ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ
ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΤΕ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

Κλεΐδης ΚωνσταντίνοςΚαθηγητής

ΣΕΡΡΕΣ, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2015

Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.

Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Κεντρικής Μακεδονίας**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Θέμα 1ο

i) $\int x \cdot \sigma\upsilon\nu 2x\,dx = \int x \cdot \left(\frac{\eta\mu 2x}{2}\right)' dx = \frac{1}{2}\int x \cdot (\eta\mu 2x)' dx =$

$= \frac{1}{2}\left[x \cdot \eta\mu 2x - \int \eta\mu 2x \cdot x'\,dx\right] = \frac{1}{2} x \cdot \eta\mu 2x - \frac{1}{2}\int \eta\mu 2x\,dx =$

$\frac{1}{2} x\,\eta\mu 2x + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu 2x + c = \frac{1}{2} x\,\eta\mu 2x + \frac{1}{4}\sigma\upsilon\nu 2x$

ii) $\int_1^2 (x+1)\sqrt{x^2+2x+3}\,dx$

Λύνω πρώτα το αντίστοιχο αόριστο

1ος τρόπος

$\int (x+1)\sqrt{x^2+2x+3}\,dx = \frac{1}{2}\int (2x+2)\sqrt{x^2+2x+3}\,dx =$

$= \frac{1}{2}\int (x^2+2x+3)'\sqrt{x^2+2x+3}\,dx = \frac{1}{2}\int (x^2+2x+3)^{\frac{1}{2}}(x^2+2x+3)'\,dx$

$= \frac{1}{2}\frac{(x^2+2x+3)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{3}(x^2+2x+3)^{\frac{3}{2}} + c$

2ος τρόπος

Θέτω $u = x^2+2x+3 \Rightarrow du = (2x+2)\,dx$

Άρα $\int (x+1)\sqrt{x^2+2x+3}\,dx = \int (x+1)\sqrt{u}\cdot\frac{du}{2x+2} = \int \cancel{(x+1)}\sqrt{u}\,\frac{du}{2\cancel{(x+1)}} =$

$= \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{1}{2}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}} + c = (x^2+2x+3)^{\frac{3}{2}} + c$

Αντικαθιστώ στο ορισμένο και παίρνω

$\int_1^2 (x+1)\sqrt{x^2+2x+3}\,dx = \left[(x^2+2x+3)^{\frac{3}{2}}\right]_1^2 = (2^2+2\cdot 2+3)^{\frac{3}{2}} - (1^2+2\cdot 1+3)^{\frac{3}{2}}$

$11^{\frac{3}{2}} - 6^{\frac{3}{2}}$

iii) $\int \frac{1}{x^2-3x+2}\,dx$

Βρίσκουμε τις ρίζες του παρονομαστή

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{3^2-4\cdot 2}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$

Χωρίζω το κλάσμα σε δύο κομμάτια:

$$\frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+B(x-2)}{(x-2)(x-1)} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{(x-2)(x-1)} = \frac{Ax+Bx-A-2B}{(x-2)(x-1)} \Rightarrow (A+B)x - A - 2B - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} A+B=0 \\ A+2B+1=0 \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A=-B \\ A+2(-A)+1=0 \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A=-B \\ -A+1=0 \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} B=-1 \\ A=1 \end{array}$$

Άρα $\frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} \Rightarrow \int \frac{1}{x^2-3x+2}dx = \int \frac{1}{x-2}dx - \int \frac{1}{x-1}dx =$

$$= \int \frac{d(x-2)}{x-2} - \int \frac{d(x-1)}{d(x-1)} = \ln|x-2| - \ln|x-1| + c = \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| + c$$

IV) $\int_1^2 \left(3\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = 3\int_1^2 \sqrt{x}\,dx + \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 3\int_1^2 x^{\frac{1}{2}} + \int_1^2 x^{-\frac{1}{2}}dx$

$$= 3\cdot\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^2 + \left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_1^2 = 2\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_1^2 + 2\left[x^{\frac{1}{2}}\right]_1^2 =$$

$$= 2\left(2^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\right) + 2\left(2^{\frac{1}{2}} - 1^{\frac{1}{2}}\right) = 2(\sqrt{8}-1) + 2(\sqrt{2}-1) =$$

$$= 4\sqrt{2} - 2 + 2\sqrt{2} - 2 = 6\sqrt{2} - 4$$

iv) $\int (1+ημ^2x)\,dx$

Υπολογίζουμε τον τύπο αποτετραγωνισμού για το $ημ^2x$

$$συν2x = συν^2x - ημ^2x \Rightarrow συν2x = (1-ημ^2x) - ημ^2x = 1 - 2ημ^2x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ημ^2x = \frac{1-συν2x}{2}$$

$$\int (1+ημ^2x)\,dx = \int \left(1 + \frac{1-συν2x}{2}\right)dx = \int \frac{3}{2}\,dx - \frac{1}{2}\int συν2x\,dx$$

$$= \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}\,\frac{ημ2x}{2} + c = \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}ημ2x + c$$

Θέμα 2ο:

i) $y(x) = 2e^{ημ3x} \Rightarrow y'(x) = \left[2e^{ημ3x}\right]' = 2\left(e^{ημ3x}\right)' = 2e^{ημ3x}(ημ3x)'$

$$\Rightarrow y'(x) = 2\cdot e^{ημ3x}\cdot συν3x(3x)' = 6\cdot e^{ημ3x}\cdot συν(3x)$$

ii) $y(x) = \sqrt{x^2-1} \Rightarrow y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}(x^2-1)' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

iii) $y(x) = \ln(ημx\cdot συνx) \Rightarrow y'(x) = \left[\ln(ημx\cdot συνx)\right]' = \frac{1}{ημx\cdot συνx}\cdot(ημx\cdot συνx)' =$

$$= \frac{1}{ημx\,συνx}\cdot\left[(ημx)'\cdot συνx + ημx\cdot(συνx)'\right] =$$

$$= \frac{1}{ημx\,συνx}\left(συνx\cdot συνx + ημx\cdot(-ημx)\right) = \frac{συν^2x - ημ^2x}{ημx\cdot συνx} = \frac{συν2x}{\frac{ημ2x}{2}} =$$

$$= 2\,εφ(2x)$$

iv) $y(x) = \frac{e^x-1}{e^{3x}} \Rightarrow y'(x) = \left[\frac{e^x-1}{e^{3x}}\right]' = \frac{(e^x-1)'\,e^{3x} - (e^x-1)\,(e^{3x})'}{(e^{3x})^2} =$

$$= \frac{e^x\cdot e^{3x} - (e^x-1)\,e^{3x}\cdot(3x)'}{e^{6x}} = \frac{e^{4x} - 3e^{3x}(e^x-1)}{e^{6x}} = \frac{e^{3x}(e^x - 3e^x + 3)}{e^{6x}} =$$

$$= \frac{-2e^x+3}{e^{3x}}$$

v) $y(x)=\sqrt{\frac{1}{x-1}} \Rightarrow y'(x)=\left[\left(\frac{1}{x-1}\right)^{\frac{1}{2}}\right]' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x-1}\right)' =$

$= \frac{1}{2}\sqrt{x-1}\left(-\frac{1}{(x-1)^2}\right) = -\frac{1}{2}(x-1)^{\frac{1}{2}}(x-1)^{-2} = -\frac{1}{2}(x-1)^{-\frac{3}{2}}$

Θέμα 3ο

α) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & x & 3 \end{vmatrix} = \left|\begin{matrix} 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & x & 3 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 3 & x \end{matrix} = 1\cdot1\cdot3 + 1\cdot1\cdot3 + x\cdot1\cdot x - 3\cdot1\cdot x - x\cdot1\cdot1 - 3\cdot1\cdot1 =$

$= 3+3+x^2-3x-x-3 = x^2-4x+3=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{4\pm\sqrt{4^2-4\cdot3}}{2} = \frac{4\pm\sqrt{4}}{2} = \frac{4\pm2}{2} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$

β) Από το σύστημα προκύπτουν οι πίνακες

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix}$

Λύση με ορίζουσες

$D = |A| = \left|\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 4 & 5 & 6 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{matrix} = 1\cdot(-1)\cdot6 + 2(-1)\cdot4 + 3\cdot1\cdot5 - 4\cdot(-1)\cdot3 - 5(-1)\cdot1 - 6\cdot1\cdot2 =$
$= -6-8+15+\cancel{12}+5-\cancel{12} = 6$

$D_x = \left|\begin{matrix} 5 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 11 & 5 & 6 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 5 & 2 \\ 0 & -1 \\ 11 & 5 \end{matrix} = 5\cdot(-1)\cdot6 + 2\cdot(-1)\cdot11 + 3\cdot0\cdot5 - 11(-1)\cdot3 - 5(-1)\cdot5 - 6\cdot0\cdot2 =$
$= -30-22+33+25 = 6$

$D_y = \left|\begin{matrix} 1 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 11 & 6 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 5 \\ 1 & 0 \\ 4 & 11 \end{matrix} = 1\cdot0\cdot6 + 5(-1)\cdot4 + 3\cdot1\cdot11 - 4\cdot0\cdot3 - 11(-1)\cdot1 - 6\cdot1\cdot5 = -20+33+11-30 = -6$

$D_z = \left|\begin{matrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 11 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{matrix} = 1\cdot(-1)\cdot11 + 2\cdot0\cdot4 + 5\cdot1\cdot5 - 4\cdot(-1)\cdot5 - 5\cdot0\cdot1 - 11\cdot1\cdot2 = -11+25+20-22$
$= 12$

$x = \frac{D_x}{D} = \frac{6}{6} = 1 \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-6}{6} = -1 \quad z = \frac{D_z}{D} = \frac{12}{6} = 2$

Θέμα 4ο

α) Η συνθήκη για να έχουμε πιθανό ακρότατο είναι

$f'(x)=0$

$$f'(x)=\left(\frac{1-\ln x}{x}\right)'=\frac{(1-\ln x)'\cdot x-(1-\ln x)\cdot x'}{x^2}=\frac{-\frac{1}{x}\cdot x-1+\ln x}{x^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{-1-1+\ln x}{x^2}=\frac{-2+\ln x}{x^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{-2+\ln x}{x^2}=0\Rightarrow -2+\ln x=0\Rightarrow \ln x=2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{\ln x}=e^2\Rightarrow x=e^2$$

Για να καθορίσουμε αν το σημείο αυτό είναι ελάχιστο ή μέγιστο καθώς και για να υπολογίσουμε τα σημεία καμπής χρειαζόμαστε τη δεύτερη παράγωγο.

$$f''(x)=\left(\frac{-2+\ln x}{x^2}\right)'=\frac{(-2+\ln x)'\cdot x^2-(\ln x-2)\cdot(x^2)'}{x^4}=$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{x}\right)x^2-(\ln x-2)2x}{x^4}=\frac{x-2x\ln x+4x}{x^4}=$$

$$=\frac{5-2\ln x}{x^3}$$

Η τιμή της παραγώγου για $x=e^2$ είναι

$$f''(e^2)=\frac{5-2\ln e^2}{(e^2)^3}=\frac{5-2\cdot 2}{e^6}=\frac{1}{e^6}>0$$ άρα στο $x=e^2$

η συνάρτηση παρουσιάζει $\boxed{\text{ελάχιστο.}}$

β) Για να έχει η συνάρτηση σημείο καμπής, πρέπει

$$f''(x)=0\Rightarrow\frac{5-2\ln x}{x^3}=0\Rightarrow 5-2\ln x=0\Rightarrow \ln x=\frac{5}{2}\Rightarrow x=e^{\frac{5}{2}}$$

Άρα η συνάρτηση παρουσιάζει σημείο καμπής στο $\boxed{x=e^{\frac{5}{2}}}$