Τίτλος Μαθήματος

ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ
ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΤΕ

ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ

Καθηγητής

Δρ. Μοσχίδης Νικόλαος

ΣΕΡΡΕΣ, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2015

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.

Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Κεντρικής Μακεδονίας**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

2. Επίδραση των δυνάμεων στην περιστροφική κίνηση – Ισοδύναμα συστήματα δυνάμεων

2.1 Όπως είναι γνωστό, όταν σε κάποιο σώμα ενεργούν δυνάμεις, ένα από τα αποτελέσματά τους μπορεί να είναι να αλλάξει η κατάσταση κίνησης του σώματος. Θα φανεί σε παραδείγματα παρακάτω ότι οι δυνάμεις μπορούν να προκαλέσουν όχι μόνο μεταφορική κίνηση του σώματος (δηλ. μετακίνηση παράλληλα προς τον εαυτό του) αλλά και περιστροφική, ή συνδυασμό μεταφορικής και περιστροφικής. Για να παρακολουθήσουμε την επίδραση των δυνάμεων στην περιστροφή του σώματος πρέπει πρώτα να διευκρινίσουμε την έννοια της ροπής.

2.2. Η έννοια της ροπής

Ροπή θα λέγεται μία επίδραση που τείνει να προκαλέσει περιστροφή ενός σώματος

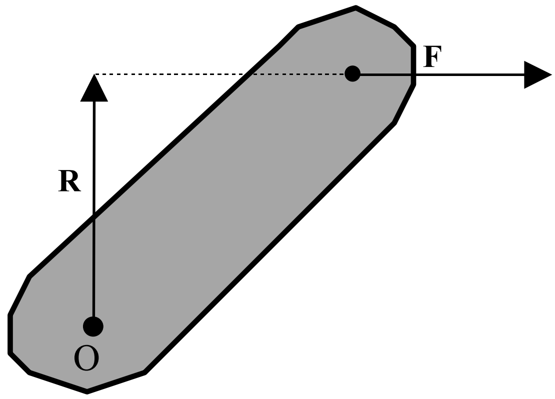
Αν ένα σώμα έχει τη δυνατότητα να περιστραφεί γύρω από ένα κέντρο O και ενεργεί επάνω του μία δύναμη F, τότε η **ροπή της δύναμης F ως προς το κέντρο O** θα είναι ίση με το γινόμενο

$$M = F\,R$$

δηλαδή

Ροπή = Δύναμη * Ακτίνα

όπου η ακτίνα:
- Αρχίζει από το κέντρο περιστροφής
- Καταλήγει **στην ευθεία της δύναμης**
- Είναι κάθετη στη δύναμη



Σχήμα 2.1 Ορισμός της ροπής

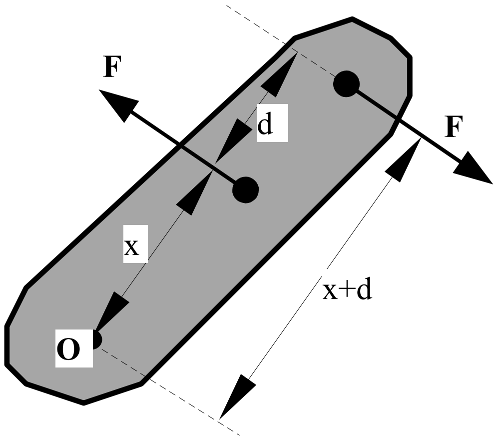
2.3 Εφαρμογή: Ροπή ζεύγους δυνάμεων

Όταν σε ένα σώμα ενεργούν δύο ίσες και αντίθετες δυνάμεις, τότε η συνολική ροπή τους θα είναι πάντοτε ίση με

$$M = F\,d$$

όπου F είναι το μέγεθος της κάθε δύναμης και d είναι η μεταξύ τους απόσταση. Αυτή η ροπή δεν εξαρτάται από την εκλογή του κέντρου περιστροφής O του σώματος.

(Για τις σημασίες των συμβόλων βλ. σχήμα της επόμενης σελίδας. Η απόδειξη είναι: Ολική ροπή = $F\,(x+d) – F\,x = F\,x + F\,d – F\,x = F\,d$, ανεξάρτητα από την απόσταση x)



Σχήμα 2.2 Ροπή ζεύγους δυνάμεων

2.4 Από την εμπειρία προκύπτει ο κανόνας:
Αν έχουμε τις δυνάμεις F_1, F_2, F_3 ... που ενεργούν στο σώμα, και θέλουμε να τις αντικαταστήσουμε με άλλες δυνάμεις F_1', F_2', F_3' ... που να έχουν ακριβώς τα ίδια αποτελέσματα, πρέπει

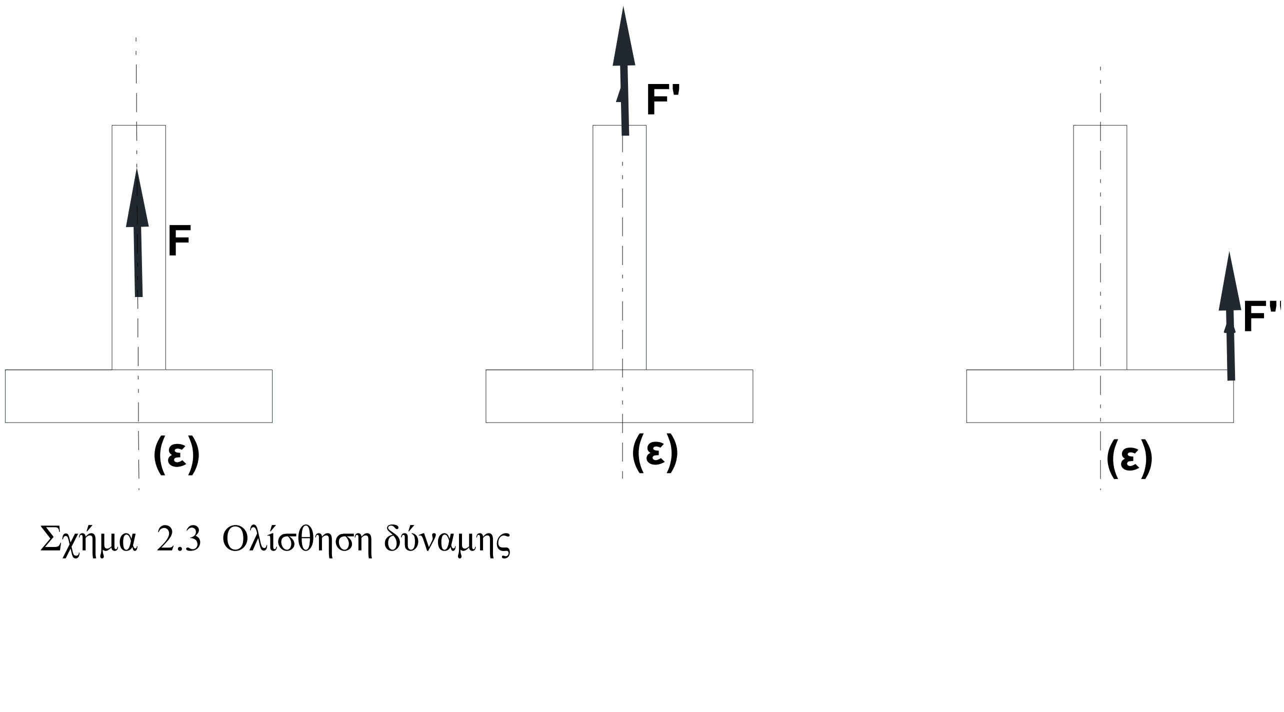
$$F_1+F_2+F_3+\ldots = F_1'+F_2'+F_3'+\ldots \qquad (1)$$

(όπου τα αθροίσματα υπολογίζονται π.χ. με τη μέθοδο του παραλληλογράμμου, και δείχνουν την **επίδραση των δυνάμεων στη μεταφορική κίνηση**)
και ταυτόχρονα.

$$\mathbf{\Sigma}(\text{ροπές των } F_1, F_2, F_3 \ldots) = \mathbf{\Sigma}(\text{ροπές των } F_1', F_2', F_3', \ldots) \qquad (2)$$

(όπου το **Σ** σημαίνει διανυσματικό άθροισμα των ροπών (δηλ. άθροισμα με τη μέθοδο του παραλληλογράμμου), και όλες οι ροπές (δεξιού και αριστερού μέλους) πρέπει να έχουν υπολογισθεί ως προς το ίδιο σημείο O, όποιο και αν είναι αυτό. Τα διανυσματικά αθροίσματα των ροπών δείχνουν την **επίδραση των δυνάμεων στην περιστροφική κίνηση**).
Όταν ισχύουν οι δύο παραπάνω σχέσεις, τα συστήματα δυνάμεων F_1, F_2, F_3 ... και F_1', F_2', F_3', ... θα λέγονται **ισοδύναμα μεταξύ τους**.

2.5 Παράδειγμα: Στο παρακάτω σχήμα, η F' είναι ισοδύναμη με την F, ενώ αντίθετα η F'' δεν είναι ισοδύναμη με την F

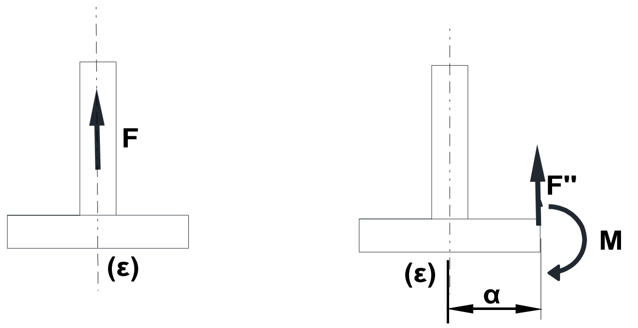


Σχήμα 2.3 Ολίσθηση δύναμης

Από αυτό το παράδειγμα καταλαβαίνουμε ότι έχουμε το δικαίωμα να "ολισθήσουμε" μία δύναμη κατά μήκος της ευθείας στην οποία ενεργεί (στο παράδειγμά μας να μετακινήσουμε τη δύναμη από τη θέση F στη θέση F') αλλά όχι να την μεταθέσουμε σε άλλη παράλληλη ευθεία (στο παράδειγμά μας, δεν έχουμε δικαίωμα να μεταθέσουμε τη δύναμη από τη θέση F στην F'').
Λέμε λοιπόν ότι η δύναμη είναι **ολισθαίνον διάνυσμα**.

2.6 Ορισμός: **Φορέας της δύναμης** θα λέγεται η ευθεία κατά μήκος της οποίας ενεργεί η δύναμη. (Στο παράδειγμά μας, φορέας της F είναι η ευθεία (ε)).

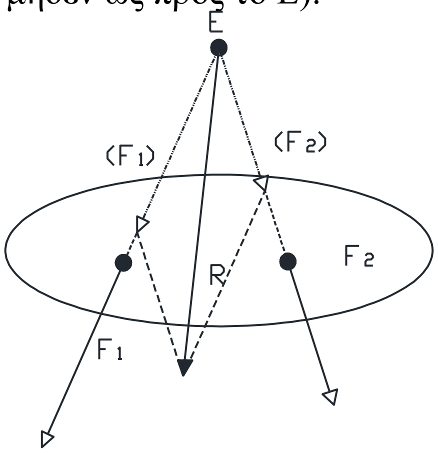
2.7 **Παράλληλη μεταφορά δύναμης:** Αν θέλουμε να μεταθέσουμε τη δύναμη F στη θέση F'', πρέπει ταυτόχρονα να βάλουμε στο σώμα και μία ροπή M=Fα έτσι ώστε το "περιστροφικό αποτέλεσμα" της νέας δύναμης και της ροπής να είναι το ίδιο με το "περιστροφικό αποτέλεσμα" της παλιάς δύναμης.

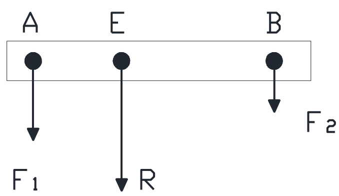


Πρέπει M=F α
και F''=F

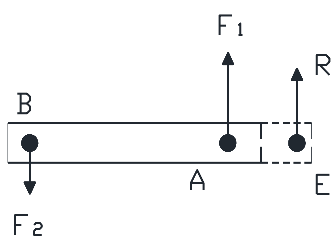
Σχήμα 2.4 Παράλληλη μεταφορά δύναμης

2.8 **Συνισταμένη** δύο δυνάμεων F_1, F_2 θα λέγεται μία δύναμη R που "έχει το ίδιο μεταφορικό και περιστροφικό αποτέλεσμα με τις αρχικές δυνάμεις". Το βελάκι της R υπολογίζεται από τις F_1, F_2 με τη μέθοδο του παραλληλογράμμου. Το σημείο εφαρμογής της (στα παρακάτω σχήματα το E) πρέπει να το διαλέξουμε προσέχοντας οι F_1, F_2, να έχουν άθροισμα ροπών μηδέν ως προς το E (αφού και η R έχει ροπή μηδέν ως προς το E).





Πρέπει $R=F_1+F_2$
και $F_1*(AE)-F_2*(EB)=0$



Πρέπει $R=F_1-F_2$
και $F_1*(AE)-F_2*(BE)=0$

Σχήμα 2.5 Θέση της συνισταμένης σε διάφορες περιπτωσεις

2.9 Για να ισορροπεί ένα σώμα, πρέπει το άθροισμα των δυνάμεων πάνω στο σώμα να είναι μηδέν και το άθροισμα των ροπών να είναι επίσης μηδέν. Ένας βολικός τρόπος για να ελέγξουμε αν ισορροπεί το σώμα είναι:

- Αναλύουμε τις δυνάμεις στις κατευθύνσεις των αξόνων x, y, z του συστήματος συντεταγμένων.
- Ελέγχουμε αν ισχύουν οι σχέσεις

$$\Sigma F_x = 0,\ \ \Sigma F_y = 0,\ \ \Sigma F_z = 0 \qquad (3)$$

- Εξετάζουμε την περιστροφή στο επίπεδο x-y (περιστροφή γύρω από τον άξονα z). **Διαλέγουμε ένα κέντρο Ο** ως προς το οποίο θα υπολογισθούν οι ροπές. Υπολογίζουμε όλες τις ροπές ως προς αυτό το κέντρο. Ελέγχουμε αν ισχύει η σχέση

$$\Sigma M_{z,O} = 0 \qquad (4\alpha)$$

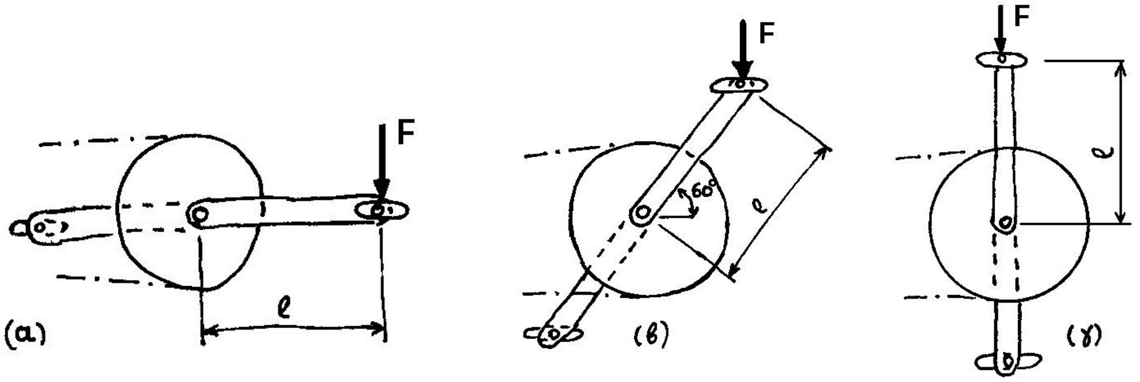
- Κάνουμε την αντίστοιχη εργασία στα επίπεδα y-z, z-x (με διαφορετικά ενδεχομένως κέντρα Κ, Λ) και ελέγχουμε αν ισχύουν οι σχέσεις

$$\Sigma M_{x,K} = 0 \quad \Sigma M_{y,\Lambda} = 0 \qquad (4\beta)$$

Πολλές φορές είναι γνωστό ότι το σώμα ισορροπεί, αλλά δεν είναι γνωστές οι δυνάμεις που ασκούν οι στηρίξεις του. Όταν έχουμε ένα τέτοιο πρόβλημα, χρησιμοποιούμε τις σχέσεις (3), (4α), (4β) ως σύστημα εξισώσεων για να βρούμε τις άγνωστες δυνάμεις στήριξης.

Ασκήσεις κεφαλαίου 2 – Ροπές και οι εφαρμογές τους

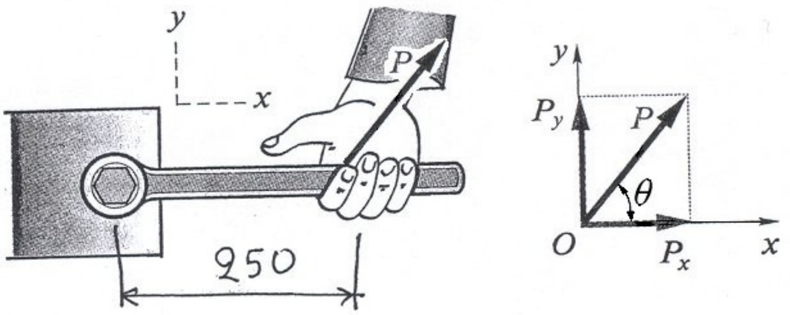
2.1. Να βρεθεί η ροπή στον άξονα του ποδηλάτου στις παρακάτω περιπτώσεις. (Δίδεται F=200 N και ℓ=250 mm).



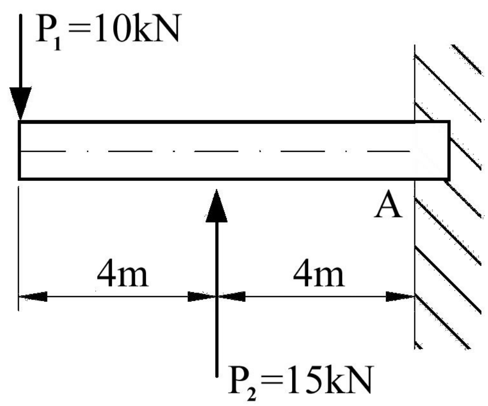
Σχήμα 2.6

2.2. Ένας άνθρωπος τραβά το κλειδί με μία λοξή δύναμη P=200N (σχ. 2.7). Η κατεύθυνση της δύναμης P είναι τέτοια ώστε $P_y/P_x=3$. Να υπολογισθούν οι συνιστώσες P_x, P_y της δύναμης, και η ροπή που ασκείται στη βίδα.

2.3 Να βρεθεί η ροπή των δυνάμεων P_1, P_2 ως προς το σημείο Α της πάκτωσης (συνολική ροπή των P_1, P_2, σχήμα 2.8).

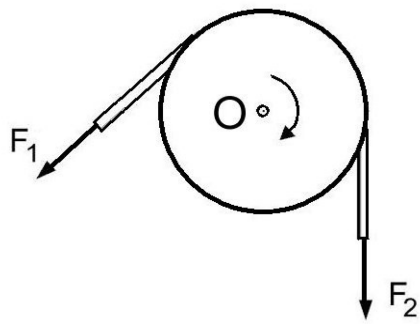


Σχήμα 2.7



Σχήμα 2.8

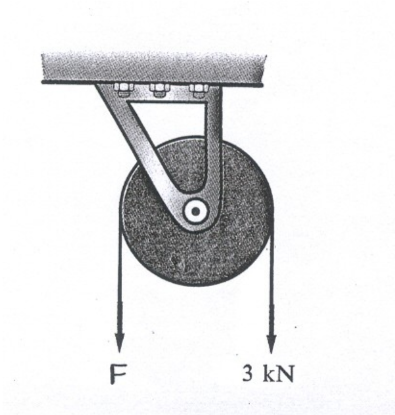
2.4 Όταν μία τροχαλία είναι ελεύθερη να περιστραφεί γύρω από τον άξονά της, ποια από τις δυνάμεις F_1, F_2 θα είναι μεγαλύτερη, και γιατί;
(Υπόδειξη: Η ροπή της F_1 ως προς το κέντρο περιστροφής Ο πρέπει να είναι ίση και αντίθετη με τη ροπή της F_2).



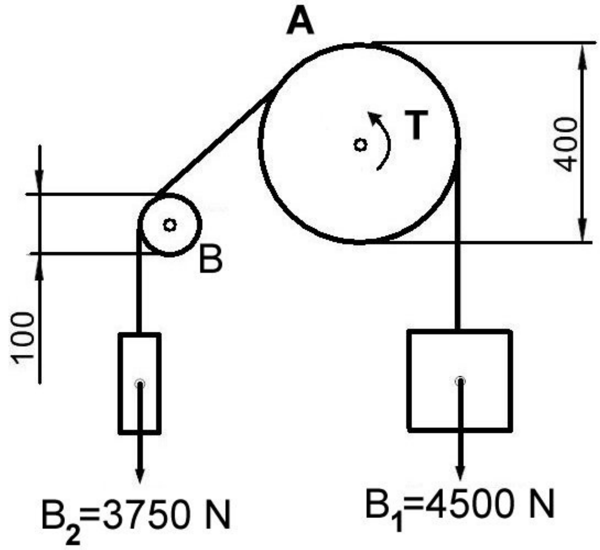
Σχήμα 2.9

2.5 Να υπολογισθεί πόση είναι η δύναμη F στον αριστερό κλάδο του σχοινιού της παρακάτω τροχαλίας (σχ. 2.10), και πόση δύναμη ασκείται στον άξονά της.

2.6 Σ' έναν μηχανικό ανελκυστήρα, δεξιά της κύριας τροχαλίας Α (βλ. σχ. 2.11) κρέμεται ο θάλαμος με το φορτίο, βάρους B_1, και αριστερά το αντίβαρο βάρους B_2. Η τροχαλία Β περιστρέφεται ελεύθερα, ενώ η Α είναι συνδεδεμένη με τον κινητήριο μηχανισμό. Πόση ροπή Τ πρέπει να ασκεί ο κινητήριος μηχανισμός στην τροχαλία Α ώστε να ανυψώνεται το βάρος B_1;



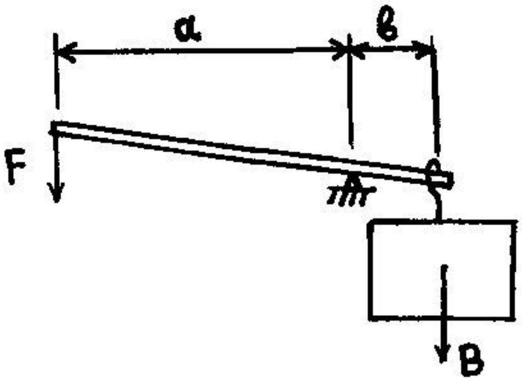
Σχήμα 2.10



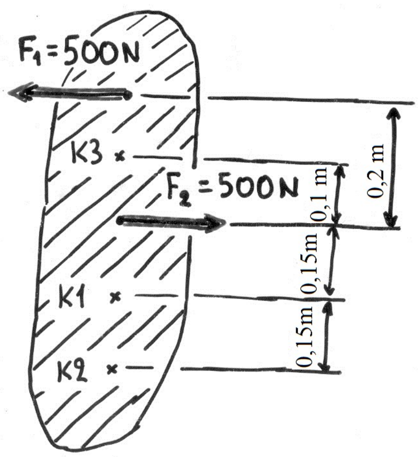
Σχήμα 2.11

2.7. Στο δεξιό άκρο του μοχλού (σχ. 2.12) στηρίζεται ένα βάρος ενός τόνου. Μπορεί ένας άνθρωπος με τη βοήθεια του μοχλού να ανασηκώσει το βάρος; (Δίδονται B=10.000 N, α=1000mm, β=50mm)

2.8 Στο σώμα που παριστάνεται στο σχ. 2.8, ενεργεί το ζεύγος δυνάμεων F_1 και F_2. Να υπολογισθεί η συνολική ροπή ως προς το σημείο K1, ως προς το K2 και ως προς το K3.
Τί παρατηρείτε;

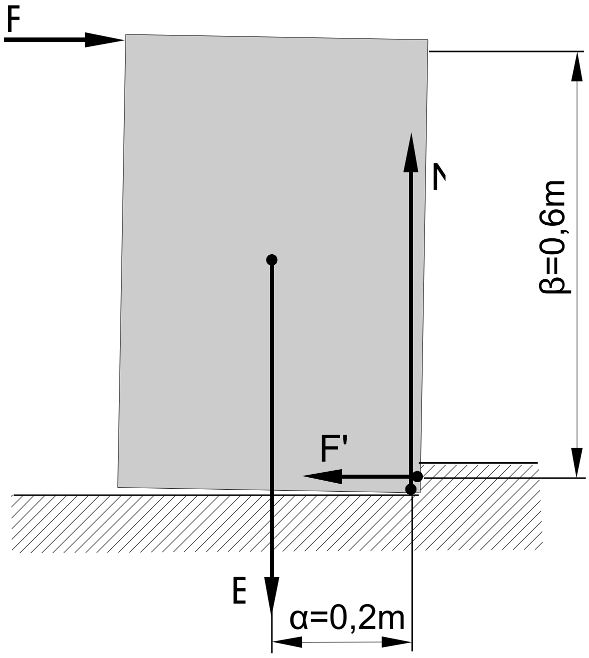


Σχήμα 2.12



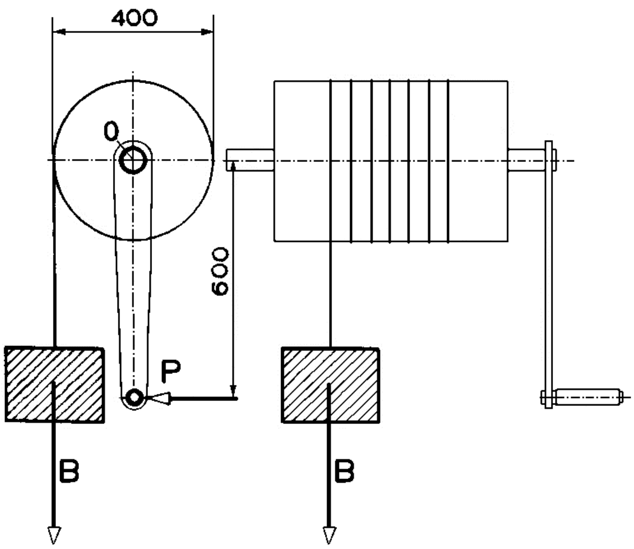
Σχήμα 2.13

2.9 Στην επάνω αριστερή γωνία του κιβωτίου του σχήματος ασκούμε μία δύναμη F και ανασηκώνουμε την κάτω αριστερή του γωνία από το δάπεδο. Παρατηρούμε ότι ισχύει α = 1/3 * β, και γι' αυτό διαλέγουμε την τιμή της δύναμης F ίση με F = 1/3 * B. Αποδεικνύεται ότι στην κάτω δεξιά γωνία του κιβωτίου ασκούνται οι δυνάμεις στήριξης N = B και F' = F.
Δεχόμαστε ότι ισχύει B = N = 600N και F = F' = 200N
Να βρεθούν:
α) Η ροπή του ζεύγους των δυνάμεων B, N κατά μέγεθος και φορά, το ίδιο και του ζεύγους των F, F'.
β) Η συνισταμένη των B, F κατά μέγεθος, κατεύθυνση και σημείο εφαρμογής, το
ίδιο και των δυνάμεων N, F'.
γ) Να ελεγχθεί αν οι δύο συνιστάμενες που βρέθηκαν στην ερώτηση (β) ισορροπούν. (Για να συμβαίνει αυτό πρέπει να είναι ίσες, αντίθετες και συνευθειακές)



Σχήμα 2.14 Δύο ζεύγη δυνάμεων

2.10 Ένας εργάτης περιστρέφει το βαρούλκο του παρακάτω σχήματος με δύναμη P=25kp. Να βρεθούν:
α) Η ροπή που δημιουργείται ως προς το σημείο περιστροφής O.
β) Πόσο βάρος B μπορεί να σηκώσει ο εργάτης με το βαρούλκο.
γ) Πόσο μήκος πρέπει να έχει η χειρολαβή για να σηκώσει βάρος B'=100kp ασκώντας την ίδια κινητήρια δύναμη P=25kp.
δ) Τί βάρος μπορεί να ανυψώσει ο εργάτης αν η χειρολαβή έχει μήκος ίσο με την ακτίνα του βαρούλκου, και ο ίδιος ασκεί στη χειρολαβή την κινητήρια δύναμη P=25kp.



Σχήμα 2.15
Βαρούλκο σε πλάγια όψη και πρόοψη

2.11 Στην οριζόντια θέση του πεδίλου (πεντάλ) του ποδηλάτου του παρακάτω σχήματος ασκείται δύναμη P=20kp.

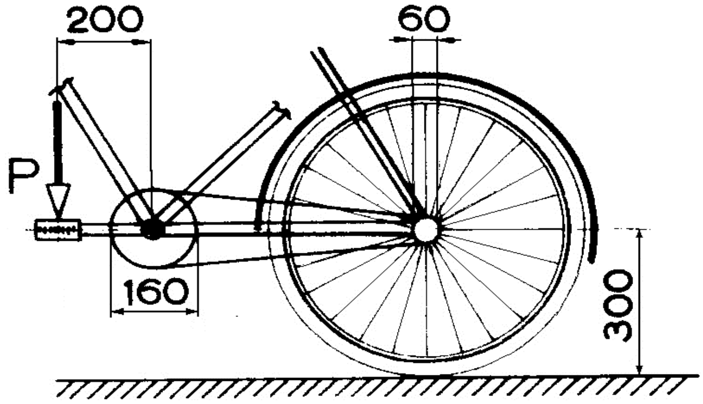
Να βρεθούν:

α) Η ροπή που δημιουργείται ως προς το κέντρο περιστροφής του μεγάλου αλυσοτροχού.

β) Η δύναμη που μεταβιβάζει η αλυσίδα.

γ) Η ροπή στον άξονα του πίσω τροχού.

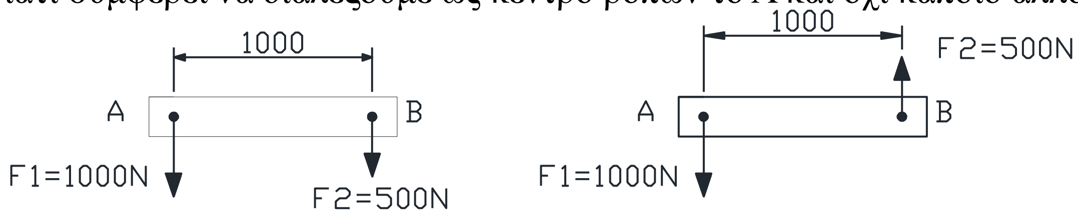
δ) Η δύναμη με την οποία σπρώχνει ο πίσω τροχός το έδαφος.



Σχήμα 2.16 Ποδήλατο

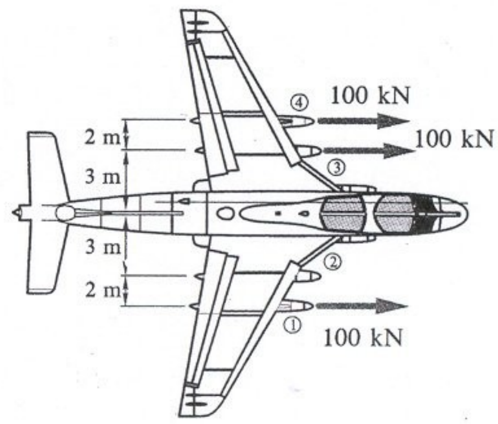
2.12 Να βρεθούν τα σημεία εφαρμογής Ε της συνισταμένης στα παρακάτω σχήματα. (Υπόδειξη: Να σχηματίσετε εξίσωση ροπών ως προς το σημείο Α.

Γιατί συμφέρει να διαλέξουμε ως κέντρο ροπών το Α και όχι κάποιο άλλο σημείο;)



Σχήμα 2.17

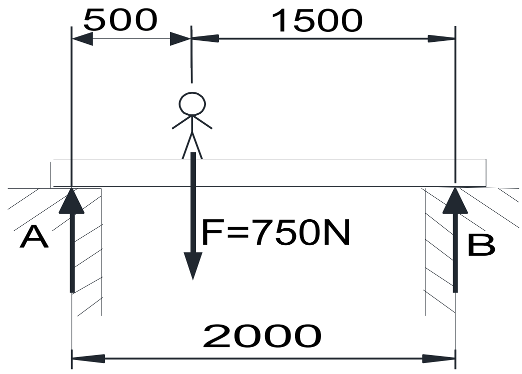
2.13 Το αεροπλάνο του σχήματος κινείται κανονικά με τέσσερεις αεριοστροβίλους, που παράγουν ώθηση 100kN ο καθένας. Αν σταματήσει να λειτουργεί ο αεριοστρόβιλος (2) λόγω βλάβης, ποιά θα είναι η συνισταμένη των ωθήσεων των άλλων τριών αεριοστροβίλων; (Να βρεθεί το μέγεθός της και το σημείο εφαρμογής της).



Σχήμα 2.18

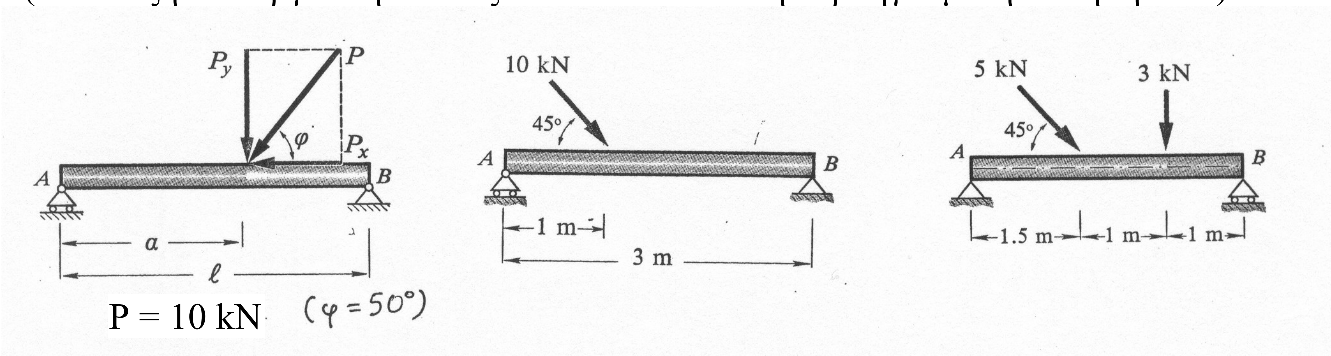
2.14 Ένας άνθρωπος περπατάει πάνω σε ένα σανίδι για να περάσει στην απέναντι πλευρά ενός χαντακιού. Να βρεθούν οι δυνάμεις A και B, στην αριστερή και τη δεξιά αντίστοιχα στήριξη του σανιδιού

(Υπόδειξη: να ξεκινήσετε εξετάζοντας τις ροπές ως προς το σημείο A, οι οποίες πρέπει να έχουν άθροισμα μηδέν).



Σχήμα 2.19 Κατανομή φόρτισης δοκαριού στις στηρίξεις του

2.15 Να υπολογισθεί με πόση κατακόρυφη δύναμη πιέζονται οι στηρίξεις A και B των παρακάτω δοκαριών
(Υπόδειξη: Να εργασθήτε όπως υποδεικνύεται στην προηγούμενη άσκηση 2.14)



Σχήμα 2.20 Κατανομή φόρτισης δοκαριών στις στηρίξεις

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Οι ασκήσεις 2.10, 2.11 έχουν παρθεί από το βιβλίο “Μηχανική” των Γ. Γκρος και Λ. Λαζαρίδη (εκδόσεις Ευγενιδείου Ιδρύματος)