $\phi$ και $\mathbf{A}$	$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$

## ΣΥΖΕΥΣΗ ΚΥΚΛΩΜΑΤΩΝ

VIII.8	Συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής ή αλληλεπαγωγής μεταξύ δύο κυκλωμάτων που διαρρέονται από ρεύματα $I_1$ και $I_2$	$M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I_2}, \quad M_{12} = \frac{\Psi_{12}}{I_1}$
VIII.9	Γενικευμένη σχέση του συντελεστή αμοιβαίας επαγωγής ή τύπος του Neumann	$M = M_{21} = M_{12} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{r_{12}}$

VIII.10	Συνολική ροή που διαρρέει το κύκλωμα 1 κατά την παρουσία του κυκλώματος 2	$\Psi_1 = \Psi_{11} + \Psi_{21} = L_1 I_1 + M I_2$
VIII.11	Συντελεστής σύζευξης δύο κυκλωμάτων συναρτήσει των σπειρών τους και των συντελεστών αυτεπαγωγής και αλληλεπαγωγής	$k = \sqrt{k_{21} k_{12}}$ $k_{ij} = \frac{N_i}{N_j} \frac{M}{L_i}$
VIII.12	Συντελεστής αλληλεπαγωγής δύο κυκλωμάτων συναρτήσει του συντελεστή σύζευξης και των συντελεστών αυτεπαγωγής τους	$M = k \sqrt{L_1 L_2}$

**ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΜΑΓΝΗΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ ΕΠΑΓΩΓΕΑ**

VIII.13	Μεταβολή πυκνότητας ενέργειας μαγνητικού πεδίου	$dw_m = \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}$
VIII.14	Συνολική ενέργεια μαγνητικού πεδίου πηνίου που διαρρέεται από ρεύμα $I(t)$	$W_m = \int_0^\Psi I d\Psi$
VIII.15	Συνολική ενέργεια μαγνητικού πεδίου πηνίου αυτεπαγωγής $L$ και ρεύματος $I$ στη μόνιμη κατάσταση	$W_m = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} I \Psi$
VIII.16	Συνολική ενέργεια μαγνητικού πεδίου αγωγών απειροστού πάχους συναρτήσει του διανυσματικού μαγνητικού δυναμικού $\mathbf{A}$	$W_m = \frac{I}{2} \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$
VIII.17	Συνολική ενέργεια μαγνητικού πεδίου αγωγών πεπερασμένης διατομής συναρτήσει του διανυσματικού μαγνητικού δυναμικού $\mathbf{A}$	$W_m = \frac{1}{2} \iiint_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} dV$
VIII.18	Αμοιβαία ενέργεια δύο αγωγών πεπερασμένης διατομής που διαρρέονται από ρεύματα $I_1$ και $I_2$	$W_{12} = \iiint_V \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{B}_2 dV = \iiint_V \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{B}_1 dV$ $W_{12} = \frac{\mu I_1 I_2}{4\pi} \oint_{c_1} \oint_{c_2} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{r_{12}}$
VIII.19	Ενέργεια πεδίου συστήματος $n$ ρευματοφόρων κυκλωμάτων	$W_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n I_i \Psi_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n L_{ij} I_i I_j$
VIII.20	Ενέργεια πεδίου συστήματος 2 ρευματοφόρων κυκλωμάτων που δημιουργούν μαγνητικά πεδία επαγωγής $\mathbf{B}_1$ και $\mathbf{B}_2$	$W_m = \iiint_V \frac{B_1^2}{2\mu} dV + \iiint_V \frac{B_2^2}{2\mu} dV + \iiint_V \frac{\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{B}_2}{\mu} dV$

**ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΚΥΚΛΩΜΑΤΩΝ – ΠΙΕΣΗ**

VIII.21	Βασική εξίσωση δυνάμεων σε κυκλώματα λόγω μεταβολής της ροής ή των ρευμάτων. $F_x$ : συνιστώσα της δύναμης $\mathbf{F}$ κατά τον άξονα $x$	$\sum_{k=1}^n I_k d\Psi_k = F_x dx + dW_m$
---------	--	--

VIII.22	Βασική εξίσωση δυνάμεων σε κυκλώματα στα οποία τα ρεύματα παραμένουν σταθερά	$F_x dx = dW_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n I_k d\Psi_k$
VIII.23	Δύναμη σε κύκλωμα σταθερών ρευμάτων	$F_x = \frac{\partial W_m}{\partial x}$ ή $F_x = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n I_i I_j \frac{\partial L_{ij}}{\partial x}$
VIII.24	Δύναμη μεταξύ κυκλωμάτων σταθερών ρευμάτων συναρτήσει του συντελεστή αλληλεπαγωγής	$F_x = I_1 I_2 \frac{\partial M}{\partial x} \quad \mathbf{F} = I_1 I_2 \nabla M$
VIII.25	Γενική εξίσωση δύναμης μεταξύ κυκλωμάτων σταθερών ρευμάτων	$\mathbf{F} = -\frac{\mu I_1 I_2}{4\pi} \oint_{c_1} \oint_{c_2} \mathbf{r}_{12} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{r_{12}^3}$
VIII.26	Ροπή σε κυκλώματα που διαρρέονται από σταθερά ρεύματα	$T = \frac{\partial W_m}{\partial \theta}$ ή $T = I_1 I_2 \frac{\partial M}{\partial \theta}$
VIII.27	Δύναμη σε κυκλώματα σταθερών ροών	$F_x = -\frac{\partial W_m}{\partial x}$
VIII.28	Ροπή σε κυκλώματα σταθερών ροών	$T = -\frac{\partial W_m}{\partial \theta}$ ή $T = I_1 I_2 \frac{\partial M}{\partial \theta}$
VIII.29	Μαγνητική πίεση που αναπτύσσεται σε απέραντη επίπεδη πολύ λεπτή αγωγίμη ταινία με διανεμημένο επιφανειακό ρεύμα $K$ κάθετο σε εξωτερικό πεδίο $B$	$p_m = \frac{1}{2} KB = \frac{B^2}{2\mu}$
VIII.30	Μαγνητική πίεση στη διαχωριστική επιφάνεια δύο μέσων με μαγνητικές διαπερατότητες $\mu_1$ και $\mu_2$	$p_{12} = \frac{1}{2} (\mu_2 - \mu_1) (H_{t_1}^2 + \frac{\mu_1}{\mu_2} H_{n_1}^2)$
VIII.31	Ελκτική δύναμη ηλεκτρομαγνήτη – οπλισμού όταν στο διάκενο διατομής $S$ υφίσταται σταθερό μαγνητικό πεδίο επαγωγής $\mathbf{B} = B\mathbf{x}_0$	$\mathbf{F} = -\frac{\partial W_m}{\partial x} \mathbf{x}_0 = -\frac{B^2}{2\mu_0} S \mathbf{x}_0$
VIII.32	Πίεση που αντιστοιχεί στη δύναμη της σχέσης VIII.31	$p = \frac{B^2}{2\mu_0}$

## IX

## ΣΙΔΗΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΥΛΙΚΑ

## ΜΑΓΝΗΤΙΣΗ – ΜΑΓΝΗΤΙΚΗ ΕΠΙΔΕΚΤΙΚΟΤΗΤΑ

IX.1	Σχέση μαγνήτισης μαγνητικής επαγωγής και έντασης μαγνητικού πεδίου	$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$
IX.2	Απόκλιση μαγνήτισης	$\nabla \cdot \mathbf{H} = -\nabla \cdot \mathbf{M}$
IX.3	Μαγνητική επιδεκτικότητα και συσχέτισή της με τη μαγνήτιση	$\mathbf{M} = x_m \mathbf{H}$
IX.4	Μαγνητική επιδεκτικότητα και μαγνητική διαπερατότητα	$\mu = \mu_0 (1 + x_m), \quad \mu_r = 1 + x_m$

## ΜΑΓΝΗΤΙΚΗ ΑΝΤΙΣΤΑΣΗ – ΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

IX.5	Μαγνητεγερτική δύναμη πηνίου $N$ ελιγμάτων	$\mathcal{F} = \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = NI$
IX.6	Απώλειες υστέρησης σε σιδηρομαγνητικό υλικό όγκου $V$ με εμβαδόν βρόχου υστέρησης $S_h$	$W_h = V \oint_C H dB = VS_h$
IX.7	Μαγνητική αντίσταση τμήματος μαγνητικού κυκλώματος διατομής $S$ στα άκρα $A, B$ του οποίου εφαρμόζεται μαγνητική τάση $V_m$ και διαρρέεται από ροή $\Phi$	$R_m = \frac{V_m}{\Phi} = \frac{\int_A^B \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}}{\iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}} = \frac{\mathcal{F}}{\Phi}$
IX.8	Μαγνητική αντίσταση υλικού μαγνητικής διαπερατότητας $\mu$ , μήκους $l$ και διατομής $S$	$R_m = \frac{1}{\mu} \frac{l}{S}$
IX.9	Μαγνητική αγωγιμότητα	$P_m = \frac{1}{R_m}$
IX.10	Ο νόμος των “ρευμάτων” του Kirchhoff στα μαγνητικά κυκλώματα ( $k$ : αριθμός κλάδων)	$\sum_{i=1}^k \Phi_i = 0$
IX.11	Ο νόμος των τάσεων του Kirchhoff στα μαγνητικά κυκλώματα ( $n$ : αριθμός κλάδων, $m$ : αριθμός πηγών)	$\sum_{i=1}^n V_{m,i} = \sum_{i=1}^n H_i l_i = \sum_{i=1}^n \Phi_i R_{m,i} = \sum_{i=1}^m \mathcal{F}_i = \sum_{i=1}^m N_i I_i$



**A**

**ΚΙΝΗΣΗ ΦΟΡΤΙΣΜΕΝΩΝ ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ ΣΤΟ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΚΑΙ ΜΑΓΝΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ**

**ΚΙΝΗΣΗ ΦΟΡΤΙΣΜΕΝΟΥ ΣΩΜΑΤΙΔΙΟΥ ΣΕ ΣΤΑΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ**

<b>A.1</b>	Γενική εξίσωση κίνησης για μη ρελατιβιστικές περιπτώσεις	$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$
<b>A.2</b>	Αρχή διατήρησης της ενέργειας	$\frac{1}{2}mv^2 + q\phi = const$
<b>A.3</b>	Ταχύτητα σωματιδίου με φορτίο $q$ και μάζα $m$ που μεταβαίνει από θέση μηδενικού δυναμικού σε θέση δυναμικού $V$ με μηδενική αρχική ταχύτητα	$v = \sqrt{\frac{2 q V}{m}}$

**ΚΙΝΗΣΗ ΦΟΡΤΙΣΜΕΝΟΥ ΣΩΜΑΤΙΔΙΟΥ ΣΕ ΗΛΕΚΤΡΟΣΤΑΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ**

<b>A.4</b>	Εξίσωση κίνησης	$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{E}$
<b>A.5</b>	Ταχύτητα σωματιδίου ( $q, m$ ) που εισέρχεται με ταχύτητα $\mathbf{v}_0$ σε ηλεκτροστατικό πεδίο $\mathbf{E}$	$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \frac{q}{m}\mathbf{E}t + \mathbf{v}_0$
<b>A.6</b>	Συνιστώσες της ταχύτητας (παράλληλη και κάθετη προς τη διεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου $\mathbf{E}$ )	$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\parallel} &= \frac{q}{m}\mathbf{E}t + \mathbf{v}_{0\parallel} \\ \mathbf{v}_{\perp} &= \mathbf{v}_{0\perp} \end{aligned}$
<b>A.7</b>	Επιβατική ακτίνα σωματιδίου ( $q, m$ ) που εισέρχεται με ταχύτητα $\mathbf{v}_0$ από αρχική επιβατική ακτίνα $\mathbf{r}_0$ σε ηλεκτροστατικό πεδίο $\mathbf{E}$	$\mathbf{r}(t) = \frac{q}{2m}\mathbf{E}t^2 + \mathbf{v}_0t + \mathbf{r}_0$
<b>A.8</b>	Συνιστώσες της επιβατικής ακτίνας (παράλληλη και κάθετη προς τη διεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου $\mathbf{E}$ )	$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\parallel} &= \frac{q}{2m}\mathbf{E}t^2 + \mathbf{v}_{0\parallel}t + \mathbf{r}_{0\parallel} \\ \mathbf{r}_{\perp} &= \mathbf{v}_{0\perp}t + \mathbf{r}_{0\perp} \end{aligned}$

**ΚΙΝΗΣΗ ΦΟΡΤΙΣΜΕΝΟΥ ΣΩΜΑΤΙΔΙΟΥ ΣΕ ΜΑΓΝΗΤΟΣΤΑΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ**

<b>A.9</b>	Εξίσωση κίνησης	$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$
<b>A.10</b>	Συνιστώσες της ταχύτητας (παράλληλη και κάθετη στη διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου)	$\mathbf{v}_{\parallel} = const. \quad \mathbf{v}_{\perp}^2 = const.$

A.11	Ακτίνα κυκλικής περιστροφής σωματιδίου ( $q, m$ )	$R = \frac{mv_{\perp}}{ q B}$
A.12	Περίοδος κυκλικής περιστροφής σωματιδίου ( $q, m$ )	$T = \frac{2\pi R}{v_{\perp}} = \frac{2\pi m}{ q B}$
A.13	Γωνιακή συχνότητα ή κυκλοτρονική συχνότητα της κυκλικής περιστροφής σωματιδίου ( $q, m$ )	$\omega_c = \frac{2\pi}{T} = \frac{ q B}{m}$

**ΚΙΝΗΣΗ ΦΟΡΤΙΣΜΕΝΟΥ ΣΩΜΑΤΙΔΙΟΥ ΣΕ ΔΙΑΣΤΑΥΡΟΥΜΕΝΑ ΠΕΔΙΑ**

A.14	Γενική εξίσωση κίνησης	$m \frac{d\mathbf{v}_{\parallel}}{dt} + m \frac{d\mathbf{v}_{\perp}}{dt} = q(\mathbf{E}_{\parallel} + \mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{B})$
A.15	Επιμέρους εξισώσεις κίνησης	$m \frac{d\mathbf{v}_{\parallel}}{dt} = q\mathbf{E}_{\parallel}$ $m \frac{d\mathbf{v}_{\perp}}{dt} = q(\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{B})$
A.16	Παράλληλη συνιστώσα στη διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου της ταχύτητας και της επιβατικής ακτίνας (Ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση)	$\mathbf{v}_{\parallel} = \frac{q}{m} \mathbf{E}_{\parallel} t + \mathbf{v}_{0\parallel}$ $\mathbf{r}_{\parallel} = \frac{q}{2m} \mathbf{E}_{\parallel} t^2 + \mathbf{v}_{0\parallel} t + \mathbf{r}_{0\parallel}$
A.17	Ανάλυση της κάθετης στη διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου συνιστώσας της ταχύτητας	$\mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v}_d + \mathbf{v}'$
A.18	Σταθερή ταχύτητα (Ευθύγραμμη ομαλή κίνηση)	$\mathbf{v}_d = \frac{\mathbf{E}_{\perp} \times \mathbf{B}}{B^2} = \text{const}$
A.19	Εξίσωση κίνησης για τη συνιστώσα $\mathbf{v}'$ (Κυκλική κίνηση με άξονα περιστροφής παράλληλο στη διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου $\mathbf{B}$ )	$m \frac{d\mathbf{v}'}{dt} = q(\mathbf{v}' \times \mathbf{B})$
A.20	Χαρακτηριστικά κυκλικής κίνησης	$R = \frac{mv'}{ q B}$ $T = \frac{2\pi R}{v'} = \frac{2\pi m}{ q B}$ $\omega_c = \frac{2\pi}{T} = \frac{ q B}{m}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Κίνηση φορτισμένου σωματιδίου σε διασταυρούμενα ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία

<b>A.21</b>	<p>Παραμετρικές εξισώσεις τροχιάς με αρχικές συνθήκες  <math>x(0) = y(0) = z(0) = 0</math> και  <math>v_{0y}(0) = v_{0z}(0) = 0, v_{0x}(0) = v_0</math></p> $x(t) = v_d t + \frac{v_0 - v_d}{\omega_c} \sin \omega_c t$ $y(t) = \frac{v_0 - v_d}{\omega_c} (\cos \omega_c t - 1)$ $z(t) = 0$	
-------------	--	--

Το αναλλοίωτο της μαγνητικής ροπής

<b>A.22</b>	<p>Μέτρο μαγνητικής ροπής του βρόχου που διαγράφει κινούμενο φορτισμένο σωματίδιο</p> $M = \frac{mv_{\perp}^2}{2B} = \frac{q}{T} \pi R^2 = const$	
<b>A.23</b>	<p>Μαγνητική ροή που διέρχεται από την επιφάνεια της κυκλικής τροχιάς</p> $\Phi = \pi R^2 B = \frac{2\pi m}{q^2} M = const$	
<b>A.24</b>	<p>Συνολική κινητική ενέργεια σωματιδίου</p> $W_t = \frac{1}{2} m v_{\parallel}^2 + MB = const$	

Δίοδος επιπέδων πλακών

<b>A.25</b>	<p>Συνάρτηση δυναμικού στον μεταξύ των πλακών χώρο</p> $\phi(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^{4/3} \left(\frac{J_0}{\varepsilon_0}\right)^{2/3} \left(\frac{m}{2e}\right)^{1/3} x^{4/3}$ $= \left(\frac{x}{d}\right)^{4/3} V$	
<b>A.26</b>	<p>Πυκνότητα ρεύματος <math>J_0</math> (εξίσωση των Child-Langmuir)</p> $J_0 = \frac{4}{9} \varepsilon_0 \left(\frac{2e}{m}\right)^{1/2} \frac{\phi^{3/2}(x)}{x^2}$ $= \frac{4}{9} \varepsilon_0 \left(\frac{2e}{m}\right)^{1/2} \frac{V^{3/2}}{d^2}$	

<b>X</b>	<b>ΧΡΟΝΙΚΑ ΜΕΤΑΒΑΛΛΟΜΕΝΑ ΠΕΔΙΑ</b>
----------	------------------------------------

**ΟΡΙΣΜΟΙ**

<b>X.1</b>	Ταχύτητα διάδοσης του κύματος σ' ένα μη αγώγιμο μέσο με διηλεκτρική σταθερά $\epsilon$ και μαγνητική διαπερατότητα $\mu$	$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$
<b>X.2</b>	Χαρακτηριστική σύνθετη αντίσταση μέσου με σταθερές $\epsilon$ και $\mu$	$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$
<b>X.3</b>	Μήκος κύματος	$\lambda = \frac{c}{f}$

**ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΟΥ MAXWELL**

<b>X.4</b>	Διαφορική Μορφή	$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$
<b>X.5</b>	Ολοκληρωτική Μορφή	$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} + \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$ $\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ $\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$ $\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \rho dV$

**ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΤΟΥ MAXWELL**

<b>X.6</b>	Στιγμιαίες τιμές της ηλεκτρικής και της μαγνητικής πεδιακής έντασης σε σχέση με τις μιγαδικές τιμές	$\mathbf{E} = \text{Re}(\dot{\mathbf{E}}e^{j\omega t})$ $\mathbf{H} = \text{Re}(\dot{\mathbf{H}}e^{j\omega t})$
<b>X.7</b>	Συνιστώσες της ηλεκτρικής και μαγνητικής πεδιακής έντασης σε μιγαδική μορφή	$\dot{E}_x = E_{x0}e^{j\omega\varphi_x} \quad \dot{H}_x = \dot{H}_{x0}e^{j\omega\varphi_x}$ $\dot{E}_y = E_{y0}e^{j\omega\varphi_y} \quad \dot{H}_y = \dot{H}_{y0}e^{j\omega\varphi_y}$ $\dot{E}_z = E_{z0}e^{j\omega\varphi_z} \quad \dot{H}_z = \dot{H}_{z0}e^{j\omega\varphi_z}$

<b>X.8</b>	Εξισώσεις του Maxwell σε μιγαδική μορφή για ένα γραμμικό και ισότροπο μέσο: $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ , $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ , $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$	$\nabla \times \dot{\mathbf{H}} = (\sigma + j\omega\varepsilon)\dot{\mathbf{E}} = j\omega\varepsilon_c\dot{\mathbf{E}}$ $\nabla \times \dot{\mathbf{E}} = -j\omega\mu\dot{\mathbf{H}}$ $\nabla \cdot \dot{\mathbf{H}} = 0$ $\nabla \cdot \dot{\mathbf{E}} = \frac{\dot{\rho}}{\varepsilon}$
<b>X.9</b>	Μιγαδική διηλεκτρική σταθερά	$\varepsilon_c = \varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega}$

### Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΚΥΜΑΤΟΣ

<b>X.10</b>	Γενική μορφή της εξίσωσης κύματος σε ομογενές, γραμμικό, ισότροπο και ελεύθερο πηγών ( $J_s = \rho = 0$ ) μέσο	$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0$ $\nabla^2 \mathbf{H} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0$
<b>X.11</b>	Εξίσωση κύματος σε μη αγώγιμο μέσο ( $\sigma = 0$ )	$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \Leftrightarrow \nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$ $\nabla^2 \mathbf{H} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0 \Leftrightarrow \nabla^2 \mathbf{H} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0$
<b>X.12</b>	Μονοδιάστατη εξίσωση κύματος για οποιαδήποτε συνιστώσα $\psi$ των $\mathbf{E}$ , $\mathbf{H}$ (ομογενής εξίσωση D' Alembert)	$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$
<b>X.13</b>	Γενική λύση της μονοδιάστατης εξίσωσης κύματος	$E_x(z, t) = E_x^+(z - vt) + E_x^-(z + vt)$ $E_y(z, t) = E_y^+(z - vt) + E_y^-(z + vt)$ $H_x(z, t) = H_x^+(z - vt) + H_x^-(z + vt)$ $H_y(z, t) = H_y^+(z - vt) + H_y^-(z + vt)$ $H_y^+ = \frac{E_x^+}{\eta}, H_y^- = -\frac{E_x^-}{\eta}, H_x^+ = -\frac{E_y^+}{\eta}, H_x^- = \frac{E_y^-}{\eta}$
<b>X.14</b>	Συντελεστής (σταθερά) διάδοσης κύματος	$\gamma^2 = j\omega(\mu\sigma + j\omega\varepsilon) = -\omega^2\mu\varepsilon + j\omega\mu\sigma$
<b>X.15</b>	Διανυσματική εξίσωση Helmholtz για τη διάδοση μονοχρωματικού κύματος σε ομογενές, γραμμικό και ισότροπο μέσο χωρίς διανεμημένα χωρικά φορτία	$\nabla^2 \dot{\mathbf{H}} - \gamma^2 \dot{\mathbf{H}} = 0$ $\nabla^2 \dot{\mathbf{E}} - \gamma^2 \dot{\mathbf{E}} = 0$
<b>X.16</b>	Διάδοση σε μη αγώγιμο μέσο ( $\sigma = 0$ )	$\nabla^2 \dot{\mathbf{H}} + \omega^2\mu\varepsilon\dot{\mathbf{H}} = 0$ $\nabla^2 \dot{\mathbf{E}} + \omega^2\mu\varepsilon\dot{\mathbf{E}} = 0$
<b>X.17</b>	Εξίσωση διάχυσης σε καλό αγώγιμο μέσο ( $\omega\varepsilon \ll \sigma$ )	$\nabla^2 \mathbf{G} - \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} = 0$ $\mathbf{G} = \mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{J}, \mathbf{B}$
<b>X.18</b>	Εξίσωση διάχυσης σε καλό αγώγιμο μέσο ( $\omega\varepsilon \ll \sigma$ )	$\nabla^2 \dot{\mathbf{G}} - j\omega\mu\sigma\dot{\mathbf{G}} = 0$ $\dot{\mathbf{G}} = \dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{H}}, \dot{\mathbf{J}}, \dot{\mathbf{B}}$
<b>X.19</b>	Λόγος ρεύματος μετατόπισης προς ρεύμα αγωγιμότητας (μέτρο ορισμού ενός υλικού ως καλού αγωγού ή όχι)	$Q = \frac{ \dot{\mathbf{J}}_d }{ \dot{\mathbf{J}}_c } = \frac{ j\omega\varepsilon\dot{\mathbf{E}} }{ \sigma\dot{\mathbf{E}} } = \frac{\omega\varepsilon}{\sigma}$

**ΒΑΘΜΩΤΑ ΚΑΙ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΑ ΔΥΝΑΜΙΚΑ**

X.20	Σχέσεις ορισμού του διανυσματικού δυναμικού $\mathbf{A}$ και του βαθμωτού δυναμικού $\phi$	$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$
X.21	Συνθήκη Lorentz	$\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu\epsilon \frac{\partial\phi}{\partial t} = 0$
X.22	Μη ομογενής εξίσωση Helmholtz, όταν ικανοποιείται η συνθήκη Lorentz	$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu\mathbf{J} \Leftrightarrow \square^2 \mathbf{A} = -\mu\mathbf{J}$ $\nabla^2 \phi - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \Leftrightarrow \square^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon}$
X.23	Τελεστής του D' Alembert	$\square^2 \equiv \nabla^2 - \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2}$
X.24	Μετασχηματισμός gauge του βαθμωτού και του διανυσματικού δυναμικού, όπου $\psi$ αυθαίρετη βαθμωτή συνάρτηση	$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\psi$ $\phi' = \phi - \frac{\partial\psi}{\partial t}$
X.25	Τα μετασχηματισμένα $\mathbf{A}'$ και $\phi'$ καταλήγουν στα ίδια πεδιακά μεγέθη $\mathbf{E}$ , $\mathbf{H}$ με τα αρχικά $\mathbf{A}$ και $\phi$	$\mathbf{E} = -\nabla\phi' - \frac{\partial\mathbf{A}'}{\partial t}$ $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}'$
X.26	Η $\psi$ ικανοποιεί την εξίσωση κύματος	$\nabla^2 \psi - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \square^2 \psi = 0$
X.27	Τα μετασχηματισμένα δυναμικά $\mathbf{A}'$ και $\phi'$ ικανοποιούν τη μη ομογενή εξίσωση Helmholtz	$\square^2 \mathbf{A}' = -\mu\mathbf{J}$ $\square^2 \phi' = -\frac{\rho}{\epsilon}$
X.28	Καθυστερημένα δυναμικά ή δυναμικά καθυστέρησης συναρτήσει των πηγών του πεδίου και της απόστασης από αυτές $R$	$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\mathbf{J}(x', y', z', t')}{R} dV'$ $\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{V'} \frac{\rho(x', y', z', t')}{R} dV'$
X.29	Χρόνος καθυστέρησης	$t' = t - \frac{R}{c}$
X.30	Ορισμός δυναμικού ή διανύσματος Hertz ή δυναμικού πόλωσης	$\mathbf{A} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial \mathbf{\Pi}}{\partial t}$ $\phi = -\nabla \cdot \mathbf{\Pi}$
X.31	Κυματική εξίσωση για το δυναμικό Hertz, σε μέσο όπου δεν υπάρχουν διανεμημένες πηγές	$\nabla^2 \mathbf{\Pi} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{\Pi}}{\partial t^2} = 0$
X.32	Τα διανύσματα $\mathbf{E}$ και $\mathbf{B}$ ως συναρτήσεις του δυναμικού Hertz	$\mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{\Pi}) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{\Pi}}{\partial t^2}$ $\mathbf{B} = \frac{1}{v^2} \nabla \times \frac{\partial \mathbf{\Pi}}{\partial t}$
X.33	Κυματική εξίσωση για το δυναμικό Hertz παρουσία ρευμάτων και φορτίων λόγω ηλεκτρικής πόλωσης	$\nabla^2 \mathbf{\Pi} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{\Pi}}{\partial t^2} = -\frac{\mathbf{P}}{\epsilon}$

**ΗΜΙΤΟΝΟΕΙΔΗΣ ΧΡΟΝΙΚΗ ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ – ΜΙΓΑΛΙΚΟΣ ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ**

X.34	Βαθμωτό και διανυσματικό δυναμικό	$\dot{\mathbf{B}} = \nabla \times \dot{\mathbf{A}}$ $\dot{\mathbf{E}} = -\nabla\dot{\phi} - j\omega\dot{\mathbf{A}}$
X.35	Συνθήκη Lorentz	$\nabla \cdot \dot{\mathbf{A}} + j\omega\mu\epsilon\dot{\phi} = 0$
X.36	Μη ομογενής εξίσωση Helmholtz	$\nabla^2 \dot{\mathbf{A}} + \omega^2 \mu\epsilon \dot{\mathbf{A}} = -\mu \dot{\mathbf{J}}$ $\nabla^2 \dot{\phi} + \omega^2 \mu\epsilon \dot{\phi} = -\frac{\dot{\rho}}{\epsilon}$
X.37	Ηλεκτρική πεδιακή ένταση	$\dot{\mathbf{E}} = -\frac{j}{\omega\mu\epsilon} \nabla(\nabla \cdot \dot{\mathbf{A}}) - j\omega\dot{\mathbf{A}}$
X.38	Καθυστερημένα δυναμικά	$\dot{\mathbf{A}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\dot{\mathbf{J}}(x', y', z')}{R} e^{-jkR} dV'$ $\dot{\phi} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{V'} \frac{\dot{\rho}(x', y', z')}{R} e^{-jkR} dV'$
X.39	Κυματικός αριθμός ή κυματάριθος	$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi f}{c} = \frac{2\pi}{\lambda},$
X.40	Καθυστερημένα δυναμικά κοντά σε πηγές των οποίων οι διαστάσεις είναι πολύ μικρότερες από το μήκος κύματος ( $R \ll \lambda$ )	$\dot{\mathbf{A}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\dot{\mathbf{J}}(x', y', z')}{R} dV'$ $\dot{\phi} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{V'} \frac{\dot{\rho}(x', y', z')}{R} dV'$

**ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΡΟΥΝΤΙΝΓ**

X.41	Διαφορική διατύπωση του θεωρήματος του Poynting	$-\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} + \left( \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)$
X.42	Ολοκληρωτική διατύπωση του θεωρήματος του Poynting	$-\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dV + \iiint_V \left( \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) dV$
X.43	Το θεώρημα του Poynting για μέσο ομογενές, γραμμικό και ισότροπο.	$-\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dV + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \left( \frac{1}{2} \epsilon \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2} \mu \mathbf{H}^2 \right) dV$
X.44	Το θεώρημα του Poynting σε χρονικά αμετάβλητο πεδίο	$-\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dV$
X.45	Το πραγματικό διάνυσμα Poynting $\mathbf{P}$ (ή $\mathbf{S}$ ) εκφράζει την ανά μονάδα χρόνου ενέργεια που διέρχεται από τη μονάδα επιφανείας και έχει τη διεύθυνση διάδοσης της ενέργειας	$\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$

<b>X.46</b>	Το μιγαδικό δάνυσμα Poynting $\mathbf{S}_c$	$\mathbf{S}_c = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^*)$
<b>X.47</b>	Το πραγματικό δάνυσμα Poynting $\mathbf{P}$ συναρτῆσει του μιγαδικού $\mathbf{S}_c$	$\mathbf{P} = \frac{1}{2} \text{Re}(\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}) + \frac{1}{2} \text{Re}(\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}} e^{j2\omega t})$ $\langle \mathbf{P} \rangle = \text{Re} \{ \mathbf{S}_c \}$
<b>X.48</b>	Διαφορική διατύπωση του θεωρήματος του Poynting υπό μιγαδική μορφή	$-\nabla \cdot \mathbf{S}_c = -\frac{1}{2} \nabla \cdot (\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{E}} \cdot \dot{\mathbf{J}} + j\omega \left( \frac{1}{2} \dot{\mathbf{B}} \cdot \dot{\mathbf{H}} - \frac{1}{2} \dot{\mathbf{E}} \cdot \dot{\mathbf{D}} \right)$
<b>X.49</b>	Ολοκληρωτική διατύπωση του θεωρήματος του Poynting υπό μιγαδική μορφή	$-\iint_S \mathbf{S}_c \cdot d\mathbf{S} = -\frac{1}{2} \iint_S (\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}) \cdot d\mathbf{S}$ $= \frac{1}{2} \iiint_V \dot{\mathbf{E}} \cdot \dot{\mathbf{J}} dV + \frac{j\omega}{2} \iiint_V (\dot{\mathbf{B}} \cdot \dot{\mathbf{H}} - \dot{\mathbf{E}} \cdot \dot{\mathbf{D}}) dV$
<b>X.50</b>	Πυκνότητα ενέργειας ηλεκτρικού πεδίου	$\langle w_e \rangle = \frac{1}{4} \text{Re} \{ \dot{\mathbf{E}} \cdot \dot{\mathbf{D}} \}$
<b>X.51</b>	Πυκνότητα ενέργειας μαγνητικού πεδίου	$\langle w_m \rangle = \frac{1}{4} \text{Re} \{ \dot{\mathbf{B}} \cdot \dot{\mathbf{H}} \}$
<b>X.52</b>	Πυκνότητα απωλειών Joule	$\langle w_j \rangle = \frac{1}{4} \text{Re} \{ \dot{\mathbf{E}} \cdot \dot{\mathbf{J}} \}$

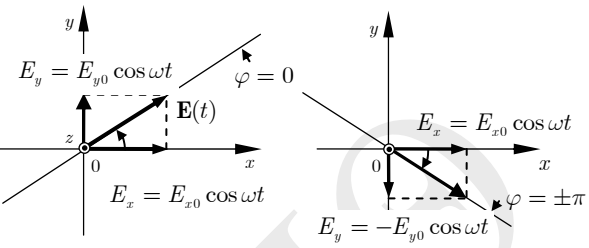
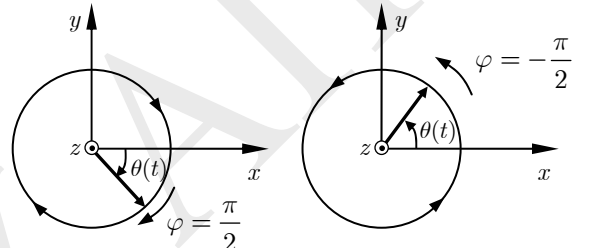
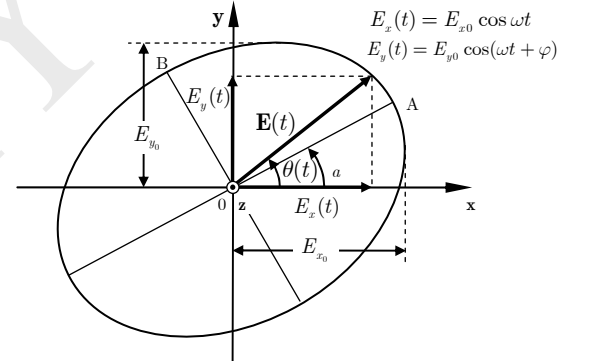
**Σημείωση:** Στις σχέσεις **X.42** και **X.43** το πρώτο ολοκλήρωμα του δεξιού μέρους εκφράζει την ανά μονάδα χρόνου ενέργεια (ισχύ) του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου που μετατρέπεται σε θερμότητα σύμφωνα με το νόμο του Joule. Το δεύτερο ολοκλήρωμα του δεξιού μέρους εκφράζει την ταχύτητα μεταβολής της ενέργειας του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου στον όγκο  $V$ .



**XI**
**ΕΠΙΠΕΔΟ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΟ ΚΥΜΑ**
**ΔΙΑΔΟΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΚΥΜΑΤΟΣ ΣΕ ΜΗ ΑΓΩΓΙΜΑ ΜΕΣΑ**

<b>XI.1</b>	Φασική σταθερά διάδοσης κύματος $\beta$	$\gamma^2 = -\omega^2 \mu \epsilon = (\pm j\beta)^2 \Rightarrow \beta = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$
<b>XI.2</b>	Μονοδιάστατη εξίσωση Helmholtz για τις συνιστώσες των διανυσμάτων $\dot{\mathbf{H}}$ και $\dot{\mathbf{E}}$ ( $\dot{H}_z = \dot{E}_z = 0$ ) επιπέδου κύματος	$\frac{d^2 \psi}{dz^2} + \beta^2 \psi = 0$ $\psi = H_x, H_y, E_x, E_y$
<b>XI.3</b>	Γενική λύση μονοδιάστατης εξίσωσης Helmholtz	$\begin{aligned} \dot{H}_x &= \dot{H}_x^+ e^{-j\beta z} + \dot{H}_x^- e^{j\beta z} & \dot{E}_x^+ &= \eta \dot{H}_y^+ \\ \dot{H}_y &= \dot{H}_y^+ e^{-j\beta z} + \dot{H}_y^- e^{j\beta z} & \dot{E}_y^+ &= -\eta \dot{H}_x^+ \\ \dot{E}_x &= \dot{E}_x^+ e^{-j\beta z} + \dot{E}_x^- e^{j\beta z} & \dot{E}_x^- &= -\eta \dot{H}_y^- \\ \dot{E}_y &= \dot{E}_y^+ e^{-j\beta z} + \dot{E}_y^- e^{j\beta z} & \dot{E}_y^- &= \eta \dot{H}_x^- \end{aligned}$ , όπου
<b>XI.4</b>	Μιγαδική ηλεκτρική και μαγνητική πεδιακή ένταση επιπέδου κύματος που διαδίδεται κατά $+z$ με $\dot{E}_x^- = \dot{E}_y^+ = \dot{E}_y^- = 0$	$\dot{\mathbf{E}} = \dot{E}_x \mathbf{x}_0 = \dot{E}_x^+ e^{-j\beta z} \mathbf{x}_0$ $\dot{\mathbf{H}} = \dot{H}_y \mathbf{y}_0 = \dot{H}_y^+ e^{-j\beta z} \mathbf{y}_0 = \frac{\dot{E}_x^+}{\eta} e^{-j\beta z} \mathbf{y}_0 \quad \text{και} \quad \dot{E}_x^+ = E_0 e^{j\varphi}$
<b>XI.5</b>	Στιγμαiίες τιμές ηλεκτρικής και μαγνητικής πεδιακής έντασης επιπέδου κύματος που διαδίδεται κατά $+z$	$\mathbf{E}(z, t) = \text{Re}(\dot{\mathbf{E}} e^{j\omega t}) = E_0 \cos(\omega t - \beta z + \varphi) \mathbf{x}_0$ $\mathbf{H}(z, t) = \text{Re}(\dot{\mathbf{H}} e^{j\omega t}) = \frac{E_0}{\eta} \cos(\omega t - \beta z + \varphi) \mathbf{y}_0$
<b>XI.6</b>	Φασική ταχύτητα	$v_p = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}$
<b>XI.7</b>	Μήκος κύματος	$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\omega} v_p = \frac{v_p}{f} = T v_p$
<b>XI.8</b>	Πραγματικό διάνυσμα Poynting	$\mathbf{P} = \frac{E_0^2}{2\eta} \mathbf{z}_0 + \frac{E_0^2}{2\eta} \cos 2(\omega t - \beta z + \varphi) \mathbf{z}_0$
<b>XI.9</b>	Μέση χρονική τιμή της μεταφερόμενης ισχύος	$\langle \mathbf{P} \rangle = \frac{E_0^2}{2\eta} \mathbf{z}_0$

## ΠΟΛΩΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΚΥΜΑΤΟΣ

<b>XI.10</b>	Στιγμαίαιες τιμές των συνιστωσών της ηλεκτρικής έντασης επίπεδου κύματος που διαδίδεται κατά $+z$	$E_x(t) = E_{x0} \cos \omega t$ $E_y(t) = E_{y0} \cos(\omega t + \varphi)$
<b>XI.11</b>	Γραμμικά πολωμένο κύμα ( $\theta$ : γωνία του διανύσματος $\vec{E}$ με τον άξονα $x$ ) $\varphi = 0 \Rightarrow$ (α) $\theta(t) = \arctan \left[ \frac{E_y(t)}{E_x(t)} \right] = \arctan \left( \frac{E_{y0}}{E_{x0}} \right) = \text{const.}$ (β) $\varphi = \pm \pi \Rightarrow$ $\theta(t) = \arctan \left[ \frac{E_y(t)}{E_x(t)} \right] = \arctan \left( -\frac{E_{y0}}{E_{x0}} \right) = \text{const.}$	
<b>XI.12</b>	Κυκλικά πολωμένο κύμα $E_{x0} = E_{y0} = E_0 \Rightarrow \begin{cases} E_x = E_0 \cos \omega t \\ E_y = E_0 \cos \left( \omega t \pm \frac{\pi}{2} \right) \end{cases}$ $\varphi = \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} \theta(t) = \arctan \left[ \frac{E_y(t)}{E_x(t)} \right] = \mp \omega t \\ E^2 = E_x^2 + E_y^2 = E_0^2 \end{cases}$	
<b>XI.13</b>	Ελλειπτικά πολωμένο κύμα $\begin{cases} E_x(t) = E_{x0} \cos \omega t \\ E_y(t) = E_{y0} \cos(\omega t + \varphi) \end{cases}$ $\Rightarrow \begin{cases} \frac{E_x^2}{E_{x0}^2} - \frac{2E_x E_y}{E_{x0} E_{y0}} \cos \phi + \frac{E_y^2}{E_{y0}^2} = \sin^2 \phi \\ \tan \theta(t) = \mp \frac{E_{y0}}{E_{x0}} \tan(\omega t) \end{cases}$	
<b>XI.14</b>	Ισχύς ανά μονάδα επιφανείας ελλειπτικά πολωμένου κύματος	$\langle \vec{P} \rangle = \text{Re}(\vec{S}_c) = \frac{1}{2\eta} (E_{x0}^2 + E_{y0}^2) \mathbf{z}_0$

**ΔΙΑΔΟΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΚΥΜΑΤΟΣ ΣΕ ΜΗ ΤΕΛΕΙΑ ΜΟΝΩΤΙΚΑ ΜΕΣΑ**

<b>XI.15</b>	Σταθερά διάδοσης $\gamma$ (γενική σχέση)	$\gamma^2 = j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon) = -\omega^2\mu\varepsilon + j\omega\mu\sigma \Rightarrow \gamma = \pm(\alpha + j\beta)$
<b>XI.16</b>	Σταθερά απόσβεσης κύματος	$\alpha = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}} \left[ \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} - 1 \right]^{1/2} \Rightarrow \alpha = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}} \left[ \sqrt{1 + \frac{1}{Q^2}} - 1 \right]^{1/2}$ ( $Q = \omega\varepsilon / \sigma$ )
<b>XI.17</b>	Φασική σταθερά διάδοσης κύματος	$\beta = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}} \left[ \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} + 1 \right]^{1/2} \Rightarrow \beta = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}} \left[ \sqrt{1 + \frac{1}{Q^2}} + 1 \right]^{1/2}$
<b>XI.18</b>	Χαρακτηριστική σύνθετη αντίσταση μέσου	$\eta = \frac{j\omega\mu}{\gamma} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}} \Rightarrow \eta =  \eta e^{j\theta} \quad \left(0 < \theta < \frac{\pi}{4}\right)$ $ \eta  = \frac{(\mu/\varepsilon)^{1/2}}{\left[1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2\right]^{1/4}} = \frac{(\mu/\varepsilon)^{1/2}}{\left[1 + \frac{1}{Q^2}\right]^{1/4}}$ $\theta = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right) = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{1}{Q}\right)$
<b>XI.19</b>	Ηλεκτρική και μαγνητική πεδιακή ένταση επιπέδου κύματος (μγαδική παράσταση)	$\dot{\mathbf{E}} = E_{x0}e^{-az}e^{j(\varphi-\beta z)}\mathbf{x}_0$ $\dot{\mathbf{H}} = \frac{E_{x0}}{ \eta }e^{-az}e^{j(\varphi-\theta-\beta z)}\mathbf{y}_0$
<b>XI.20</b>	Στιγμαίαιες τιμές ηλεκτρικής και μαγνητικής πεδιακής έντασης επιπέδου κύματος	$\mathbf{E}(z,t) = \text{Re}(\dot{\mathbf{E}}e^{j\omega t}) = E_{x0}e^{-az} \cos(\omega t - \beta z + \varphi)\mathbf{x}_0$ $\mathbf{H}(z,t) = \text{Re}(\dot{\mathbf{H}}e^{j\omega t}) = \frac{E_{x0}}{ \eta }e^{-az} \cos(\omega t - \beta z + \varphi - \theta)\mathbf{y}_0$
<b>XI.21</b>	Φασική ταχύτητα	$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \frac{1}{\left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} + 1\right]^{1/2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\mu\varepsilon} \left[\sqrt{1 + \frac{1}{Q^2}} + 1\right]^{1/2}}$
<b>XI.22</b>	Μήκος κύματος	$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\omega} v_p = \frac{2\pi}{\omega} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\mu\varepsilon} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} + 1\right]^{1/2}} = \frac{2\pi}{\omega} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\mu\varepsilon} \left[\sqrt{1 + \frac{1}{Q^2}} + 1\right]^{1/2}}$

**Διάδοση σε καλό διηλεκτρικό ( $Q \gg 1$ )**

<b>XI.23</b>	Σταθερά απόσβεσης του κύματος	$a \cong \frac{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}{2Q} = \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$
<b>XI.24</b>	Φασική σταθερά διάδοσης του κύματος	$\beta \cong \omega\sqrt{\mu\varepsilon} \left(1 + \frac{1}{8Q^2}\right) \cong \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$
<b>XI.25</b>	Χαρακτηριστική σύνθετη αντίσταση του μέσου	$\eta \cong \frac{\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}}{\left(1 + \frac{1}{4Q^2}\right)} e^{j\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{Q}\right)} \cong \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$
<b>XI.26</b>	Φασική ταχύτητα	$v_p \cong \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \left(1 - \frac{1}{8Q^2}\right) \cong \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$

<b>XI.27</b>	Μήκος κύματος	$\lambda \cong \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}} \left(1 - \frac{1}{8Q^2}\right) \cong \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}$
--------------	---------------	---

<b>Διάδοση σε καλό αγωγό (<math>Q \ll 1</math>)</b>		
<b>XI.28</b>	Σταθερά απόσβεσης του κύματος	$\alpha \cong \sqrt{\frac{\mu\sigma\omega}{2}} \left(1 - \frac{1}{2}Q\right) \cong \sqrt{\frac{\mu\sigma\omega}{2}}$
<b>XI.29</b>	Φασική σταθερά διάδοσης του κύματος	$\beta \cong \sqrt{\frac{\mu\sigma\omega}{2}} \left(1 + \frac{1}{2}Q\right) \cong \sqrt{\frac{\mu\sigma\omega}{2}}$
<b>XI.30</b>	Χαρακτηριστική σύνθετη αντίσταση μέσου	$\eta \cong \sqrt{\frac{\mu Q}{\varepsilon}} e^{\frac{j}{2} \arctan\left(\frac{1}{Q}\right)} \cong \sqrt{\frac{\mu\omega}{\sigma}} e^{j\frac{\pi}{4}} = \sqrt{\frac{j\mu\omega}{\sigma}}$
<b>XI.31</b>	Φασική ταχύτητα	$v_p = \frac{\omega}{\beta} \cong \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}} \left(1 - \frac{1}{2}Q\right) \cong \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}}$
<b>XI.32</b>	Μήκος κύματος	$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \cong 2\pi \sqrt{\frac{2}{\mu\sigma\omega}} \left(1 - \frac{1}{2}Q\right) \cong 2\pi \sqrt{\frac{2}{\mu\sigma\omega}}$
<b>XI.33</b>	Βάθος διείσδυσης	$\delta \cong \frac{1}{\alpha} \cong \frac{1}{\beta} \cong \sqrt{\frac{2}{\mu\sigma\omega}} \cong \frac{\lambda}{2\pi}$

**ΤΟ ΠΕΛΙΟ ΜΕΣΑ ΣΕ ΑΓΩΓΙΜΑ ΜΕΣΑ – ΕΞΙΣΩΣΗ ΔΙΑΧΥΣΗΣ**

<b>XI.34</b>	Εξίσωση διάχυσης	$\nabla^2 \mathbf{G} - \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} = 0$ $\mathbf{G} = \mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{J}, \mathbf{B}$
<b>XI.35</b>	Εξίσωση διάχυσης (μγαδική μορφή)	$\nabla^2 \dot{\mathbf{G}} - j\omega\mu\sigma \dot{\mathbf{G}} = \nabla^2 \dot{\mathbf{G}} - \gamma^2 \dot{\mathbf{G}} = 0$ $\mathbf{G} = \mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{J}, \mathbf{B}$
<b>XI.36</b>	Σταθερά διάδοσης	$\gamma^2 = (\alpha + j\beta)^2 = j\omega\mu\sigma = [(\omega\mu\sigma)^{1/2} j^{1/2}]^2 = \left[\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}(1 + j)\right]^2$
<b>XI.37</b>	Σταθερά απόσβεσης και φασική σταθερά διάδοσης	$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{\mu\omega\sigma}{2}} = \frac{1}{\delta}$
<b>XI.38</b>	Εξίσωση της ροής σε “πορώδες” μέσο	$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{J}}{\sigma} = \frac{\rho}{\sigma} \mathbf{v}$

<b>Το πεδίο σε ημιάπειρο αγώγιμο μέσο (<math>\dot{E}_x^- = 0</math>)</b>		
<b>XI.39</b>	Ηλεκτρική πεδιακή ένταση (ο δείκτης $s$ αναφέρεται στη διαχωριστική επιφάνεια) $\dot{\mathbf{E}} = \dot{E}_x^+ e^{-(1+j)\frac{z}{\delta}} \mathbf{x}_0 \Rightarrow \dot{\mathbf{E}} = \dot{E}_s e^{-(1+j)\frac{z}{\delta}} \mathbf{x}_0$ $\dot{E}_s = \dot{E}_x^+$	
<b>XI.40</b>	Μαγνητική πεδιακή ένταση $\dot{\mathbf{H}} = \frac{\dot{E}_x^+}{\eta} e^{-(1+j)\frac{z}{\delta}} \mathbf{y}_0 \Rightarrow \dot{\mathbf{H}} = \dot{H}_s e^{-(1+j)\frac{z}{\delta}} \mathbf{y}_0$ $\dot{H}_s = \frac{\dot{E}_s}{\eta} = \sqrt{\frac{\sigma}{\mu\omega}} \dot{E}_s e^{-j\frac{\pi}{4}}$	
<b>XI.41</b>	Πυκνότητα ρεύματος	$\dot{\mathbf{J}} = \dot{J}_s e^{-(1+j)\frac{z}{\delta}} \mathbf{x}_0 \Rightarrow \dot{\mathbf{J}} = \dot{J}_s e^{-(1+j)\frac{z}{\delta}} e^{j\varphi} \mathbf{x}_0$ $\dot{J}_s = \sigma \dot{E}_x^+, \dot{J}_s = \dot{J}_s e^{j\varphi}$
<b>XI.42</b>	Μαγνητική επαγωγή	$\dot{\mathbf{B}} = \dot{B}_s e^{-(1+j)\frac{z}{\delta}} \mathbf{y}_0 \Rightarrow \dot{\mathbf{B}} = \sqrt{\frac{\mu}{\sigma\omega}} \dot{J}_s e^{-(1+j)\frac{z}{\delta}} e^{j(\varphi - \frac{\pi}{4})} \mathbf{y}_0$ $\dot{B}_s = \mu \dot{H}_s = \frac{\mu}{\eta} \dot{E}_s = \sqrt{\frac{\mu\sigma}{\omega}} \dot{E}_s e^{-j\frac{\pi}{4}} = \sqrt{\frac{\mu}{\sigma\omega}} \dot{J}_s e^{-j\frac{\pi}{4}}$
<b>XI.43</b>	Στιγμαίες τιμές των διανυσμάτων $\mathbf{J}$ και $\mathbf{B}$	$\mathbf{J} = \text{Re}(\dot{\mathbf{J}} e^{j\omega t}) = J_s e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta} + \varphi\right) \mathbf{x}_0$ $\mathbf{B} = \text{Re}(\dot{\mathbf{B}} e^{j\omega t}) = \sqrt{\frac{\mu}{\sigma\omega}} J_s e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta} + \varphi - \frac{\pi}{4}\right) \mathbf{y}_0$
<b>XI.44</b>	Συνολικό ρεύμα που ρέει σε επίπεδο “στρώμα” του ημιάπειρου αγώγιμου μέσου μοναδιαίου πάχους	$\dot{I} = \int_0^\infty \dot{J} dz = \frac{J_s \delta}{\sqrt{2}} e^{j(\varphi - \frac{\pi}{4})}$
<b>XI.45</b>	Στιγμαία τιμή του ρεύματος	$I(t) = \text{Re}(\dot{I} e^{j\omega t}) = \frac{J_s \delta}{\sqrt{2}} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4} + \varphi\right)$
<b>XI.46</b>	Μέση χρονική ισχύς ωμικών απωλειών ανά μονάδα μήκους κατά τη διεύθυνση του ρεύματος στο αγώγιμο στρώμα	$\langle P \rangle = \frac{1}{2\sigma} \int_0^\infty \dot{J} \dot{J}^* dz = \int_0^\infty \frac{J_s^2}{2\sigma} e^{-2\frac{z}{\delta}} dz = \frac{J_s^2 \delta}{4\sigma} \Rightarrow$ $\langle P \rangle = \frac{I_{rms}^2}{\sigma \delta} = R I_{rms}^2$
<b>XI.47</b>	Ενδεικνύμενη τιμή του ρεύματος	$I_{rms} = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{J_s \delta}{2}$
<b>XI.48</b>	Ισοδύναμη ωμική αντίσταση	$R = \frac{\langle P \rangle}{I_{rms}^2} = \frac{1}{\sigma \delta}$

Ανάπτυξη ρευμάτων σε αγώγιμη πλάκα (η πλάκα εκτείνεται στο άπειρο κατά τους άξονες $x$ και $y$ , έχει πάχος $2b$ κατά τον άξονα $z$ , ενώ η πυκνότητα ρεύματος θεωρείται παράλληλη στον άξονα $x$ και έχει την τιμή $\dot{J}_0$ στο μέσο επίπεδο $z=0$ της πλάκας)		
<b>XI.49</b>	Εξίσωση διάχυσης για την πυκνότητα ρεύματος $\frac{d^2 \dot{\mathbf{J}}}{dz^2} - j\omega\mu\sigma \dot{\mathbf{J}} = 0$	
<b>XI.50</b>	Γενική λύση της εξίσωσης διάχυσης $\dot{\mathbf{j}} = \left[ \dot{J}_x^+ e^{-(1+j)\frac{z}{\delta}} + \dot{J}_x^- e^{(1+j)\frac{z}{\delta}} \right] \mathbf{x}_0$	
<b>XI.51</b>	Συνθήκη συμμετρίας και αρχική συνθήκη $\dot{J}(z) = \dot{J}(-z)$ $\dot{J}(0) = \dot{J}_x^+ + \dot{J}_x^- = \dot{J}_0 \Rightarrow \dot{J}_x^+ = \dot{J}_x^- = \frac{\dot{J}_0}{2}$	
<b>XI.52</b>	Πυκνότητα ρεύματος εντός της πλάκας $\dot{\mathbf{j}} = \frac{\dot{J}_0}{2} \left[ e^{-(1+j)\frac{z}{\delta}} + e^{(1+j)\frac{z}{\delta}} \right] \mathbf{x}_0 = \dot{J}_0 \cosh \left[ (1+j)\frac{z}{\delta} \right] \mathbf{x}_0$	
<b>XI.53</b>	Πυκνότητα ρεύματος στις επιφάνειες της πλάκας ( $z = \pm b$ ) $\dot{\mathbf{J}}_s = \dot{J}_0 \cosh \left[ (1+j)\frac{b}{\delta} \right] \mathbf{x}_0$	
<b>XI.54</b>	Συνολικό ρεύμα ανά μονάδα μήκους του άξονα $y$ $\dot{I} = \frac{2\dot{J}_0\delta}{(1+j)} \sinh \left[ (1+j)\frac{b}{\delta} \right] = \frac{2\dot{J}_s\delta}{(1+j)} \tanh \left[ (1+j)\frac{b}{\delta} \right]$	
<b>XI.55</b>	Συνολικό ρεύμα ανά μονάδα μήκους όταν $b \gg \delta$ $\dot{I} \cong \frac{2\dot{J}_s\delta}{(1+j)}$	
<b>XI.56</b>	Πυκνότητα ρεύματος ως συνάρτηση του συνολικού ρεύματος που διαρρέει την πλάκα $\dot{\mathbf{j}} = \dot{I} \frac{(1+j)}{2\delta} \frac{\cosh \left[ (1+j)\frac{z}{\delta} \right]}{\sinh \left[ (1+j)\frac{b}{\delta} \right]} \mathbf{x}_0$	
<b>XI.57</b>	Ηλεκτρική πεδιακή ένταση ως συνάρτηση του συνολικού ρεύματος που διαρρέει την πλάκα $\dot{\mathbf{E}} = \frac{\dot{\mathbf{j}}}{\sigma} = \dot{I} \frac{(1+j)}{2\sigma\delta} \frac{\cosh \left[ (1+j)\frac{z}{\delta} \right]}{\sinh \left[ (1+j)\frac{b}{\delta} \right]} \mathbf{x}_0$	
<b>XI.58</b>	Μαγνητική επαγωγή ως συνάρτηση του συνολικού ρεύματος που διαρρέει την πλάκα $\dot{\mathbf{B}} = -\frac{\nabla \times \dot{\mathbf{E}}}{j\omega} = -\frac{\dot{I}}{\omega\sigma\delta^2} \frac{\sinh \left[ (1+j)\frac{z}{\delta} \right]}{\sinh \left[ (1+j)\frac{b}{\delta} \right]} \mathbf{y}_0 = -\frac{\mu\dot{I}}{2} \frac{\sinh \left[ (1+j)\frac{z}{\delta} \right]}{\sinh \left[ (1+j)\frac{b}{\delta} \right]} \mathbf{y}_0$	
<b>XI.59</b>	Μαγνητική πεδιακή ένταση ως συνάρτηση του συνολικού ρεύματος που διαρρέει την πλάκα $\dot{\mathbf{H}} = \frac{\dot{\mathbf{B}}}{\mu} = -\frac{\dot{I}}{2} \frac{\sinh \left[ (1+j)\frac{z}{\delta} \right]}{\sinh \left[ (1+j)\frac{b}{\delta} \right]} \mathbf{y}_0$	

<b>XI.60</b>	Μαγνητική πεδιακή ένταση στις επιφάνειες της πλάκας	$\dot{\mathbf{H}}\Big _{z=-b} = -\dot{\mathbf{H}}\Big _{z=b} = \frac{\dot{I}}{2} \mathbf{y}_0 = \dot{H}_s \mathbf{y}_0$
<b>XI.61</b>	Ηλεκτρική πεδιακή ένταση στις επιφάνειες της πλάκας	$\dot{\mathbf{E}}_s = \dot{\mathbf{E}}\Big _{z=b} = \dot{\mathbf{E}}\Big _{z=-b} = \frac{\dot{\mathbf{J}}_s}{\sigma} = \dot{I} \frac{(1+j)}{2\sigma\delta} \coth\left[(1+j)\frac{b}{\delta}\right] \mathbf{x}_0$
<b>XI.62</b>	Μέση χρονική ισχύς ωμικών απωλειών στην πλάκα	$\langle P \rangle = \frac{ \dot{I} ^2}{4\sigma\delta} \frac{\sinh\left(\frac{2b}{\delta}\right) + \sin\left(\frac{2b}{\delta}\right)}{\cosh\left(\frac{2b}{\delta}\right) - \cos\left(\frac{2b}{\delta}\right)}$
<b>XI.63</b>	Ωμική αντίσταση τμήματος της πλάκας με μοναδιαίο μήκος κατά τους άξονες $x$ και $y$	$\langle P \rangle = \frac{1}{2}  \dot{I} ^2 R \Rightarrow R = \frac{1}{2\sigma\delta} \frac{\sinh\left(\frac{2b}{\delta}\right) + \sin\left(\frac{2b}{\delta}\right)}{\cosh\left(\frac{2b}{\delta}\right) - \cos\left(\frac{2b}{\delta}\right)}$
<b>XI.64</b>	Τάση στην επιφάνεια της πλάκας σε μοναδιαίο μήκος κατά τη διεύθυνση του άξονα $x$	$\dot{V} = \frac{\dot{J}_s}{\sigma}$
<b>XI.65</b>	Σύνθετη αντίσταση τμήματος της πλάκας με μοναδιαίο μήκος κατά τους άξονες $x$ και $y$	$Z = \frac{\dot{V}}{\dot{I}} = \frac{1}{2\sigma\delta} \frac{(1+j)}{\tanh\left[(1+j)\frac{b}{\delta}\right]}$ $= \frac{1}{2\sigma\delta} \frac{\sinh\left(\frac{2b}{\delta}\right) + \sin\left(\frac{2b}{\delta}\right)}{\cosh\left(\frac{2b}{\delta}\right) - \cos\left(\frac{2b}{\delta}\right)} + j \frac{1}{2\sigma\delta} \frac{\sinh\left(\frac{2b}{\delta}\right) - \sin\left(\frac{2b}{\delta}\right)}{\cosh\left(\frac{2b}{\delta}\right) - \cos\left(\frac{2b}{\delta}\right)}$
<b>XI.66</b>	Αντίσταση στο συνεχές ρεύμα	$R_0 = \frac{1}{2b\sigma}$
<b>XI.67</b>	Λόγος της αντίστασης στο εναλλασσόμενο ρεύμα προς την αντίσταση στο συνεχές ρεύμα	$f = \frac{R}{R_0} = \frac{b}{\delta} \frac{\sinh\left(\frac{2b}{\delta}\right) + \sin\left(\frac{2b}{\delta}\right)}{\cosh\left(\frac{2b}{\delta}\right) - \cos\left(\frac{2b}{\delta}\right)}$
<b>XI.68</b>	Λόγος αντιστάσεων για μικρές τιμές του λόγου $b/\delta$	$f = \frac{R}{R_0} \cong 1 + \frac{4}{45} \left(\frac{b}{\delta}\right)^4$

**Ηλεκτρικό επιδερμικό φαινόμενο σε αγωγήμη πλάκα**

<b>XI.69</b>	Λόγος της πυκνότητας ρεύματος στο εσωτερικό της πλάκας προς την πυκνότητα ρεύματος στις επιφάνειές της	$f_J = \frac{ \mathbf{j} }{ \mathbf{j}_s } = \sqrt{\frac{\cosh\left(2\frac{z}{\delta}\right) + \cos\left(2\frac{z}{\delta}\right)}{\cosh\left(2\frac{b}{\delta}\right) + \cos\left(2\frac{b}{\delta}\right)}}$
<b>XI.70</b>	Λόγος της ηλεκτρικής πεδιακής έντασης στο εσωτερικό της πλάκας προς την ηλεκτρική ένταση στις επιφάνειές της	$f_E = \frac{ \dot{\mathbf{E}} }{ \dot{\mathbf{E}}_s } = \sqrt{\frac{\cosh\left(2\frac{z}{\delta}\right) + \cos\left(2\frac{z}{\delta}\right)}{\cosh\left(2\frac{b}{\delta}\right) + \cos\left(2\frac{b}{\delta}\right)}}$

<b>XI.71</b>	Λόγος της μαγνητικής πεδιακής έντασης (επαγωγής) στο εσωτερικό της πλάκας προς την μαγνητική ένταση (επαγωγή) στις επιφάνειές της	$f_B = f_H = \frac{ \dot{\mathbf{B}} }{ \dot{\mathbf{B}}_s } = \frac{ \dot{\mathbf{H}} }{ \dot{\mathbf{H}}_s } = \frac{\left  \sinh \left[ (1+j) \frac{z}{\delta} \right] \right }{\left  \sinh \left[ (1+j) \frac{b}{\delta} \right] \right } = \sqrt{\frac{\cosh \left( 2 \frac{z}{\delta} \right) - \cos \left( 2 \frac{z}{\delta} \right)}{\cosh \left( 2 \frac{b}{\delta} \right) - \cos \left( 2 \frac{b}{\delta} \right)}}$
--------------	---	--

<b>Μαγνητικό επιδερμικό φαινόμενο σε αγωγήμη πλάκα</b> (η πλάκα είναι τοποθετημένη σε εναλλασσόμενο μαγνητικό πεδίο παράλληλο προς τις επιφάνειές της και ισχύει $\dot{\mathbf{H}}(z) = \dot{\mathbf{H}}(-z)$ )		
<b>XI.72</b>	Εξίσωση διάχυσης	$\frac{d^2 \dot{\mathbf{H}}}{dz^2} - j\omega\mu\sigma\dot{\mathbf{H}} = 0$
<b>XI.73</b>	Μαγνητική πεδιακή ένταση στο εσωτερικό της πλάκας	$\dot{\mathbf{H}} = \frac{\dot{H}_s \left[ e^{-(1+j)\frac{z}{\delta}} + e^{(1+j)\frac{z}{\delta}} \right]}{2 \cosh \left[ (1+j) \frac{b}{\delta} \right]} \mathbf{y}_0 = \dot{H}_s \frac{\cosh \left[ (1+j) \frac{z}{\delta} \right]}{\cosh \left[ (1+j) \frac{b}{\delta} \right]} \mathbf{y}_0$
<b>XI.74</b>	Ηλεκτρική πεδιακή ένταση στο εσωτερικό της πλάκας	$\dot{\mathbf{E}} = \frac{\nabla \times \dot{\mathbf{H}}}{\sigma} = -\frac{1}{\sigma} \frac{\partial \dot{\mathbf{H}}}{\partial z} \mathbf{x}_0 = -\dot{H}_s \frac{1+j}{\sigma\delta} \frac{\sinh \left[ (1+j) \frac{z}{\delta} \right]}{\cosh \left[ (1+j) \frac{b}{\delta} \right]} \mathbf{x}_0$
<b>XI.75</b>	Μαγνητική επαγωγή στο εσωτερικό της πλάκας	$\dot{\mathbf{B}} = \mu \dot{H}_s \frac{\cosh \left[ (1+j) \frac{z}{\delta} \right]}{\cosh \left[ (1+j) \frac{b}{\delta} \right]} \mathbf{y}_0$
<b>XI.76</b>	Πυκνότητα ρεύματος στο εσωτερικό της πλάκας	$\dot{\mathbf{J}} = -\dot{H}_s \frac{1+j}{\delta} \frac{\sinh \left[ (1+j) \frac{z}{\delta} \right]}{\cosh \left[ (1+j) \frac{b}{\delta} \right]} \mathbf{x}_0$
<b>XI.77</b>	Λόγος της μαγνητικής πεδιακής έντασης (επαγωγής) στο εσωτερικό της πλάκας προς την μαγνητική ένταση (επαγωγή) στις επιφάνειές της	$f_H = f_B = \frac{ \dot{\mathbf{H}} }{ \dot{\mathbf{H}}_s } = \frac{ \dot{\mathbf{B}} }{ \dot{\mathbf{B}}_s } = \frac{\left  \cosh \left[ (1+j) \frac{z}{\delta} \right] \right }{\left  \cosh \left[ (1+j) \frac{b}{\delta} \right] \right } = \sqrt{\frac{\cosh \left( \frac{2z}{\delta} \right) + \cos \left( \frac{2z}{\delta} \right)}{\cosh \left( \frac{2b}{\delta} \right) + \cos \left( \frac{2b}{\delta} \right)}}$
<b>XI.78</b>	Λόγος της ηλεκτρικής πεδιακής έντασης (πυκνότητας ρεύματος) στο εσωτερικό της πλάκας προς την ηλεκτρική ένταση (πυκνότητα ρεύματος) στις επιφάνειές της	$f_J = f_E = \frac{ \dot{\mathbf{J}} }{ \dot{\mathbf{J}}_s } = \frac{ \dot{\mathbf{E}} }{ \dot{\mathbf{E}}_s } = \frac{\left  \sinh \left[ (1+j) \frac{z}{\delta} \right] \right }{\left  \sinh \left[ (1+j) \frac{b}{\delta} \right] \right } = \sqrt{\frac{\cosh \left( \frac{2z}{\delta} \right) - \cos \left( \frac{2z}{\delta} \right)}{\cosh \left( \frac{2b}{\delta} \right) - \cos \left( \frac{2b}{\delta} \right)}}$
<b>XI.79</b>	Μέση τιμή της μαγνητικής επαγωγής	$\dot{B}_{av} = \frac{1}{2b} \int_{-b}^b \dot{B} dz = \frac{\mu \dot{H}_s}{1+j} \frac{\delta}{b} \tanh \left[ (1+j) \frac{b}{\delta} \right]$
<b>XI.80</b>	Μιγαδική μαγνητική διαπερατότητα	$\mu_c = \frac{\dot{B}_{av}}{\dot{H}_s} = \frac{\mu}{(1+j)} \frac{\delta}{b} \tanh \left[ (1+j) \frac{b}{\delta} \right] = \frac{\mu\delta}{b} \frac{1}{1+j} \frac{\sinh \left( \frac{2b}{\delta} \right) + j \sin \left( \frac{2b}{\delta} \right)}{\cosh \left( \frac{2b}{\delta} \right) + \cos \left( \frac{2b}{\delta} \right)} =  \mu_c  e^{j\psi}$

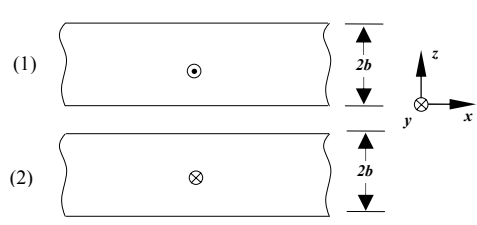


<b>XI.81</b>	Μέτρο και γωνιακή απόκλιση της μιγαδικής μαγνητικής διαπερατότητας	$ \mu_c  = \frac{\mu}{\sqrt{2}} \frac{\delta}{b} \left[ \frac{\cosh\left(\frac{2b}{\delta}\right) - \cos\left(\frac{2b}{\delta}\right)}{\cosh\left(\frac{2b}{\delta}\right) + \cos\left(\frac{2b}{\delta}\right)} \right]^{1/2}$ $\psi = \arctan \frac{\sinh\left(\frac{2b}{\delta}\right) - \sin\left(\frac{2b}{\delta}\right)}{\sinh\left(\frac{2b}{\delta}\right) + \sin\left(\frac{2b}{\delta}\right)}$
<b>XI.82</b>	Μέτρο της μιγαδικής μαγνητικής διαπερατότητας όταν $b \gg \delta$	$ \mu_c  \cong \frac{\mu}{\sqrt{2}} \frac{\delta}{b}$
<b>XI.83</b>	Μέση χρονική ισχύς απωλειών που οφείλονται στα αναπτυσσόμενα δινορρέυματα στο υλικό της πλάκας	$\langle P \rangle = \frac{ \dot{H}_s ^2}{\sigma \delta} \frac{\sinh\left(\frac{2b}{\delta}\right) - \sin\left(\frac{2b}{\delta}\right)}{\cosh\left(\frac{2b}{\delta}\right) + \cos\left(\frac{2b}{\delta}\right)}$

**Επιδερμικό φαινόμενο σε κυλινδρικό αγωγό ακτίνας  $a$  πολύ μεγάλου μήκους που διαρρέεται από ημιτονοειδές ρεύμα  $\dot{i}$**

<b>XI.84</b>	Εξίσωση διάχυσης	$\nabla^2 \dot{\mathbf{J}} - j\omega\mu\sigma\dot{\mathbf{J}} = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2 \dot{J}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\dot{J}}{dr} - j\mu\sigma\omega\dot{J} = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{d^2 \dot{J}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\dot{J}}{dr} + \kappa^2 \dot{J} = 0, \text{ όπου } \kappa^2 = -j\mu\sigma\omega = -\frac{2j}{\delta^2}$
<b>XI.85</b>	Πυκνότητα ρεύματος στο εσωτερικό του κυλίνδρου	$\dot{\mathbf{J}} = \frac{\kappa \dot{I}}{2\pi a J_1(\kappa a)} J_0(\kappa r) \mathbf{z}_0$ <p style="text-align: center;"><math>J_0, J_1</math> : συναρτήσεις Bessel 1<sup>ου</sup> είδους (μηδενικής και πρώτης τάξης αντίστοιχα)</p>
<b>XI.86</b>	Μαγνητική πεδιακή ένταση στο εσωτερικό του κυλίνδρου	$\dot{\mathbf{H}} = \frac{\dot{I}}{2\pi a J_1(\kappa a)} J_1(\kappa r) \boldsymbol{\varphi}_0$
<b>XI.87</b>	Ηλεκτρική πεδιακή ένταση στο εσωτερικό του κυλίνδρου	$\dot{\mathbf{E}} = \frac{\dot{\mathbf{J}}}{\sigma} = \frac{\kappa \dot{I}}{2\pi\sigma a J_1(\kappa a)} J_0(\kappa r) \mathbf{z}_0$
<b>XI.88</b>	Μαγνητική επαγωγή στο εσωτερικό του κυλίνδρου	$\dot{\mathbf{B}} = \mu \dot{\mathbf{H}} = \frac{\mu \dot{I}}{2\pi a J_1(\kappa a)} J_1(\kappa r) \boldsymbol{\varphi}_0$
<b>XI.89</b>	Πυκνότητα ρεύματος πάνω στον άξονα του αγωγού ( $r = 0$ )	$j_a = \frac{\kappa \dot{I}}{2\pi a J_1(\kappa a)}$
<b>XI.90</b>	Πυκνότητα ρεύματος πάνω στην εξωτερική επιφάνεια του αγωγού ( $r = a$ )	$\dot{J}_s = \dot{J}_a J_0(\kappa a)$
<b>XI.91</b>	Πυκνότητα ρεύματος στο εσωτερικό του αγωγού	$\dot{J} = \dot{J}_a J_0(\kappa r)$
<b>XI.92</b>	Γενική σχέση για το όρισμα $\kappa r$	$\kappa r = r\sqrt{-j}\sqrt{\mu\sigma\omega} = \sqrt{2} \frac{r}{\delta} \sqrt{-j} = \sqrt{2} \frac{r}{\delta} e^{-j\frac{\pi}{4}} = \frac{r}{\delta} (1 - j)$

<b>XI.93</b>	Ωμικές απώλειες και άεργη ισχύς, όπου $S$ η εξωτερική επιφάνεια του αγωγού	$-\frac{1}{2} \iint_S (\dot{\mathbf{E}} \times \mathbf{H}^*) \cdot d\mathbf{S} = \langle P \rangle + j \langle Q \rangle = \frac{1}{2}  i ^2 R + j \frac{1}{2}  i ^2 X = \frac{1}{2}  i ^2 Z$
<b>XI.94</b>	Ανά μονάδα μήκους σύνθετη αντίσταση του αγωγού	$Z = R + jX = \frac{-\frac{1}{2} \iint_S (\dot{\mathbf{E}} \times \mathbf{H}^*) d\mathbf{S}}{ i ^2} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma\alpha\delta} \frac{ J_0(\kappa\alpha) }{ J_1(\kappa\alpha) } e^{j(\psi_0 - \psi_1 - 45^\circ)}$ $R = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma\alpha\delta} \frac{ J_0(\kappa\alpha) }{ J_1(\kappa\alpha) } \cos(\psi_0 - \psi_1 - 45^\circ)$ $X = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma\alpha\delta} \frac{ J_0(\kappa\alpha) }{ J_1(\kappa\alpha) } \sin(\psi_0 - \psi_1 - 45^\circ)$
<b>XI.95</b>	Ανά μονάδα μήκους αντίσταση του αγωγού στο συνεχές ρεύμα	$R_0 = \frac{1}{\pi\sigma a^2}$
<b>XI.96</b>	Λόγος της αντίστασης στο εναλλασσόμενο ρεύμα προς την αντίσταση στο συνεχές	$f = \frac{R}{R_0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{\delta} \frac{ J_0(\kappa\alpha) }{ J_1(\kappa\alpha) } \cos(\psi_0 - \psi_1 - 45^\circ)$
<b>XI.97</b>	Λόγος αντιστάσεων για σχετικά παχείς αγωγούς, π.χ. όταν $a/\delta > 2$	$\frac{R}{R_0} \approx \frac{1}{2} \left( \frac{a}{\delta} + \frac{1}{2} \right)$

<b>Απώλειες γειτνίασης</b> (σε σύστημα δύο παραλλήλων αγωγίμων πλακών (1) και (2) πάχους $2b$ με πολύ μεγάλο μήκος κατά τον άξονα $x$ , στο οποίο το εναλλασσόμενο ρεύμα $\dot{I}$ , που είναι παράλληλο προς τον άξονα $y$ προσάγεται από τον έναν αγωγό και επιστρέφει από τον άλλον)		
<b>XI.98</b>	Ένταση του μαγνητικού πεδίου που οφείλεται στον αγωγό (2) στις δύο επιφάνειες του αγωγού (1) ( $\dot{I}$ το ανά μονάδα μήκους κατά $x$ ρεύμα του αγωγού)	$\dot{\mathbf{H}}_s = \frac{\dot{I}}{2} \mathbf{x}_0$ 
<b>XI.99</b>	Μέσες χρονικές απώλειες στον αγωγό (1) (ανά μονάδα μήκους κατά $x$ και $y$ )	$\langle P_1 \rangle = \langle P_{1,1} \rangle + \langle P_{2,1} \rangle = \frac{ i ^2}{4\sigma\delta} \cdot \left[ \frac{\sinh\left(\frac{2b}{\delta}\right) + \sin\left(\frac{2b}{\delta}\right)}{\cosh\left(\frac{2b}{\delta}\right) - \cos\left(\frac{2b}{\delta}\right)} + \frac{\sinh\left(\frac{2b}{\delta}\right) - \sin\left(\frac{2b}{\delta}\right)}{\cosh\left(\frac{2b}{\delta}\right) + \cos\left(\frac{2b}{\delta}\right)} \right]$
<b>XI.100</b>	Μέσες χρονικές απώλειες του συστήματος (ανά μονάδα μήκους κατά $x$ και $y$ )	$\langle P \rangle = 2\langle P_1 \rangle = \frac{1}{2}  i ^2 R = \frac{ i ^2}{2\sigma\delta} \cdot \left[ \frac{\sinh\left(\frac{2b}{\delta}\right) + \sin\left(\frac{2b}{\delta}\right)}{\cosh\left(\frac{2b}{\delta}\right) - \cos\left(\frac{2b}{\delta}\right)} + \frac{\sinh\left(\frac{2b}{\delta}\right) - \sin\left(\frac{2b}{\delta}\right)}{\cosh\left(\frac{2b}{\delta}\right) + \cos\left(\frac{2b}{\delta}\right)} \right]$
<b>XI.101</b>	Ανά μονάδα μήκους και επιφανείας αντίσταση της γραμμής των δύο αγωγών (ανά μονάδα μήκους κατά $x$ και $y$ )	$R = \frac{1}{\sigma\delta} \left[ \frac{\sinh\left(\frac{2b}{\delta}\right) + \sin\left(\frac{2b}{\delta}\right)}{\cosh\left(\frac{2b}{\delta}\right) - \cos\left(\frac{2b}{\delta}\right)} + \frac{\sinh\left(\frac{2b}{\delta}\right) - \sin\left(\frac{2b}{\delta}\right)}{\cosh\left(\frac{2b}{\delta}\right) + \cos\left(\frac{2b}{\delta}\right)} \right]$
<b>XI.102</b>	Αντίσταση της γραμμής στο συνεχές ρεύμα (ανά μονάδα μήκους κατά $x$ και $y$ )	$R_0 = \frac{1}{\sigma b}$

<b>XI.103</b>	Λόγος της αντίστασης στο εναλλασσόμενο ρεύμα προς την αντίσταση στο συνεχές	$\frac{R}{R_0} = \frac{b}{\delta} \left[ \frac{\sinh\left(\frac{2b}{\delta}\right) + \sin\left(\frac{2b}{\delta}\right)}{\cosh\left(\frac{2b}{\delta}\right) - \cos\left(\frac{2b}{\delta}\right)} + \frac{\sinh\left(\frac{2b}{\delta}\right) - \sin\left(\frac{2b}{\delta}\right)}{\cosh\left(\frac{2b}{\delta}\right) + \cos\left(\frac{2b}{\delta}\right)} \right]$ $= \frac{2b}{\delta} \frac{\sinh\left(\frac{4b}{\delta}\right) + \sin\left(\frac{4b}{\delta}\right)}{\cosh\left(\frac{4b}{\delta}\right) - \cos\left(\frac{4b}{\delta}\right)}$
---------------	---	---

**ΔΙΑΔΟΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΚΥΜΑΤΟΣ ΚΑΤΑ ΤΥΧΟΥΣΑ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ**

<b>XI.104</b>	$\mathbf{n}_0$ : μοναδιαίο διάνυσμα παράλληλο προς τη διεύθυνση διάδοσης $\zeta$ : απόσταση, από την αρχή O , τυχόντος επιπέδου καθέτου προς τη διεύθυνση διάδοσης $\mathbf{r}$ : διανυσματική απόσταση από την αρχή O των σημείων του επιπέδου	$\zeta = \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}$
<b>XI.105</b>	Ηλεκτρική πεδιακή ένταση	$\dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{E}}_{0i} e^{-\gamma\zeta} + \dot{\mathbf{E}}_{0r} e^{\gamma\zeta} = \dot{\mathbf{E}}_{0i} e^{-\gamma n r} + \dot{\mathbf{E}}_{0r} e^{\gamma n r}$
<b>XI.106</b>	Μαγνητική πεδιακή ένταση	$\dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{H}}_{0i} e^{-\gamma\zeta} + \dot{\mathbf{H}}_{0r} e^{\gamma\zeta} = \frac{1}{\eta} (\mathbf{n}_0 \times \dot{\mathbf{E}}_{0i} e^{-\gamma n r} - \mathbf{n}_0 \times \dot{\mathbf{E}}_{0r} e^{\gamma n r})$
<b>XI.107</b>	Μέση χρονική τιμή της ανά μονάδα επιφάνειας διαδιδόμενης ισχύος	$\langle \mathbf{P} \rangle = \frac{1}{2\eta} \operatorname{Re} \left\{  \dot{\mathbf{E}}_{0i} ^2 \mathbf{n}_0 -  \dot{\mathbf{E}}_{0r} ^2 \mathbf{n}_0 \right\} = \frac{ \dot{\mathbf{E}}_{0i} ^2}{2\eta} \mathbf{n}_0 - \frac{ \dot{\mathbf{E}}_{0r} ^2}{2\eta} \mathbf{n}_0 = \langle \mathbf{P}_i \rangle - \langle \mathbf{P}_r \rangle$
<b>XI.108</b>	Μέση χρονική ισχύς προσπίπτοντος κύματος	$\langle \mathbf{P}_i \rangle = \frac{ \dot{\mathbf{E}}_{0i} ^2}{2\eta} \mathbf{n}_0$
<b>XI.109</b>	Μέση χρονική ισχύς ανακλώμενου κύματος	$\langle \mathbf{P}_r \rangle = \frac{ \dot{\mathbf{E}}_{0r} ^2}{2\eta} \mathbf{n}_0$
<b>XI.110</b>	Ταχύτητα ομάδας	$v_g = \frac{dz}{dt} = \left( \frac{d\omega}{d\beta} \right)_{\beta=\beta_0}$

**ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΗΣ ΑΜΟΙΒΑΙΟΤΗΤΑΣ**

<b>XI.111</b>	Διαφορική διατύπωση του θεωρήματος της αμοιβαιότητας	$\nabla \cdot (\dot{\mathbf{E}}_1 \times \dot{\mathbf{H}}_2 - \dot{\mathbf{E}}_2 \times \dot{\mathbf{H}}_1) = \dot{\mathbf{E}}_2 \cdot \dot{\mathbf{J}}_1 - \dot{\mathbf{E}}_1 \cdot \dot{\mathbf{J}}_2$
<b>XI.112</b>	Ολοκληρωτική διατύπωση του θεωρήματος της αμοιβαιότητας	$\oiint_S (\dot{\mathbf{E}}_1 \times \dot{\mathbf{H}}_2 - \dot{\mathbf{E}}_2 \times \dot{\mathbf{H}}_1) \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V (\dot{\mathbf{E}}_2 \cdot \dot{\mathbf{J}}_1 - \dot{\mathbf{E}}_1 \cdot \dot{\mathbf{J}}_2) dV$

<p><b>XI.113</b></p>	<p>Μαθηματική διατύπωση του θεωρήματος της αμοιβαιότητας (<math>\mathbf{J}_1 = \mathbf{J}_2 = 0</math>)</p>	$\nabla \cdot (\dot{\mathbf{E}}_1 \times \dot{\mathbf{H}}_2 - \dot{\mathbf{E}}_2 \times \dot{\mathbf{H}}_1) = 0$ $\oiint_S (\dot{\mathbf{E}}_1 \times \dot{\mathbf{H}}_2 - \dot{\mathbf{E}}_2 \times \dot{\mathbf{H}}_1) \cdot d\mathbf{S} = 0$
<p><b>XI.114</b></p>	<p>Το θεώρημα της αμοιβαιότητας, όταν η επιφάνεια <math>S</math> που περικλείει τον όγκο <math>V</math> είναι πολύ απομακρυσμένη από τις πηγές</p>	$\iiint_V (\dot{\mathbf{E}}_2 \cdot \dot{\mathbf{J}}_1) dV = \iiint_V (\dot{\mathbf{E}}_1 \cdot \dot{\mathbf{J}}_2) dV$

ΤΗΝ ΜΟΥ ΑΓΙΟ

XII	ΑΝΑΚΛΑΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑΘΛΑΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΚΥΜΑΤΟΣ
-----	---

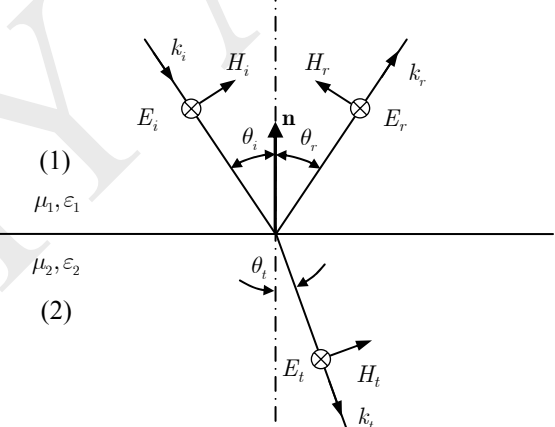
ΝΟΜΟΙ ΑΝΑΚΛΑΣΗΣ – ΔΙΑΘΛΑΣΗΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΚΥΜΑΤΟΣ

XII.1	Κυματικός αριθμός ( $\mathbf{n}$ : διεύθυνση διάδοσης του κύματος)	$k = \beta = \frac{\omega}{v_p} = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ , $\mathbf{k} = k\mathbf{n} = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\mathbf{n}$
XII.2	Επίπεδο H/M κύμα για διάδοση παράλληλη προς τη θετική διεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος $\mathbf{n}$	$\dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{E}}_0 e^{-jk\cdot\mathbf{r}}$ $\dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{H}}_0 e^{-jk\cdot\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{E}}}{\eta} = \frac{\mathbf{k} \times \dot{\mathbf{E}}}{\mu\omega}$
XII.3	Ένταση ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου προσπίπτοντος κύματος στην επίπεδη διαχωριστική επιφάνεια δύο μέσων 1 και 2 (πρόσπτωση από το μέσο 1 στο μέσο 2)	$\dot{\mathbf{E}}_i = \dot{\mathbf{E}}_{0i} e^{-jk_i\cdot\mathbf{r}}$ $\dot{\mathbf{H}}_i = \dot{\mathbf{H}}_{0i} e^{-jk_i\cdot\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{n}_i \times \dot{\mathbf{E}}_i}{\eta_1} = \frac{\mathbf{k}_i \times \dot{\mathbf{E}}_i}{\mu_1\omega}$
XII.4	Ένταση ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου ανακλώμενου κύματος	$\dot{\mathbf{E}}_r = \dot{\mathbf{E}}_{0r} e^{-jk_r\cdot\mathbf{r}}$ $\dot{\mathbf{H}}_r = \dot{\mathbf{H}}_{0r} e^{-jk_r\cdot\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{n}_r \times \dot{\mathbf{E}}_r}{\eta_1} = \frac{\mathbf{k}_r \times \dot{\mathbf{E}}_r}{\mu_1\omega}$
XII.5	Ένταση ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου διαθλώμενου κύματος	$\dot{\mathbf{E}}_t = \dot{\mathbf{E}}_{0t} e^{-jk_t\cdot\mathbf{r}}$ $\dot{\mathbf{H}}_t = \dot{\mathbf{H}}_{0t} e^{-jk_t\cdot\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{E}}_t}{\eta_2} = \frac{\mathbf{k}_t \times \dot{\mathbf{E}}_t}{\mu_2\omega}$
XII.6	Γενικές σχέσεις μεταξύ γωνιών πρόσπτωσης, ανάκλασης και διάθλασης	$\theta_i = \theta_r$ $\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \frac{v_1}{v_2}$
XII.7	Δείκτης διάθλασης μέσου με διηλεκτρική σταθερά $\varepsilon$ και μαγνητική διαπερατότητα $\mu$	$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{\mu_0\varepsilon_0}} = \sqrt{\mu_r\varepsilon_r}$
XII.8	Νόμος του Snell ( $n_{12}$ είναι ο σχετικός δείκτης διάθλασης του μέσου 2 ως προς το μέσο 1)	$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \sqrt{\frac{\mu_2\varepsilon_2}{\mu_1\varepsilon_1}} = \frac{n_2}{n_1} = n_{12}$
XII.9	Μεταβολή της γωνίας $\theta_i$ σε σχέση με τους δείκτες διάθλασης	$n_1 < n_2 \Rightarrow \theta_i < \theta_t$ $n_1 > n_2 \Rightarrow \theta_i > \theta_t$
XII.10	Κρίσιμη γωνία $\theta_c$ : για την περίπτωση που $n_1 > n_2$ , όταν $\theta_i > \theta_c$ δεν υπάρχει διάθλαση κύματος (ολική ανάκλαση)	$\sin \theta_c = \frac{n_2}{n_1}$ . Av $\mu_1 = \mu_2 \Rightarrow \sin \theta_c = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$ $\sin \theta_t = \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_c}$

**ΕΙΣΩΣΕΙΣ ΤΟΥ FRESNEL**

<b>XII.11</b>	Γενικές σχέσεις πάνω στη διαχωριστική επιφάνεια των δύο μέσων ( $\mathbf{n}$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στη διαχωριστική επιφάνεια)	$\mathbf{n} \times (\dot{\mathbf{E}}_i + \dot{\mathbf{E}}_r) \Big _S = \mathbf{n} \times \dot{\mathbf{E}}_t \Big _S$ $\mathbf{n} \times (\dot{\mathbf{H}}_i + \dot{\mathbf{H}}_r) \Big _S = \mathbf{n} \times \dot{\mathbf{H}}_t \Big _S$ $\frac{1}{\mu_1} [\mathbf{n} \times (\mathbf{k}_i \times \dot{\mathbf{E}}_i + \mathbf{k}_r \times \dot{\mathbf{E}}_r)] \Big _S = \frac{1}{\mu_2} [\mathbf{n} \times (\mathbf{k}_t \times \dot{\mathbf{E}}_t)] \Big _S$ $\frac{1}{\eta_1} [\mathbf{n} \times (\mathbf{n}_i \times \dot{\mathbf{E}}_i + \mathbf{n}_r \times \dot{\mathbf{E}}_r)] \Big _S = \frac{1}{\eta_2} [\mathbf{n} \times (\mathbf{n}_t \times \dot{\mathbf{E}}_t)] \Big _S$
<b>XII.12</b>	Συντελεστής ανάκλασης	$R = \left( \frac{\dot{E}_{0r}}{\dot{E}_{0i}} \right)$
<b>XII.13</b>	Συντελεστής διάθλασης (διάδοσης)	$T = \left( \frac{\dot{E}_{0t}}{\dot{E}_{0i}} \right)$

**ΔΙΑΝΥΣΜΑ Ε ΚΑΘΕΤΟ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ ΤΗΣ ΠΡΟΣΠΤΩΣΗΣ**

<b>XII.14</b>	Απλοποιημένες σχέσεις του Fresnel $\dot{E}_{0i} + \dot{E}_{0r} = \dot{E}_{0t}$ $\frac{\cos \theta_i}{\eta_1} (\dot{E}_{0i} - \dot{E}_{0r}) = \frac{\cos \theta_t}{\eta_2} \dot{E}_{0t}$ Σχέσεις πλατών $\dot{E}_{0t} = \dot{E}_{0i} \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t}$ $\dot{E}_{0r} = \dot{E}_{0i} \frac{\eta_2 \cos \theta_i - \eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t}$	
<b>XII.15</b>	Συντελεστής ανάκλασης $R_{\perp} = \left( \frac{\dot{E}_{0r}}{\dot{E}_{0i}} \right)_{\perp}$	$R_{\perp} = \frac{\eta_2 \cos \theta_i - \eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t}$ $= \frac{\mu_2 \tan \theta_t - \mu_1 \tan \theta_i}{\mu_2 \tan \theta_t + \mu_1 \tan \theta_i}$ $= \frac{\eta_2 \cos \theta_i - \eta_1 [1 - (n_1/n_2)^2 \sin^2 \theta_i]^{1/2}}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 [1 - (n_1/n_2)^2 \sin^2 \theta_i]^{1/2}}$ $= \frac{\cos \theta_i - [(\mu_1 \epsilon_2 / \mu_2 \epsilon_1) - (\mu_1 / \mu_2)^2 \sin^2 \theta_i]^{1/2}}{\cos \theta_i + [(\mu_1 \epsilon_2 / \mu_2 \epsilon_1) - (\mu_1 / \mu_2)^2 \sin^2 \theta_i]^{1/2}}$
<b>XII.16</b>	Συντελεστής διάθλασης $T_{\perp} = \left( \frac{\dot{E}_{0t}}{\dot{E}_{0i}} \right)_{\perp}$	$T_{\perp} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t}$ $= \frac{2\mu_2 \tan \theta_t}{\mu_2 \tan \theta_t + \mu_1 \tan \theta_i}$ $= \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 [1 - (n_1/n_2)^2 \sin^2 \theta_i]^{1/2}}$ $= \frac{2 \cos \theta_i}{\cos \theta_i + [(\mu_1 \epsilon_2 / \mu_2 \epsilon_1) - (\mu_1 / \mu_2)^2 \sin^2 \theta_i]^{1/2}}$

XII.17	Σχέση σύνδεσης των $R_{\perp}, T_{\perp}$	$1 + R_{\perp} = T_{\perp}$
--------	---	-----------------------------

Ειδική περίπτωση κάθετης πρόσπτωσης ( $\theta_i = 0$ )		
XII.18	Συντελεστής ανάκλασης	$R_{\perp} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{1 - (\mu_1 \varepsilon_2 / \mu_2 \varepsilon_1)^{1/2}}{1 + (\mu_1 \varepsilon_2 / \mu_2 \varepsilon_1)^{1/2}} = \frac{\mu_2 n_1 - \mu_1 n_2}{\mu_2 n_1 + \mu_1 n_2}$
XII.19	Συντελεστής διάθλασης	$T_{\perp} = \frac{2\eta_2}{\eta_1 + \eta_2} = \frac{2}{1 + (\mu_1 \varepsilon_2 / \mu_2 \varepsilon_1)^{1/2}} = \frac{2\mu_2 n_1}{\mu_2 n_1 + \mu_1 n_2}$

Ειδική περίπτωση πρόσπτωσης σε μέσα με $\mu_1 = \mu_2$		
XII.20	Συντελεστής ανάκλασης	$R_{\perp} = \frac{\tan \theta_i - \tan \theta_t}{\tan \theta_i + \tan \theta_t} = \frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)}$
XII.21	Συντελεστής διάθλασης	$T_{\perp} = \frac{2 \tan \theta_t}{\tan \theta_i + \tan \theta_t} = \frac{(n_1/n_2) \sin 2\theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t)} = \frac{(\varepsilon_1/\varepsilon_2)^{1/2} \sin 2\theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t)}$

Ειδική περίπτωση κάθετης πρόσπτωσης ( $\theta_i = 0$ ) σε μέσα με $\mu_1 = \mu_2$		
XII.22	Συντελεστής ανάκλασης	$R_{\perp} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$
XII.23	Συντελεστής διάθλασης	$T_{\perp} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$

**ΔΙΑΝΥΣΜΑ Ε ΠΑΡΑΛΛΗΛΟ ΠΡΟΣ ΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ ΤΗΣ ΠΡΟΣΠΤΩΣΗΣ**

<p>XII.24</p> <p>Απλοποιημένες εξισώσεις Fresnel</p> $(\dot{E}_{0i} - \dot{E}_{0r}) \cos \theta_i = \dot{E}_{0t} \cos \theta_t$ $\frac{\dot{E}_{0i}}{\eta_1} + \frac{\dot{E}_{0r}}{\eta_1} = \frac{\dot{E}_{0t}}{\eta_2}$	
---	--

<p><b>XII.25</b></p>	<p>Συντελεστής ανάκλασης</p> $R_{\parallel} = \left( \frac{\dot{E}_{0r}}{\dot{E}_{0i}} \right)_{\parallel}$	$\begin{aligned} R_{\parallel} &= \frac{\eta_1 \cos \theta_i - \eta_2 \cos \theta_t}{\eta_1 \cos \theta_i + \eta_2 \cos \theta_t} \\ &= \frac{\mu_1 \sin 2\theta_i - \mu_2 \sin 2\theta_t}{\mu_1 \sin 2\theta_i + \mu_2 \sin 2\theta_t} \\ &= \frac{\eta_1 \cos \theta_i - \eta_2 \left[ 1 - (n_1/n_2)^2 \sin^2 \theta_i \right]^{1/2}}{\eta_1 \cos \theta_i + \eta_2 \left[ 1 - (n_1/n_2)^2 \sin^2 \theta_i \right]^{1/2}} \\ &= \frac{\cos \theta_i - \left[ (\mu_2 \varepsilon_1 / \mu_1 \varepsilon_2) - (\varepsilon_1 / \varepsilon_2)^2 \sin^2 \theta_i \right]^{1/2}}{\cos \theta_i + \left[ (\mu_2 \varepsilon_1 / \mu_1 \varepsilon_2) - (\varepsilon_1 / \varepsilon_2)^2 \sin^2 \theta_i \right]^{1/2}} \end{aligned}$
<p><b>XII.26</b></p>	<p>Συντελεστής διάθλασης</p> $T_{\parallel} = \left( \frac{\dot{E}_{0t}}{\dot{E}_{0i}} \right)_{\parallel}$	$\begin{aligned} T_{\parallel} &= \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_1 \cos \theta_i + \eta_2 \cos \theta_t} \\ &= \frac{4\mu_2 \cos \theta_i \sin \theta_t}{\mu_1 \sin 2\theta_i + \mu_2 \sin 2\theta_t} \\ &= \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_1 \cos \theta_i + \eta_2 \left[ 1 - (n_1/n_2)^2 \sin^2 \theta_i \right]^{1/2}} \\ &= \frac{2 \cos \theta_i (\mu_2 \varepsilon_1 / \mu_1 \varepsilon_2)^{1/2}}{\cos \theta_i + \left[ (\mu_2 \varepsilon_1 / \mu_1 \varepsilon_2) - (\varepsilon_1 / \varepsilon_2)^2 \sin^2 \theta_i \right]^{1/2}} \end{aligned}$
<p><b>XII.27</b></p>	<p>Σχέση μεταξύ του συντελεστή ανάκλασης και του συντελεστή διάδοσης</p>	$1 - R_{\parallel} = \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} T_{\parallel}$

**Ειδική περίπτωση κάθετης πρόσπτωσης ( $\theta_i = 0$ )**

<p><b>XII.28</b></p>	<p>Συντελεστής ανάκλασης</p>	$R_{\parallel} = \frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_1 + \eta_2} = \frac{\mu_1 n_2 - \mu_2 n_1}{\mu_1 n_2 + \mu_2 n_1} = \frac{1 - (\mu_2 \varepsilon_1 / \mu_1 \varepsilon_2)^{1/2}}{1 + (\mu_2 \varepsilon_1 / \mu_1 \varepsilon_2)^{1/2}}$
<p><b>XII.29</b></p>	<p>Συντελεστής διάθλασης</p>	$T_{\parallel} = \frac{2\eta_2}{\eta_1 + \eta_2} = \frac{2\mu_2 n_1}{\mu_1 n_2 + \mu_2 n_1} = \frac{2(\mu_2 \varepsilon_1 / \mu_1 \varepsilon_2)^{1/2}}{1 + (\mu_2 \varepsilon_1 / \mu_1 \varepsilon_2)^{1/2}}$

**Ειδική περίπτωση πρόσπτωσης για μέσα με  $\mu_1 = \mu_2$**

<p><b>XII.30</b></p>	<p>Συντελεστής ανάκλασης</p>	$R_{\parallel} = \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)}$
<p><b>XII.31</b></p>	<p>Συντελεστής διάθλασης</p>	$T_{\parallel} = \frac{2 \cos \theta_i \sin \theta_t}{\sin(\theta_i + \theta_t) \cos(\theta_i - \theta_t)}$
<p><b>XII.32</b></p>	<p>Ειδική περίπτωση κάθετης πρόσπτωσης</p>	$\theta_i = 0 \Rightarrow \begin{cases} R_{\parallel} = \frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2} \\ T_{\parallel} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \end{cases}$



XII.33	Γωνία Brewster ή γωνία πόλωσης για την οποία δεν υπάρχει ανάκλαση.	$\tan \theta_B = \frac{n_2}{n_1} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$
--------	--	--

**ΟΛΙΚΗ ΑΝΑΚΛΑΣΗ ( $n_1 > n_2$  ΚΑΙ  $\theta_i > \theta_c$ )**

XII.34	Συνιστώσες του κυματάριθμου	$k_{ix} = k_{tx} = k_i \sin \theta_i$ $k_{iz} = \pm j k_t \sqrt{\left(\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_c}\right)^2 - 1} = \pm j a_s$ $a_s = k_t \sqrt{\left(\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_c}\right)^2 - 1}$
XII.35	Διαθλώμενο ηλεκτρικό πεδίο	$\dot{\mathbf{E}}_t = \dot{\mathbf{E}}_{0t} e^{-a_s z} e^{-j\beta_s x}$ $\beta_s = \omega \sqrt{\mu_1 \varepsilon_1} \sin \theta_i$
XII.36	Ταχύτητα διάδοσης του κύματος παράλληλα προς την επιφάνεια	$v_s = \frac{\omega}{\beta_s} = \frac{1}{\sqrt{\mu_1 \varepsilon_1} \sin \theta_i} = \frac{v_1}{\sin \theta_i} = \frac{v_2}{\sin \theta_i} = \left(\frac{\sin \theta_c}{\sin \theta_i}\right) v_2$
XII.37	Συντελεστής ανάκλασης όταν η γωνία πρόσπτωσης είναι μεγαλύτερη από την κρίσιμη γωνία ( $\theta_i > \theta_c$ )	$R_{\perp} = \frac{\left(\dot{\mathbf{E}}_{0r}\right)_{\perp}}{\left(\dot{\mathbf{E}}_{0i}\right)_{\perp}} = \frac{\eta_2 \cos \theta_i - j \eta_1 \left[(n_1/n_2)^2 \sin^2 \theta_i - 1\right]^{1/2}}{\eta_2 \cos \theta_i + j \eta_1 \left[(n_1/n_2)^2 \sin^2 \theta_i - 1\right]^{1/2}}$ $R_{\parallel} = \frac{\left(\dot{\mathbf{E}}_{0r}\right)_{\parallel}}{\left(\dot{\mathbf{E}}_{0i}\right)_{\parallel}} = \frac{\eta_1 \cos \theta_i - j \eta_2 \left[(n_1/n_2)^2 \sin^2 \theta_i - 1\right]^{1/2}}{\eta_1 \cos \theta_i + j \eta_2 \left[(n_1/n_2)^2 \sin^2 \theta_i - 1\right]^{1/2}}$ $R_{(\perp, \parallel)} = e^{-j2\phi}$
XII.38	Φασική απόκλιση μεταξύ των εντάσεων $\dot{\mathbf{E}}_r$ , $\dot{\mathbf{E}}_i$ για ένταση του ηλεκτρικού πεδίου κάθετη στο επίπεδο της πρόσπτωσης	$\psi_{\perp} = 2\phi_{\perp} = 2 \arctan \left\{ \frac{\eta_1 \left[(n_1/n_2)^2 \sin^2 \theta_i - 1\right]^{1/2}}{\eta_2 \cos \theta_i} \right\}$ $= 2 \arctan \left\{ \frac{\left(\frac{\mu_1 n_2}{\mu_2 n_1}\right) \left[(n_1/n_2)^2 \sin^2 \theta_i - 1\right]^{1/2}}{\cos \theta_i} \right\}$
XII.39	Φασική απόκλιση μεταξύ των εντάσεων $\dot{\mathbf{E}}_r$ , $\dot{\mathbf{E}}_i$ για ένταση του ηλεκτρικού πεδίου παράλληλη στο επίπεδο της πρόσπτωσης	$\psi_{\parallel} = 2\phi_{\parallel} = 2 \arctan \left\{ \frac{\eta_2 \left[(n_1/n_2)^2 \sin^2 \theta_i - 1\right]^{1/2}}{\eta_1 \cos \theta_i} \right\} =$ $= 2 \arctan \left\{ \frac{\left(\frac{\mu_2 n_1}{\mu_1 n_2}\right) \left[(n_1/n_2)^2 \sin^2 \theta_i - 1\right]^{1/2}}{\cos \theta_i} \right\}$
XII.40	Σχέση μεταξύ των φασικών αποκλίσεων $\psi_{\perp}$ και $\psi_{\parallel}$	$\tan \left(\frac{\psi_{\perp}}{2}\right) = \left(\frac{\mu_1 n_2}{\mu_2 n_1}\right)^2 \tan \left(\frac{\psi_{\parallel}}{2}\right)$
XII.41	Φασική απόκλιση μεταξύ των εντάσεων $\dot{\mathbf{E}}_r$ , $\dot{\mathbf{E}}_i$ για ένταση του ηλεκτρικού πεδίου κάθετη στο επίπεδο της πρόσπτωσης όταν $\mu_1 = \mu_2$	$\psi_{\perp} = 2 \arctan \left\{ \frac{\left[\sin^2 \theta_i - (n_2/n_1)^2\right]^{1/2}}{\cos \theta_i} \right\}$

XII.42	Φασική απόκλιση μεταξύ των εντάσεων $\dot{E}_r$ , $\dot{E}_i$ για ένταση του ηλεκτρικού πεδίου παράλληλη στο επίπεδο της πρόσπτωσης όταν $\mu_1 = \mu_2$	$\psi_{  } = 2 \arctan \left\{ \left( \frac{n_1}{n_2} \right)^2 \frac{[\sin^2 \theta_i - (n_2/n_1)^2]^{1/2}}{\cos \theta_i} \right\}$
XII.43	Σχέση σύνδεσης	$\tan \left( \frac{\psi_{\perp}}{2} \right) = \left( \frac{n_2}{n_1} \right)^2 \tan \left( \frac{\psi_{  }}{2} \right)$

**ΕΝΕΡΓΕΙΑΚΟΙ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ ΑΝΑΚΛΑΣΗΣ ΚΑΙ ΔΙΑΘΛΑΣΗΣ**

XII.44	Ανά μονάδα επιφανείας μέση χρονική ισχύς που αντιστοιχεί στο προσπίπτον κύμα	$\langle P_i \rangle = \frac{1}{2\eta_1}  \dot{E}_{0i} ^2 \mathbf{n}_i$
XII.45	Ανά μονάδα επιφανείας μέση χρονική ισχύς που αντιστοιχεί στο ανακλώμενο κύμα	$\langle P_r \rangle = \frac{1}{2\eta_1}  \dot{E}_{0r} ^2 \mathbf{n}_r$
XII.46	Ανά μονάδα επιφανείας μέση χρονική ισχύς που αντιστοιχεί στο διαθλώμενο κύμα	$\langle P_t \rangle = \frac{1}{2\eta_2}  \dot{E}_{0t} ^2 \mathbf{n}_t$
XII.47	Ενεργειακός συντελεστής ανάκλασης ( $n$ : κάθετη συνιστώσα στη διαχωριστική επιφάνεια)	$e_R = \left  \frac{\langle P_m \rangle}{\langle P_m \rangle} \right  = \left  \frac{\dot{E}_{0r}}{\dot{E}_{0i}} \right ^2 =  R ^2$
XII.48	Ενεργειακός συντελεστής διάθλασης	$e_T = \left  \frac{\langle P_m \rangle}{\langle P_m \rangle} \right  = \frac{\eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_i} \left  \frac{\dot{E}_{0t}}{\dot{E}_{0i}} \right ^2 = \frac{\eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_i}  T ^2$
XII.49	Γενικές σχέσεις σύνδεσης	$e_R + e_T = 1$ $\langle P_m \rangle + \langle P_m \rangle = \langle P_m \rangle$

**ΚΑΘΕΤΗ ΠΡΟΣΠΤΩΣΗ ΣΤΗΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΜΕΣΟΥ ΜΕ ΑΠΩΛΕΙΕΣ**

XII.50	Συντελεστής ανάκλασης	$R = \frac{\dot{E}_{0r}}{\dot{E}_{0i}} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_1 + \eta_2} = \frac{1 - (\mu_1/\mu_2)(\gamma_2/\gamma_1)}{1 + (\mu_1/\mu_2)(\gamma_2/\gamma_1)} =$ $= \frac{(\mu_2 \varepsilon_{r1}/\mu_1)^{1/2} - (\varepsilon_{r2} - j\sigma_2/\omega\varepsilon_0)^{1/2}}{(\mu_2 \varepsilon_{r1}/\mu_1)^{1/2} + (\varepsilon_{r2} - j\sigma_2/\omega\varepsilon_0)^{1/2}}$
XII.51	Συντελεστής διάθλασης	$T = \frac{\dot{E}_{0t}}{\dot{E}_{0i}} = \frac{2\eta_2}{\eta_1 + \eta_2} = \frac{2}{1 + (\mu_1/\mu_2)(\gamma_2/\gamma_1)} =$ $= \frac{2(\mu_2 \varepsilon_{r1}/\mu_1)^{1/2}}{(\mu_2 \varepsilon_{r1}/\mu_1)^{1/2} + (\varepsilon_{r2} - j\sigma_2/\omega\varepsilon_0)^{1/2}}$

<b>XII.52</b>	Συντελεστής ανάκλασης για την ειδική περίπτωση $\mu_1 \cong \mu_2 \cong \mu_0$ , $\varepsilon_{r1} = 1$ , $\varepsilon_{r2} = \varepsilon_r$	$R = \frac{1 - \left( \varepsilon_r - j \frac{\sigma_2}{\omega \varepsilon_0} \right)^{1/2}}{1 + \left( \varepsilon_r - j \frac{\sigma_2}{\omega \varepsilon_0} \right)^{1/2}}$
<b>XII.53</b>	Συντελεστής διάθλασης για την ειδική περίπτωση $\mu_1 \cong \mu_2 \cong \mu_0$ , $\varepsilon_{r1} = 1$ , $\varepsilon_{r2} = \varepsilon_r$	$T = \frac{2}{1 + \left( \varepsilon_r - j \frac{\sigma_2}{\omega \varepsilon_0} \right)^{1/2}}$
<b>XII.54</b>	Συντελεστές ανάκλασης και διάθλασης για την ειδική περίπτωση που το μέσο 2 είναι πολύ καλός αγωγός ( $\sigma_2 / \omega \varepsilon_2 \gg 1$ )	$R \cong -1, \quad T \ll 1$

**ΠΛΑΓΙΑ ΠΡΟΣΠΤΩΣΗ ΣΕ ΜΕΣΑ ΜΕ ΑΠΩΛΕΙΕΣ**

<b>XII.55</b>	Γενική εξίσωση σύνδεσης των διανυσμάτων διάδοσης και των μιγαδικών σταθερών διάδοσης	$\gamma_1 \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{r} = \gamma_1 \mathbf{n}_r \cdot \mathbf{r} = \gamma_2 \mathbf{n}_t \cdot \mathbf{r}$
<b>XII.56</b>	Νόμος του Snell για πρόσπτωση σε μέσα με απώλειες	$\theta_i = \theta_r, \quad \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}$

**Διάνυσμα  $\dot{\mathbf{E}}$  κάθετο στο επίπεδο πρόσπτωσης**

<b>XII.57</b>	Συντελεστής ανάκλασης	$R_{\perp} = \frac{\left( \dot{\mathbf{E}}_{0r} \right)_{\perp}}{\left( \dot{\mathbf{E}}_{0i} \right)_{\perp}} = \frac{\mu_2 \gamma_1 \cos \theta_i - \mu_1 \gamma_2 \cos \theta_t}{\mu_2 \gamma_1 \cos \theta_i + \mu_1 \gamma_2 \cos \theta_t} = \frac{\mu_2 \gamma_1 \cos \theta_i - \mu_1 \sqrt{\gamma_2^2 - \gamma_1^2 \sin^2 \theta_i}}{\mu_2 \gamma_1 \cos \theta_i + \mu_1 \sqrt{\gamma_2^2 - \gamma_1^2 \sin^2 \theta_i}}$
<b>XII.58</b>	Συντελεστής διάθλασης	$T_{\perp} = \frac{\left( \dot{\mathbf{E}}_{0t} \right)_{\perp}}{\left( \dot{\mathbf{E}}_{0i} \right)_{\perp}} = \frac{2 \mu_2 \gamma_1 \cos \theta_i}{\mu_2 \gamma_1 \cos \theta_i + \mu_1 \gamma_2 \cos \theta_t} = \frac{2 \mu_2 \gamma_1 \cos \theta_i}{\mu_2 \gamma_1 \cos \theta_i + \mu_1 \sqrt{\gamma_2^2 - \gamma_1^2 \sin^2 \theta_i}}$

**Διάνυσμα  $\dot{\mathbf{E}}$  παράλληλο στο επίπεδο πρόσπτωσης**

<b>XII.59</b>	Συντελεστής ανάκλασης	$R_{\parallel} = \frac{\left( \dot{\mathbf{E}}_{0r} \right)_{\parallel}}{\left( \dot{\mathbf{E}}_{0i} \right)_{\parallel}} = \frac{\mu_1 \gamma_2 \cos \theta_i - \mu_2 \gamma_1 \cos \theta_t}{\mu_1 \gamma_2 \cos \theta_i + \mu_2 \gamma_1 \cos \theta_t} = \frac{\mu_1 \gamma_2^2 \cos \theta_i - \mu_2 \gamma_1 \sqrt{\gamma_2^2 - \gamma_1^2 \sin^2 \theta_i}}{\mu_1 \gamma_2^2 \cos \theta_i + \mu_2 \gamma_1 \sqrt{\gamma_2^2 - \gamma_1^2 \sin^2 \theta_i}}$
<b>XII.60</b>	Συντελεστής διάθλασης	$T_{\parallel} = \frac{\left( \dot{\mathbf{E}}_{0t} \right)_{\parallel}}{\left( \dot{\mathbf{E}}_{0i} \right)_{\parallel}} = \frac{2 \gamma_1 \mu_2 \cos \theta_i}{\mu_1 \gamma_2 \cos \theta_i + \mu_2 \gamma_1 \cos \theta_t} = \frac{2 \mu_2 \gamma_1 \gamma_2 \cos \theta_i}{\mu_1 \gamma_2^2 \cos \theta_i + \mu_2 \gamma_1 \sqrt{\gamma_2^2 - \gamma_1^2 \sin^2 \theta_i}}$

<b>XII.61</b>	Συντελεστής ανάκλασης για κάθετη πρόσπτωση ( $\theta_i = 0$ )	$R = \frac{\mu_2 \gamma_1 - \mu_1 \gamma_2}{\mu_2 \gamma_1 + \mu_1 \gamma_2} = \frac{1 - (\mu_1/\mu_2)(\gamma_2/\gamma_1)}{1 + (\mu_1/\mu_2)(\gamma_2/\gamma_1)}$
<b>XII.62</b>	Συντελεστής διάθλασης για κάθετη πρόσπτωση ( $\theta_i = 0$ )	$T = \frac{2\mu_2 \gamma_1}{\mu_1 \gamma_2 + \mu_2 \gamma_1} = \frac{2}{1 + (\mu_1/\mu_2)(\gamma_2/\gamma_1)}$
<b>XII.63</b>	Διαδιδόμενο κύμα για πρόσπτωση σε μέσο με απώλειες	$\begin{aligned} \dot{E}_t &= \dot{E}_{0t} e^{-\rho x} e^{-j[qz + (\beta_1 \sin \theta_i)x]} \\ p &= \rho(\alpha_2 \cos \delta - \beta_2 \sin \delta) \\ q &= -\rho(\alpha_2 \sin \delta + \beta_2 \cos \delta) \\ \cos \theta_t &= \rho e^{j\delta} \\ \gamma_2 &= \alpha_2 + j\beta_2 \end{aligned}$
<b>XII.64</b>	Πραγματική γωνία διάθλασης	$\psi = \arctan \left( -\frac{\beta_1 \sin \theta_i}{q} \right)$
<b>XII.65</b>	Συντελεστής ανάκλασης για ηλεκτρικό πεδίο κάθετο στο επίπεδο πρόσπτωσης όταν $\mu_1 = \mu_0, \varepsilon_1 = \varepsilon_0, \sigma_1 = 0, \mu_2 \approx \mu_0, \varepsilon_2 = \varepsilon_r \varepsilon_0, \sigma_2 = \sigma$	$\begin{aligned} R_{\perp} &= \left( \frac{\dot{E}_{0r}}{\dot{E}_{0i}} \right)_{\perp} = \frac{\cos \theta_i - \sqrt{\left( \varepsilon_r - j \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0} \right) - \sin^2 \theta_i}}{\cos \theta_i + \sqrt{\left( \varepsilon_r - j \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0} \right) - \sin^2 \theta_i}} \\ &= \frac{\cos \theta_i - \sqrt{(\varepsilon_r - j60\lambda\sigma) - \sin^2 \theta_i}}{\cos \theta_i + \sqrt{(\varepsilon_r - j60\lambda\sigma) - \sin^2 \theta_i}} \end{aligned}$
<b>XII.66</b>	Συντελεστής ανάκλασης για ηλεκτρικό πεδίο παράλληλο στο επίπεδο πρόσπτωσης όταν $\mu_1 = \mu_0, \varepsilon_1 = \varepsilon_0, \sigma_1 = 0, \mu_2 \approx \mu_0, \varepsilon_2 = \varepsilon_r \varepsilon_0, \sigma_2 = \sigma$	$\begin{aligned} R_{\parallel} &= \left( \frac{\dot{E}_{0r}}{\dot{E}_{0i}} \right)_{\parallel} = \frac{\left( \varepsilon_r - j \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0} \right) \cos \theta_i - \sqrt{\left( \varepsilon_r - j \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0} \right) - \sin^2 \theta_i}}{\left( \varepsilon_r - j \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0} \right) \cos \theta_i + \sqrt{\left( \varepsilon_r - j \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0} \right) - \sin^2 \theta_i}} \\ &= \frac{(\varepsilon_r - j60\lambda\sigma) \cos \theta_i - \sqrt{(\varepsilon_r - j60\lambda\sigma) - \sin^2 \theta_i}}{(\varepsilon_r - j60\lambda\sigma) \cos \theta_i + \sqrt{(\varepsilon_r - j60\lambda\sigma) - \sin^2 \theta_i}} \end{aligned}$

**Ειδική περίπτωση: μέσο 2 πολύ καλός αγωγός**

<b>XII.67</b>	Η πραγματική γωνία διάθλασης και ο συντελεστής ανάκλασης όταν το μέσο 2 είναι τέλειος αγωγός	$\begin{aligned} \theta_t &\rightarrow 0 & \psi &\rightarrow 0 \\ R &\simeq -1 \end{aligned}$
---------------	--	---

**ΣΤΑΣΙΜΑ ΚΥΜΑΤΑ**

<b>XII.68</b>	Συνολικό ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο	$\begin{aligned} \mathbf{E}(z, t) &= 2E_{0i} \sin \beta_1 z \sin \omega t \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{H}(z, t) &= 2 \frac{E_{0i}}{\eta_1} \cos \beta_1 z \cos \omega t \mathbf{y}_0 \end{aligned}$
<b>XII.69</b>	Μέση ισχύς συνιστάμενου στάσιμου κύματος	$\langle \mathbf{P} \rangle = \mathbf{0}$

**ΠΡΟΣΠΤΩΣΗ ΣΕ ΔΙΗΛΕΚΤΡΙΚΗ ΠΛΑΚΑ (ΜΕΣΟ 2) ΠΑΧΟΥΣ  $d$   
ΠΟΥ ΠΕΡΙΒΑΛΛΕΤΑΙ ΑΠΟ ΑΕΡΑ (ΜΕΣΑ 1 ΚΑΙ 3)**

<b>XII.70</b>	Λόγος συνολικά ανακλώμενου (μέσο 1) προς προσπίπτον ηλεκτρικό πεδίο (μέσο 1), όπου $Z_{ij} = \eta_i/\eta_j = \mu_i\beta_j/\mu_j\beta_i$	$\left(\frac{\dot{E}_{0r1}}{\dot{E}_{0i1}}\right) = \frac{(1 - Z_{12})(1 + Z_{23}) + (1 + Z_{12})(1 - Z_{23}) e^{-j2\beta_2 d}}{(1 + Z_{12})(1 + Z_{23}) + (1 - Z_{12})(1 - Z_{23}) e^{-j2\beta_2 d}}$
<b>XII.71</b>	Λόγος συνολικά διαθλώμενου (μέσο 3) προς προσπίπτον ηλεκτρικό πεδίο (μέσο 1), όπου $Z_{ij} = \eta_i/\eta_j = \mu_i\beta_j/\mu_j\beta_i$	$\left(\frac{\dot{E}_{0t3}}{\dot{E}_{0i1}}\right) = \frac{4e^{j\beta_2 d}}{(1 - Z_{12})(1 - Z_{23}) e^{-j\beta_2 d} + (1 + Z_{12})(1 + Z_{23}) e^{j\beta_2 d}}$
<b>XII.72</b>	Λόγος συνολικά ανακλώμενου (μέσο 1) προς προσπίπτον ηλεκτρικό πεδίο (μέσο 1) για μέσα με απώλειες, όπου $Z_{ij} = \eta_i/\eta_j = \mu_i\gamma_j/\mu_j\gamma_i$	$\left(\frac{\dot{E}_{0r1}}{\dot{E}_{0i1}}\right) = \frac{(1 - Z_{12})(1 + Z_{23}) + (1 + Z_{12})(1 - Z_{23}) e^{-2\gamma_2 d}}{(1 + Z_{12})(1 + Z_{23}) + (1 - Z_{12})(1 - Z_{23}) e^{-2\gamma_2 d}}$
<b>XII.73</b>	Λόγος συνολικά διαθλώμενου (μέσο 3) προς προσπίπτον ηλεκτρικό πεδίο (μέσο 1) για μέσα με απώλειες, όπου $Z_{ij} = \eta_i/\eta_j = \mu_i\gamma_j/\mu_j\gamma_i$	$\left(\frac{\dot{E}_{0t3}}{\dot{E}_{0i1}}\right) = \frac{4e^{\gamma_2 d}}{(1 - Z_{12})(1 - Z_{23}) e^{-\gamma_2 d} + (1 + Z_{12})(1 + Z_{23}) e^{\gamma_2 d}}$

**ΠΙΕΣΗ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑΣ**

<b>XII.74</b>	Πυκνότητα της ορμής του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου	$\mathbf{g} = \mathbf{D} \times \mathbf{B} = \mu\epsilon(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mu\epsilon\mathbf{P} = \frac{\mathbf{P}}{v^2}$
<b>XII.75</b>	Πίεση που ασκείται κάθετα στη διαχωριστική επιφάνεια $p = \frac{\cos\theta_i}{v} [ \langle P_{in} \rangle - \langle P_{rn} \rangle ]$	
<b>XII.76</b>	Ειδική περίπτωση όπου το μέσο 1 είναι το κενό (ή αέρας)	$p = \frac{\cos\theta_i}{c} [ \langle P_{in} \rangle + \langle P_{rn} \rangle ]$ ή $p = \frac{1}{2} \epsilon_0  E_{0i} ^2 \cos^2\theta_i (1 +  R ^2) = (1 +  R ^2) \frac{\cos^2\theta_i}{c} \langle P_i \rangle$
<b>XII.77</b>	Πίεση που ασκείται κάθετα στη διαχωριστική επιφάνεια συναρτήσεως της πυκνότητας ενέργειας του πεδίου του προσπίπτοντος κύματος $\langle w_i \rangle$	$p = (1 +  R ^2) \cos^2\theta_i \langle w_i \rangle = (1 +  R ^2) \frac{\cos^2\theta_i}{c} \langle P_i \rangle$
<b>XII.78</b>	Μέγιστη τιμή της πίεσης ακτινοβολίας για κάθετη πρόσπτωση στην επιφάνεια τέλει αγωγού ( $R = 1, \theta_i = 0$ )	$p_{\max} = 2 \frac{\langle P_i \rangle}{c} = 2 \langle w_i \rangle = \epsilon_0  \dot{E}_{0i} ^2$

<b>ΧΙΙ.79</b>	Μέγιστη τιμή της πίεσης ακτινοβολίας για κάθετη πρόσπτωση σε τέλεια απορροφητική επιφάνεια ( $R=0, \theta_i = 0$ )	$p_a = \frac{ \langle P_i \rangle }{c} \langle w_i \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0  \dot{E}_{oi} ^2 = \frac{p_{\max}}{2}$
---------------	--	--

**ΣΚΕΔΑΣΗ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΟΥ ΚΥΜΑΤΟΣ**

<b>ΧΙΙ.80</b>	Διατομή σκέδασης ( $s$ : σκεδαζόμενο πεδίο)	$\sigma = 4\pi r^2 \frac{P_s}{P_i}$
---------------	---	-------------------------------------

ΤΗΝ ΜΗΥ ΑΠΟ

<b>XIII</b>	<b>ΓΡΑΜΜΕΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ</b>
-------------	--------------------------

**ΕΓΚΑΡΣΙΑ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ (TEM)**

<b>XIII.1</b>	Οι εξισώσεις στροφής του Maxwell όταν τα διανύσματα βρίσκονται στο εγκάρσιο στη διεύθυνση διάδοσης επίπεδο	$\nabla \times \dot{\mathbf{E}}_t = -j\omega\mu\dot{\mathbf{H}}_t$ $\nabla \times \dot{\mathbf{H}}_t = j\omega\varepsilon\dot{\mathbf{E}}_t$
<b>XIII.2</b>	Εξισώσεις του Maxwell για διανύσματα εγκάρσια στη διεύθυνση διάδοσης	$\mathbf{z}_0 \times \frac{\partial \dot{\mathbf{E}}_t}{\partial z} = -j\omega\mu\dot{\mathbf{H}}_t$ $\mathbf{z}_0 \times \frac{\partial \dot{\mathbf{H}}_t}{\partial z} = j\omega\varepsilon\dot{\mathbf{E}}_t$ $\nabla_t \times \dot{\mathbf{E}}_t = \mathbf{0}$ $\nabla_t \times \dot{\mathbf{H}}_t = \mathbf{0}$ $\left( \nabla_t \equiv \mathbf{x}_0 \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{y}_0 \frac{\partial}{\partial y} \right)$
<b>XIII.3</b>	Γενικές λύσεις των εξισώσεων στροφής XIII.2 όπου $\phi, \psi$ βαθμωτά δυναμικά που ικανοποιούν την εξίσωση Laplace	$\dot{\mathbf{E}}_t = f_1(z)\nabla_t\phi(x, y)$ $\dot{\mathbf{H}}_t = f_2(z)\nabla_t\psi(x, y)$ $\nabla_t^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0$ $\nabla_t^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0$
<b>XIII.4</b>	Εξίσωση κύματος για $\mathbf{E}_t$ και $\mathbf{H}_t$	$\frac{\partial^2 \dot{\mathbf{E}}_t}{\partial z^2} + \beta^2 \dot{\mathbf{E}}_t = 0$ $\frac{\partial^2 \dot{\mathbf{H}}_t}{\partial z^2} + \beta^2 \dot{\mathbf{H}}_t = 0$ <p style="text-align: center;">όπου <math>\beta^2 = \omega^2 \mu \varepsilon</math></p>
<b>XIII.5</b>	Ταχύτητα διάδοσης του κύματος	$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = f\lambda$
<b>XIII.6</b>	Οι λύσεις για το ηλεκτρικό πεδίο	$\dot{\mathbf{E}}_t = (\dot{E}_{t0}^\pm)\nabla_t\phi(x, y)e^{\mp j\beta z}$
<b>XIII.7</b>	Οι λύσεις για το μαγνητικού πεδίο	$\dot{\mathbf{H}}_t = \pm \frac{\mathbf{z}_0 \times \nabla_t\phi(x, y)(\dot{E}_{t0}^\pm)e^{\mp j\beta z}}{\eta} = \pm \frac{\mathbf{z}_0 \times \dot{\mathbf{E}}_t}{\eta}$
<b>XIII.8</b>	Χαρακτηριστική αντίσταση του μέσου	$\eta = \sqrt{\mu/\varepsilon}$
<b>XIII.9</b>	Απλοποιημένες μορφές των XIII.6 και XIII.7	$\dot{\mathbf{E}}_t = (\dot{E}_{t0}^\pm)e^{\mp j\beta z}\mathbf{x}_0$ $\dot{\mathbf{H}}_t = \pm \frac{(\dot{E}_{t0}^\pm)e^{\mp j\beta z}}{\eta}\mathbf{y}_0$

**ΙΔΑΝΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ ΔΥΟ ΑΓΩΓΩΝ**

<b>XIII.10</b>	Τάση γραμμής (για διάδοση κατά τη θετική διεύθυνση του άξονα $z$ )	$\dot{V} = V_0 e^{-j\beta z}$
<b>XIII.11</b>	Ένταση ρεύματος γραμμής (για διάδοση κατά τη θετική διεύθυνση του άξονα $z$ ) – ( $Q$ είναι το ανά μονάδα μήκους της γραμμής φορτίο του αγωγού)	$\dot{I} = I_0 e^{-j\beta z}$ , όπου $I_0 = \frac{Q}{\varepsilon\eta}$
<b>XIII.12</b>	Ανά μονάδα μήκους χωρητικότητα της γραμμής	$C = \frac{Q}{V_0}$
<b>XIII.13</b>	Χαρακτηριστική σύνθετη αντίσταση της γραμμής μεταφοράς	$Z_0 = \frac{V_0}{I_0} = \frac{\varepsilon}{C} \eta = \frac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{C} = \frac{1}{C v_p} = \sqrt{\frac{L}{C}}$
<b>XIII.14</b>	Ταχύτητα διάδοσης συναρτήσει χωρητικότητας $C$ και αυτεπαγωγής $L$ γραμμής μεταφοράς	$v_p = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , $\sqrt{LC} = \sqrt{\mu\varepsilon} = \frac{1}{v_p}$
<b>XIII.15</b>	Μέση χρονική ισχύς που μεταφέρει μια ιδανική γραμμή μεταφοράς	$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{Z_0} = \frac{1}{2} Z_0 I_0^2 = \frac{1}{2} V_0 I_0$
<b>XIII.16</b>	Χαρακτηριστική αντίσταση ομοαξονικής γραμμής ( $b$ εξωτερική, $a$ εσωτερική ακτίνα)	$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\ln(b/a)}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$

**ΚΥΚΛΩΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΗΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ**

<b>XIII.17</b>	Τηλεγραφική εξίσωση ή εξίσωση της γραμμής μεταφοράς	$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = LC \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + (RC + LG) \frac{\partial V}{\partial t} + RGV$ $\frac{\partial^2 I}{\partial z^2} = LC \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} + (RC + LG) \frac{\partial I}{\partial t} + RGI$
<b>XIII.18</b>	Τηλεγραφική εξίσωση ή εξίσωση της γραμμής μεταφοράς για γραμμή χωρίς απώλειες	$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - LC \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0$ $\frac{\partial^2 I}{\partial z^2} - LC \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} = 0$
<b>XIII.19</b>	Ταχύτητα διάδοσης του κύματος κατά μήκος γραμμής χωρίς απώλειες	$v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
<b>XIII.20</b>	Σύνθετη χαρακτηριστική αντίσταση σε γραμμή χωρίς απώλειες	$Z_0 = \frac{V^+(z,t)}{I^+(z,t)} = -\frac{V^-(z,t)}{I^-(z,t)} = \sqrt{\frac{L}{C}}$



**ΕΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΓΡΑΜΜΗΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΣΤΗΝ ΗΜΙΤΟΝΟΕΙΔΗ ΜΟΝΙΜΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ**

<b>XIII.21</b>	Εφαρμογή των νόμων του Kirchhoff στη γραμμή μεταφοράς	$-\frac{d\dot{V}}{dz} = (R + j\omega L)\dot{I}, \quad -\frac{d\dot{I}}{dz} = (G + j\omega C)\dot{V}$
<b>XIII.22</b>	Τηλεγραφική εξίσωση ή εξίσωση της γραμμής μεταφοράς για την τάση	$\frac{d^2\dot{V}}{dz^2} = (R + j\omega L)(G + j\omega C)\dot{V}$ $\frac{d^2\dot{V}}{dz^2} - \gamma^2\dot{V} = 0$
<b>XIII.23</b>	Τηλεγραφική εξίσωση ή εξίσωση της γραμμής μεταφοράς για την ένταση του ρεύματος	$\frac{d^2\dot{I}}{dz^2} = (R + j\omega L)(G + j\omega C)\dot{I}$ $\frac{d^2\dot{I}}{dz^2} - \gamma^2\dot{I} = 0$
<b>XIII.24</b>	Σταθερά διάδοσης της γραμμής	$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = \alpha + j\beta$
<b>XIII.25</b>	Γενική λύση για την τάση στη γραμμή μεταφοράς	$\dot{V}(z) = \dot{V}^+e^{-\gamma z} + \dot{V}^-e^{\gamma z}$
<b>XIII.26</b>	Γενική λύση για την ένταση του ρεύματος στη γραμμή μεταφοράς	$\dot{I}(z) = \frac{1}{Z_0}(\dot{V}^+e^{-\gamma z} - \dot{V}^-e^{\gamma z})$
<b>XIII.27</b>	Σχέσεις μεταξύ των πλατών	$\dot{I}^+ = \frac{\dot{V}^+}{Z_0}, \quad \dot{I}^- = -\frac{\dot{V}^-}{Z_0}$
<b>XIII.28</b>	Χαρακτηριστική σύνθετη αντίσταση της γραμμής	$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$
<b>XIII.29</b>	Στιγμαία τιμή της τάσης σε κάθε θέση της γραμμής	$V(z, t) = \text{Re}(\dot{V}(z)e^{j\omega t}) =$ $= V^+e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \phi_i) + V^-e^{\alpha z} \cos(\omega t + \beta z + \phi_r)$
<b>XIII.30</b>	Στιγμαία τιμή της έντασης σε κάθε θέση της γραμμής	$I(z, t) = \text{Re}(\dot{I}(z)e^{j\omega t}) =$ $= \frac{1}{ Z_0 } [V^+e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \phi_i - \phi_z) - V^-e^{\alpha z} \cos(\omega t + \beta z + \phi_r - \phi_z)]$
<b>XIII.31</b>	Μήκος κύματος του διαδιδόμενου κύματος	$\lambda = v_p T = \frac{v_p}{f} = \frac{2\pi}{\beta}$
<b>XIII.32</b>	Σύνθετη αντίσταση της γραμμής	$Z(z) = Z_0 \frac{\dot{V}^+e^{-\gamma z} + \dot{V}^-e^{\gamma z}}{\dot{V}^+e^{-\gamma z} - \dot{V}^-e^{\gamma z}}$

**ΑΝΑΚΛΑΣΗ ΣΕ ΓΡΑΜΜΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ**

<b>XIII.33</b>	Συνολική τάση και ένταση στη θέση του φορτίου	$\text{XIII.25} \stackrel{(z=0)}{\Rightarrow} \dot{V}_L = \dot{V}^+ + \dot{V}^-$ $\text{XIII.26} \stackrel{(z=0)}{\Rightarrow} \dot{I}_L = \frac{1}{Z_0}(\dot{V}^+ - \dot{V}^-)$
<b>XIII.34</b>	Γενικές σχέσεις τάσης, ρεύματος και αντίστασης σε γραμμή μεταφοράς με μεταβλητή $s = -z$ την απόσταση από το φορτίο	$\dot{V}(s) = \dot{V}^+ e^{\gamma s} + \dot{V}^- e^{-\gamma s}$ $\dot{I}(s) = \frac{1}{Z_0}(\dot{V}^+ e^{\gamma s} - \dot{V}^- e^{-\gamma s})$ $Z(s) = Z_0 \frac{\dot{V}^+ e^{\gamma s} + \dot{V}^- e^{-\gamma s}}{\dot{V}^+ e^{\gamma s} - \dot{V}^- e^{-\gamma s}}$
<b>XIII.35</b>	Συντελεστής ανάκλασης στο πέρας της γραμμής	$\Gamma_0 = \frac{\dot{V}^-}{\dot{V}^+} =  \Gamma_0  e^{j\varphi_0} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$
<b>XIII.36</b>	Αντίσταση εισόδου	$Z(s) = Z_0 \frac{e^{\gamma s} + \Gamma_0 e^{-\gamma s}}{e^{\gamma s} - \Gamma_0 e^{-\gamma s}} = Z_0 \frac{1 + \Gamma_0 e^{-2\gamma s}}{1 - \Gamma_0 e^{-2\gamma s}} = Z_0 \frac{Z_L + Z_0 \tanh \gamma s}{Z_0 + Z_L \tanh \gamma s}$
<b>XIII.37</b>	Γενικές εξισώσεις τάσης και ρεύματος σε γραμμή μεταφοράς ως συνάρτηση της απόστασης $s$ από το φορτίο	$\dot{V}(s) = \dot{V}_L \cosh \gamma s + Z_0 \dot{I}_L \sinh \gamma s$ $\dot{I}(s) = \frac{\dot{V}_L}{Z_0} \sinh \gamma s + \dot{I}_L \cosh \gamma s$

**Περίπτωση ανοιχτής γραμμής ( $Z_L = \infty$ )**

<b>XIII.38</b>	Πλάτη τάσης και ρεύματος	$\dot{V}^+ = \dot{V}^- = \frac{\dot{V}_L}{2}$ $\dot{I}^+ = -\dot{I}^- = \frac{\dot{V}_L}{2Z_0}$ $\dot{I}_L = 0$
<b>XIII.39</b>	Σύνθετη αντίσταση εισόδου και συντελεστής ανάκλασης	$Z_a(s) = \frac{Z_0}{\tanh \gamma s} = Z_0 \frac{1 + j \tanh as \tan \beta s}{\tanh as + j \tan \beta s}$ $\Gamma_0 = 1$

**Περίπτωση βραχυκυκλωμένης γραμμής ( $Z_L = 0$ )**

<b>XIII.40</b>	Πλάτη τάσης και ρεύματος	$\dot{V}^- = -\dot{V}^+$ $\dot{V}_L = 0$ $\dot{I}^+ = \dot{I}^- = \frac{\dot{I}_L}{2}$
<b>XIII.41</b>	Σύνθετη αντίσταση εισόδου και συντελεστής ανάκλασης	$Z_\beta(s) = Z_0 \tanh \gamma s$ $\Gamma_0 = -1$

Περίπτωση προσαρμοσμένης γραμμής ( $Z_L = Z_0$ )		
XIII.42	Πλάτη τάσης και ρεύματος	$\begin{aligned} \dot{V}^- &= 0 \\ \dot{V}^+ &= \dot{V}_L \\ \dot{I}^- &= 0 \\ \dot{I}^+ &= \dot{I}_L \end{aligned}$
XIII.43	Σύνθετη αντίσταση εισόδου και συντελεστής ανάκλασης	$\begin{aligned} Z_\pi(s) &= Z_0 \\ \Gamma_0 &= 0 \end{aligned}$

**ΓΡΑΜΜΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΧΩΡΙΣ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗ**

XIII.44	Συνθήκη Heaviside για γραμμή χωρίς παραμόρφωση	$\frac{L}{R} = \frac{C}{G}$
XIII.45	Σύνθετη αντίσταση γραμμής	$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{R}{G}}$
XIII.46	Σταθερά διάδοσης	$\gamma = \sqrt{RG} + j\omega\sqrt{LC} = \alpha + j\beta$
XIII.47	Φασική ταχύτητα	$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
XIII.48	Συνθήκες για γραμμή με χαμηλές απώλειες	$\omega L \gg R, \quad \omega C \gg G$
XIII.49	Σύνθετη αντίσταση σε γραμμή με χαμηλές απώλειες	$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \cong \sqrt{\frac{L}{C}}$
XIII.50	Συντελεστής απόσβεσης σε γραμμή με χαμηλές απώλειες	$\alpha \cong \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} + \frac{G}{2} \sqrt{\frac{L}{C}}$
XIII.51	Φασική σταθερά διάδοσης σε γραμμή με χαμηλές απώλειες	$\beta = \omega\sqrt{LC}$
XIII.52	Φασική ταχύτητα σε γραμμή με χαμηλές απώλειες	$v_p \cong \frac{1}{\sqrt{LC}}$

**ΚΥΚΛΩΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΔΑΝΙΚΗΣ ΓΡΑΜΜΗΣ**

<b>XIII.53</b>	Εξισώσεις Kirchhoff στην ημιτονοειδή μόνιμη κατάσταση για γραμμή χωρίς απώλειες	$-\frac{d\dot{V}}{dz} = j\omega L\dot{I}$ $-\frac{d\dot{I}}{dz} = j\omega C\dot{V}$
<b>XIII.54</b>	Εξισώσεις για γραμμή χωρίς απώλειες	$\frac{d^2\dot{V}}{dz^2} + \omega^2 LC\dot{V} = 0$ $\frac{d^2\dot{I}}{dz^2} + \omega^2 LC\dot{I} = 0$
<b>XIII.55</b>	Σταθερά διάδοσης και χαρακτηριστική σύνθετη αντίσταση σε γραμμή χωρίς απώλειες	$\gamma = j\beta = j\omega\sqrt{LC} \quad a = 0$ $Z_0 = \sqrt{L/C}$
<b>XIII.56</b>	Γενικές λύσεις για την τάση και το ρεύμα στη γραμμή (μυγαδικές μορφές)	$\dot{V}(z) = \dot{V}^+ e^{-j\beta z} + \dot{V}^- e^{j\beta z}$ $\dot{I}(z) = \frac{1}{Z_0} (\dot{V}^+ e^{-j\beta z} - \dot{V}^- e^{j\beta z})$
<b>XIII.57</b>	Γενικές λύσεις για την τάση και το ρεύμα στη γραμμή (στιγματικές τιμές)	$V(z, t) = V^+ \cos(\omega t - \beta z + \varphi_i) + V^- \cos(\omega t + \beta z + \varphi_r)$ $I(z, t) = \frac{1}{Z_0} (V^+ \cos(\omega t - \beta z + \phi_i) - V^- \cos(\omega t + \beta z + \phi_r))$
<b>XIII.58</b>	Φασική ταχύτητα, μήκος κύματος σε γραμμή χωρίς απώλειες	$v_p = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \lambda = \frac{1}{f\sqrt{LC}}$
<b>XIII.59</b>	Τάση και ρεύμα στο φορτίο γραμμής χωρίς απώλειες	$\dot{V}_L = \dot{V}^+ + \dot{V}^-, \quad I_L = \frac{1}{Z_0} (\dot{V}^+ - \dot{V}^-)$
<b>XIII.60</b>	Γενικές σχέσεις τάσης σε γραμμή μεταφοράς με μεταβλητή $s = -z$ την απόσταση από το φορτίο (ιδανική γραμμή)	$\dot{V}(s) = \dot{V}_L \cos \beta s + jZ_0 \dot{I}_L \sin \beta s$ $\dot{V}(s) = \dot{V}^+ e^{j\beta s} (1 + \Gamma_0 e^{-j2\beta s}) = \dot{V}^+ e^{j\beta s} (1 +  \Gamma_0  e^{j(\varphi_0 - 2\beta s)})$
<b>XIII.61</b>	Γενικές σχέσεις ρεύματος σε γραμμή μεταφοράς με μεταβλητή $s = -z$ την απόσταση από το φορτίο (ιδανική γραμμή)	$\dot{I}(s) = j \frac{\dot{V}_L}{Z_0} \sin \beta s + \dot{I}_L \cos \beta s$ $\dot{I}(s) = \frac{\dot{V}^+}{Z_0} e^{j\beta s} (1 - \Gamma_0 e^{-j2\beta s}) = \frac{\dot{V}^+}{Z_0} e^{j\beta s} [1 -  \Gamma_0  e^{j(\varphi_0 - 2\beta s)}]$
<b>XIII.62</b>	Σύνθετη αντίσταση εισόδου ιδανικής γραμμής	$Z(s) = Z_0 \frac{\dot{V}^+ e^{j\beta s} + \dot{V}^- e^{-j\beta s}}{\dot{V}^+ e^{j\beta s} - \dot{V}^- e^{-j\beta s}} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan \beta s}{Z_0 + jZ_L \tan \beta s}$
<b>XIII.63</b>	Συντελεστής ανάκλασης ιδανικής γραμμής	$\Gamma_0 = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} =  \Gamma_0  e^{j\varphi_0}$
<b>XIII.64</b>	Σύνθετη αντίσταση φορτίου συναρτήσει της χαρακτηριστικής σύνθετης αντίστασης της γραμμής και του συντελεστή ανάκλασης στο φορτίο	$Z_L = Z_0 \frac{1 + \Gamma_0}{1 - \Gamma_0}$
<b>XIII.65</b>	Σύνθετη αντίσταση σε τυχαία θέση γραμμής συναρτήσει της χαρακτηριστικής σύνθετης αντίστασης της γραμμής και του συντελεστή ανάκλασης στο φορτίο	$Z(s) = Z_0 \frac{1 + \Gamma_0 e^{-j2\beta s}}{1 - \Gamma_0 e^{-j2\beta s}}$

<b>XIII.66</b>	Σύνθετη αντίσταση σε τυχαία θέση γραμμής για την περίπτωση ανοιχτής γραμμής	$Z_a(s) = -j \frac{Z_0}{\tan \beta s}$
<b>XIII.67</b>	Σύνθετη αντίσταση σε τυχαία θέση γραμμής για την περίπτωση βραχυκυκλωμένης γραμμής	$Z_\beta(s) = jZ_0 \tan \beta s$
<b>XIII.68</b>	Σύνθετη αντίσταση σε τυχαία θέση γραμμής για την περίπτωση προσαρμοσμένης γραμμής	$Z_\pi(s) = Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$
<b>XIII.69</b>	Μέγιστη τιμή τάσης κατά μήκος της γραμμής μεταφοράς	$ \dot{V}(s) _{\max} =  \dot{V}^+  (1 +  \Gamma_0 )$
<b>XIII.70</b>	Ελάχιστη τιμή τάσης κατά μήκος της γραμμής μεταφοράς	$ \dot{V}(s) _{\min} =  \dot{V}^+  (1 -  \Gamma_0 )$
<b>XIII.71</b>	Μέγιστη τιμή ρεύματος κατά μήκος της γραμμής μεταφοράς	$ \dot{I}(s) _{\max} = \frac{ \dot{V}^+ }{Z_0} (1 +  \Gamma_0 )$
<b>XIII.72</b>	Ελάχιστη τιμή ρεύματος κατά μήκος της γραμμής μεταφοράς	$ \dot{I}(s) _{\min} = \frac{ \dot{V}^+ }{Z_0} (1 -  \Gamma_0 )$
<b>XIII.73</b>	Λόγος τάσεων στάσιμου κύματος σε γραμμή μεταφοράς	$S = \frac{ \dot{V}(s) _{\max}}{ \dot{V}(s) _{\min}} = \frac{ \dot{I}(s) _{\max}}{ \dot{I}(s) _{\min}} = \frac{1 +  \Gamma_0 }{1 -  \Gamma_0 }$
<b>XIII.74</b>	Μέγιστη τιμή αντίστασης εισόδου σε γραμμή μεταφοράς	$Z_{\max} = \frac{ \dot{V}(s) _{\max}}{ \dot{I}(s) _{\min}} = Z_0 \frac{1 +  \Gamma_0 }{1 -  \Gamma_0 } = SZ_0$
<b>XIII.75</b>	Ελάχιστη τιμή αντίστασης εισόδου σε γραμμή μεταφοράς	$Z_{\min} = \frac{ \dot{V}(s) _{\min}}{ \dot{I}(s) _{\max}} = Z_0 \frac{1 -  \Gamma_0 }{1 +  \Gamma_0 } = \frac{Z_0}{S}$
<b>XIII.76</b>	Σύνθετη αντίσταση φορτίου συναρτήσει του λόγου στασίμου κύματος ( $d$ : απόσταση πλησιέστερου ελαχίστου $ \dot{V} _{\min}$ από το φορτίο)	$Z_L = Z_0 \frac{1 - jS \tan \beta d}{S - j \tan \beta d}$
<b>XIII.77</b>	Σύνθετη αντίσταση εισόδου βραχυκυκλωμένης γραμμής μήκους $\lambda/8$	$Z_\beta \left( \frac{\lambda}{8} \right) = jZ_0$
<b>XIII.78</b>	Σύνθετη αντίσταση εισόδου βραχυκυκλωμένης γραμμής μήκους $\lambda/4$	$Z_\beta \left( \frac{\lambda}{4} \right) = j\infty$
<b>XIII.79</b>	Σύνθετη αντίσταση εισόδου βραχυκυκλωμένης γραμμής μήκους $3\lambda/8$	$Z_\beta \left( \frac{3\lambda}{8} \right) = -jZ_0$
<b>XIII.80</b>	Σύνθετη αντίσταση εισόδου βραχυκυκλωμένης γραμμής μήκους $\lambda/2$	$Z_\beta \left( \frac{\lambda}{2} \right) = 0$

<b>XIII.81</b>	Σύνθετη αντίσταση εισόδου όταν $s = \kappa\lambda/2$ , $\kappa = 1, 2, \dots$ (άρτιο πολλαπλάσιο του τετάρτου μήκους κύματος)	$Z_{in}(s) = Z_L$
<b>XIII.82</b>	Σύνθετη αντίσταση εισόδου όταν $s = (2\kappa - 1)\lambda/4$ , $\kappa = 1, 2, \dots$ (περιττό πολλαπλάσιο του τετάρτου μήκους κύματος)	$Z_{in}(s) = \frac{Z_0^2}{Z_L}$
<b>XIII.83</b>	Μεταφερόμενη ισχύς σε ιδανική γραμμική μεταφοράς	$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \frac{ \dot{V}^+ ^2}{Z_0} (1 -  \Gamma_0 ^2) = \frac{1}{2} \frac{ \dot{V}^+ ^2}{Z_0} - \frac{1}{2} \frac{ \dot{V}^- ^2}{Z_0}$ $\langle P \rangle = \langle P_L \rangle = \langle P_i \rangle - \langle P_r \rangle = \frac{1}{2} \frac{ \dot{V}^+ ^2}{Z_0} - \frac{1}{2} \frac{ \dot{V}^+ ^2  \Gamma_0 ^2}{Z_0}$
<b>XIII.84</b>	Μέγιστη ισχύς που μπορεί να προσδοθεί στο φορτίο από ιδανική γραμμική μεταφοράς	$\langle P \rangle_{\max} = \frac{1}{2} \frac{ \dot{V}^+ ^2}{Z_0}$

**ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ SMITH**

<b>XIII.85</b>	Γενικευμένος συντελεστής ανάκλασης	$\Gamma = \Gamma_0 e^{-j2\beta s} =  \Gamma_0  e^{j(\varphi_0 - 2\beta s)} =  \Gamma_0  e^{j\psi} = p + jq$
<b>XIII.86</b>	Αντίσταση εισόδου σε κάθε θέση της γραμμής	$Z = Z_0 \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma}$
<b>XIII.87</b>	Ανηγμένη σύνθετη αντίσταση	$z(s) = \frac{Z(s)}{Z_0} = \frac{R(s) + jX(s)}{Z_0} = r(s) + jx(s)$ $z(s) = \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma}$
<b>XIII.88</b>	Σύνθετη αγωγιμότητα εισόδου της γραμμής	$Y(s) = \frac{1}{Z(s)} = G + jB$
<b>XIII.89</b>	Ανηγμένη σύνθετη αγωγιμότητα	$y(s) = \frac{1}{z(s)} = g + jb$
<b>XIII.90</b>	Χαρακτηριστική σύνθετη αγωγιμότητα	$Y_0 = \frac{1}{Z_0}$
<b>XIII.91</b>	Ανηγμένη χαρακτηριστική σύνθετη αγωγιμότητα	$y_0 = \frac{1 - \Gamma}{1 + \Gamma}$
<b>XIII.92</b>	Ανηγμένη αντίσταση στις θέσεις όπου $ \dot{V}(s)  =  \dot{V}(s) _{\max}$	$z = z_{\max} = r = S$
<b>XIII.93</b>	Στις θέσεις όπου $ \dot{V}(s)  =  \dot{V}(s) _{\min}$	$z = z_{\min} = r = \frac{1}{S}$

<b>XIII.94</b>	Γραμμή με απώλειες	$z(s) = \frac{Z(s)}{Z_0} = \frac{1 + \Gamma_0 e^{-2\gamma s}}{1 - \Gamma_0 e^{-2\gamma s}} = \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma}$
<b>XIII.95</b>	Γενικευμένος συντελεστής ανάκλασης	$\Gamma = \Gamma_0 e^{-2\gamma s} = \Gamma_0 e^{-j2\beta s} =  \Gamma_0  e^{-2\alpha s} e^{j(\psi - 2\beta s)}$

ΤΗΝ ΜΟΥ ΑΠΟ

**XIV**

**ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΟΙ**

**ΔΙΑΔΟΣΗ ΣΕ ΕΝΑ ΣΥΣΤΗΜΑ ΔΥΟ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΑΓΩΓΙΜΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ**

(τα επίπεδα βρίσκονται στις θέσεις  $y=0$  και  $y=b$  και εκτείνονται κατά τον άξονα  $x$  στο άπειρο και κατά τον  $z$  από  $0$  μέχρι  $l$ )

<b>XIV.1</b>	Κυματικές εξισώσεις	$\nabla^2 \dot{\mathbf{E}} + \omega^2 \mu \epsilon \dot{\mathbf{E}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \dot{\mathbf{E}}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{\mathbf{E}}}{\partial z^2} + \omega^2 \mu \epsilon \dot{\mathbf{E}} = 0$ $\nabla^2 \dot{\mathbf{H}} + \omega^2 \mu \epsilon \dot{\mathbf{H}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \dot{\mathbf{H}}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{\mathbf{H}}}{\partial z^2} + \omega^2 \mu \epsilon \dot{\mathbf{H}} = 0$
<b>XIV.2</b>	Σταθερά διάδοσης $\gamma$	$\gamma^2 - q^2 + \omega^2 \mu \epsilon = \gamma^2 - q^2 + k^2 = 0$
<b>XIV.3</b>	Γενική μορφή $z$ -συνιστώσων ηλεκτρικής και μαγνητικής πεδιακής έντασης	$\dot{H}_z = (A_1 \cos qy + A_2 \sin qy)(B_1 e^{-\gamma z} + B_2 e^{\gamma z})$ $\dot{E}_z = (C_1 \cos qy + C_2 \sin qy)(D_1 e^{-\gamma z} + D_2 e^{\gamma z})$
<b>XIV.4</b>	Γενική μορφή $E_x$ συνιστώσας της ηλεκτρικής πεδιακής έντασης	$\dot{E}_x = \frac{-j\omega\mu}{\gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} \Rightarrow$ $\Rightarrow \dot{E}_x = \frac{j\omega\mu}{q} (A_1 \sin qy - A_2 \cos qy)(B_1 e^{-\gamma z} + B_2 e^{\gamma z})$
<b>XIV.5</b>	Γενική μορφή $E_y$ συνιστώσας της ηλεκτρικής πεδιακής έντασης	$\dot{E}_y = \frac{1}{\gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon} \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial z \partial y} \Rightarrow$ $\Rightarrow \dot{E}_y = \frac{\gamma}{q} (C_1 \sin qy - C_2 \cos qy)(D_1 e^{-\gamma z} - D_2 e^{\gamma z})$
<b>XIV.6</b>	Γενική μορφή $H_x$ συνιστώσας της μαγνητικής πεδιακής έντασης	$\dot{H}_x = \frac{j\omega\epsilon}{\gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} \Rightarrow$ $\Rightarrow \dot{H}_x = -\frac{j\omega\epsilon}{q} (C_1 \sin qy - C_2 \cos qy)(D_1 e^{-\gamma z} + D_2 e^{\gamma z})$
<b>XIV.7</b>	Γενική μορφή $H_y$ συνιστώσας της μαγνητικής πεδιακής έντασης	$\dot{H}_y = \frac{1}{\gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon} \frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial z \partial y} \Rightarrow$ $\Rightarrow \dot{H}_y = \frac{\gamma}{q} (A_1 \sin qy - A_2 \cos qy)(B_1 e^{-\gamma z} - B_2 e^{\gamma z})$
<b>XIV.8</b>	Συνιστώσες της ηλεκτρικής και μαγνητικής πεδιακής έντασης στην περίπτωση διάδοσης εγκάρσιου ηλεκτρομαγνητικού κύματος (TEM)	$\dot{H}_z = 0$ $\dot{E}_z = 0$ $\dot{H}_x = F_1 e^{-\gamma z} + F_2 e^{\gamma z}$ $\dot{E}_y = -\frac{\gamma}{j\omega\epsilon} (F_1 e^{-\gamma z} - F_2 e^{\gamma z}) = -\eta (F_1 e^{-\gamma z} - F_2 e^{\gamma z})$ $\dot{H}_y = G_1 e^{-\gamma z} + G_2 e^{\gamma z} = 0$ $\dot{E}_x = \frac{\gamma}{j\omega\epsilon} (G_1 e^{-\gamma z} - G_2 e^{\gamma z}) = 0$
<b>XIV.9</b>	Οριακές συνθήκες στις αγωγίμες πλάκες	$\dot{E}_x \Big _{y=0} = \dot{E}_x \Big _{y=b} = 0 \Rightarrow \begin{cases} A_2 = C_1 = 0 \\ q = q_n = \frac{n\pi}{b} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$ $\dot{E}_z \Big _{y=0} = \dot{E}_z \Big _{y=b} = 0$



<p><b>XIV.10</b></p>	<p>Εγκάρσιο ηλεκτρικοί ρυθμοί (<i>TE</i>)</p>	$\dot{E}_x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j\omega\mu}{q_n} A_{1n} \sin q_n y (B_{1n} e^{-\gamma z} + B_{2n} e^{\gamma z})$ $\dot{H}_z = \sum_{n=1}^{\infty} A_{1n} \cos q_n y (B_{1n} e^{-\gamma z} + B_{2n} e^{\gamma z})$ $\dot{H}_y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{q_n} A_{1n} \sin q_n y (B_{1n} e^{-\gamma z} - B_{2n} e^{\gamma z})$
<p><b>XIV.11</b></p>	<p>Εγκάρσιο μαγνητικοί ρυθμοί (<i>TM</i>)</p>	$\dot{E}_y = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{\gamma_n}{q_n} C_{2n} \cos q_n y (D_{1n} e^{-\gamma z} - D_{2n} e^{\gamma z})$ $\dot{E}_z = \sum_{n=1}^{\infty} C_{2n} \sin q_n y (D_{1n} e^{-\gamma z} + D_{2n} e^{\gamma z})$ $\dot{H}_x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j\omega\varepsilon}{q_n} C_{2n} \cos q_n y (D_{1n} e^{-\gamma z} - D_{2n} e^{\gamma z})$

<p><b>Εγκάρσιο ηλεκτρικό πεδίο – Ρυθμοί <i>TE</i> (<math>\dot{E}_z = 0</math>)</b></p>		
<p><b>XIV.12</b></p>	<p>Συνιστώσες της ηλεκτρικής και μαγνητικής πεδιακής έντασης, όπου <math>q_n = \frac{n\pi}{b}</math>, (<math>n = 1, 2, 3, \dots</math>)</p>	$\dot{E}_{zn} = \dot{E}_{yn} = \dot{H}_{xn} = 0$ $\dot{E}_{xn} = \frac{j\omega\mu}{q_n} H_o \sin q_n y e^{-j\beta_n z}$ $\dot{H}_{yn} = \frac{j\beta_n}{q_n} H_o \sin q_n y e^{-j\beta_n z}$ $\dot{H}_{zn} = \dot{H}_o \cos q_n y e^{-j\beta_n z}$
<p><b>XIV.13</b></p>	<p>Φασική σταθερά διάδοσης</p>	$\beta_n = \sqrt{\omega^2 \mu\varepsilon - (n\pi/b)^2} = \omega \sqrt{\mu\varepsilon} \sqrt{1 - (f_c/f)^2}$

<p><b>Εγκάρσιο μαγνητικό πεδίο. Ρυθμοί <i>TM</i> (<math>\dot{H}_z = 0</math>)</b></p>		
<p><b>XIV.14</b></p>	<p>Συνιστώσες της ηλεκτρικής και μαγνητικής πεδιακής έντασης, όπου <math>q_n = \frac{n\pi}{b}</math>, (<math>n = 1, 2, 3, \dots</math>)</p>	$\dot{H}_{zn} = \dot{E}_{xn} = \dot{H}_{yn} = 0$ $\dot{E}_{zn} = E_o \sin q_n y e^{-j\beta_n z}$ $\dot{E}_{yn} = -\frac{j\beta_n}{q_n} E_o \cos q_n y e^{-j\beta_n z}$ $\dot{H}_{xn} = \frac{j\omega\varepsilon}{q_n} E_o \cos q_n y e^{-j\beta_n z}$
<p><b>XIV.15</b></p>	<p>Φασική σταθερά διάδοσης</p>	$\beta_n = \sqrt{\omega^2 \mu\varepsilon - (n\pi/b)^2} = \omega \sqrt{\mu\varepsilon} \sqrt{1 - (f_c/f)^2}$

<p><b>Χαρακτηριστικά διάδοσης</b></p>		
<p><b>XIV.16</b></p>	<p>Σταθερά διάδοσης του <math>n</math>-στού ρυθμού</p>	$\gamma_n = \sqrt{(n\pi/b)^2 - \omega^2 \mu\varepsilon}$
<p><b>XIV.17</b></p>	<p>Συνθήκη για διάδοση του κύματος</p>	$\omega^2 \mu\varepsilon > \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \Rightarrow \gamma_n = j\beta_n = j\sqrt{\omega^2 \mu\varepsilon - (n\pi/b)^2}$

<b>XIV.18</b>	Συχνότητα αποκοπής του $n$ -στού ρυθμού	$f_c = \frac{n}{2b\sqrt{\mu\varepsilon}}$
<b>XIV.19</b>	Ταχύτητα διάδοσης επίπεδου κύματος στο μεταξύ των πλακών διηλεκτρικό μέσο	$v_o = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$
<b>XIV.20</b>	Μήκος κύματος που αντιστοιχεί στην ταχύτητα $v_o$	$\lambda = \frac{v_o}{f} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}$
<b>XIV.21</b>	Μήκος επίπεδου κύματος που αντιστοιχεί στη συχνότητα αποκοπής $f_c$	$\lambda_c = \frac{v_o}{f_c} = \frac{1}{f_c\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{2\pi}{\omega_c\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{f}{f_c}\lambda$
<b>XIV.22</b>	Σταθερά διάδοσης συναρτήσει της συχνότητας αποκοπής και του μήκους κύματος αποκοπής	$\begin{aligned}\gamma_n &= j\beta_n = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{1 - (f_c/f)^2} = \\ &= j\frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{1 - (f_c/f)^2} = j\frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}\end{aligned}$
<b>XIV.23</b>	Μήκος κύματος κυματοδηγού	$\begin{aligned}\lambda_g &= \frac{2\pi}{\beta_n} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2\mu\varepsilon - (n\pi/b)^2}} = \\ &= \frac{\lambda}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - (f_c/f)^2}}\end{aligned}$
<b>XIV.24</b>	Φασική ταχύτητα	$\begin{aligned}v_p &= \lambda_g f = \frac{2\pi f}{\beta_n} = \frac{\omega}{\beta_n} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2\mu\varepsilon - (n\pi/b)^2}} \\ &= \frac{v_o}{\sqrt{1 - (f_c/f)^2}} = \frac{v_o}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}}\end{aligned}$
<b>XIV.25</b>	Σχέση μηκών κύματος $\lambda_c$ , $\lambda_g$ και $\lambda$	$\frac{1}{\lambda_g^2} + \frac{1}{\lambda_c^2} = \frac{1}{\lambda^2}$

**Εγκάρσιο ηλεκτρομαγνητικό κύμα. Ρυθμός TEM ( $\dot{E}_z = \dot{H}_z = 0$ )**

<b>XIV.26</b>	Συνιστώσες της ηλεκτρικής και μαγνητικής πεδιακής έντασης	$\begin{aligned}\dot{E}_z &= \dot{H}_z = \dot{E}_x = \dot{H}_y = 0 \\ \dot{H}_x &= F_1 e^{-j\beta z} \\ \dot{E}_y &= -\eta \dot{H}_x = -\eta F_1 e^{-j\beta z}\end{aligned}$
<b>XIV.27</b>	Σταθερά διάδοσης	$\gamma = j\beta = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$
<b>XIV.28</b>	Μήκος κύματος κυματοδηγού	$\lambda_g = \lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{v_o}{f}$
<b>XIV.29</b>	Φασική ταχύτητα	$v_p = v_o = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$
<b>XIV.30</b>	Συχνότητα αποκοπής	$f_c = 0$

**ΣΩΛΗΝΩΤΟΙ ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΟΙ ΣΤΑΘΕΡΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ (ΓΕΝΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ)**

<b>XIV.31</b>	Σταθερά διάδοσης $\gamma$	$\gamma = j\beta = j\sqrt{\omega^2\mu\varepsilon - p^2 - q^2}$
<b>XIV.32</b>	Γενική μορφή $z$ -συνιστωσών της ηλεκτρικής και μαγνητικής πεδιακής έντασης όπου $X(x) = A_1 \cos px + A_2 \sin px$ $Y(y) = B_1 \cos qy + B_2 \sin qy$ $Z(z) = C_1 e^{-\gamma z} + C_2 e^{\gamma z}$	$\dot{E}_z = X(x)Y(y)Z(z)$
<b>XIV.33</b>	Γενική μορφή $E_x$ -συνιστώσας της ηλεκτρικής πεδιακής έντασης	$\dot{E}_x = -\frac{1}{\gamma^2 + \omega^2\mu\varepsilon} \left( \gamma \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} + j\mu\omega \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} \right)$
<b>XIV.34</b>	Γενική μορφή $E_y$ -συνιστώσας της ηλεκτρικής πεδιακής έντασης	$\dot{E}_y = \frac{1}{\gamma^2 + \omega^2\mu\varepsilon} \left( -\gamma \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} + j\mu\omega \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} \right)$
<b>XIV.35</b>	Γενική μορφή $H_x$ -συνιστώσας της μαγνητικής πεδιακής έντασης	$\dot{H}_x = \frac{1}{\gamma^2 + \omega^2\mu\varepsilon} \left( j\omega\varepsilon \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} - \gamma \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} \right)$
<b>XIV.36</b>	Γενική μορφή $H_y$ -συνιστώσας της μαγνητικής πεδιακής έντασης	$\dot{H}_y = -\frac{1}{\gamma^2 + \omega^2\mu\varepsilon} \left( j\omega\varepsilon \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} + \gamma \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} \right)$
<b>XIV.37</b>	Συνθήκη για διάδοση του κύματος	$\omega^2\mu\varepsilon - p^2 - q^2 \geq 0$
<b>XIV.38</b>	Συχνότητα αποκοπής του κυματοδηγού	$\gamma = 0 \Rightarrow f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{p^2 + q^2}{\mu\varepsilon}}$
<b>XIV.39</b>	Μήκος κύματος αποκοπής	$\lambda_c = \frac{v_o}{f_c} = \frac{2\pi}{\sqrt{p^2 + q^2}}$
<b>XIV.40</b>	Φασική σταθερά διάδοσης	$\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}$
<b>XIV.41</b>	Φασική ταχύτητα	$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2\mu\varepsilon - p^2 - q^2}} = \frac{v_o}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} = \frac{v_o}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}}$
<b>XIV.42</b>	Ταχύτητα ομάδας	$v_g = \frac{1}{\left(\frac{d\beta}{d\omega}\right)} = \frac{\sqrt{\omega^2\mu\varepsilon - p^2 - q^2}}{\omega\mu\varepsilon} = \frac{v_o^2}{v_p}$ $= v_o \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} = v_o \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}$
<b>XIV.43</b>	Σχέση ταχυτήτων $v_o$ , $v_p$ και $v_g$	$v_o^2 = v_p v_g$

XIV.44	Μήκος κύματος του κυματοδηγού	$\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{v_p}{f} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - p^2 - q^2}}$ $= \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}}$
XIV.45	Σχέση μηκών κύματος $\lambda_c$ , $\lambda_g$ και $\lambda$	$\frac{1}{\lambda_c^2} + \frac{1}{\lambda_g^2} = \frac{1}{\lambda^2}$

**ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΟΙ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ ΜΕ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ  $a$  ΚΑΙ  $b$**

XIV.46	Τιμές των $p$ και $q$ όπως αυτές καθορίζονται από τις οριακές συνθήκες	$p = \frac{m\pi}{a} \quad \text{και} \quad q = \frac{n\pi}{b} \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots)$
XIV.47	Φασική σταθερά διάδοσης	$\beta = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$
XIV.48	Συχνότητα αποκοπής	$f_c = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}{\mu \epsilon}}$
XIV.49	Μήκος κύματος αποκοπής	$\lambda_c = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}}$
XIV.50	Φασική ταχύτητα	$v_p = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}}$
XIV.51	Ταχύτητα ομάδας	$v_g = \frac{\sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}}{\omega \mu \epsilon}$
XIV.52	Μήκος κύματος του κυματοδηγού	$\lambda_g = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}}$

**Εγκάρσιο μαγνητικό κύμα – Ρυθμοί  $TM_{mn}$  ( $\dot{H}_z = 0$ )**

XIV.53	<p>Συνιστώσες της ηλεκτρικής και μαγνητικής πεδιακής έντασης, όπου</p> $p = \frac{m\pi}{a}, \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$ $q = \frac{n\pi}{b}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\dot{E}_x = -\frac{j\beta p E_o}{p^2 + q^2} \cos px \sin qy e^{-j\beta z}$ $\dot{E}_y = -\frac{j\beta q E_o}{p^2 + q^2} \sin px \cos qy e^{-j\beta z}$ $\dot{E}_z = E_o \sin px \sin qy e^{-j\beta z}$ $\dot{H}_x = \frac{j\omega \epsilon q E_o}{p^2 + q^2} \sin px \cos qy e^{-j\beta z}$ $\dot{H}_y = -\frac{j\omega \epsilon p E_o}{p^2 + q^2} \cos px \sin qy e^{-j\beta z}$ $\dot{H}_z = 0$
--------	--	--

Χαμηλότερος ρυθμός :  $TM_{11}$

Εγκάρσιο ηλεκτρικό κύμα – Ρυθμοί $TE_{mn}$ ( $\dot{E}_z = 0$ )		
<b>XIV.54</b>	Συνιστώσες της ηλεκτρικής και μαγνητικής πεδιακής έντασης, όπου $p = \frac{m\pi}{a}, \quad q = \frac{n\pi}{b}$	$\dot{E}_x = \frac{j\mu\omega H_0}{p^2 + q^2} \cos px \sin qye^{-j\beta z}$ $\dot{E}_y = -\frac{j\mu\omega H_0}{p^2 + q^2} \sin px \cos qye^{-j\beta z}$ $\dot{E}_z = 0$ $\dot{H}_x = \frac{j\beta p H_0}{p^2 + q^2} \sin px \cos qye^{-j\beta z}$ $\dot{H}_y = \frac{j\beta q H_0}{p^2 + q^2} \cos px \sin qye^{-j\beta z}$ $\dot{H}_z = H_0 \cos px \cos qye^{-j\beta z}$

Πρώτοι ρυθμοί :  $TE_{10}, TE_{01}$

Υπολογισμός της ισχύος σε κυματοδηγούς ορθογωνικής διατομής		
<b>XIV.55</b>	Μέση χρονική τιμή ισχύος ανά μονάδα επιφάνειας	$\langle P_z \rangle = \frac{1}{2} Z_0 (\dot{H}_x \dot{H}_x^* + \dot{H}_y \dot{H}_y^*)$
<b>XIV.56</b>	Κυματική σύνθετη αντίσταση	$Z_0 = \frac{\dot{E}_x}{\dot{H}_y} = -\frac{\dot{E}_y}{\dot{H}_x}$
<b>XIV.57</b>	Κυματική σύνθετη αντίσταση για εγκάρσια ηλεκτρικά κύματα (ρυθμοί $TE$ )	$Z_0^{TE} = \frac{\omega\mu}{\beta}$
<b>XIV.58</b>	Κυματική σύνθετη αντίσταση για εγκάρσια μαγνητικά κύματα (ρυθμοί $TM$ )	$Z_0^{TM} = \frac{\beta}{\omega\epsilon}$
<b>XIV.59</b>	Σχέση των σύνθετων αντιστάσεων $Z_0^{TE}$ και $Z_0^{TM}$	$Z_0^{TE} Z_0^{TM} = \eta^2 = \frac{\mu}{\epsilon}$
<b>XIV.60</b>	Συνολική μέση ισχύς στην περίπτωση ρυθμών $TM$	$P_T = \frac{abE_0^2}{8\eta} \left(\frac{f}{f_c}\right)^2 \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$
<b>XIV.61</b>	Συνολική μέση ισχύς στην περίπτωση ρυθμών $TE_{mn}$ εκτός των ρυθμών $TE_{10}$ και $TE_{01}$	$P_T = \frac{ab\eta H_0^2}{8} \left(\frac{f}{f_c}\right)^2 \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$
<b>XIV.62</b>	Συνολική μέση ισχύς στην περίπτωση των ρυθμών $TE_{10}$ και $TE_{01}$	$P_T = \frac{ab\eta H_0^2}{4} \left(\frac{f}{f_c}\right)^2 \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$

<b>Απώλειες στα τοιχώματα ορθογωνικών κυματοδηγών</b>		
<b>XIV.63</b>	Μεταδιδόμενη ισχύς σε απόσταση $z$ σε κυματοδηγό με μη υπεραγωγίμα τοιχώματα, όπου $P_0$ η ισχύς εισόδου και $\alpha$ η σταθερά απόσβεσης	$P_T(z) = P_0 e^{-2\alpha z}$
<b>XIV.64</b>	Ισχύς απωλειών ανά μονάδα μήκους	$P_L = -\frac{\partial P_T}{\partial z} = 2\alpha P_T$
<b>XIV.65</b>	Σταθερά απόσβεσης	$\alpha = \frac{P_L}{2P_T}$
<b>XIV.66</b>	Επιφανειακή αντίσταση τοιχωμάτων	$R_s = \frac{1}{\sigma \delta} = \sqrt{\frac{\mu \omega}{2\sigma}} = \sqrt{\frac{\pi \mu f}{\sigma}}$
<b>XIV.67</b>	Ισχύς απωλειών ανά μονάδα μήκους σε τοίχωμα παράλληλο στο επίπεδο $xOz$	$P_L = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} R_s  \dot{H}_t ^2 dx$
<b>XIV.68</b>	Συνολική ισχύς απωλειών ανά μονάδα μήκους	$P_L = P_{L1} + P_{L2} + P_{L3} + P_{L4} = R_s H_0^2 \left( b + \frac{1}{2\pi^2} a^3 \omega^2 \mu \varepsilon \right)$
<b>XIV.69</b>	Σταθερά απόσβεσης για τους ρυθμούς $TM_{mn}$	$\alpha_{TM_{mn}} = \frac{2R_s}{b\eta \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} \frac{n^2 + m^2 \left(\frac{b}{a}\right)^3}{n^2 + m^2 \left(\frac{b}{a}\right)^2}$
<b>XIV.70</b>	Σταθερά απόσβεσης για το ρυθμό $TE_{10}$	$\begin{aligned} \alpha_{TE_{10}} &= \frac{R_s}{b\eta \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} \left[ 1 + \frac{2b}{a} \left(\frac{f_c}{f}\right)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{b} \frac{\sqrt{\pi \varepsilon f}}{\sqrt{\sigma \left[ 1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2 \right]}} \left[ 1 + \frac{2b}{a} \left(\frac{f_c}{f}\right)^2 \right] \end{aligned}$
<b>XIV.71</b>	Σταθερά απόσβεσης για τους ρυθμούς $TE_{m0}$	$\alpha_{TE_{m0}} = \frac{R_s}{b\eta \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} \left[ 1 + \frac{2b}{a} \left(\frac{f_c}{f}\right)^2 \right]$
<b>XIV.72</b>	Σταθερά απόσβεσης για τους ρυθμούς $TE_{mn}$ , $n > 0$	$\begin{aligned} \alpha_{TE_{mn}} &= \frac{2R_s}{b\eta \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} \\ &\cdot \left\{ \left( 1 + \frac{b}{a} \right) \left(\frac{f_c}{f}\right)^2 + \frac{b}{a} \left[ 1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2 \right] \left( \frac{abm^2 + a^2 n^2}{b^2 m^2 + a^2 n^2} \right) \right\} \end{aligned}$

**ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟΙ ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΟΙ ΑΚΤΙΝΑΣ α**

<b>XIV.73</b>	<p>Γενική μορφή των συνιστωσών της ηλεκτρικής και μαγνητικής πεδιακής έντασης, όπου</p> $h^2 = \gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon$ <p>και <math>J_n</math> η συνάρτηση Bessel πρώτου είδους και <math>n</math> τάξης</p>	$\dot{E}_z = J_n(hr)(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)e^{-\gamma z}$ $\dot{H}_z = J_n(hr)(C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi)e^{-\gamma z}$ $\dot{H}_r = \frac{1}{h^2} \left( \frac{j\omega\epsilon}{r} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial \varphi} - \gamma \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial r} \right)$ $\dot{H}_\varphi = \frac{1}{h^2} \left( -j\omega\epsilon \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial r} - \frac{\gamma}{r} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial \varphi} \right)$ $\dot{E}_r = \frac{1}{h^2} \left( -\gamma \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial r} - \frac{j\omega\mu}{r} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial \varphi} \right)$ $\dot{E}_\varphi = \frac{1}{h^2} \left( -\frac{\gamma}{r} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial \varphi} + j\omega\mu \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial r} \right)$
---------------	--	--

**Εγκάρσιο μαγνητικό κύμα – Ρυθμοί  $TM_{mn}$  ( $\dot{H}_z = 0$ )**

<b>XIV.74</b>	<p>Συνιστώσες της ηλεκτρικής και μαγνητικής πεδιακής έντασης</p>	$\dot{E}_r = \frac{\beta}{\omega\epsilon} \dot{H}_\varphi$ $\dot{E}_\varphi = \frac{\beta}{\omega\epsilon} \dot{H}_r$ $\dot{E}_z = A_n J_n(hr) \cos n\varphi e^{-j\beta z}$ $\dot{H}_r = -\frac{j\omega\epsilon n}{h^2 r} A_n J_n(hr) \sin n\varphi e^{-j\beta z}$ $\dot{H}_\varphi = -\frac{j\omega\epsilon}{h} A_n J'_n(hr) \cos n\varphi e^{-j\beta z}$ $\dot{H}_z = 0$
<b>XIV.75</b>	Οριακή συνθήκη	$\dot{E}_z _{r=a} = 0 \Rightarrow J_n(ha) = 0$
<b>XIV.76</b>	$m$ -οστή ρίζα της συνάρτησης Bessel $J_n(ha) = 0$ , όπου $n$ η τάξη της	$(ha)_{nm}$
<b>XIV.77</b>	Συχνότητα αποκοπής για τον ρυθμό $TM_{mn}$	$f_c = \frac{1}{2\pi} \frac{h_{nm}}{\sqrt{\mu\epsilon}}, \text{ όπου } h_{nm} = \frac{(ha)_{nm}}{a}$
<b>XIV.78</b>	Φασική σταθερά διάδοσης	$\beta = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - h_{nm}^2} = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$
<b>XIV.79</b>	Φασική ταχύτητα	$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - h_{nm}^2}} = \frac{v_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$
<b>XIV.80</b>	Μήκος κύματος του κυματοδηγού	$\lambda_g = \frac{v_p}{f} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - h_{nm}^2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$
<b>XIV.81</b>	Συχνότητα αποκοπής για τον ρυθμό $TM_{01}$	$f_{c_{TM_{01}}} = \frac{1}{2\pi} \frac{h_{01}}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{1}{2\pi} \frac{(ha)_{01}}{a\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{1}{2\pi} \frac{2,405}{a\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{0,383}{a\sqrt{\mu\epsilon}}$

Εγκάρσιο ηλεκτρικό κύμα – Ρυθμοί $TE_{mn}$ ( $\dot{E}_z = 0$ )		
XIV.82	Συνιστώσες της ηλεκτρικής και μαγνητικής πεδιακής έντασης	$\dot{E}_r = \frac{\omega\mu}{\beta} \dot{H}_\varphi$ $\dot{E}_\varphi = -\frac{\omega\mu}{\beta} \dot{H}_r$ $\dot{E}_z = 0$ $\dot{H}_r = -\frac{j\beta}{h} C_n J'_n(hr) \cos n\varphi e^{-j\beta z}$ $\dot{H}_\varphi = \frac{j\beta n}{h^2 r} C_n J_n(hr) \sin n\varphi e^{-j\beta z}$ $\dot{H}_z = C_n J_n(hr) \cos n\varphi e^{-j\beta z}$
XIV.83	Οριακή συνθήκη	$\dot{E}_\varphi _{r=a} = 0 \Rightarrow J'_n(ha) = 0$
XIV.84	$m$ -οστή ρίζα της $J'_n(ha) = 0$ , όπου $n$ η τάξη της συνάρτησης Bessel	$(ha)'_{nm}$
XIV.85	Συχνότητα αποκοπής για τον ρυθμό $TE_{mn}$	$f_c = \frac{1}{2\pi} \frac{h_{nm}}{\sqrt{\mu\epsilon}}$ , όπου $h_{nm} = \frac{(ha)'_{nm}}{a}$
XIV.86	Φασική σταθερά διάδοσης	$\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon} \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$
XIV.87	Φασική ταχύτητα	$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2\mu\epsilon - h_{nm}^2}} = \frac{v_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$
XIV.88	Μήκος κύματος του κυματοδηγού	$\lambda_g = \frac{v_p}{f} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2\mu\epsilon - h_{nm}^2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$
XIV.89	Συχνότητα αποκοπής για τον ρυθμό $TE_{11}$	$f_{c_{TE_{11}}} = \frac{1}{2\pi} \frac{h_{11}}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{1}{2\pi} \frac{(ha)'_{11}}{a\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{1}{2\pi} \frac{1,841}{a\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{0,293}{a\sqrt{\mu\epsilon}}$

Σταθερά απόσβεσης για τοιχώματα με απώλειες		
XIV.90	Σταθερά απόσβεσης για τους ρυθμούς $TM_{mn}$	$\alpha_{TM_{mn}} = \frac{R_s}{a\eta} \frac{1}{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$
XIV.91	Σταθερά απόσβεσης για τους ρυθμούς $TE_{mn}$	$\alpha_{TE_{mn}} = \frac{R_s}{a\eta} \frac{1}{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} \left(\frac{f_c}{f}\right)^2 + \frac{n^2}{(ha)'_{nm}{}^2 - n^2}$



**ΚΟΙΛΟΤΗΤΕΣ – ΣΥΝΤΟΝΙΣΤΕΣ**

**Ορθογωνικές κοιλότητες διαστάσεων  $a \times b \times c$**

<b>XIV.92</b>	Γενική έκφραση για οποιαδήποτε συνιστώσα των διανυσμάτων $\dot{\mathbf{E}}$ και $\dot{\mathbf{H}}$ όπου $p = \frac{m\pi}{a}, \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$ $q = \frac{n\pi}{b}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$ $r = \frac{l\pi}{c}, \quad (l = 0, 1, 2, \dots)$	$\psi(x, y, z) = (A_1 \cos px + A_2 \sin px) \cdot (B_1 \cos qy + B_2 \sin qy) \cdot (C_1 \cos rz + C_2 \sin rz)$
<b>XIV.93</b>	Γενική σχέση που ικανοποιούν οι σταθερές $m, n, l$	$\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{c}\right)^2 = \omega^2 \mu \varepsilon$
<b>XIV.94</b>	Συνιστώσες της ηλεκτρικής πεδιακής έντασης	$\dot{E}_x = \dot{E}_{x0} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{l\pi z}{c}$ $\dot{E}_y = \dot{E}_{y0} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{l\pi z}{c}$ $\dot{E}_z = \dot{E}_{z0} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{l\pi z}{c}$
<b>XIV.95</b>	Σχέση ρυθμών και πλατών των συνιστωσών και του ηλεκτρικού πεδίου (νόμος του Gauss)	$\nabla \cdot \dot{\mathbf{E}} = 0 \Rightarrow \mathbf{k} \cdot \dot{\mathbf{E}}_0 = 0$ $\mathbf{k} = \frac{m\pi}{a} \mathbf{x}_0 + \frac{n\pi}{b} \mathbf{y}_0 + \frac{l\pi}{c} \mathbf{z}_0$ $\dot{\mathbf{E}}_0 = \dot{E}_{x0} \mathbf{x}_0 + \dot{E}_{y0} \mathbf{y}_0 + \dot{E}_{z0} \mathbf{z}_0$
<b>XIV.96</b>	Συνιστώσες της μαγνητικής πεδιακής έντασης	$\dot{H}_x = j\dot{H}_{x0} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{l\pi z}{c}$ $\dot{H}_y = j\dot{H}_{y0} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{l\pi z}{c}$ $\dot{H}_z = j\dot{H}_{z0} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{l\pi z}{c}$
<b>XIV.97</b>	Σχέση ρυθμών και πλατών των συνιστωσών και του μαγνητικού πεδίου	$\dot{\mathbf{H}}_0 = \dot{H}_{x0} \mathbf{x}_0 + \dot{H}_{y0} \mathbf{y}_0 + \dot{H}_{z0} \mathbf{z}_0 = \frac{1}{\mu\omega} \mathbf{k} \times \dot{\mathbf{E}}_0$
<b>XIV.98</b>	Συχνότητες ταλάντωσης στο εσωτερικό της κοιλότητας	$f = \frac{1}{2\sqrt{\mu\varepsilon}} \left[ \left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{l}{c}\right)^2 \right]^{1/2}$
<b>XIV.99</b>	Μήκος κύματος που αντιστοιχεί στη συχνότητα ταλάντωσης	$\lambda = \frac{v_0}{f} = \frac{1}{\left[ \left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{l}{c}\right)^2 \right]^{1/2}}$
<b>XIV.100</b>	Συχνότητες ταλάντωσης στην περίπτωση που η κοιλότητα έχει τη μορφή κύβου ( $a = b = c$ )	$f = \frac{1}{2a\sqrt{\mu\varepsilon}} (m^2 + n^2 + l^2)^{1/2}$

**Παράδειγμα : Ρυθμός  $TE_{101}$**

<b>XIV.101</b>	Συνιστώσες της ηλεκτρικής και μαγνητικής πεδιακής έντασης	$\dot{E}_x = \dot{E}_z = 0$ $\dot{E}_y = \dot{E}_{y0} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi z}{c}$ $\dot{H}_x = -\frac{j}{\mu\omega} \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial z} = -j \frac{\pi \dot{E}_{y0}}{\mu\omega c} \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi z}{c}$ $\dot{H}_y = 0$ $\dot{H}_z = \frac{j}{\mu\omega} \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial x} = \frac{j\pi \dot{E}_{y0}}{\mu\omega a} \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi z}{c}$
<b>XIV.102</b>	Συχνότητα συντονισμού	$f = \frac{1}{2\sqrt{\mu\varepsilon}} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2} \right)^{1/2}$
<b>XIV.103</b>	Συνολική ισχύς απωλειών στα τοιχώματα	$P_L = R_s \left( \frac{ab}{2c^2} + \frac{c}{4a} + \frac{a}{4c} + \frac{bc}{2a^2} \right) \left( \frac{\pi E_{y0}}{\mu\omega} \right)^2$
<b>XIV.104</b>	Συνολική αποθηκευμένη ενέργεια	$W = 2W_e = \frac{abc}{8} \varepsilon E_{y0}^2$
<b>XIV.105</b>	Σταθερά απόσβεσης	$\alpha = R_s \left( \frac{2}{c^3} + \frac{1}{a^2b} + \frac{1}{bc^2} + \frac{2}{a^3} \right) \frac{\pi^2}{\mu^2 \omega^2 \varepsilon}$
<b>XIV.106</b>	Συντελεστής ποιότητας	$Q = \frac{\omega}{2\alpha} = \frac{\omega^3 \mu^2 \varepsilon}{2R_s \pi^2 \left( \frac{2}{c^3} + \frac{1}{a^2b} + \frac{1}{bc^2} + \frac{2}{a^3} \right)}$
<b>XIV.107</b>	Συντελεστής ποιότητας στην περίπτωση κυβικής κοιλότητας	$Q = \frac{\sqrt{2}\pi}{6} \frac{\sqrt{\mu/\varepsilon}}{R_s} = \frac{\sqrt{2}\pi}{6} \frac{\eta}{R_s} = 0,74 \frac{\eta}{R_s}$

**Κυλινδρικές κοιλότητες – Εγκάρσια ηλεκτρικά κύματα ( $TE_{mnl}$  ρυθμοί)**

<b>XIV.108</b>	Συνιστώσες της ηλεκτρικής και μαγνητικής πεδιακής έντασης, όπου $\beta = \frac{l\pi}{L}$ , $(l = 0, 1, 2, \dots)$	$\dot{E}_r = \frac{j\omega\mu n}{h^2 r} H_o J_n(hr) \sin n\varphi \sin \beta z$ $\dot{E}_\varphi = \frac{j\omega\mu}{h^2 r} H_o J'_n(hr) \cos n\varphi \sin \beta z$ $\dot{E}_z = 0$ $\dot{H}_r = -\frac{j\beta}{h} H_o J'_n(hr) \cos n\varphi \sin \beta z$ $\dot{H}_\varphi = -\frac{\beta}{h^2 r} H_o J_n(hr) \sin n\varphi \cos \beta z$ $\dot{H}_z = H_o J_n(hr) \cos n\varphi \sin \beta z$
<b>XIV.109</b>	Συχνότητες συντονισμού για τους ρυθμούς $(n, m, l)$	$f_{nml} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \sqrt{\left( \frac{l}{2L} \right)^2 + \left( \frac{h'_{nm}}{2\pi} \right)^2}$
<b>XIV.110</b>	Μήκη κύματος που αντιστοιχούν στις συχνότητες $\lambda_{nml}$	$\lambda_{nml} = \frac{1}{\sqrt{\left( \frac{l}{2L} \right)^2 + \left( \frac{h'_{nm}}{2\pi} \right)^2}}$

<b>XIV.111</b>	Μήκος κύματος για τον ρυθμό $TE_{011}$	$\lambda_{TE_{011}} = \frac{2L}{\sqrt{1 + \left(\frac{3,832 L}{\pi a}\right)^2}}$
<b>XIV.112</b>	Μήκος κύματος για τον ρυθμό $TE_{111}$	$\lambda_{TE_{111}} = \frac{2L}{\sqrt{1 + \left(\frac{1,841 L}{\pi a}\right)^2}}$

**Κυλινδρικές κοιλότητες – Εγκάρσια μαγνητικά κύματα ( $TM_{nml}$  ρυθμοί)**

<b>XIV.113</b>	Συνιστώσες της ηλεκτρικής και μαγνητικής πεδιακής έντασης $\beta = \frac{l\pi}{L}, \quad (l = 0, 1, 2, \dots)$	$\begin{aligned} \dot{E}_r &= -\frac{\beta}{h} E_o J'_n(hr) \cos n\varphi \sin \beta z \\ \dot{E}_\varphi &= \frac{n\beta}{h^2 r} E_o J_n(hr) \sin n\varphi \sin \beta z \\ \dot{E}_z &= E_o J_n(hr) \cos n\varphi \cos \beta z \\ \dot{H}_r &= -\frac{j\omega\varepsilon n}{h^2 r} E_o J_n(hr) \sin n\varphi \cos \beta z \\ \dot{H}_\varphi &= -\frac{j\omega\varepsilon n}{h} E_o J'_n(hr) \cos n\varphi \cos \beta z \\ \dot{H}_z &= 0 \end{aligned}$
<b>XIV.114</b>	Συχνότητες συντονισμού για τους ρυθμούς $(n, m, l)$	$f_{nml} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \sqrt{\left(\frac{l}{2L}\right)^2 + \left(\frac{h_{nm}}{2\pi}\right)^2}$
<b>XIV.115</b>	Μήκη κύματος που αντιστοιχούν στις συχνότητες $\lambda_{nml}$	$\lambda_{nml} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{l}{2L}\right)^2 + \left(\frac{h_{nm}}{2\pi}\right)^2}}$
<b>XIV.116</b>	Μήκος κύματος για τον ρυθμό $TM_{011}$	$\lambda_{TM_{011}} = \frac{2L}{\sqrt{1 + \left(\frac{2,405 L}{\pi a}\right)^2}}$

**XV**
**ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΗ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑ**
**ΠΕΔΙΟ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΚΑΘΥΣΤΕΡΗΣΗΣ**

<b>XV.1</b>	Καθυστερημένα δυναμικά (για ημιτονοειδείς διεγέρσεις), όπου $R$ είναι η απόσταση του σημείου παρατήρησης $P(x, y, z)$ από τη θέση $(x', y', z')$ του στοιχειώδους όγκου $dV'$	$\dot{\phi} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{V'} \frac{\dot{\rho}(x', y', z')}{R} e^{-j\beta R} dV'$ $\dot{\mathbf{A}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\dot{\mathbf{J}}(x', y', z')}{R} e^{-j\beta R} dV'$
<b>XV.2</b>	Το Η/Μ πεδίο συναρτήσει του διανυσματικού δυναμικού	$\dot{\mathbf{E}} = -j\omega \left[ \dot{\mathbf{A}} + \frac{1}{\beta^2} \nabla(\nabla \cdot \dot{\mathbf{A}}) \right]$ $\dot{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \dot{\mathbf{A}}$

**ΤΟ ΒΡΑΧΥ (Η΄ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΣ) ΔΙΠΟΛΟ**

<b>XV.3</b>	Ρεύμα που διαρρέει το δίπολο (διέγερση)	$I = I_0 \cos \omega t$
<b>XV.4</b>	Φορτίο διπόλου	$Q = \frac{I_0 \sin \omega t}{\omega}, \quad \dot{Q} = -j \frac{I_0}{\omega}$
<b>XV.5</b>	Καθυστερημένο μαγνητικό διανυσματικό δυναμικό για την περίπτωση διπόλου μήκους $l$	$\dot{\mathbf{A}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{\dot{\mathbf{i}} e^{-j\beta R}}{R} dz' = \frac{\mu_0 I_0 \mathbf{z}_0}{4\pi} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{e^{-j\beta R}}{R} dz'$
<b>XV.6</b>	Καθυστερημένο μαγνητικό διανυσματικό δυναμικό (σε απόσταση $r$ πολύ μεγαλύτερη από το μήκος του διπόλου)	$\dot{\mathbf{A}} = \dot{A}_z \mathbf{z}_0 = \frac{\mu_0 I_0 l}{4\pi} \frac{e^{-j\beta r}}{r} \mathbf{z}_0$
<b>XV.7</b>	Καθυστερημένο βαθμωτό δυναμικό (σε απόσταση $r$ πολύ μεγαλύτερη από το μήκος του διπόλου)	$\dot{\phi} = \frac{I_0 l \cos \theta}{4\pi\omega\epsilon_0} \left( \frac{\beta}{r} - \frac{j}{r^2} \right) e^{-j\beta r}$
<b>XV.8</b>	Συνιστώσες του μαγνητικού διανυσματικού δυναμικού σε σφαιρικές συντεταγμένες	$\dot{A}_r = \frac{\mu_0 I_0 l}{4\pi r} \cos \theta e^{-j\beta r}$ $\dot{A}_\theta = -\frac{\mu_0 I_0 l}{4\pi r} \sin \theta e^{-j\beta r}$ $\dot{A}_\varphi = 0$
<b>XV.9</b>	Συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου σε σφαιρικές συντεταγμένες	$\dot{H}_r = 0$ $\dot{H}_\theta = 0$ $\dot{H}_\varphi = \frac{I_0 l \sin \theta}{4\pi} \left( \frac{1}{r^2} + \frac{j\beta}{r} \right) e^{-j\beta r}$

<p><b>XV.10</b></p>	<p>Συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου σε σφαιρικές συντεταγμένες</p>	$\begin{aligned}\dot{E}_r &= -j \frac{I_0 l \cos \theta}{2\pi\omega\epsilon_0} \left( \frac{j\beta}{r^2} + \frac{1}{r^3} \right) e^{-j\beta r} \\ \dot{E}_\theta &= -j \frac{I_0 l \sin \theta}{4\pi\omega\epsilon_0} \left( -\frac{\beta^2}{r} + \frac{j\beta}{r^2} + \frac{1}{r^3} \right) e^{-j\beta r} \\ \dot{E}_\varphi &= 0\end{aligned}$
<p><b>XV.11</b></p>	<p>Το πεδίο σε πολύ μεγάλες αποστάσεις (Πεδίο ακτινοβολίας)</p>	$\begin{aligned}\dot{\mathbf{E}} &\cong \dot{E}_\theta \mathbf{\theta}_0 \cong j \frac{I_0 l \beta^2 \sin \theta}{4\pi\omega\epsilon_0 r} e^{-j\beta r} \mathbf{\theta}_0 = j \frac{I_0 l \omega \mu_0 \sin \theta}{4\pi r} e^{-j\beta r} \mathbf{\theta}_0 \\ \dot{\mathbf{H}} &= \dot{H}_\varphi \mathbf{\varphi}_0 \cong j \frac{I_0 l \beta \sin \theta}{4\pi r} e^{-j\beta r} \mathbf{\varphi}_0 = j \frac{I_0 l \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \sin \theta}{4\pi r} e^{-j\beta r} \mathbf{\varphi}_0 \\ \dot{E}_r &\cong \dot{E}_\varphi = \dot{H}_r = \dot{H}_\theta = 0\end{aligned}$
<p><b>XV.12</b></p>	<p>Χαρακτηριστική αντίσταση του κενού</p>	$\eta_0 = \frac{E_\theta}{H_\varphi} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \cong 120\pi \text{ (}\Omega\text{)}$
<p><b>XV.13</b></p>	<p>Το πεδίο στην κοντινή ζώνη (<math>r \ll \lambda</math>)</p>	$\begin{aligned}\dot{E}_r &\cong \frac{Q_0 l \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 r^3} \\ \dot{E}_\theta &\cong \frac{Q_0 l \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\ \dot{H}_\varphi &\cong \frac{I_0 l \sin \theta}{4\pi r^2}\end{aligned}$
<p><b>XV.14</b></p>	<p>Ακτινική συνιστώσα του διανύσματος του Poynting</p>	$\begin{aligned}P_r &= \frac{I_0^2 \beta^3}{32\pi^2 \omega \epsilon_0} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} = \frac{I_0^2 l^2 \omega^2 \mu_0}{32\pi^2 c} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \\ &= \frac{\eta_0 (\beta I_0 l)^2}{32\pi^2} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} = \frac{\eta_0 I_0^2}{8} \left( \frac{l}{\lambda} \right)^2 \frac{\sin^2 \theta}{r^2}\end{aligned}$
<p><b>XV.15</b></p>	<p>Συνολική ακτινοβολούμενη μέση ισχύς</p>	$\begin{aligned}P_\alpha &= \frac{I_0 l^2 \beta^3}{12\pi\omega\epsilon_0} = \frac{I_0 l^2 \beta \omega \mu_0}{12\pi} = \frac{\eta_0 (\beta I_0 l)^2}{12\pi} \\ &= \frac{\pi I_0^2}{3} \eta_0 \left( \frac{l}{\lambda} \right)^2 = 40\pi^2 I_0^2 \left( \frac{l}{\lambda} \right)^2\end{aligned}$
<p><b>XV.16</b></p>	<p>Ορισμός αντιστάσεως ακτινοβολίας <math>R_a</math></p>	$P_a = \frac{1}{2} R_a I_0^2$
<p><b>XV.17</b></p>	<p>Αντίσταση ακτινοβολίας</p>	$R_a = \frac{l^2 \beta^3}{6\pi\omega\epsilon_0} = \frac{\beta^2 l^2 \eta_0}{6\pi} = \frac{2\pi}{3} \eta_0 \left( \frac{l}{\lambda} \right)^2 = 80\pi^2 \left( \frac{l}{\lambda} \right)^2$

**ΕΝΤΑΣΗ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑΣ – ΚΑΤΕΥΘΥΝΤΙΚΟΤΗΤΑ – ΚΕΡΛΟΣ ΚΕΡΑΙΑΣ**

<p><b>XV.18</b></p>	<p>Ορισμός έντασης ακτινοβολίας (ακτινοβολούμενη μέση ισχύς ανά μονάδα στερεάς γωνίας)</p>	$p(\theta, \phi) = \left[ \frac{1}{2} \text{Re}(\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}) \cdot \mathbf{r}_0 \right] r^2 = P_r r^2 = \frac{dP_a}{d\Omega}$
<p><b>XV.19</b></p>	<p>Κατευθυντικότητα κεραίας (λόγος μέγιστης έντασης ακτινοβολίας προς μέση ένταση ακτινοβολίας)</p>	$D = \frac{p_{\max}}{p_{av}} = \frac{4\pi p_{\max}}{P_a} = \frac{4\pi p_{\max}}{\int_0^\pi \int_0^{2\pi} p(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi}$
<p><b>XV.20</b></p>	<p>Μέση ακτινοβολούμενη ισχύς της κεραίας</p>	$P_a = \iiint p(\theta, \varphi) d\Omega = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} p(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi = 4\pi p_{av}$

<b>XV.21</b>	Ένταση ακτινοβολίας ισοτροπικής κεραίας	$p_0 = p_{av} = \frac{P_{in}}{4\pi} = \frac{P_a}{4\pi}$
<b>XV.22</b>	Κέρδος κεραίας (λόγος μέγιστης έντασης ακτινοβολίας κεραίας προς μέγιστη ένταση ακτινοβολίας κεραίας αναφοράς)	$G = \frac{p_{max}}{(p_{max})_r}$
<b>XV.23</b>	Κέρδος (κεραία αναφοράς η ισοτροπική)	$G_0 = \frac{p_{max}}{p_0} = \frac{p_{max}}{p_{av}} = \frac{4\pi p_{max}}{P_{in}}$
<b>XV.24</b>	Συνάρτηση κατευθυντικότητας	$D(\theta, \varphi) = \frac{p(\theta, \varphi)}{p_{av}} = \frac{4\pi p(\theta, \varphi)}{P_a} = \frac{4\pi p(\theta, \varphi)}{\int_0^\pi \int_0^{2\pi} p(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi}$
<b>XV.25</b>	Συνάρτηση κέρδους	$G(\theta, \varphi) = \frac{p(\theta, \varphi)}{p_0} = \frac{4\pi p(\theta, \varphi)}{P_{in}} = \frac{4\pi p(\theta, \varphi)}{P_a + P_{\alpha\pi}}$
<b>XV.26</b>	Συνολική ισχύς εισόδου της κεραίας ( $P_{\alpha\pi}$ : ισχύς απωλειών)	$P_{in} = P_a + P_{\alpha\pi}$
<b>XV.27</b>	Βαθμός απόδοσης μιας κεραίας	$n = \frac{P_a}{P_{in}} = \frac{P_a}{P_a + P_{\alpha\pi}} = \frac{G}{D}$
<b>XV.28</b>	Ενεργό μήκος γραμμικής κεραίας	$h_e = \frac{1}{I_0} \int_{-h/2}^{h/2} \dot{I}(z) dz$
<b>XV.29</b>	Ένταση ακτινοβολίας	$p(\theta, \varphi) = p(\theta) = \frac{(\beta I_0 l)^2}{32\pi^2} \eta_0 \sin^2 \theta$
<b>XV.30</b>	Μέγιστη τιμή της έντασης ακτινοβολίας	$p_{max} = \frac{(\beta I_0 l)^2}{32\pi^2} \eta_0$
<b>XV.31</b>	Κατευθυντικότητα στοιχειώδους διπόλου	$D = 1,5, \quad D = 1,761 \text{ (db)}$
<b>XV.32</b>	Συνάρτηση κατευθυντικότητας στοιχειώδους διπόλου	$D(\theta, \varphi) = D(\theta) = 1,5 \sin^2 \theta$
<b>XV.33</b>	Κατευθυντικότητα και κέρδος σε decibels	$D_{(db)} = 10 \log D, \quad G_{(db)} = 10 \log G$
<b>XV.34</b>	Γωνία μισής ισχύος στοιχειώδους διπόλου	$\theta' = 45^\circ$

**ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΔΙΠΟΛΙΚΗ ΚΕΡΑΙΑ ΜΗΚΟΥΣ  $l = 2h$** 

 (τοποθετημένη στον άξονα  $z$  με κέντρο στο  $z = 0$ )

<b>XV.35</b>	Ρευματική κατανομή της κεραίας	$I(z') = \begin{cases} I_0 \sin \beta(h - z') & h \geq z' \geq 0 \\ I_0 \sin \beta(h + z') & 0 \geq z' \geq -h \end{cases}$
<b>XV.36</b>	Το μαγνητικό διανυσματικό δυναμικό	$\dot{\mathbf{A}} = \dot{A}_z \mathbf{z}_0 = \frac{\mu_0 I_0 e^{-j\beta r}}{2\pi\beta r} \frac{\cos(\beta h \cos \theta) - \cos \beta h}{\sin^2 \theta} \mathbf{z}_0$
<b>XV.37</b>	Το ηλεκτρικό πεδίο σε απομακρυσμένα σημεία	$\dot{\mathbf{E}} = \dot{E}_\theta \boldsymbol{\theta}_0 = \frac{j\eta_0 I_0 e^{-j\beta r}}{2\pi r} \frac{\cos(\beta h \cos \theta) - \cos \beta h}{\sin \theta} \boldsymbol{\theta}_0$
<b>XV.38</b>	Το μαγνητικό πεδίο σε απομακρυσμένα σημεία	$\dot{\mathbf{H}} = \dot{H}_\varphi \boldsymbol{\varphi}_0 = \frac{\dot{E}_\theta}{\eta_0} \boldsymbol{\varphi}_0 = \frac{jI_0 e^{-j\beta r}}{2\pi r} \frac{\cos(\beta h \cos \theta) - \cos \beta h}{\sin \theta} \boldsymbol{\varphi}_0$
<b>XV.39</b>	Μέση χρονική τιμή του διανύσματος του Poynting	$P_r(r, \theta) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}) = \frac{1}{2} \frac{ \dot{E}_\theta ^2}{\eta_0} = \frac{1}{2} \eta_0  \dot{H}_\varphi ^2 =$ $= \frac{\eta_0 I_0^2}{8\pi^2 r^2} \left[ \frac{\cos(\beta h \cos \theta) - \cos \beta h}{\sin \theta} \right]^2$
<b>XV.40</b>	Μέση ακτινοβολούμενη ισχύς	$P_a = \frac{\eta_0 I_0^2}{4\pi} \int_0^\pi \frac{[\cos(\beta h \cos \theta) - \cos \beta h]^2}{\sin \theta} d\theta$ $= \frac{\eta_0 I_0^2}{4\pi} \left\{ C + \ln(2\beta h) - C_i(2\beta h) + \frac{1}{2} \sin(2\beta h) [S_i(4\beta h) - 2S_i(2\beta h)] + \frac{1}{2} \cos(2\beta h) [C + \ln(\beta h) + C_i(4\beta h) - 2C_i(2\beta h)] \right\}$
<b>XV.41</b>	Αντίσταση ακτινοβολίας	$R_a = \frac{2P_a}{I_0^2} = \frac{\eta_0}{2\pi} \int_0^\pi \frac{[\cos(\beta h \cos \theta) - \cos \beta h]^2}{\sin \theta} d\theta$ $= \frac{\eta_0}{2\pi} \left\{ C + \ln(2\beta h) - C_i(2\beta h) + \frac{1}{2} \sin(2\beta h) [S_i(4\beta h) - 2S_i(2\beta h)] + \frac{1}{2} \cos(2\beta h) [C + \ln(\beta h) + C_i(4\beta h) - 2C_i(2\beta h)] \right\}$
<b>XV.42</b>	Χρήσιμοι μαθηματικοί τύποι για το ολοκληρωτικό ημίτονο $S_i(x)$ , συνημίτονο $C_i(x)$ και τη σταθερά του Euler $C$	$S_i(x) = \int_0^x \frac{\sin u}{u} du = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$ $C_i(x) = -\int_x^\infty \frac{\cos u}{u} du = C + \ln x - \int_x^\infty \frac{1 - \cos u}{u} du$ $= C + \ln x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n}}{(2n)(2n)!}$ $C = 0,577216$

**Ειδική περίπτωση: μήκος  $2h$  της κεραίας περιττό πολλαπλάσιο του μισού μήκους κύματος**

<b>XV.43</b>	Το μαγνητικό διανυσματικό δυναμικό	$\dot{\mathbf{A}} = \dot{A}_z \mathbf{z}_0 = \frac{\mu_0 I_0 e^{-j\beta r}}{2\pi\beta r} \frac{\cos \left[ \frac{(2n+1)\pi \cos \theta}{2} \right]}{\sin^2 \theta} \mathbf{z}_0$
--------------	------------------------------------	--

<b>XV.44</b>	Το ηλεκτρικό πεδίο σε μεγάλες αποστάσεις	$\dot{\mathbf{E}} = \dot{E}_\theta \boldsymbol{\theta}_0 = \frac{j\eta_0 I_0 e^{-j\beta r}}{2\pi r} \frac{\cos\left[\frac{(2n+1)\pi \cos\theta}{2}\right]}{\sin\theta} \boldsymbol{\theta}_0$
<b>XV.45</b>	Το μαγνητικό πεδίο σε μεγάλες αποστάσεις	$\dot{\mathbf{H}} = \dot{H}_\varphi \boldsymbol{\varphi}_0 = \frac{\dot{E}_\theta}{\eta_0} \boldsymbol{\varphi}_0 = \frac{jI_0 e^{-j\beta r}}{2\pi r} \frac{\cos\left[\frac{(2n+1)\pi \cos\theta}{2}\right]}{\sin\theta} \boldsymbol{\varphi}_0$
<b>XV.46</b>	Η μέση χρονική τιμή του διανύσματος του Poynting	$P_r = \frac{\eta_0 I_0^2}{8\pi^2 r^2} \frac{\cos^2\left[\frac{(2n+1)\pi \cos\theta}{2}\right]}{\sin^2\theta}$

<b>Διπολική κεραία <math>\lambda/2</math></b>		
<b>XV.47</b>	Το μαγνητικό διανυσματικό δυναμικό	$\dot{A}_z = \frac{\mu_0 I_0 e^{-j\beta r}}{2\pi\beta r} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin^2\theta}$
<b>XV.48</b>	Το ηλεκτρικό πεδίο σε μεγάλες αποστάσεις	$\dot{E}_\theta = \frac{j\eta_0 I_0 e^{-j\beta r}}{2\pi r} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin\theta}$
<b>XV.49</b>	Το μαγνητικό πεδίο σε μεγάλες αποστάσεις	$\dot{H}_\varphi = \frac{jI_0 e^{-j\beta r}}{2\pi r} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin\theta}$
<b>XV.50</b>	Η μέση χρονική τιμή του διανύσματος του Poynting	$P_r = \frac{\eta_0 I_0^2}{8\pi^2 r^2} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin^2\theta}$
<b>XV.51</b>	Μέση ακτινοβολούμενη ισχύς	$P_a = \frac{\eta_0 I_0^2}{4\pi} \int_0^\pi \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin\theta} d\theta = 0,3047 \frac{\eta_0 I_0^2}{\pi} = 36,56 I_0^2$
<b>XV.52</b>	Αντίσταση ακτινοβολίας	$R_a = \frac{\eta_0}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin\theta} d\theta = \frac{0,6094}{\pi} \eta_0 = 73,1 \text{ (}\Omega\text{)}$
<b>XV.53</b>	Χρήσιμος μαθηματικός τύπος	$\int_0^\pi \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin\theta} d\theta = 1,2188$
<b>XV.54</b>	Προσεγγιστική τιμή της σύνθετης αντίστασης εισόδου	$Z_{in} = 73,1 + j42,5 \text{ (}\Omega\text{)}$
<b>XV.55</b>	Συνάρτηση κατευθυντικότητας	$D(\theta) = 1,641 \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin\theta}$
<b>XV.56</b>	Κατευθυντικότητα	$D = 1,641 = 2,152 \text{ (db)}$



## ΠΕΔΙΟ ΣΤΗΝ ΚΟΝΤΙΝΗ ΖΩΝΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΚΕΡΑΙΑΣ

<b>XV.57</b>	Πεδίο στην κοντινή ζώνη γραμμικής κεραίας μήκους $2h$ ( $R_1, R_2$ : αποστάσεις από τα άκρα της κεραίας)	$\dot{E}_y = \frac{j\beta I_0}{4\pi\omega\epsilon_0 y} \left[ \frac{(z-h)e^{-j\beta R_1}}{R_1} + \frac{(z+h)e^{-j\beta R_2}}{R_2} - \frac{2z \cos(\beta h)e^{-j\beta r}}{r} \right]$ $\dot{E}_z = -\frac{j\beta I_0}{4\pi\omega\epsilon_0} \left[ \frac{e^{-j\beta R_1}}{R_1} + \frac{e^{-j\beta R_2}}{R_2} - \frac{2 \cos(\beta h)e^{-j\beta r}}{r} \right]$ $\dot{H}_\phi = -\dot{H}_x = -\frac{I_0}{8\pi j y} [e^{-j\beta R_1} + e^{-j\beta R_2} - 2 \cos(\beta h)e^{-j\beta r}]$
--------------	--	--

## ΜΙΚΡΟΣ ΚΥΚΛΙΚΟΣ ΒΡΟΧΟΣ (ΒΡΟΧΟΚΕΡΑΙΑ)

<b>XV.58</b>	Το μαγνητικό διανυσματικό δυναμικό ( $a$ : ακτίνα κυκλικού βρόχου, $r$ : απόσταση από το κέντρο του βρόχου)	$\dot{A} = \dot{A}_\varphi \varphi_0 = \frac{j\mu_0 I_0 \beta a^2}{4} \frac{e^{-j\beta r}}{r} \sin \theta \varphi_0$
<b>XV.59</b>	Το ηλεκτρικό πεδίο σε μεγάλες αποστάσεις	$\dot{E} = \dot{E}_\varphi \varphi_0 = -\eta_0 H_\theta \varphi_0 = -j\omega \dot{A}_\varphi \varphi_0 = \frac{\omega\mu_0 I_0 \beta a^2}{4} \frac{e^{-j\beta r}}{r} \sin \theta \varphi_0$
<b>XV.60</b>	Το μαγνητικό πεδίο σε μεγάλες αποστάσεις	$\dot{H}_r = \frac{1}{\mu_0 r \sin \theta} \left[ \frac{\partial(\sin \theta \dot{A}_\varphi)}{\partial \theta} \right] = \frac{jI_0 \beta a^2}{2} \frac{e^{-j\beta r}}{r^2} \cos \theta$ $\dot{H}_\theta = -\frac{1}{\mu_0 r} \frac{\partial(r \dot{A}_\varphi)}{\partial r} = -\frac{I_0 \beta^2 a^2}{4} \frac{e^{-j\beta r}}{r} \sin \theta$ $\dot{H}_\varphi = 0$
<b>XV.61</b>	Μέση χρονική τιμή του διανύσματος του Poynting	$P_{av} = \frac{1}{2} \frac{ \dot{E}_\varphi ^2}{\eta_0} \mathbf{r}_0 = \frac{1}{2} \eta_0  \dot{H}_\theta ^2 \mathbf{r}_0 = \frac{\omega^2 \mu_0^2 I_0^2 \beta^2 a^4}{32 \eta_0} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \mathbf{r}_0$
<b>XV.62</b>	Συνολική ακτινοβολούμενη ισχύς	$P_a = \frac{\pi \omega^2 \mu_0^2 I_0^2 \beta^2 a^4}{12 \eta_0} = \frac{\pi \eta_0 \beta^4 a^4 I_0^2}{12} = 160 \pi^6 \left( \frac{a}{\lambda} \right)^4 I_0^2$
<b>XV.63</b>	Αντίσταση ακτινοβολίας	$R_a = \frac{2P_a}{I_0^2} = 320 \pi^6 \left( \frac{a}{\lambda} \right)^4 = 320 \pi^4 \left( \frac{S}{\lambda} \right)^2$
<b>XV.64</b>	Συνάρτηση κατευθυντικότητας	$D(\theta) = 1,5 \sin^2 \theta$
<b>XV.65</b>	Κατευθυντικότητα βροχοκεραίας	$D = D_{\max}(\theta) = 1,5$

## ΣΤΟΙΧΕΙΟΚΕΡΑΙΕΣ

**Στοιχειοκεραία δύο στοιχειωδών διπόλων παράλληλων προς τον άξονα  $z$  τοποθετημένων στον άξονα  $x$  σε συμμετρικές ως προς την αρχή θέσεις**

<b>XV.66</b>	Απομακρυσμένες θέσεις του πεδίου ( $l$ : μήκος κάθε διπόλου - $r_1, r_2$ : αποστάσεις από τα κέντρα των δύο διπόλων)	$\dot{E}_\theta = \frac{jI_0 l \omega \mu_0}{4\pi} \sin \theta \left( \frac{e^{-j\beta r_1}}{r_1} + \frac{e^{-j\beta r_2}}{r_2} \right)$
<b>XV.67</b>	Απομακρυσμένες θέσεις του πεδίου ( $\tau$ είναι η γωνία μεταξύ της ακτινικής διεύθυνσης και του άξονα $x$ , $g$ η απόσταση των διπόλων και $\dot{E}_0$ η ένταση του κάθε διπόλου)	$\dot{E} = \dot{E}_0 \left( 2 \cos \frac{\psi}{2} \right) = 2\dot{E}_0 \cos \left( \frac{\pi g \cos \tau}{\lambda} \right)$ $\dot{E}_0 = \frac{jI_0 l \omega \mu_0 \sin \theta e^{-j\beta r}}{4\pi r}$

**Ομοιόμορφη γραμμική στοιχειοκεραία  $n$  στοιχείων**

<b>XV.68</b>	Ηλεκτρική πεδιακή ένταση σε ένα απομακρυσμένο σημείο $P(r, \theta, \varphi)$ του πεδίου ( $\dot{E}_0$ η ένταση κάθε μεμονωμένου στοιχείου, $\delta$ η σταθερή διαφορά φάσης μεταξύ διαδοχικών στοιχείων και $g$ η απόσταση μεταξύ διαδοχικών στοιχείων)	$\dot{E} = \dot{E}_0 \left[ 1 + e^{j\psi} + e^{j2\psi} + \dots + e^{j(n-1)\psi} \right]$ $\psi = \beta g \cos \varphi + \delta = \frac{2\pi}{\lambda} g \cos \varphi + \delta$
<b>XV.69</b>	Απόλυτη τιμή του παράγοντα της στοιχειοκεραίας	$f = \left  \frac{\dot{E}}{\dot{E}_0} \right  = \left  \frac{1 - e^{jn\psi}}{1 - e^{j\psi}} \right  = \left  \frac{\sin(n\psi/2)}{\sin(\psi/2)} \right $
<b>XV.70</b>	Μέγιστη δυνατή τιμή του παράγοντα στοιχειοκεραίας $f$	$f_{0,\max} = n \quad (\psi = 0)$
<b>XV.71</b>	Μέγιστα των πλευρικών λοβών για αρκετά μεγάλο αριθμό στοιχείων	$f_{k,\max} = \frac{1}{\left  \sin \frac{(2k+1)\pi}{2n} \right } \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$
<b>XV.72</b>	Μέγιστη τιμή του πρώτου πλευρικού λοβού	$f_{1,\max} = \frac{1}{\left  \sin \frac{3\pi}{2n} \right }$ $f_{1,\max} \cong \frac{2n}{3\pi} = 0,212n \quad (n \text{ αρκετά μεγάλο})$
<b>XV.73</b>	Χαρακτηριστικά μετωπικής ή ευρύπλευρης στοιχειοκεραίας	$\delta = 0$ $f = f_{\max} \Rightarrow \psi = \beta g \cos \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$
<b>XV.74</b>	Χαρακτηριστικά ακροπυροδοτικής στοιχειοκεραίας	$\delta = -\beta g$ $f = f_{\max} \Rightarrow \psi = \beta g (\cos \varphi - 1) = 0 \Rightarrow \varphi = 0$

**B****ΜΟΝΑΔΕΣ, ΣΤΑΘΕΡΕΣ****ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΣΤΑΘΕΡΕΣ**

	<b>Μέγεθος ή σταθερά</b>	<b>Σύμβολο</b>	<b>Τιμή</b>
<b>B.1</b>	Διηλεκτρική σταθερά του κενού	$\epsilon_0$	$8,854 \times 10^{-12}$ (F/m)
<b>B.2</b>	Μαγνητική διαπερατότητα του κενού	$\mu_0$	$4\pi \times 10^{-7}$ (H/m)
<b>B.3</b>	Φορτίο ηλεκτρονίου	$e$	$-1,602 \times 10^{-19}$ (C)
<b>B.4</b>	Μάζα ηρεμίας ηλεκτρονίου	$m_e$	$9,108 \times 10^{-31}$ (kg)
<b>B.5</b>	Μάζα ηρεμίας πρωτονίου	$m_p$	$1,673 \times 10^{-27}$ (kg)
<b>B.6</b>	Ταχύτητα του φωτός στο κενό	$c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$	$2,998 \times 10^8$ (m/s)
<b>B.7</b>	Χαρακτηριστική (κυματική) αντίσταση του κενού	$Z_0 = \eta_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$	$376,7 (\approx 120\pi)$ ( $\Omega$ )
<b>B.8</b>	Σταθερά του Boltzmann	$k$	$1,38 \times 10^{-23}$ (JK <sup>-1</sup> )
<b>B.9</b>	Σταθερά του Planck	$h$	$6,63 \times 10^{-34}$ (JS)

**ΠΡΟΘΕΜΑΤΑ ΜΟΝΑΔΩΝ**

<b>ΠΡΟΘΕΜΑ</b>	<b>ΣΥΜΒΟΛΟ</b>	<b>ΜΕΓΕΘΟΣ</b>
tera	T	$10^{12}$
giga	G	$10^9$
mega	M	$10^6$
kilo	k	$10^3$
hecto	h	$10^2$
deka	da	10
deci	d	$10^{-1}$
centi	c	$10^{-2}$
milli	m	$10^{-3}$
micro	$\mu$	$10^{-6}$
nano	n	$10^{-9}$
pico	p	$10^{-12}$
femto	f	$10^{-15}$
atto	a	$10^{-18}$

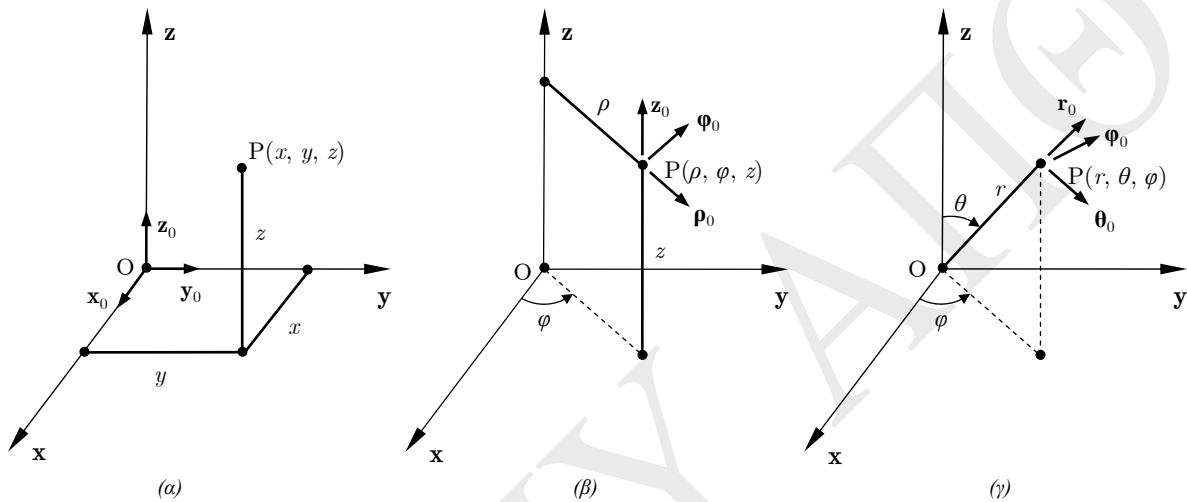
ΠΡΟΘΕΜΑΤΑ ΜΟΝΑΔΩΝ

ΣΥΜΒΟΛΟ ΜΕΓΕΘΟΥΣ	ΟΝΟΜΑ ΜΕΓΕΘΟΥΣ (ΜΟΝΑΔΑ)	ΣΥΜΒΟΛΟ ΜΟΝΑΔΑΣ	ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ
$M$ (ή $L$ )	Αλληλεπαγωγή (henry)	H	$ML^2Q^{-2}$
$L$	Αυτεπαγωγή (henry)	H	$ML^2Q^{-2}$
$R$	Αντίσταση (ohm)	$\Omega$	$ML^2T^{-1}Q^{-2}$
$\phi$ (ή $V$ )	Βαθμωτό ηλεκτρικό δυναμικό (volt)	V	$ML^2T^2Q^{-1}$
$\phi_m$ (ή $V_m$ )	Βαθμωτό μαγνητικό δυναμικό (ampere)	A	$T^{-1}Q$
<b>P</b>	Διάνυσμα πόλωσης (coulomb/meter <sup>2</sup> )	C/m <sup>2</sup>	$L^{-2}Q$
<b>S, P</b>	Διάνυσμα Poynting (Watt/ meter <sup>2</sup> )	W/m <sup>2</sup>	$MT^{-3}$
$\epsilon$	Διηλεκτρική σταθερά (farad/meter)	F/m <sup>2</sup>	$M^{-1}L^{-3}T^2Q^2$
<b>D</b>	Διηλεκτρική μετατόπιση (coulomb/meter <sup>2</sup> )	C/m <sup>2</sup>	$L^{-2}Q$
<b>F</b>	Δύναμη (newton)	N (= 10 <sup>5</sup> dynes)	$MLT^{-2}$
$\sigma$	Ειδική αγωγιμότητα (mho/meter)	$\Omega^{-1}/m$ ή S/m	$M^{-1}L^{-3}TQ^{-2}$
$\rho$	Ειδική αντίσταση (ohm/meter)	$\Omega \cdot m$	$ML^3T^{-1}Q^2$
$W$	Ενέργεια (joule)	J (= 10 <sup>7</sup> ergs)	$ML^2T^{-2}$
$I$	Ένταση ρεύματος (ampère)	A	$T^{-1}Q$
HEΔ (EMF)	Ηλεκτρεγερτική δύναμη (volt)	V	$ML^2T^2Q^{-1}$
$N$	Ηλεκτρική ροή (coulomb)	C	$Q$
<b>E</b>	Ηλεκτρική πεδιακή ένταση (volt/meter)	V/m	$MLT^{-2}Q^{-1}$
$Q$ (ή $q$ )	Ηλεκτρικό φορτίο (coulomb)	C (= 3 × 10 <sup>-9</sup> ΗΣΜ)	$Q$
$P$	Ισχύς (watt)	W (= 10 <sup>7</sup> ergs/sec)	$ML^2T^{-3}$
$\omega$	Κυκλική (ή γωνιακή) συχνότητα (radian/second)	rad/s	$T^{-1}$
MEΔ (MMF)	Μαγνητεγερτική δύναμη (ampère·turn)	A (= 4π × 10 <sup>-1</sup> gilberts)	$T^{-1}Q$
$P$	Μαγνητική αγωγιμότητα (henry)	H	$ML^2Q^{-2}$
$R$	Μαγνητική αντίσταση (1/henry)	H <sup>-1</sup>	$M^{-1}L^{-2}Q^2$
<b>A</b>	Μαγνητικό διανυσματικό δυναμικό (weber/meter)	Wb/m	$MLT^{-1}Q^{-1}$
$\mu$	Μαγνητική διαπερατότητα (henry/meter)	H/m	$MLQ^{-2}$
<b>B</b>	Μαγνητική επαγωγή (weber/meter <sup>2</sup> ή tesla)	Wb/m <sup>2</sup> ή T (= 10 <sup>4</sup> gauss)	$MT^{-1}Q^{-1}$
<b>H</b>	Μαγνητική πεδιακή ένταση (ampère/meter)	A/m (= 4π × 10 <sup>-3</sup> oersteds)	$L^{-1}T^{-1}Q$
$\Phi$	Μαγνητική ροή (weber)	Wb (= 10 <sup>8</sup> maxwells)	$ML^2T^{-1}Q^{-1}$
$Q_m$ (ή $q_m$ )	Μαγνητικό φορτίο (ampère·meter)	A·m	$LT^{-1}Q$
$M$	Μαγνήτιση (ampere/meter)	A/m	$L^{-1}T^{-1}Q$
$\lambda$	Μήκος κύματος (meter)	m	$L$
$\Psi$ (ή $\lambda_m$ )	Πεπλεγμένη μαγνητική ροή (weber·turn)	Wb	$ML^2T^{-1}Q^{-1}$
$a$	Σταθερά απόσβεσης (neper/meter)	Np/m	$L^{-1}$
$Z$	Σύνθετη αντίσταση (ohm)	$\Omega$	$ML^2T^{-1}Q^{-2}$
$f$	Συχνότητα (hertz)	Hz	$T^{-1}$
$\beta$	Φασική σταθερά (radian/meter)	rad/m	$L^{-1}$
$C$	Χωρητικότητα (farad)	F	$M^{-1}L^{-2}T^2Q^2$

**I**

**ΤΕΛΕΣΤΕΣ, ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ,  
ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ, ΣΕΙΡΕΣ, ΔΙΑΦΟΡΟΙ ΤΥΠΟΙ**

**ΤΑ ΤΡΙΑ ΣΥΝΗΘΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ**



- (α) Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων  $x, y, z$ . (σχήμα (α))
- (β) Σύστημα κυλινδρικών συντεταγμένων  $\rho, \varphi, z$ . (σχήμα (β))
- (γ) Σύστημα σφαιρικών συντεταγμένων  $r, \theta, \varphi$ . (σχήμα (γ)).

**ΟΙ ΠΡΟΒΟΛΕΣ ΤΩΝ ΜΟΝΑΔΙΑΙΩΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ ΣΤΑ ΤΡΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ**

		ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΟ			ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟ			ΣΦΑΙΡΙΚΟ		
		$x_0$	$y_0$	$z_0$	$\rho_0$	$\varphi_0$	$z_0$	$r_0$	$\theta_0$	$\varphi_0$
ΚΑΡΤΕΣ.	$x_0$	1	0	0	$\cos \varphi$	$-\sin \varphi$	0	$\sin \theta \cos \varphi$	$\cos \theta \cos \varphi$	$-\sin \varphi$
	$y_0$	0	1	0	$\sin \varphi$	$\cos \varphi$	0	$\sin \theta \sin \varphi$	$\cos \theta \sin \varphi$	$\cos \varphi$
	$z_0$	0	0	1	0	0	1	$\cos \theta$	$-\sin \theta$	0
ΚΥΛΙΝΔΡ.	$\rho_0$	$\cos \varphi$	$\sin \varphi$	0	1	0	0	$\sin \theta$	$\cos \theta$	0
	$\varphi_0$	$-\sin \varphi$	$\cos \varphi$	0	0	1	0	0	0	1
	$z_0$	0	0	1	0	0	1	$\cos \theta$	$-\sin \theta$	0
ΣΦΑΙΡΙΚΟ	$r_0$	$\sin \theta \cos \varphi$	$\sin \theta \sin \varphi$	$\cos \theta$	$\sin \theta$	0	$\cos \theta$	1	0	0
	$\theta_0$	$\cos \theta \cos \varphi$	$\cos \theta \sin \varphi$	$-\sin \theta$	$\cos \theta$	0	$-\sin \theta$	0	1	0
	$\varphi_0$	$-\sin \varphi$	$\cos \varphi$	0	0	1	0	0	0	1

**ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ ΣΤΑ ΤΡΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ**

		ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟ	ΣΦΑΙΡΙΚΟ	ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΟ
ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΟ	$x$	$\rho \cos \varphi$	$r \sin \theta \cos \varphi$	$x$
	$y$	$\rho \sin \varphi$	$r \sin \theta \sin \varphi$	$y$
	$z$	$z$	$r \cos \theta$	$z$
ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟ	$\rho$	$\rho$	$r \sin \theta$	$\sqrt{x^2 + y^2}$
	$\varphi$	$\varphi$	$\varphi$	$\arctan(y/x)$
	$z$	$z$	$r \cos \theta$	$z$
ΣΦΑΙΡΙΚΟ	$r$	$(\rho / \sin \theta)$	$r$	$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
	$\theta$	$\arctan(\rho / z)$	$\theta$	$\arctan(\sqrt{x^2 + y^2} / z)$
	$\varphi$	$\varphi$	$\varphi$	$\arctan(y/x)$

**ΜΕΤΡΙΚΟΙ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ ΚΑΙ ΑΠΕΙΡΟΣΤΕΣ ΠΟΣΟΤΗΤΕΣ**

Γενικό	Καρτεσιανό	Κυλινδρικό	Σφαιρικό
$u_1$	$x$	$\rho$	$r$
$u_2$	$y$	$\varphi$	$\theta$
$u_3$	$z$	$z$	$\varphi$
$g_{11}(h_1^2)$	1	1	1
$g_{22}(h_2^2)$	1	$\rho^2$	$r^2$
$g_{33}(h_3^2)$	1	1	$r^2 \sin^2 \theta$
$g^{1/2}$	1	$\rho$	$r^2 \sin \theta$
$dl$	$dx_0 + dy_0 + dz_0$	$d\rho\mathbf{e}_\rho + \rho d\varphi\mathbf{e}_\varphi + dz\mathbf{e}_z$	$dr\mathbf{e}_r + r d\theta\mathbf{e}_\theta + r \sin \theta d\varphi\mathbf{e}_\varphi$
$(dl)^2$	$(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$	$(d\rho)^2 + \rho^2(d\varphi)^2 + (dz)^2$	$(dr)^2 + r^2(d\theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta(d\varphi)^2$
$dS_1$	$dydz$	$\rho d\varphi dz$	$r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$
$dS_2$	$xdz$	$dzd\rho$	$r \sin \theta d\varphi dr$
$dS_3$	$xdy$	$\rho d\rho d\varphi$	$r dr d\theta$
$dV$	$xdydz$	$\rho d\rho d\varphi dz$	$r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$

**ΠΡΟΒΟΛΕΣ ΕΝΟΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ ΣΤΑ ΤΡΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ**

		ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟ	ΣΦΑΙΡΙΚΟ	ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΟ
ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΟ	$A_x$	$A_\rho \cos \varphi - A_z \sin \varphi$	$A_x \sin \theta \cos \varphi + A_y \cos \theta \cos \varphi - A_z \sin \varphi$	$A_x$
	$A_y$	$A_x \sin \varphi + A_z \cos \varphi$	$A_x \sin \theta \sin \varphi + A_y \cos \theta \sin \varphi + A_z \cos \varphi$	$A_y$
	$A_z$	$A_z$	$A_x \cos \theta - A_y \sin \theta$	$A_z$
ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟ	$A_\rho$	$A_\rho$	$A_x \sin \theta + A_y \cos \theta$	$A_x \cos \varphi + A_y \sin \varphi$
	$A_\varphi$	$A_\varphi$	$A_\varphi$	$-A_x \sin \varphi + A_y \cos \varphi$
	$A_z$	$A_z$	$A_x \cos \theta - A_y \sin \theta$	$A_z$
ΣΦΑΙΡΙΚΟ	$A_x$	$A_\rho \sin \theta + A_z \cos \theta$	$A_x$	$A_x \sin \theta \cos \varphi + A_y \sin \theta \sin \varphi + A_z \cos \theta$
	$A_y$	$A_\rho \cos \theta - A_z \sin \theta$	$A_y$	$A_x \cos \theta \cos \varphi + A_y \cos \theta \sin \varphi - A_z \sin \theta$
	$A_\varphi$	$A_\varphi$	$A_\varphi$	$-A_x \sin \varphi + A_y \cos \varphi$

**ΟΙ ΤΕΛΕΣΤΕΣ  $\nabla$ ,  $\nabla \cdot$ ,  $\nabla \times$  ΚΑΙ  $\nabla^2$  ΣΕ ΓΕΝΙΚΕΣ ΚΑΜΠΥΛΟΓΡΑΜΜΕΣ  
ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ  $(u, v, w)$**

ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ	ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ	ΜΟΝΑΔΙΑΙΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ	ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ ΚΛΙΜΑΚΑΣ
		$u \ v \ w$	$\mathbf{u}_0 \ \mathbf{v}_0 \ \mathbf{w}_0$
ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΟ	$x \ y \ z$	$\mathbf{x}_0 \ \mathbf{y}_0 \ \mathbf{z}_0$	1 1 1
ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟ	$\rho \ \varphi \ z$	$\boldsymbol{\rho}_0 \ \boldsymbol{\varphi}_0 \ \mathbf{z}_0$	1 $r$ 1
ΣΦΑΙΡΙΚΟ	$r \ \theta \ \varphi$	$\mathbf{r}_0 \ \boldsymbol{\theta}_0 \ \boldsymbol{\varphi}_0$	1 $r$ $r \sin \theta$
ΔΙΑΝΥΣΜΑ	$\mathbf{A} = A_u \mathbf{u}_0 + A_v \mathbf{v}_0 + A_w \mathbf{w}_0$		
ΔΙΑΦΟΡΙΚΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑ	$d\mathbf{l} = h_1 du \mathbf{u}_0 + h_2 dv \mathbf{v}_0 + h_3 dw \mathbf{w}_0$		
ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΟΓΚΟΣ	$dV = h_1 h_2 h_3 du dv dw$		
<b>ΚΛΙΣΗ</b>			
$\nabla V \equiv grad V = \frac{1}{h_1} \frac{\partial V}{\partial u} \mathbf{u}_0 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial V}{\partial v} \mathbf{v}_0 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial V}{\partial w} \mathbf{w}_0$			
<b>ΑΠΟΚΛΙΣΗ</b>			
$\nabla \cdot \mathbf{A} \equiv div \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left( \frac{\partial}{\partial u} (h_2 h_3 A_u) + \frac{\partial}{\partial v} (h_1 h_3 A_v) + \frac{\partial}{\partial w} (h_1 h_2 A_w) \right)$			
<b>ΣΤΡΟΦΗ</b>			
$\nabla \times \mathbf{A} \equiv curl \mathbf{A} \equiv rot \mathbf{A} = \frac{1}{h_2 h_3} \left( \frac{\partial (h_3 A_w)}{\partial v} - \frac{\partial (h_2 A_v)}{\partial w} \right) \mathbf{u}_0 + \frac{1}{h_1 h_3} \left( \frac{\partial (h_1 A_u)}{\partial w} - \frac{\partial (h_3 A_w)}{\partial u} \right) \mathbf{v}_0 + \frac{1}{h_1 h_2} \left( \frac{\partial (h_2 A_v)}{\partial u} - \frac{\partial (h_1 A_u)}{\partial v} \right) \mathbf{w}_0$			
<b>ΔΑΠΛΑΣΙΑΝΗ</b>			
$\nabla^2 V = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial V}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial V}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial V}{\partial w} \right) \right]$			
$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} \quad (\text{σε κάθε σύστημα συντεταγμένων})$			
$\nabla^2 \mathbf{A} = (\nabla^2 A_x) \mathbf{x}_0 + (\nabla^2 A_y) \mathbf{y}_0 + (\nabla^2 A_z) \mathbf{z}_0 \quad (\text{καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων})$			



**ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ**

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \oiint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{Θεώρημα Gauss})$$

$$\iiint_V \nabla f dV = \oiint_S f d\mathbf{S}$$

$$\iiint_V \nabla \times \mathbf{A} dV = -\oiint_S \mathbf{A} \times d\mathbf{S}$$

$$\left. \begin{aligned} \iiint_V (\nabla f \cdot \nabla g + f \nabla^2 g) dV &= \oiint_S f \nabla g \cdot d\mathbf{S} \\ \iiint_V (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) dV &= \oiint_S (f \nabla g - g \nabla f) \cdot d\mathbf{S} \end{aligned} \right\} \quad (\text{θεώρημα Green})$$

$$\oiint_S \nabla f \times d\mathbf{S} = \oint_C f d\mathbf{l}$$

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (\text{θεώρημα Stokes})$$

**ΟΙ ΤΕΛΕΣΤΕΣ  $\nabla$ ,  $\nabla \cdot$ ,  $\nabla \times$  ΚΑΙ  $\nabla^2$  ΣΤΑ ΤΡΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ**

**Σύστημα Ορθογώνιων Συντεταγμένων  $(x, y, z)$**

I.1	$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{x}_0 + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{y}_0 + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{z}_0$
I.2	$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$
I.3	$\nabla \times \mathbf{A} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{x}_0 + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{y}_0 + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{z}_0$
I.4	$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$
I.5	$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = (\nabla^2 A_x) \mathbf{x}_0 + (\nabla^2 A_y) \mathbf{y}_0 + (\nabla^2 A_z) \mathbf{z}_0$

**Σύστημα Κυλινδρικών Συντεταγμένων  $(\rho, \varphi, z)$**

I.6	$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial \rho} \boldsymbol{\rho}_0 + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \boldsymbol{\varphi}_0 + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{z}_0$
I.7	$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_r)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$
I.8	$\nabla \times \mathbf{A} = \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \boldsymbol{\rho}_0 + \left( \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \boldsymbol{\varphi}_0 + \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right] \mathbf{z}_0$

I.9	$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$
I.10	$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \left( \nabla^2 A_\rho - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{A_\rho}{\rho^2} \right) \boldsymbol{\rho}_0 + \left( \nabla^2 A_\varphi + \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} - \frac{A_\varphi}{\rho^2} \right) \boldsymbol{\varphi}_0 + (\nabla^2 A_z) \mathbf{z}_0$

**Σύστημα Σφαιρικών Συντεταγμένων ( $r, \theta, \varphi$ )**

I.11	$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r} \mathbf{r}_0 + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \boldsymbol{\theta}_0 + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \boldsymbol{\varphi}_0$
I.12	$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial(\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right]$
I.13	$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial(\sin \theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right] \mathbf{r}_0 + \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial r} \right] \boldsymbol{\theta}_0 + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \boldsymbol{\varphi}_0$
I.14	$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}$
I.15	$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = & \left( \nabla^2 A_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} - \frac{2 \cot \theta}{r^2} A_\theta - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{2}{r^2} A_r \right) \mathbf{r}_0 \\ & + \left( \nabla^2 A_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cot \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} A_\theta \right) \boldsymbol{\theta}_0 \\ & + \left( \nabla^2 A_\varphi + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cot \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} A_\varphi \right) \boldsymbol{\varphi}_0 \end{aligned}$

**ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ**

I.16	$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$
I.17	$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$
I.18	$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B}$
I.19	$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$
I.20	$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D})$
I.21	$\nabla \times (\nabla U) = 0$
I.22	$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$
I.23	$\nabla \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \mathbf{B}$
I.24	$\nabla(U + V) = \nabla U + \nabla V$
I.25	$\nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B}$
I.26	$(\nabla \cdot \nabla) \mathbf{A} = \nabla^2 \mathbf{A} = \nabla^2 A_x \mathbf{x}_0 + \nabla^2 A_y \mathbf{y}_0 + \nabla^2 A_z \mathbf{z}_0$
I.27	$\nabla \cdot (\nabla U) = (\nabla \cdot \nabla) U = \nabla^2 U$
I.28	$\nabla \cdot (UV) = (\nabla U)V + U(\nabla V)$

I.29	$\nabla \cdot (U\mathbf{A}) = (\nabla U) \cdot \mathbf{A} + U(\nabla \cdot \mathbf{A})$
I.30	$\nabla \times (U\mathbf{A}) = (\nabla U) \times \mathbf{A} + U(\nabla \times \mathbf{A})$
I.31	$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$
I.32	$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A})$
I.33	$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \nabla^2 \mathbf{A}$
I.34	$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$
I.35	$\nabla \times \mathbf{r} = 0, \nabla^2(1/r) = 0, \nabla \cdot \mathbf{r} = 3 \quad (\mathbf{r} = x\mathbf{x}_0 + y\mathbf{y}_0 + z\mathbf{z}_0)$
I.36	$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \oiint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$
I.37	$\iiint_V \nabla f dV = \oiint_S f d\mathbf{S}$
I.38	$\iiint_V \nabla \times \mathbf{A} dV = -\oiint_S \mathbf{A} \times d\mathbf{S}$
I.39	$\iiint_V (\nabla f \cdot \nabla g + f\nabla^2 g) dV = \oiint_S f \nabla g \cdot d\mathbf{S}$
I.40	$\iiint_V (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f) dV = \oiint_S (f\nabla g - g\nabla f) \cdot d\mathbf{S}$
I.41	$\iint_S \nabla f \times d\mathbf{S} = \oint_C f \cdot d\mathbf{l}$
I.42	$\iint_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$

### ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

I.43	$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$
I.44	$\cot A = \frac{1}{\tan A}$
I.45	$\sec A = \frac{1}{\cos A}$
I.46	$\csc A = \frac{1}{\sin A}$
I.47	$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$
I.48	$1 + \tan^2 A = \sec^2 A$
I.49	$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$
I.50	$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$
I.51	$2 \sin A \sin B = \cos(A - B) - \cos(A + B)$
I.52	$2 \sin A \cos B = \sin(A + B) + \sin(A - B)$
I.53	$2 \cos A \cos B = \cos(A + B) + \cos(A - B)$
I.54	$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$

I.55	$\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$
I.56	$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$
I.57	$\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$
I.58	$\cos(A \pm 90^\circ) = \mp \sin A$
I.59	$\sin(A \pm 90^\circ) = \pm \cos A$
I.60	$\tan(A \pm 90^\circ) = -\cot A$
I.61	$\sin 2A = 2 \sin A \cos A$
I.62	$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2 \cos^2 A - 1 = 1 - 2 \sin^2 A$
I.63	$\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$
I.64	$\tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$
I.65	$\sin A = \frac{e^{jA} - e^{-jA}}{2j}$
I.66	$\cos A = \frac{e^{jA} + e^{-jA}}{2}$
I.67	$e^{jA} = \cos A + j \sin A \quad (\text{Ταυτότητα του Euler})$
I.68	$\pi = 3,14159265358979$
I.69	$1 \text{ rad} = 57,296^\circ$

### ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

I.70	$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
I.71	$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
I.72	$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$
I.73	$\coth x = \frac{1}{\tanh x}$
I.74	$\operatorname{csc} h x = \frac{1}{\sinh x}$
I.75	$\operatorname{sec} h x = \frac{1}{\cosh x}$
I.76	$\sin jx = j \sinh x$
I.77	$\cos jx = \cosh x$
I.78	$\sinh jx = j \sin x$
I.79	$\cosh jx = \cos x$

I.80	$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$
I.81	$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$
I.82	$\sinh(x \pm jy) = \sinh x \cos y \pm j \cosh x \sin y$
I.83	$\cosh(x \pm jy) = \cosh x \cos y \pm j \sinh x \sin y$
I.84	$\tanh(x \pm jy) = \frac{\sinh 2x}{\cosh 2x + \cos 2y} \pm j \frac{\sin 2y}{\cosh 2x + \cos 2y}$
I.85	$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
I.86	$\sec^2 x + \tanh^2 x = 1$
I.87	$\sin(x \pm jy) = \sin x \cosh y \pm j \cos x \sinh y$
I.88	$\cos(x \pm jy) = \cos x \cosh y \mp j \sin x \sinh y$

### ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

I.89	$\log xy = \log x + \log y$
I.90	$\log \frac{x}{y} = \log x - \log y$
I.91	$\log x^n = n \log x$
I.92	$\log_{10} x = \log x$
I.93	$\log_e x = \ln x$ (φυσικός λογάριθμος)
I.94	Av $ x  \ll 1, \ln(1+x) \approx x$

### ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ

(Av  $U = U(x), V = V(y)$  και  $a$  σταθερά)

I.95	$\frac{d}{dx}(aU) = a \frac{dU}{dx}$
I.96	$\frac{d}{dx}(UV) = U \frac{dV}{dx} + V \frac{dU}{dx}$
I.97	$\frac{d}{dx} \left[ \frac{U}{V} \right] = \frac{V \frac{dU}{dx} - U \frac{dV}{dx}}{V^2}$
I.98	$\frac{d}{dx}(aU^n) = naU^{n-1} \frac{dU}{dx}$
I.99	$\frac{d}{dx} \log_a U = \frac{\log_a e}{U} \frac{dU}{dx}$
I.100	$\frac{d}{dx} \ln U = \frac{1}{U} \frac{dU}{dx}$
I.101	$\frac{d}{dx} a^U = a^U \ln a \frac{dU}{dx}$

I.102	$\frac{d}{dx} e^U = e^U \frac{dU}{dx}$
I.103	$\frac{d}{dx} U^V = VU^{V-1} \frac{dU}{dx} + U^V \ln U \frac{dV}{dx}$
I.104	$\frac{d}{dx} \sin U = \cos U \frac{dU}{dx}$
I.105	$\frac{d}{dx} \cos U = -\sin U \frac{dU}{dx}$
I.106	$\frac{d}{dx} \tan U = \sec^2 U \frac{dU}{dx}$
I.107	$\frac{d}{dx} \sinh U = \cosh U \frac{dU}{dx}$
I.108	$\frac{d}{dx} \cosh U = \sinh U \frac{dU}{dx}$
I.109	$\frac{d}{dx} \tanh U = \operatorname{sech}^2 U \frac{dU}{dx}$

**ΣΕΙΡΕΣ**

(z : μιγαδικός, x : πραγματικός)

I.110	$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^\nu + \dots, \quad  z  < 1$
I.111	$(1+z)^a = 1 + \binom{a}{1}z + \binom{a}{2}z^2 + \dots + \binom{a}{\nu}z^\nu + \dots, \quad  z  < 1, \quad \binom{a}{\nu} = \frac{a(a-1)\dots(a-\nu+1)}{\nu!}$
I.112	$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 + \dots, \quad  x  < 1$
I.113	$\frac{1}{1+x^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \dots + (-1)^\nu(\nu+1)x^\nu, \quad  x  < 1$
I.114	Σειρά Taylor: $\sigma(x) = \sigma(x_0) + \sigma'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}\sigma''(x_0)(x-x_0)^2 + \dots + \frac{1}{\nu!}\sigma^{(\nu)}(x_0)(x-x_0)^\nu + \dots$ όταν $\lim_{\nu \rightarrow \infty} R_\nu = 0$
I.115	$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots + (-1)^\nu \frac{z^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} + \dots, \quad  z  < \infty$
I.116	$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots + (-1)^\nu \frac{z^{2\nu}}{(2\nu)!} + \dots, \quad  z  < \infty$
I.117	$\tan z = z + \frac{z^3}{3} + \frac{2z^5}{15} + \frac{17z^7}{315} + \dots, \quad  z  < \frac{\pi}{2}$
I.118	$\sin^{-1} z = z + \frac{1}{2} \frac{z^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{z^5}{5} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \dots (2\nu-1)}{2 \cdot 4 \dots (2\nu)} \frac{z^{2\nu+1}}{2\nu+1}, \quad  z  < 1$
I.119	$\tan^{-1} z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \dots + (-1)^\nu \frac{z^{2\nu+1}}{2\nu+1}, \quad  z  < 1$
I.120	$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^\nu}{\nu!} + \dots, \quad  z  < 1$
I.121	$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^\nu \frac{x^\nu}{\nu} + \dots, \quad -1 < x \leq 1$
I.122	$\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = 2\left(z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \frac{z^7}{7} + \dots + \frac{z^{2\nu+1}}{2\nu+1} + \dots\right), \quad  z  < 1$

I.123	$\sinh z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots + \frac{z^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} + \dots, \quad  z  < \infty$
I.124	<p>Σειρά Fourier: <math>f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \frac{\pi x}{c} + a_2 \cos \frac{2\pi x}{c} + \dots + b_1 \sin \frac{\pi x}{c} + b_2 \sin \frac{2\pi x}{c} + \dots</math></p> $a_m = \frac{1}{c} \int_{-c}^c f(x) \cos \frac{m\pi x}{c} dx, \quad b_m = \frac{1}{c} \int_{-c}^c f(x) \sin \frac{m\pi x}{c} dx, \quad -c < x < c$

**ΜΗΚΟΣ ΚΑΜΠΥΛΗΣ, ΕΜΒΑΔΟΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ, ΟΓΚΟΣ, ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑ**

I.125	<p><u>Μήκος τόξου καμπύλης</u>: αν <math>x = x(t)</math>, <math>y = y(t)</math>, <math>z = z(t)</math> τότε <math>L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt</math></p> <p>Εάν <math>C</math> επίπεδη καμπύλη και η εξίσωσή της:</p> $\rho = \rho(\theta) \text{ ή } \theta = \theta(\rho): L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\rho'^2 + \rho^2} d\theta \text{ ή } L = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \sqrt{1 + \rho^2 \theta'^2} d\rho$ <p>Γενικά: <math>L = \int ds = \int \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}</math></p>
I.126	<p><u>Εμβαδόν επίπεδου χωρίου</u>: <math>E = \iint_S dE</math>, <u>Εμβαδόν τομέα</u>: <math>E = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^2 d\theta</math>,</p> <p><u>Εμβαδόν καμπύλης επιφάνειας</u>: <math>E = \iint_S \sqrt{1 + \sigma_x^2 + \sigma_y^2} dx dy</math></p> <p>(<math>z = \sigma(x, y)</math>, <math>S</math>: προβολή της <math>E</math> επί του <math>Oxy</math>)</p>
I.127	<p>Όγκος στερεού: <math>V = \iiint_{\Omega} dV</math></p> <p>Όγκος στερεού εκ περιστροφής: <math>V = \pi \int y^2 dx</math></p>
I.128	<p><u>Καμπυλότητα επίπεδης καμπύλης</u>:</p> <p>Αν <math>y = \sigma(x) \Rightarrow \kappa = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}</math>, αν <math>x = x(t)</math>, <math>y = y(t)</math>, <math>\kappa = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}</math></p>

<b>II</b>	<b>ΑΟΡΙΣΤΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ</b>
-----------	-----------------------------

**ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ**

<b>II.1</b>	$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}, \quad a \neq -1$
<b>II.2</b>	$\int \frac{dx}{x} = \ln x, \quad x \neq 0$
<b>II.3</b>	$\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \ln u(x)$
<b>II.4</b>	$\int e^x dx = e^x$
<b>II.5</b>	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}, \quad 0 < a \neq 1$
<b>II.6</b>	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x$
<b>II.7</b>	$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left  \frac{1+x}{1-x} \right , \quad x \neq \pm 1$
<b>II.8</b>	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x, \quad -1 < x < 1$
<b>II.9</b>	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln \left( x + \sqrt{x^2-1} \right), \quad x < -1 \quad \text{ή} \quad x > 1$
<b>II.10</b>	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln \left( x + \sqrt{x^2+1} \right)$
<b>II.11</b>	$\int \cos x dx = \sin x$
<b>II.12</b>	$\int \sin x dx = -\cos x$
<b>II.13</b>	$\int \tan x dx = -\ln(\cos x)$
<b>II.14</b>	$\int \frac{dx}{\tan x} = \ln(\sin x)$
<b>II.15</b>	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x$
<b>II.16</b>	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\tan x}$



Π.17	$\int \sinh x dx = \cosh x$
Π.18	$\int \cosh x dx = \sinh x$

**ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΜΕ  $ax + b$  ( $a \neq 0$ )**

Π.19	$\int (ax + b)^c dx = \frac{(ax + b)^{c+1}}{a(c+1)}, \quad c \neq -1$
Π.20	$\int \frac{dx}{ax + b} = \frac{\ln(ax + b)}{a}$
Π.21	$\int x(ax + b)^c dx = \frac{(ax + b)^{c+2}}{a^2(c+2)} - \frac{b(ax + b)^{c+1}}{a^2(c+1)}, \quad c \neq -1, -2$
Π.22	$\int \frac{x dx}{ax + b} = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2} \ln(ax + b)$
Π.23	$\int \frac{x dx}{(ax + b)^2} = \frac{b}{a^2(ax + b)} + \frac{1}{a^2} \ln(ax + b)$
Π.24	$\int x^2(ax + b)^c dx = \frac{1}{a^3} \left[ \frac{(ax + b)^{c+3}}{c+3} - 2b \frac{(ax + b)^{c+2}}{c+2} + b^2 \frac{(ax + b)^{c+1}}{c+1} \right], \quad c \neq -1, -2, -3$
Π.25	$\int \frac{x^2 dx}{ax + b} = \frac{1}{a^3} \left[ \frac{1}{2} (ax + b)^2 - 2b(ax + b) + b^2 \ln(ax + b) \right]$
Π.26	$\int \frac{x^2 dx}{(ax + b)^2} = \frac{1}{a^3} \left[ (ax + b) - 2b \ln(ax + b) - \frac{b^2}{ax + b} \right]$
Π.27	$\int \frac{x^2 dx}{(ax + b)^3} = \frac{1}{a^3} \left[ \ln(ax + b) + \frac{2b}{ax + b} - \frac{b^2}{2(ax + b)^2} \right]$
Π.28	$\int x^m(ax + b)^n dx = \begin{cases} \frac{1}{a(m+n+1)} \left[ x^m(ax + b)^{n+1} - mb \int x^{m-1}(ax + b)^n dx \right], & m > 0, m+n+1 \neq 0 \\ \frac{1}{m+n+1} \left[ x^{m+1}(ax + b)^n + nb \int x^m(ax + b)^{n-1} dx \right], & m > 0, m+n+1 \neq 0 \end{cases}$
Π.29	$\int \frac{dx}{x(ax + b)} = \frac{1}{b} \ln \frac{x}{ax + b} \quad \int \frac{dx}{x(ax + b)} = \frac{1}{b} \ln \left( \frac{x}{ax + b} \right)$
Π.30	$\int \frac{dx}{x^2(ax + b)} = -\frac{1}{bx} + \frac{a}{b^2} \ln \left( \frac{ax + b}{x} \right)$
Π.31	$\int \frac{dx}{x^3(ax + b)} = \frac{2ax - b}{2b^2 x^2} + \frac{a^2}{b^3} \ln \left( \frac{x}{ax + b} \right)$
Π.32	$\int \frac{dx}{x(ax + b)^2} = \frac{1}{b(ax + b)} - \frac{1}{b^2} \ln \left( \frac{ax + b}{x} \right)$
Π.33	$\int \frac{dx}{x(ax + b)^3} = \frac{1}{b^3} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{ax + 2b}{ax + b} \right)^2 + \ln \left( \frac{x}{ax + b} \right) \right]$

Π.34	$\int \frac{dx}{x^2(ax+b)^2} = -\frac{b+2ax}{b^2x(ax+b)} + \frac{2a}{b^3} \ln\left(\frac{ax+b}{x}\right)$
Π.35	$\int \sqrt{ax+b} dx = \frac{2}{3a} \sqrt{(ax+b)^3}$
Π.36	$\int x\sqrt{ax+b} dx = \frac{2(3ax-2b)}{15a^2} \sqrt{(ax+b)^3}$
Π.37	$\int x^2\sqrt{ax+b} dx = \frac{2(15a^2x^2 - 12abx + 8b^2)\sqrt{(ax+b)^3}}{105a^3}$
Π.38	$\int x^3\sqrt{ax+b} dx = \frac{2(35a^3x^3 - 30a^2bx^2 + 24ab^2x - 16b^3)\sqrt{ax+b}}{315a^4}$
Π.39	$\int x^n\sqrt{ax+b} dx = \frac{2}{a^{n+1}} \int u^2(u^2-b)^n du, \quad \text{όπου } u = \sqrt{ax+b}$
Π.40	$\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x} dx = 2\sqrt{ax+b} + b \int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}}$
Π.41	$\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2\sqrt{ax+b}}{a}$
Π.42	$\int \frac{xdx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2(ax-2b)}{3a^2} \sqrt{ax+b}$
Π.43	$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2(3a^2x^2 - 4abx + 8b^2)}{15a^3} \sqrt{ax+b}$
Π.44	$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2(5a^3x^3 - 6a^2bx^2 + 8ab^2x - 16b^3)}{35a^4} \sqrt{ax+b}$
Π.45	$\int \frac{x^n dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2}{a^{n+1}} \int (u^2-b)^n du, \quad \text{όπου } u = \sqrt{ax+b}$
Π.46	$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{b}} \ln \frac{\sqrt{ax+b} - \sqrt{b}}{\sqrt{ax+b} + \sqrt{b}}, & \text{για } b > 0 \\ \frac{2}{\sqrt{-b}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{ax+b}{-b}}, & \text{για } b < 0 \end{cases}$
Π.47	$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{ax+b}} = -\frac{ax+b}{bx} - \frac{a}{2b} \int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}}$
Π.48	$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{ax+b}} = -\frac{\sqrt{ax+b}}{2bx^2} + \frac{3a\sqrt{ax+b}}{4b^2x} + \frac{3a^2}{8b^2} - \int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}}$
Π.49	$\int \frac{dx}{x^n(ax+b)^m} = -\frac{1}{b^{m+n-1}} \int \frac{(u-a)^{m+n-2}}{u^m} du, \quad \text{όπου } u = \frac{ax+b}{x}$
Π.50	$\int \frac{dx}{x(ax+b)^{n/2}} = \frac{1}{b} \int \frac{dx}{x(ax+b)^{\frac{n}{2}-1}} - \frac{a}{b} \int \frac{dx}{(ax+b)^{n/2}}$
Π.51	$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2x^m\sqrt{ax+b}}{(2m+1)a} - \frac{2mb}{(2m+1)a} \int \frac{x^{m-1} dx}{\sqrt{ax+b}}, \quad m \neq -\frac{1}{2}$
Π.52	$\int \frac{dx}{x^n\sqrt{ax+b}} = -\frac{\sqrt{ax+b}}{(n-1)bx^{n-1}} - \frac{(2n-3)a}{(2n-2)b} \int \frac{dx}{x^{n-1}\sqrt{ax+b}}, \quad n \neq 1$

II.53	$\int \frac{(ax+b)^{n/2}}{x} dx = a \int (ax+b)^{\frac{n-2}{2}} dx + b \int \frac{(ax+b)^{\frac{n-2}{2}}}{x} dx$
II.54	$\int \frac{dx}{(ax+b)(cx+d)} = \frac{1}{bc-ad} \ln \left( \frac{cx+d}{ax+b} \right), \quad \text{για } bc-ad \neq 0$
II.55	$\int \frac{dx}{(ax+b)^2(cx+d)} = \frac{1}{bc-ad} \left[ \frac{1}{ax+b} + \frac{c}{bc-ad} \ln \left( \frac{cx+d}{ax+b} \right) \right], \quad \text{για } bc-ad \neq 0$
II.56	$\int (ax+b)^n (cx+d)^m dx = \frac{1}{(m+n+1)a} \left[ (ax+b)^{n+1} (cx+d)^m - m(bc-ad) \int (ax+b)^n (cx+d)^{m-1} dx \right]$
II.57	$\int \frac{dx}{(ax+b)^n (cx+d)^m} = -\frac{1}{(m-1)(bc-ad)} \left[ \frac{1}{(ax+b)^{n-1} (cx+d)^{m-1}} + a(m+n-2) \int \frac{dx}{(ax+b)^n (cx+d)^{m-1}} \right]$ για $m > 1, n > 0, bc-ad \neq 0$
II.58	$\int \frac{(ax+b)^n}{(cx+d)^m} dx = \begin{cases} -\frac{1}{(m-1)(bc-ad)} \left[ \frac{(ax+b)^{n+1}}{(cx+d)^{m-1}} + (m-n-2)a \int \frac{(ax+b)^n dx}{(cx+d)^{m-1}} \right] \\ -\frac{1}{(m-n-1)c} \left[ \frac{(ax+b)^n}{(cx+d)^{m-1}} + n(bc-ad) \int \frac{(ax+b)^{n-1} dx}{(cx+d)^m} \right] \end{cases}$
II.59	$\int \frac{xdx}{(ax+b)(cx+d)} = \frac{1}{bc-ad} \left[ \frac{b}{a} \ln(ax+b) - \frac{d}{c} \ln(cx+d) \right], \quad \text{για } bc-ad \neq 0$
II.60	$\int \frac{xdx}{(ax+b)^2(cx+d)} = \frac{1}{bc-ad} \left[ -\frac{b}{a(ax+b)} - \frac{d}{bc-ad} \ln \left( \frac{cx+d}{ax+b} \right) \right], \quad \text{για } bc-ad \neq 0$
II.61	$\int \frac{cx+d}{\sqrt{ax+b}} dx = \frac{2}{3a^2} (3ad-2bc+acx)\sqrt{ax+b}$
II.62	$\int \frac{\sqrt{ax+b}}{cx+d} dx = \begin{cases} \frac{2\sqrt{ax+b}}{c} - \frac{2}{c} \sqrt{\frac{ad-bc}{c}} \tan^{-1} \left[ \sqrt{\frac{c(ax+b)}{ad-bc}} \right], & c > 0, ad > bc \\ \frac{2\sqrt{ax+b}}{c} + \frac{1}{c} \sqrt{\frac{bc-ad}{c}} \ln \left[ \frac{\sqrt{c(ax+b)} - \sqrt{bc-ad}}{\sqrt{c(ax+b)} + \sqrt{bc-ad}} \right], & c > 0, bc > ad \end{cases}$
II.63	$\int \frac{dx}{(cx+d)\sqrt{ax+b}} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{c}\sqrt{ad-bc}} \tan^{-1} \left[ \sqrt{\frac{c(ax+b)}{ad-bc}} \right], & c > 0, ad > bc \\ \frac{1}{\sqrt{c}\sqrt{bc-ad}} \ln \left[ \frac{\sqrt{c(ax+b)} - \sqrt{bc-ad}}{\sqrt{c(ax+b)} + \sqrt{bc-ad}} \right], & c > 0, bc > ad \end{cases}$
II.64	$\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}\sqrt{cx+d}} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{-ac}} \tan^{-1} \left[ \sqrt{\frac{-c(ax+b)}{a(cx+d)}} \right], & ac < 0, a > 0 \\ \frac{2}{\sqrt{ac}} \ln \left[ \sqrt{ac(ax+b)} + a\sqrt{cx+d} \right], & ac > 0 \end{cases}$
II.65	$\int \sqrt{ax+b}\sqrt{cx+d} dx = \frac{(2acx+bc+ad)\sqrt{ax+b}\sqrt{cx+d}}{4ac} - \frac{(ad-bc)^2}{8ac} \int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}\sqrt{cx+d}}$
II.66	$\int \sqrt{\frac{cx+d}{ax+b}} dx = \frac{\sqrt{ax+b}\sqrt{cx+d}}{a} + \frac{ad-bc}{2a} \int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}\sqrt{cx+d}}$
II.67	$\int \sqrt{\frac{x+b}{x+d}} dx = \sqrt{x+d}\sqrt{x+b} + (b-d) \ln(\sqrt{x+d} + \sqrt{x+b})$
II.68	$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx = \sin^{-1} x - \sqrt{1-x^2}$

<b>II.69</b>	$\int \sqrt{\frac{p-x}{q+x}} dx = \sqrt{p-x}\sqrt{q+x} + (p+q) \sin^{-1} \left( \sqrt{\frac{x+q}{p+q}} \right)$
<b>II.70</b>	$\int \sqrt{\frac{p+x}{q-x}} dx = -\sqrt{p+x}\sqrt{q-x} - (p+q) \sin^{-1} \left( \sqrt{\frac{q-x}{p+q}} \right)$
<b>II.71</b>	$\int \frac{dx}{\sqrt{x-p}\sqrt{q-x}} = 2 \sin^{-1} \left( \sqrt{\frac{x-p}{q-p}} \right)$

**ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΜΕ**  $ax^2 + c$ ,  $ax^n + c$ ,  $x^2 \pm p^2$ ,  $p^2 - x^2$ :  $a \neq 0$ ,  $p > 0$

<b>II.72</b>	$\int \frac{dx}{p^2 + x^2} = \frac{1}{p} \tan^{-1} \left( \frac{x}{p} \right)$
<b>II.73</b>	$\int \frac{dx}{p^2 - x^2} = \frac{1}{2p} \ln \left( \frac{p+x}{p-x} \right)$
<b>II.74</b>	$\int \frac{dx}{ax^2 + c} = \frac{1}{\sqrt{ac}} \tan^{-1} \left( x \sqrt{\frac{a}{c}} \right), \quad \text{για } a, c > 0$
<b>II.75</b>	$\int \frac{dx}{ax^2 + c} = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{-ac}} \ln \left( \frac{x\sqrt{a} - \sqrt{-c}}{x\sqrt{a} + \sqrt{-c}} \right), & \text{για } a > 0, c < 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{-ac}} \ln \left( \frac{\sqrt{c} + x\sqrt{-a}}{\sqrt{c} - x\sqrt{-a}} \right), & \text{για } a < 0, c < 0 \end{cases}$
<b>II.76</b>	$\int (ax^2 + c)^m dx = \frac{x(ax^2 + c)^m}{2m+1} + \frac{2mc}{2m+1} \int (ax^2 + c)^{m-1} dx$
<b>II.77</b>	$\int \frac{dx}{(ax^2 + c)^n} = \frac{1}{2(n-1)c} \frac{x}{(ax^2 + c)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)c} \int \frac{dx}{(ax^2 + c)^{n-1}}, \quad n > 1$
<b>II.78</b>	$\int x(ax^2 + c)^n dx = \frac{1}{2a} \frac{(ax^2 + c)^{n+1}}{n+1}, \quad n \neq -1$
<b>II.79</b>	$\int \frac{x}{ax^2 + c} dx = \frac{1}{2a} \ln(ax^2 + c)$
<b>II.80</b>	$\int \frac{dx}{x(ax^2 + c)} = \frac{1}{2c} \ln \left( \frac{x^2}{ax^2 + c} \right)$
<b>II.81</b>	$\int \frac{dx}{x^2(ax^2 + c)} = -\frac{1}{cx} - \frac{a}{c} \int \frac{dx}{ax^2 + c}$
<b>II.82</b>	$\int \frac{x^2 dx}{ax^2 + c} = \frac{x}{a} - \frac{c}{a} \int \frac{dx}{ax^2 + c}$
<b>II.83</b>	$\int \frac{x^n dx}{ax^2 + c} = \frac{x^{n-1}}{a(n-1)} - \frac{c}{a} \int \frac{x^{n-2}}{ax^2 + c} dx, \quad n \neq -1$
<b>II.84</b>	$\int \frac{x^2 dx}{(ax^2 + c)^n} = -\frac{x}{2a(n-1)(ax^2 + c)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)a} \int \frac{dx}{(ax^2 + c)^{n-1}}$
<b>II.85</b>	$\int \frac{dx}{x^2(ax^2 + c)^n} = \frac{1}{c} \int \frac{dx}{x^2(ax^2 + c)^{n-1}} - \frac{a}{c} \int \frac{dx}{(ax^2 + c)^n}$

II.86	$\int \sqrt{x^2 \pm p^2} dx = \frac{1}{2} \left[ x\sqrt{x^2 \pm p^2} \pm p^2 \ln \left( x + \sqrt{x^2 \pm p^2} \right) \right]$
II.87	$\int \sqrt{p^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} \left[ x\sqrt{p^2 - x^2} + p^2 \sin^{-1} \left( \frac{x}{p} \right) \right]$
II.88	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm p^2}} = \ln \left( x + \sqrt{x^2 \pm p^2} \right)$
II.89	$\int \frac{dx}{\sqrt{p^2 - x^2}} = \sin^{-1} \left( \frac{x}{p} \right)$
II.90	$\int \sqrt{ax^2 + c} dx = \begin{cases} \frac{x}{2} \sqrt{ax^2 + c} + \frac{c}{2\sqrt{a}} \ln \left( x\sqrt{a} + \sqrt{ax^2 + c} \right), & a > 0 \\ \frac{x}{2} \sqrt{ax^2 + c} + \frac{c}{2\sqrt{-a}} \sin^{-1} \left( x\sqrt{\frac{-a}{c}} \right), & a < 0, \quad c > 0 \end{cases}$
II.91	$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + c}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left( x\sqrt{a} + \sqrt{ax^2 + c} \right), & a > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-a}} \sin^{-1} \left( x\sqrt{\frac{-a}{c}} \right), & a < 0, \quad c > 0 \end{cases}$
II.92	$\int x\sqrt{ax^2 + c} dx = \frac{1}{3a} (ax^2 + c)^{3/2}$
II.93	$\int x^2 \sqrt{ax^2 + c} dx = \begin{cases} \frac{x}{4a} \sqrt{(ax^2 + c)^3} - \frac{cx}{8a} \sqrt{ax^2 + c} - \frac{c^2}{8\sqrt{a^3}} \ln \left( x\sqrt{a} + \sqrt{ax^2 + c} \right), & a > 0 \\ \frac{x}{4a} \sqrt{(ax^2 + c)^3} - \frac{cx}{8a} \sqrt{ax^2 + c} - \frac{c^2}{8a\sqrt{-a}} \sin^{-1} \left( x\sqrt{\frac{-a}{c}} \right), & a < 0, \quad c > 0 \end{cases}$
II.94	$\int \frac{xdx}{\sqrt{ax^2 + c}} = \frac{1}{a} \sqrt{ax^2 + c}$
II.95	$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{ax^2 + c}} = \frac{x}{a} \sqrt{ax^2 + c} - \frac{1}{a} \int \sqrt{ax^2 + c} dx$
II.96	$\int \frac{\sqrt{ax^2 + c}}{x} dx = \begin{cases} \sqrt{ax^2 + c} + \sqrt{c} \ln \left( \frac{\sqrt{ax^2 + c} - \sqrt{c}}{x} \right), & c > 0 \\ \sqrt{ax^2 + c} - \sqrt{-c} \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{ax^2 + c}}{\sqrt{-c}} \right), & c < 0 \end{cases}$
II.97	$\int \frac{\sqrt{ax^2 + c}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{ax^2 + c}}{x} + a \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + c}}$
II.98	$\int \frac{dx}{x\sqrt{p^2 \pm x^2}} = -\frac{1}{p} \ln \left( \frac{p + \sqrt{p^2 \pm x^2}}{x} \right)$
II.99	$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - p^2}} = \begin{cases} \frac{1}{p} \cos^{-1} \left( \frac{p}{x} \right) \\ -\frac{1}{p} \sin^{-1} \left( \frac{p}{x} \right) \end{cases}, \quad x > p > 0$
II.100	$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + p^2}} = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + p^2} - \frac{p^2}{2} \ln \left( x + \sqrt{x^2 + p^2} \right)$
II.101	$\int \frac{\sqrt{x^2 + p^2}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{x^2 + p^2}}{x} + \ln \left( x + \sqrt{x^2 + p^2} \right)$

II.102	$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+c}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{c}} \ln \left( \frac{\sqrt{ax^2+c}-\sqrt{c}}{x} \right), & c > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-c}} \sec^{-1} \left( x\sqrt{\frac{-a}{c}} \right), & c < 0, a > 0 \end{cases}$
II.103	$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{ax^2+c}} = -\frac{\sqrt{ax^2+c}}{cx}$
II.104	$\int \frac{x^n dx}{\sqrt{ax^2+c}} = \frac{x^{n-1}\sqrt{ax^2+c}}{na} - \frac{(n-1)c}{na} \int \frac{x^{n-2} dx}{\sqrt{ax^2+c}}, \quad n > 0$
II.105	$\int x^n \sqrt{ax^2+c} dx = \frac{x^{n-1}(ax^2+c)^{3/2}}{(n+2)a} - \frac{(n-1)c}{(n+2)a} \int x^{n-2} \sqrt{ax^2+c} dx$
II.106	$\int \frac{\sqrt{ax^2+c}}{x^n} dx = -\frac{(ax^2+c)^{3/2}}{c(n-1)x^{n-1}} - \frac{(n-4)a}{(n-1)c} \int \frac{\sqrt{ax^2+c}}{x^{n-2}} dx$
II.107	$\int \frac{dx}{x^n \sqrt{ax^2+c}} = -\frac{\sqrt{ax^2+c}}{c(n-1)x^{n-1}} - \frac{(n-2)a}{(n-1)c} \int \frac{dx}{x^{n-2} \sqrt{ax^2+c}}$
II.108	$\int (ax^2+c)^{3/2} dx = \begin{cases} \frac{x}{8}(2ax^2+5c)\sqrt{ax^2+c} + \frac{3c^2}{8\sqrt{a}} \ln(x\sqrt{a} + \sqrt{ax^2+c}), & a > 0 \\ \frac{x}{8}(2ax^2+5c)\sqrt{ax^2+c} + \frac{3c^2}{8\sqrt{-a}} \sin^{-1} \left( x\sqrt{\frac{-a}{c}} \right), & a < 0 \end{cases}$
II.109	$\int \frac{dx}{(ax^2+c)^{3/2}} = \frac{x}{c\sqrt{ax^2+c}}$
II.110	$\int x(ax^2+c)^{3/2} dx = \frac{1}{5a}(ax^2+c)^{5/2}$
II.111	$\int x^2(ax^2+c)^{3/2} dx = \frac{x^3}{6}(ax^2+c)^{3/2} + \frac{c}{2} \int x^2 \sqrt{ax^2+c} dx$
II.112	$\int x^n(ax^2+c)^{3/2} dx = \frac{x^{n+1}(ax^2+c)^{3/2}}{n+4} + \frac{3c}{n+4} \int x^n \sqrt{ax^2+c} dx$
II.113	$\int \frac{xdx}{(ax^2+c)^{3/2}} = -\frac{1}{a\sqrt{ax^2+c}}$
II.114	$\int \frac{x^2 dx}{(ax^2+c)^{3/2}} = \begin{cases} -\frac{x}{a\sqrt{ax^2+c}} + \frac{1}{a\sqrt{a}} \ln(x\sqrt{a} + \sqrt{ax^2+c}), & a > 0 \\ -\frac{x}{a\sqrt{ax^2+c}} + \frac{1}{a\sqrt{-a}} \sin^{-1} \left( x\sqrt{\frac{-a}{c}} \right), & a < 0, c > 0 \end{cases}$
II.115	$\int \frac{x^3 dx}{(ax^2+c)^{3/2}} = -\frac{x^2}{a\sqrt{ax^2+c}} + \frac{2\sqrt{ax^2+c}}{a^2}$
II.116	$\int \frac{dx}{x(ax^n+c)} = \frac{1}{cn} \ln \left( \frac{x^n}{ax^n+c} \right)$
II.117	$\int \frac{dx}{(ax^n+c)^m} = \frac{1}{c} \int \frac{dx}{(ax^n+c)^{m-1}} - \frac{a}{c} \int \frac{x^n dx}{(ax^n+c)^m}$
II.118	$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^n+c}} = \begin{cases} \frac{1}{n\sqrt{c}} \ln \left( \frac{\sqrt{ax^n+c}-\sqrt{c}}{\sqrt{ax^n+c}+\sqrt{c}} \right), & c > 0 \\ \frac{2}{n\sqrt{-c}} \sec^{-1} \left( \sqrt{\frac{-ax^n}{c}} \right), & c < 0 \end{cases}$

**ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΜΕ  $ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$**

<b>II.119</b>	$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \ln \left( \frac{2ax + b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2ax + b + \sqrt{b^2 - 4ac}} \right), & b^2 > 4ac \\ \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \tan^{-1} \left( \frac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}} \right), & b^2 < 4ac \\ -\frac{2}{2ax + b}, & b^2 = 4ac \end{cases}$
<b>II.120</b>	$\int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^{n+1}} = \frac{2ax + b}{n(4ac - b^2)(ax^2 + bx + c)^n} + \frac{2(2n - 1)a}{n(4ac - b^2)} \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^{n-1}}$
<b>II.121</b>	$\int \frac{xdx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{2a} \ln(ax^2 + bx + c) - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$
<b>II.122</b>	$\int \frac{x^2 dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{x}{a} - \frac{b}{2a^2} \ln(ax^2 + bx + c) + \frac{b^2 - 2ac}{2a^2} \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$
<b>II.123</b>	$\int \frac{x^n dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{x^{n-1}}{(n-1)a} - \frac{c}{a} \int \frac{x^{n-2} dx}{ax^2 + bx + c} - \frac{b}{a} \int \frac{x^{n-1} dx}{ax^2 + bx + c}$
<b>II.124</b>	$\int \frac{xdx}{(ax^2 + bx + c)^{n+1}} = \frac{-(2c + bx)}{n(4ac - b^2)(ax^2 + bx + c)^n} - \frac{b(2n - 1)}{n(4ac - b^2)} \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^n}$
<b>II.125</b>	$\int \frac{x^m dx}{(ax^2 + bx + c)^{n+1}} = -\frac{x^{m-1}}{a(2n - m + 1)(ax^2 + bx + c)^n} - \frac{(n - m + 1)b}{(2n - m + 1)a} \int \frac{x^{m-1} dx}{(ax^2 + bx + c)^{n+1}} + \frac{(m - 1)c}{(2n - m + 1)a} \int \frac{x^{m-2}}{(ax^2 + bx + c)^{n+1}}$
<b>II.126</b>	$\int \frac{dx}{x(ax^2 + bx + c)} = \frac{1}{2c} \ln \left( \frac{x^2}{ax^2 + bx + c} \right) - \frac{b}{2c} \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$
<b>II.127</b>	$\int \frac{dx}{x^2(ax^2 + bx + c)} = \frac{b}{2c^2} \ln \left( \frac{ax^2 + bx + c}{x^2} \right) - \frac{1}{cx} + \left( \frac{b^2}{2c^2} - \frac{a}{c} \right) \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$
<b>II.128</b>	$\int \frac{dx}{x^m(ax^2 + bx + c)^{n+1}} = -\frac{1}{(m-1)cx^{m-1}(ax^2 + bx + c)^n} - \frac{(n+m-1)b}{(m-1)c} \int \frac{dx}{x^{m-1}(ax^2 + bx + c)^{n+1}} - \frac{(2n+m-1)a}{(m-1)c} \int \frac{dx}{x^{m-2}(ax^2 + bx + c)^{n+1}}$
<b>II.129</b>	$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left( 2ax + b + 2\sqrt{a}\sqrt{ax^2 + bx + c} \right), & a > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-a}} \sin^{-1} \left( \frac{-2ax - b}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \right), & a < 0 \end{cases}$
<b>II.130</b>	$\int \frac{xdx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c}}{a} - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$
<b>II.131</b>	$\int \frac{x^n dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{x^{n-1}\sqrt{ax^2 + bx + c}}{an} - \frac{b(2n-1)}{2an} \int \frac{x^{n-1} dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} - \frac{c(n-1)}{an} \int \frac{x^{n-2} dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$
<b>II.132</b>	$\int x\sqrt{ax^2 + bx + c} dx = \frac{(ax^2 + bx + c)^{3/2}}{3a} - \frac{b}{2a} \int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx$
<b>II.133</b>	$\int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx = \frac{2ax + b}{4a} \sqrt{ax^2 + bx + c} + \frac{4ac - b^2}{8a} \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$

<b>II.134</b>	$\int x^2 \sqrt{ax^2 + bx + c} dx = \left(x - \frac{5b}{6a}\right) \frac{(ax^2 + bx + c)^{3/2}}{4a} + \frac{5b^2 - 4ac}{16a^2} \int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx$
<b>II.135</b>	$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \begin{cases} \frac{-1}{\sqrt{c}} \ln \left( \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c} + \sqrt{c}}{x} + \frac{b}{2\sqrt{c}} \right), & c > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-c}} \sin^{-1} \left( \frac{bx + 2c}{x\sqrt{b^2 - 4ac}} \right), & x > 0 \quad c < 0 \\ -\frac{2}{bx} \sqrt{ax^2 + bx}, & c = 0 \end{cases}$
<b>II.136</b>	$\int \frac{dx}{x^n \sqrt{ax^2 + bx + c}} = -\frac{\sqrt{ax^2 + bx + c}}{c(n-1)x^{n-1}} + \frac{b(3-2n)}{2c(n-1)} \int \frac{dx}{x^{n-1} \sqrt{ax^2 + bx + c}} + \frac{a(2-n)}{c(n-1)} \int \frac{dx}{x^{n-2} \sqrt{ax^2 + bx + c}}$
<b>II.137</b>	$\int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^{3/2}} = \begin{cases} -\frac{2(2ax + b)}{(b^2 - 4ac)\sqrt{ax^2 + bx + c}}, & b^2 \neq 4ac \\ \frac{1}{2\sqrt{a^3}(x + b/2a)^2}, & b^2 = 4ac \end{cases}$

**ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΜΕ  $\sqrt{2ax - x^2}$ ,  $\sqrt{2ax + x^2}$**

<b>II.138</b>	$\int \sqrt{2ax - x^2} dx = \frac{x-a}{2} \sqrt{2ax - x^2} \pm \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \left( \frac{x-a}{a} \right) \quad \begin{cases} \text{To} + \text{για } a > 0 \\ \text{To} - \text{για } a < 0 \end{cases}$
<b>II.139</b>	$\int \frac{dx}{\sqrt{2ax - x^2}} = \pm \cos^{-1} \left( \frac{a-x}{a} \right) \quad \text{To} + \text{για } a > 0, \text{το} - \text{για } a < 0$
<b>II.140</b>	$\int x^m \sqrt{2ax - x^2} dx = -\frac{x^{m-1}(2ax - x^2)^{3/2}}{m+2} + \frac{(2m+1)a}{m+2} \int x^{m-1} \sqrt{2ax - x^2} dx$
<b>II.141</b>	$\int x \sqrt{2ax - x^2} dx = a \int \sqrt{2ax - x^2} dx - \frac{(2ax - x^2)^{3/2}}{3}$
<b>II.142</b>	$\int \frac{dx}{x\sqrt{2ax - x^2}} = -\frac{\sqrt{2ax - x^2}}{ax}$
<b>II.143</b>	$\int \frac{xdx}{\sqrt{2ax - x^2}} = -\sqrt{2ax - x^2} + a \int \frac{dx}{\sqrt{2ax - x^2}}$
<b>II.144</b>	$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{2ax - x^2}} = -\frac{x\sqrt{2ax - x^2}}{2} + \frac{3a}{2} \int \frac{xdx}{\sqrt{2ax - x^2}}$
<b>II.145</b>	$\int \frac{\sqrt{2ax - x^2}}{x} dx = \frac{(2ax - x^2)^{3/2}}{ax} + \frac{2}{a} \int \sqrt{2ax - x^2} dx$
<b>II.146</b>	$\int \frac{\sqrt{2ax - x^2}}{x^2} dx = -\frac{(2ax - x^2)^{3/2}}{ax^2} - \frac{1}{a} \int \frac{\sqrt{2ax - x^2}}{x} dx$
<b>II.147</b>	$\int \frac{\sqrt{2ax - x^2}}{x^n} dx = \frac{(2ax - x^2)^{3/2}}{(3-2n)ax^n} + \frac{n-3}{(2n-3)a} \int \frac{\sqrt{2ax - x^2}}{x^{n-1}} dx$
<b>II.148</b>	$\int \frac{dx}{(2ax - x^2)^{3/2}} = \frac{x-a}{a^2 \sqrt{2ax - x^2}}$



II.149	$\int \frac{xdx}{(2ax - x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a\sqrt{2ax - x^2}}$
II.150	$\int \frac{dx}{\sqrt{2ax + x^2}} = \ln(x + a + \sqrt{2ax + x^2})$

**ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΜΕ  $\sin ax$**

II.151	$\int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax$
II.152	$\int \sin^2 ax dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a}$
II.153	$\int \sin^3 ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax + \frac{1}{3a} \cos^3 ax$
II.154	$\int \sin^4 ax dx = \frac{3x}{8} - \frac{3 \sin 2ax}{16a} - \frac{\sin^3 ax \cos ax}{4a}$
II.155	$\int \sin^n ax dx = -\frac{\sin^{n-1} ax \cos ax}{na} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} ax dx, \quad n \in \mathbb{Z}^+$
II.156	$\int \frac{dx}{\sin ax} = \frac{1}{a} \ln \left( \tan \frac{ax}{2} \right)$
II.157	$\int \frac{dx}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a \tan ax}$
II.158	$\int \frac{dx}{\sin^n ax} = -\frac{1}{a(n-1)} \frac{\cos ax}{\sin^{n-1} ax} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sin^{n-2} ax}, \quad n \in \mathbb{Z}^+, n > 1$
II.159	$\int \frac{dx}{1 \pm \sin ax} = \mp \frac{1}{a} \tan \left( \frac{\pi}{4} \mp \frac{ax}{2} \right)$
II.160	$\int \frac{dx}{b + c \sin ax} = \begin{cases} \frac{-2}{a\sqrt{b^2 - c^2}} \tan^{-1} \left[ \sqrt{\frac{b-c}{b+c}} \tan \left( \frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2} \right) \right], & b^2 > c^2 \\ \frac{-1}{a\sqrt{c^2 - b^2}} \ln \left( \frac{c + b \sin ax + \sqrt{c^2 - b^2} \cos ax}{b + c \sin ax} \right), & b^2 < c^2 \end{cases}$
II.161	$\int \sin ax \cdot \sin bx dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)}, \quad a^2 \neq b^2$
II.162	$\int \sqrt{1 + \sin x} dx = \pm 2 \left( \sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right) \quad \text{To + εάν } (8k-1)\frac{\pi}{2} < x \leq (8k+3)\frac{\pi}{2}, \text{ αλλιώς το - } (k \in \mathbb{Z})$
II.163	$\int \sqrt{1 - \sin x} dx = \pm 2 \left( \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right) \quad \text{To + εάν } (8k-3)\frac{\pi}{2} < x \leq (8k+1)\frac{\pi}{2}, \text{ αλλιώς το - } (k \in \mathbb{Z})$

**ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΜΕ  $\cos ax$**

II.164	$\int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax$
--------	---

II.165	$\int \cos^2 ax dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a}$
II.166	$\int \cos^3 ax dx = \frac{1}{a} \sin ax - \frac{1}{3a} \sin^3 ax$
II.167	$\int \cos^4 ax dx = \frac{3x}{8} + \frac{3 \sin 2ax}{16a} + \frac{\cos^3 ax \sin ax}{4a}$
II.168	$\int \cos^n ax dx = \frac{\cos^{n-1} ax \sin ax}{na} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} ax dx$
II.169	$\int \frac{dx}{\cos ax} = \frac{1}{a} \ln \left[ \tan \left( \frac{ax}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right]$
II.170	$\int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a} \tan ax$
II.171	$\int \frac{dx}{\cos^n ax} = \frac{1}{a(n-1)} \frac{\sin ax}{\cos^{n-1} ax} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-2} ax}, \quad n \in \mathbb{Z}^+, n > 1$
II.172	$\int \frac{dx}{1 + \cos ax} = \frac{1}{a} \tan \left( \frac{ax}{2} \right)$
II.173	$\int \frac{dx}{1 - \cos ax} = -\frac{1}{a \tan \left( \frac{ax}{2} \right)}$
II.174	$\int \sqrt{1 + \cos x} dx = \pm \sqrt{2} \int \cos \frac{x}{2} dx = \pm 2\sqrt{2} \sin \frac{x}{2}$ Το + εάν $(4k-1)\pi < x \leq (4k+1)\pi$ , αλλιώς το - ( $k \in \mathbb{Z}$ )
II.175	$\int \sqrt{1 - \cos x} dx = \pm \sqrt{2} \int \sin \frac{x}{2} dx = \mp 2\sqrt{2} \cos \frac{x}{2}$ Τα πάνω σημεία εάν $4k\pi < x \leq (4k+2)\pi$ , αλλιώς τα κάτω
II.176	$\int \frac{dx}{b + c \cos ax} = \begin{cases} \frac{1}{a\sqrt{b^2 - c^2}} \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{b^2 - c^2} \sin ax}{c + b \cos ax} \right), & b^2 > c^2 \\ \frac{1}{a\sqrt{c^2 - b^2}} \tanh^{-1} \left( \frac{\sqrt{c^2 - b^2} \sin ax}{c + b \cos ax} \right), & b^2 < c^2 \end{cases}$
II.177	$\int \cos ax \cos bx dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} + \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)}, \quad a^2 \neq b^2$

**ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΜΕ  $\sin ax$ ,  $\cos ax$**

II.178	$\int \sin ax \cos bx dx = -\frac{1}{2} \left[ \frac{\cos(a-b)x}{a-b} + \frac{\cos(a+b)x}{a+b} \right], \quad a^2 \neq b^2$
II.179	$\int \sin^n ax \cos ax dx = \frac{1}{a(n+1)} \sin^{n+1} ax, \quad n \neq -1$
II.180	$\int \cos^n ax \sin ax dx = -\frac{1}{a(n+1)} \cos^{n+1} ax, \quad n \neq -1$
II.181	$\int \frac{\sin ax}{\cos ax} dx = -\frac{1}{a} \ln(\cos ax)$

II.182	$\int \frac{\cos ax}{\sin ax} dx = \frac{1}{a} \ln(\sin ax)$
II.183	$\int (b + c \sin ax)^n \cos ax dx = \frac{1}{ac(n+1)} (b + c \sin ax)^{n+1}, \quad n \neq -1$
II.184	$\int (b + c \cos ax)^n \sin ax dx = -\frac{1}{ac(n+1)} (b + c \cos ax)^{n+1}, \quad n \neq -1$
II.185	$\int \frac{\cos ax}{b + c \sin ax} dx = \frac{1}{ac} \ln(b + c \sin ax)$
II.186	$\int \frac{\sin ax}{b + c \cos ax} dx = -\frac{1}{ac} \ln(b + c \cos ax)$
II.187	$\int \frac{dx}{b \sin ax + c \cos ax} = \frac{1}{a\sqrt{b^2 + c^2}} \ln \left[ \tan \frac{1}{2} \left( ax + \tan^{-1} \frac{c}{b} \right) \right], \quad b > 0$
II.188	$\int \frac{dx}{b + c \cos ax + d \sin ax} = \begin{cases} \frac{-1}{a\sqrt{b^2 - c^2 - d^2}} \sin^{-1} \left[ \frac{c^2 + d^2 + b(c \cos ax + d \sin ax)}{\sqrt{c^2 + d^2} (b + c \cos ax + d \sin ax)} \right], & \text{για } b^2 > c^2 + d^2 \\ \frac{1}{ab} \left[ \frac{b - (c + d) \cos ax + (c - d) \sin ax}{b + (c - d) \cos ax + (c + d) \sin ax} \right], & \text{για } b^2 = c^2 + d^2 \end{cases}$ $-\pi < ax < \pi$
II.189	$\int \frac{\sin^2 ax dx}{b + c \cos^2 ax} = \frac{1}{ac} \sqrt{\frac{b+c}{b}} \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{b}{b+c}} \tan ax \right) - \frac{x}{c}$
II.190	$\int \frac{\sin ax \cos ax dx}{b \cos^2 ax + c \sin^2 ax} = \frac{1}{2a(c-b)} \ln(b \cos^2 ax + c \sin^2 ax)$
II.191	$\int \frac{dx}{b^2 \cos^2 ax + c^2 \sin^2 ax} = \frac{1}{abc} \tan^{-1} \left( \frac{c \tan ax}{b} \right)$
II.192	$\int \frac{dx}{b^2 \cos^2 ax - c^2 \sin^2 ax} = \frac{1}{2abc} \ln \left( \frac{b \cos ax + c \sin ax}{b \cos ax - c \sin ax} \right)$
II.193	$\int \sin^2 ax \cos^2 ax dx = \frac{x}{8} - \frac{\sin 4ax}{32a}$
II.194	$\int \frac{dx}{\sin ax \cos ax} = \frac{1}{a} \ln(\tan ax)$
II.195	$\int \frac{dx}{\sin^2 ax \cos^2 ax} = \frac{1}{a} \left( \tan ax - \frac{1}{\tan ax} \right)$
II.196	$\int \sin^m ax \cos^n ax dx = -\frac{\sin^{m-1} ax \cos^{n+1} ax}{a(m+n)} + \frac{m-1}{m+n} \int \sin^{m-2} ax \cos^n ax dx, \quad m > 0, \quad n > 0$
II.197	$\int \frac{\sin^m ax}{\cos^n ax} dx = \frac{\sin^{m+1} ax}{a(n-1) \cos^{n-1} ax} - \frac{m-n+2}{n-1} \int \frac{\sin^m ax}{\cos^{n-2} ax} dx, \quad m, n > 0, \quad n \neq 1$
II.198	$\int \frac{\cos^n ax}{\sin^m ax} dx = \frac{-\cos^{n+1} ax}{a(m-1) \sin^{m-1} ax} + \frac{m-n-2}{m-1} \int \frac{\cos^n ax}{\sin^{m-2} ax} dx, \quad m, n > 0, \quad m \neq 1$
II.199	$\int \frac{dx}{\sin^m ax \cos^n ax} = \frac{1}{a(n-1)} \frac{1}{\sin^{m-1} ax \cos^{n-1} ax} + \frac{m+n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sin^m ax \cos^{n-2} ax}$

**ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΜΕ  $\tan ax$ ,  $\cot ax$**

<b>II.200</b>	$\int \tan ax dx = -\frac{1}{a} \ln(\cos ax)$
<b>II.201</b>	$\int \tan^2 ax dx = \frac{1}{a} \tan ax - x$
<b>II.202</b>	$\int \tan^3 ax dx = \frac{1}{2a} \tan^2 ax + \frac{1}{a} \ln(\cos ax)$
<b>II.203</b>	$\int \tan^n ax dx = \frac{1}{a(n-1)} \tan^{n-1} ax - \int \tan^{n-2} ax dx, \quad n \in \mathbb{Z}^+, n > 1$
<b>II.204</b>	$\int \frac{dx}{\tan ax} = \frac{1}{a} \ln(\sin ax)$
<b>II.205</b>	$\int \frac{1}{\tan^2 ax} dx = -\frac{1}{a \tan ax} - x$
<b>II.206</b>	$\int \frac{1}{\tan^3 ax} dx = -\frac{1}{2a \tan^2 ax} - \frac{1}{a} = \ln(\sin ax)$
<b>II.207</b>	$\int \frac{dx}{\tan^n ax} = -\frac{1}{a(n-1) \tan^{n-1} ax} - \int \frac{dx}{\tan^{n-2} ax}, \quad n \in \mathbb{Z}^+, n > 1$
<b>II.208</b>	$\int \frac{dx}{b + c \tan ax} = \frac{1}{b^2 + c^2} \left[ bx + \frac{c}{a} \ln(b \cos ax + c \sin ax) \right]$
<b>II.209</b>	$\int \frac{\tan ax dx}{b \tan ax + c} = \frac{1}{b^2 + c^2} \left[ bx - \frac{c}{a} \ln(c \cos ax + b \sin ax) \right]$
<b>II.210</b>	$\int \frac{dx}{\sqrt{b + c \tan^2 ax}} = \frac{1}{a\sqrt{b-c}} \sin^{-1} \left( \sqrt{\frac{b-c}{b}} \sin ax \right), \quad b > 0, \quad b^2 > c^2, \quad -\frac{\pi}{2} < ax < \frac{\pi}{2}$

**ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΜΕ ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΚΑΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ**

<b>II.211</b>	$\int x \sin ax dx = \frac{\sin ax}{a^2} - \frac{x \cos ax}{a}$
<b>II.212</b>	$\int x^2 \sin ax dx = \frac{2x \sin ax}{a^2} + \left( \frac{2}{a^3} - \frac{x^2}{a} \right) \cos ax$
<b>II.213</b>	$\int x^3 \sin ax dx = \left( \frac{3x^2}{a^2} - \frac{6}{a^4} \right) \sin ax - \left( \frac{x^3}{a} - \frac{6x}{a^3} \right) \cos ax$
<b>II.214</b>	$\int x \sin^3 ax dx = \frac{x \cos 3ax}{12a} - \frac{\sin 3ax}{36a^2} - \frac{3x \cos ax}{4a} + \frac{3 \sin ax}{4a^2}$
<b>II.215</b>	$\int x^n \sin ax dx = -\frac{1}{a} x^n \cos ax + \frac{n}{a} \int x^{n-1} \cos ax dx$
<b>II.216</b>	$\int \frac{\sin ax}{x} dx = ax - \frac{(ax)^3}{3 \cdot 3!} + \frac{(ax)^5}{5 \cdot 5!} - \frac{(ax)^7}{7 \cdot 7!} + \dots$

II.217	$\int \frac{\sin ax}{x^m} dx = \frac{-\sin ax}{(m-1)x^{m-1}} + \frac{a}{m-1} \int \frac{\cos ax}{x^{m-1}} dx$
II.218	$\int x \cos ax dx = \frac{1}{a^2} \cos ax + \frac{1}{a} x \sin ax$
II.219	$\int x^2 \cos ax dx = \frac{2x}{a^2} \cos ax + \frac{1}{a} x \sin ax$
II.220	$\int x^3 \cos ax dx = \frac{(3a^2 x^2 - 6) \cos ax}{a^4} + \frac{(a^2 x^3 - 6x) \sin ax}{a^3}$
II.221	$\int x \cos^3 ax dx = \frac{x \sin 3ax}{12a} + \frac{\cos 3ax}{36a^2} + \frac{3x \sin ax}{4a} + \frac{3 \cos ax}{4a^2}$
II.222	$\int x^n \cos ax dx = \frac{1}{a} x^n \sin ax - \frac{n}{a} \int x^{n-1} \sin ax dx, \quad n > 0$
II.223	$\int \frac{\cos ax}{x} dx = \ln(ax) - \frac{(ax)^2}{2 \cdot 2!} + \frac{(ax)^4}{4 \cdot 4!} - \frac{(ax)^6}{6 \cdot 6!} + \dots$
II.224	$\int \frac{\cos ax}{x^m} dx = -\frac{\cos ax}{(m-1)x^{m-1}} - \frac{a}{m-1} \int \frac{\sin ax}{x^{m-1}} dx$

**ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΜΕ ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ ΚΑΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ**

II.225	$\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a}$
II.226	$\int b^{ax} dx = \frac{b^{ax}}{a \ln b}, \quad 0 < b \neq 1$
II.227	$\int x e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^2} (ax - 1)$
II.228	$\int x b^{ax} dx = \frac{x b^{ax}}{a \ln b} - \frac{b^{ax}}{a^2 (\ln b)^2}, \quad 0 < b \neq 1$
II.229	$\int x^n e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^{n+1}} [(ax)^n - n(ax)^{n-1} + n(n-1)(ax)^{n-2} - \dots + (-1)^n n!], \quad n \in \mathbb{Z}, n > 0$
II.230	$\int x^n e^{-ax} dx = -\frac{e^{-ax}}{a^{n+1}} [(ax)^n + n(ax)^{n-1} + n(n-1)(ax)^{n-2} + \dots + n!], \quad n \in \mathbb{Z}, n > 0$
II.231	$\int x^n b^{ax} dx = \frac{x^n b^{ax}}{a \ln b} - \frac{n}{a \ln b} \int x^{n-1} b^{ax} dx \quad n > 0$
II.232	$\int \frac{e^{ax}}{x} dx = \ln x + ax + \frac{(ax)^2}{2 \cdot 2!} + \frac{(ax)^3}{3 \cdot 3!} + \dots$
II.233	$\int \frac{e^{ax}}{x^n} dx = \frac{1}{n-1} \left[ -\frac{e^{ax}}{x^{n-1}} + a \int \frac{e^{ax}}{x^{n-1}} dx \right], \quad n \in \mathbb{Z}, n > 1$
II.234	$\int \frac{dx}{b + ce^{ax}} = \frac{1}{ab} [ax - \ln(b + ce^{ax})]$

II.235	$\int \frac{e^{ax}}{b + ce^{ax}} dx = \frac{1}{ac} \ln(b + ce^{ax})$
II.236	$\int \frac{dx}{be^{ax} + ce^{-ax}} = \frac{1}{a\sqrt{bc}} \tan^{-1} \left( e^{ax} \sqrt{\frac{b}{c}} \right), \quad b, c > 0$
II.237	$\int e^{ax} \sin bxdx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} [a \sin bx - b \cos bx]$
II.238	$\int e^{ax} \sin bx \sin cxdx = \frac{e^{ax}}{2} \left[ \frac{(b-c) \sin(b-c)x + a \cos(b-c)x}{a^2 + (b-c)^2} - \frac{(b+c) \sin(b+c)x + a \cos(b+c)x}{a^2 + (b+c)^2} \right]$
II.239	$\int e^{ax} \cos bxdx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} [a \cos bx + b \sin bx]$
II.240	$\int e^{ax} \cos bx \cos cxdx = \frac{e^{ax} [(b-c) \sin(b-c)x + a \cos(b-c)x]}{2[a^2 + (b-c)^2]} + \frac{e^{ax} [(b+c) \sin(b+c)x + a \cos(b+c)x]}{2[a^2 + (b+c)^2]}$
II.241	$\int \frac{dx}{x(\ln ax)^n} = -\frac{1}{(n-1)(\ln ax)^{n-1}}$
II.242	$\int \frac{x^n dx}{(\ln ax)^m} = \frac{-x^{n+1}}{(m-1)(\ln ax)^{m-1}} + \frac{n+1}{m-1} \int \frac{x^n dx}{(\ln ax)^{m-1}}, \quad m \neq 1$
II.243	$\int \frac{x^n dx}{\ln ax} = \frac{1}{a^{n+1}} \int \frac{e^y}{y} dy \quad \text{όπου } y = (n+1) \ln ax$ $= \frac{1}{a^{n+1}} \left\{ \ln  \ln ax  + (n+1) \ln ax + \frac{(n+1)^2 (\ln ax)^2}{2 \cdot 2!} + \frac{(n+1)^3 (\ln ax)^3}{3 \cdot 3!} + \dots \right\}$
II.244	$\int \frac{dx}{\ln ax} = \frac{1}{a} \left\{ \ln  \ln ax  + \ln ax + \frac{(\ln ax)^2}{2 \cdot 2!} + \frac{(\ln ax)^3}{3 \cdot 3!} + \dots \right\}$
II.245	$\int \sin(\ln ax) dx = \frac{x}{2} [\sin(\ln ax) - \cos(\ln ax)]$
II.246	$\int \cos(\ln ax) dx = \frac{x}{2} [\sin(\ln ax) + \cos(\ln ax)]$
II.247	$\int e^{ax} \ln bxdx = \frac{1}{a} e^{ax} \ln bx - \frac{1}{a} \int \frac{e^{ax}}{x} dx$

**ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΜΕ ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ**

II.248	$\int \sinh ax dx = \frac{1}{a} \cosh ax$
II.249	$\int \cosh ax dx = \frac{1}{a} \sinh ax$
II.250	$\int \tanh ax dx = \frac{1}{a} \ln(\cosh ax)$
II.251	$\int \frac{dx}{\tanh ax} = \frac{1}{a} \ln(\sinh ax)$

II.252	$\int \frac{dx}{\cosh(ax)} = \frac{2}{a} \tan^{-1}(e^{ax})$
II.253	$\int \frac{dx}{\sinh ax} = \frac{1}{a} \ln \left[ \tanh \left( \frac{ax}{2} \right) \right]$
II.254	$\int \sinh^n ax dx = \frac{1}{na} \sinh^{n-1} ax \cosh ax - \frac{n-1}{n} \int \sinh^{n-2} ax dx$
II.255	$\int \cosh^n ax dx = \frac{1}{na} \sinh ax \cosh^{n-1} ax + \frac{n-1}{n} \int \cosh^{n-2} ax dx$
II.256	$\int \sinh^{-1} ax dx = x \sinh^{-1} ax - \frac{1}{a} \sqrt{a^2 x^2 + 1}$
II.257	$\int \cosh^{-1} ax dx = x \cosh^{-1} ax - \frac{1}{a} \sqrt{a^2 x^2 - 1}$

**ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΜΕ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ**

II.258	$\int \sin^{-1} ax dx = x \sin^{-1} ax + \frac{1}{a} \sqrt{1 - a^2 x^2}$
II.259	$\int (\sin^{-1} ax)^2 dx = x (\sin^{-1} ax)^2 - 2x + \sqrt{1 - a^2 x^2} \sin^{-1} ax$
II.260	$\int x \sin^{-1} ax dx = \frac{x^2}{2} \sin^{-1} ax - \frac{1}{4a^2} \sin^{-1} ax + \frac{x}{4a} \sqrt{1 - a^2 x^2}$
II.261	$\int x^n \sin^{-1} ax dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \sin^{-1} ax - \frac{a}{n+1} \int \frac{x^{n+1} dx}{\sqrt{1 - a^2 x^2}}, \quad n \neq -1$
II.262	$\int \frac{\sin^{-1} ax dx}{x} = ax + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 3} (ax)^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5} (ax)^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 7} (ax)^7 + \dots \quad \text{για } a^2 x^2 < 1$
II.263	$\int \frac{\sin^{-1} ax dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \sin^{-1} ax - a \ln \left  \frac{1 + \sqrt{1 - a^2 x^2}}{ax} \right $
II.264	$\int \cos^{-1} ax dx = x \cos^{-1} ax - \frac{1}{a} \sqrt{1 - a^2 x^2}$
II.265	$\int (\cos^{-1} ax)^2 dx = x (\cos^{-1} ax)^2 - 2x - \frac{2}{a} \sqrt{1 - a^2 x^2} \cos^{-1} ax$
II.266	$\int x \cos^{-1} ax dx = \frac{x^2}{2} \cos^{-1} ax - \frac{1}{4a^2} \cos^{-1} ax - \frac{x}{4a} \sqrt{1 - a^2 x^2}$
II.267	$\int x^n \cos^{-1} ax dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \cos^{-1} ax + \frac{a}{n+1} \int \frac{x^{n+1} dx}{\sqrt{1 - a^2 x^2}}, \quad n \neq -1$
II.268	$\int \frac{\cos^{-1} ax dx}{x} = \frac{\pi}{2} \ln  ax  - ax - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 3} (ax)^3 - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5} (ax)^5 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 7} (ax)^7 - \dots, \quad \text{για } a^2 x^2 < 1$
II.269	$\int \frac{\cos^{-1} ax dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \cos^{-1} ax + a \ln \left  \frac{1 + \sqrt{1 - a^2 x^2}}{ax} \right $

II.270	$\int \tan^{-1} ax dx = x \tan^{-1} ax - \frac{1}{2a} \ln(1 + a^2 x^2)$
II.271	$\int x^n \tan^{-1} ax dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \tan^{-1} ax - \frac{a}{n+1} \int \frac{x^{n+1} dx}{1 + a^2 x^2}, \quad n \neq -1$
II.272	$\int \frac{\tan^{-1} ax dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \tan^{-1} ax - \frac{a}{2} \ln\left(\frac{1 + a^2 x^2}{a^2 x^2}\right)$
II.273	$\int \cot^{-1} ax dx = x \cot^{-1} ax + \frac{1}{2a} \ln(1 + a^2 x^2)$
II.274	$\int x^n \cot^{-1} ax dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \cot^{-1} ax + \frac{a}{n+1} \int \frac{x^{n+1} dx}{1 + a^2 x^2}, \quad n \neq -1$
II.275	$\int \frac{\cot^{-1} ax dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \cot^{-1} ax + \frac{a}{2} \ln\left(\frac{1 + a^2 x^2}{a^2 x^2}\right)$
II.276	$\int \sec^{-1} ax dx = x \sec^{-1} ax - \frac{1}{a} \ln(ax + \sqrt{a^2 x^2 - 1})$
II.277	$\int x^n \sec^{-1} ax dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \sec^{-1} ax \pm \frac{1}{n+1} \int \frac{x^n dx}{\sqrt{a^2 x^2 - 1}},$ <p style="text-align: right;">το <math>+\alpha\upsilon \frac{\pi}{2} &lt; \sec^{-1} ax &lt; \pi</math>, το <math>\alpha\upsilon - 0 &lt; \sec^{-1} ax &lt; \frac{\pi}{2}</math></p>
II.278	$\int \csc^{-1} ax dx = x \csc^{-1} ax + \frac{1}{a} \ln(ax + \sqrt{a^2 x^2 - 1})$
II.279	$\int x^n \csc^{-1} ax dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \csc^{-1} ax \pm \frac{1}{n+1} \int \frac{x^n dx}{\sqrt{a^2 x^2 - 1}}, \quad n \neq -1,$ <p style="text-align: right;">το <math>+\alpha\upsilon \ 0 &lt; \csc^{-1} ax &lt; \frac{\pi}{2}</math>, το <math>-\alpha\upsilon \ -\frac{\pi}{2} &lt; \csc^{-1} ax &lt; 0</math></p>



<b>III</b>	<b>ΟΡΙΣΜΕΝΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ</b>
------------	------------------------------

<b>III.1</b>	$\int_0^{\infty} \frac{a dx}{a^2 + x^2} = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & a > 0 \\ 0, & a = 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & a < 0 \end{cases}$
<b>III.2</b>	$\int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = \int_0^1 \left[ \ln \left( \frac{1}{x} \right) \right]^{n-1} dx = \Gamma(n), \quad \Gamma(n+1) = n\Gamma(n), \quad n > 0$
<b>III.3</b>	$\int_0^{\infty} \frac{x^{n-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin n\pi}, \quad 0 < n < 1$
<b>III.4</b>	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} \frac{1 \cdot 3 \cdots (n-1) \pi}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots n} \frac{\pi}{2}, & n \text{ άρτιος ακέραιος} \\ \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (n-1)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots n}, & n \text{ περιττός ακέραιος} \end{cases}$
<b>III.5</b>	$\int_0^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \int_0^{\pi} \cos mx \sin nx dx = 0, \quad m \neq n, \text{ ακέραιος}$
<b>III.6</b>	$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$
<b>III.7</b>	$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} dx = \begin{cases} \pi/2, & a > 0 \\ 0, & a = 0 \\ -\pi/2, & a < 0 \end{cases}$
<b>III.8</b>	$\int_0^{\infty} \frac{\sin x \cos ax}{x} dx = \begin{cases} 0, & a < -1 \quad \text{ή} \quad a > 1 \\ \frac{\pi}{4}, & a = -1 \quad \text{ή} \quad a = 1 \\ \frac{\pi}{2}, & -1 < a < 1 \end{cases}$
<b>III.9</b>	$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax \sin bx}{x^2} dx = \frac{\pi a}{2}, \quad a < b$
<b>III.10</b>	$\int_0^{\infty} \cos x^2 dx = \int_0^{\infty} \sin x^2 dx = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$
<b>III.11</b>	$\int_0^{\infty} e^{-a^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}, \quad a > 0$
<b>III.12</b>	$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}}, \quad n : \text{ακέραιος θετικός}, \quad a > 0$
<b>III.13</b>	$\int_0^{\infty} x^{2n} e^{-ax^2} dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^{n+1} a^n} \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad n : \text{ακέραιος} > 0, \quad a > 0$

III.14	$\int_0^{\infty} \sqrt{x} e^{-ax} dx = \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad a > 0$
III.15	$\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax}}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad a > 0$
III.16	$\int_0^{\infty} e^{-x^2 - a^2/x^2} dx = \frac{1}{2} e^{-2a} \sqrt{\pi}, \quad a > 0$
III.17	$\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bxdx = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad a > 0$
III.18	$\int_0^{\infty} e^{-ax} \sin bxdx = \frac{b}{a^2 + b^2}, \quad a > 0$
III.19	$\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} \sin x}{x} dx = \cot^{-1} a, \quad a > 0$
III.20	$\int_0^{\infty} e^{-a^2 x^2} \cos bxdx = \frac{\sqrt{\pi} e^{-b^2/4a^2}}{2a}, \quad a > 0$
III.21	$\int_0^1 (\ln x)^n dx = (-1)^n n! \quad n : \text{ακέραιος θετικός}$
III.22	$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x} dx = -\frac{\pi^2}{6}$
III.23	$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2$
III.24	$\int_0^1 \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right) \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{4}$
III.25	$\int_0^{\infty} \ln \left( \frac{e^x + 1}{e^x - 1} \right) dx = \frac{\pi^2}{4}$
III.26	$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\ln(1/x)}} = \sqrt{\pi}$
III.27	$\int_0^1 \ln  \ln x  dx = \int_0^{\infty} e^{-x} \ln x dx = -\gamma = -0.5772157\dots$
III.28	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x) dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2$
III.29	$\int_0^{\pi} x \ln \sin x dx = -\frac{\pi^2}{2} \ln 2$
III.30	$\int_0^1 \left( \ln \frac{1}{x} \right)^{1/2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$
III.31	$\int_0^1 \left( \ln \frac{1}{x} \right)^{-1/2} dx = \sqrt{\pi}$
III.32	$\int_0^{\pi} \ln(a \pm b \cos x) dx = \pi \ln \left( \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{2} \right), \quad a \geq b$
III.33	$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = \ln \left( \frac{1+b}{1+a} \right), \quad b+1 > 0, \quad a+1 > 0$

III.34	$\int_0^\pi \frac{dx}{a + b \cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \quad a > b > 0$
III.35	$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{1 + x^2} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} e^{-a}, & a > 0 \\ \frac{\pi}{2} e^a, & a < 0 \end{cases}$
III.36	$\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx = \int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$
III.37	$\int_0^\infty \frac{\tan^{-1} ax - \tan^{-1} bx}{x} dx = \frac{\pi}{2} \ln \frac{a}{b}$
III.38	$\int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x} dx = \ln \frac{b}{a}$
III.39	$\int_0^\pi \frac{(a - b \cos x) dx}{a^2 + b^2 - 2ab \cos x} = \begin{cases} 0, & a^2 < b^2 \\ \frac{\pi}{a}, & a^2 > b^2 \\ \frac{\pi}{2a}, & a = b \end{cases}$
III.40	$\int_0^1 \frac{1 + x^2}{1 + x^4} dx = \frac{\pi}{4} \sqrt{2}$
III.41	$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \frac{\pi^2}{12}$
III.42	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}} = \frac{\pi}{2} \left[ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 k^6 + \dots \right], \quad k^2 < 1$
III.43	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x} dx = \frac{\pi}{2} \left[ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \frac{k^4}{3} - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \frac{k^6}{5} - \dots \right], \quad k^2 < 1$
III.44	<u>Σειρά Fourier:</u> $f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \frac{\pi x}{c} + a_2 \cos \frac{2\pi x}{c} + \dots + b_1 \sin \frac{\pi x}{c} + b_2 \sin \frac{2\pi x}{c} + \dots, \quad -c < x < c$ όπου $a_m = \frac{1}{c} \int_{-c}^c f(x) \cos \frac{m\pi x}{c} dx, \quad b_m = \frac{1}{c} \int_{-c}^c f(x) \sin \frac{m\pi x}{c} dx$
III.45	$\int_0^\infty x^n e^{-ax} \sin bxdx = \frac{jn! [(a - jb)^{n+1} - (a + jb)^{n+1}]}{2(a^2 + b^2)^{n+1}}, \quad a > 0, \quad j = \sqrt{-1}$
III.46	$\int_0^\infty x^n e^{-ax} \cos bxdx = \frac{n! [(a - jb)^{n+1} + (a + jb)^{n+1}]}{2(a^2 + b^2)^{n+1}}, \quad a > 0$
III.47	$\int_0^\infty e^{-x} \ln x dx = -\gamma = -0.5772157\dots$