Τίτλος Μαθήματος

ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ
ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΤΕ

ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ

Καθηγητής

Δρ. Μοσχίδης Νικόλαος

ΣΕΡΡΕΣ, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2015

Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.

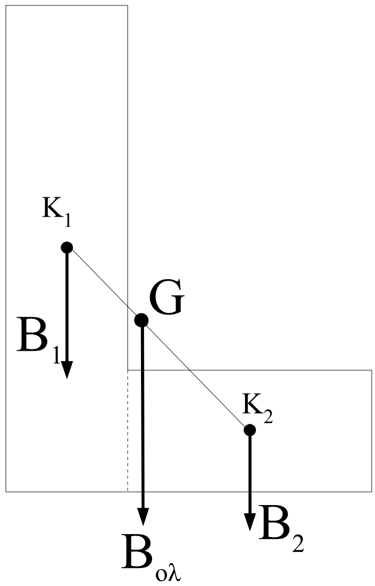
Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Κεντρικής Μακεδονίας**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

5. ΚΕΝΤΡΟ ΒΑΡΟΥΣ

5.1 Η έννοια του κέντρου βάρους

Έστω ότι ένα σώμα αποτελείται από δύο ή περισσότερα μέρη 1, 2 ... με απλό σχήμα, και ότι τα βάρη των μερών του είναι B_1, B_2 ... . Οι δυνάμεις B_1, B_2 ... θα ενεργούν στα σημεία K_1, K_2 ... , και το συνολικό βάρος $B_{ολ}$ θα ενεργεί σε κάποιο σημείο G που είναι **το σημείο εφαρμογής της συνισταμένης των παράλληλων δυνάμεων B_1, B_2 ...** και ονομάζεται **κέντρο βάρους** του σώματος (για συντομία κ.β.).



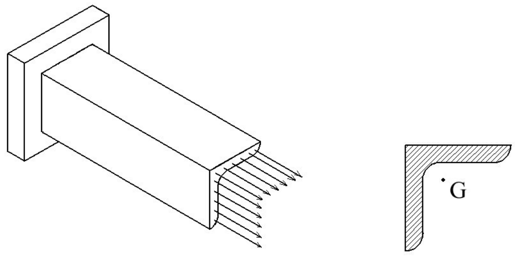
Σχ. 5.1 Η έννοια του κέντρου βάρους

Ο τρόπος εύρεσης του σημείου εφαρμογής της συνισταμένης παράλληλων δυνάμεων αναφέρθηκε στην παράγ. 3.6 (σελ. 6).

Αν το αντικείμενο που εξετάζουμε είναι επίπεδο σχήμα και όχι υλικό σώμα, θα ονομάζουμε "κέντρο βάρους του σχήματος" (ακριβέστερα **γεωμετρικό κέντρο βάρους**) το κ.β. που θα είχε μία λεπτή πλάκα με το ίδιο σχήμα, και με ομοιόμορφο πάχος και ειδικό βάρος.

5.2 Χρήση του κέντρου βάρους σε υπολογισμούς Μηχανικής:

Όπως είναι γνωστό, χρησιμοποιούμε το κ.β. για να ελέγξουμε την ισορροπία ενός σώματος. Υπάρχει όμως και μία δεύτερη χρήση του κ.β.: Αν θέλουμε να επιβάλουμε εφελκυστική δύναμη στο δοκάρι του σχήματος και να πετύχουμε ισομερή κατανομή του φορτίου σε όλη την κάθετη τομή του δοκαριού, πρέπει να φροντίσουμε η εφελκυστική δύναμη να ασκείται στο σημείο G, που είναι το "κέντρο βάρους της κάθετης τομής".



Σχ. 5.2 Χρήση του κ.β. σε υπολογισμούς εφελκυσμού

5.3 Υπολογισμός της θέσης του κέντρου βάρους με τη βοήθεια του συστήματος συντεταγμένων:

Από τον πρακτικό ορισμό του κ.β. που δόθηκε στην παράγ. 6.1, προκύπτουν κάποιοι τύποι με ολοκληρώματα για τον υπολογισμό της θέσης του κ.β.. Στην πράξη όμως για τα απλά σχήματα παίρνουμε έτοιμα τα αποτελέσματα των ολοκληρωμάτων από τον πιν. 5.1 της επόμενης σελίδας. Για τα σύνθετα σχήματα υπολογίζουμε το κ.β. με την εξής διαδικασία:

Βήμα 1: Διαλέγουμε ένα κεντρικό σύστημα συντεταγμένων (π.χ. χΟy)

Βήμα 2: Κόβουμε το σχήμα σε τμήματα με απλό σχήμα, και τους δίνουμε ονόματα (π.χ. 1, 2, 3...)

Βήμα 3: Υπολογίζουμε τα εμβαδά των τμημάτων: A_1, A_2, A_3 ...

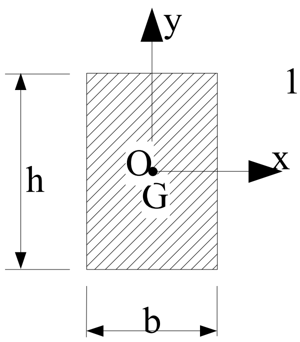
Βήμα 4: Βρίσκουμε από το σχήμα τις συντεταγμένες των κέντρων των τμημάτων: (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) ... . (Πρέπει να υπολογισθούν όλες ως προς το κεντρικό σύστημα συντεταγμένων που διαλέξαμε στο βήμα 1).

Βήμα 5: Εφαρμόζουμε τους τύπους: $x_G = \dfrac{x_1 A_1 + x_2 A_2 + ...}{A_1 + A_2 + ...}$, $y_G = \dfrac{y_1 A_1 + y_2 A_2 + ...}{A_1 + A_2 + ...}$

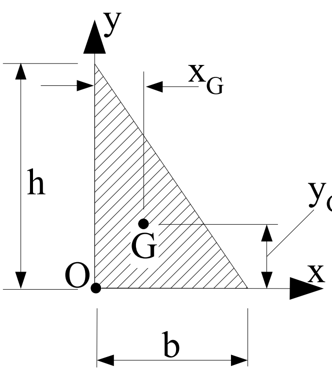
Τα αποτελέσματα x_G, y_G είναι οι συντεταγμένες του γενικού κ.β. ως προς το σύστημα συντεταγμένων που είχαμε διαλέξει στο βήμα 1.

Οι υπολογισμοί διευκολύνονται με τον πίνακα 6.2.(σελ. 36).

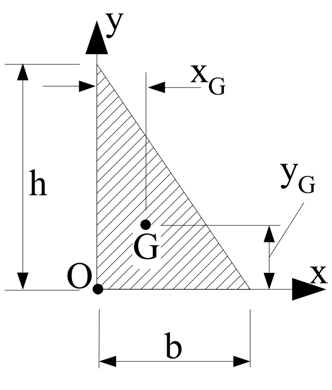
Πίνακας 5.1 Εμβαδά και θέση του κέντρου βάρους επίπεδων σχημάτων



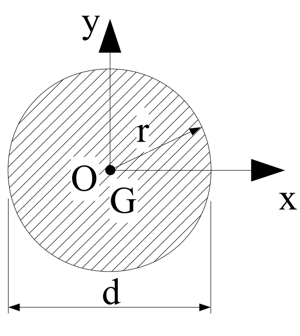
1) Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο
$A = bh$
$x_G = 0$
$y_G = 0$



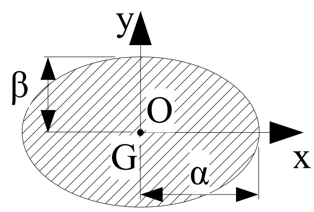
2) Ορθογώνιο τρίγωνο
$A = 1/2\ bh$
$x_G = 1/3\ b$
$y_G = 1/3\ h$



3) Μη ορθογώνιο τρίγωνο
$A = (1/2)bh$
$x_G = (1/3)(b+c)$
$y_G = (1/3)h$

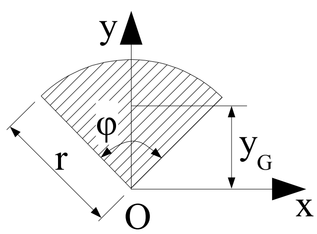


4) Κύκλος
(d=2r)
$A = \pi r^2 [= (\pi/4)d^2]$
$x_G = 0$
$y_G = 0$



5) Έλλειψη
$A = \pi\alpha\beta$
$x_G = 0$
$y_G = 0$

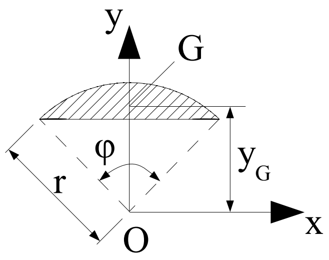
Πινακας 5.1, συνέχεια   Εμβαδά και θέση του κέντρου βάρους επίπεδων σχημάτων



1) Κυκλικός τομέας (y διχοτόμος της φ)

$$A=\frac{r^2\varphi}{2} \qquad (*)$$

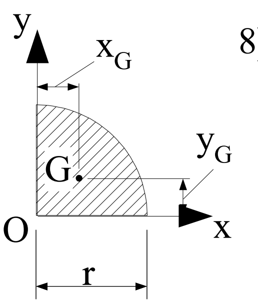
$$x_G=0,\ y_G=\frac{4R}{3\varphi}$$



7) Κυκλικό τμήμα (y διχοτόμος της φ)

$$A=\frac{1}{2}r^2(\varphi-\sin\varphi)$$

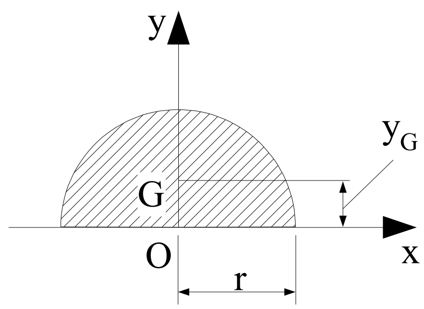
$$x_G=0,\ y_G=\frac{4r}{3}\ \frac{\sin^3\varphi}{\varphi-\sin\varphi}$$



8) Τεταρτημόριο κύκλου

$$A=\frac{r^2\pi}{4}$$

$$x_G=y_G=\frac{4R}{3\pi}$$



9) Ημικύκλιο

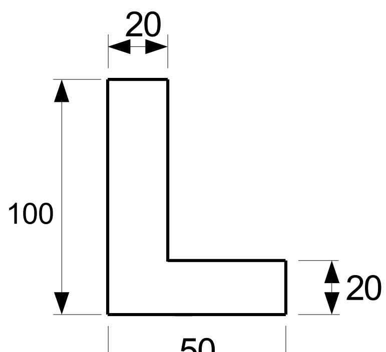
$$A=\frac{r^2\pi}{2}$$

$$x_G = 0$$

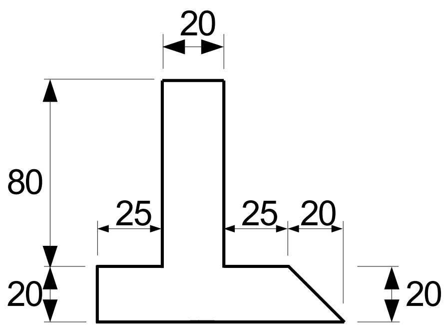
$$y_G=\frac{4R}{3\pi}$$

(*)Όταν $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (ή 90°) και η y διχοτομεί την φ = 90° τότε $A=\frac{r^2\pi}{4}$, $x_G=0$, $y_G=\frac{4r\sqrt{2}}{3\pi}$

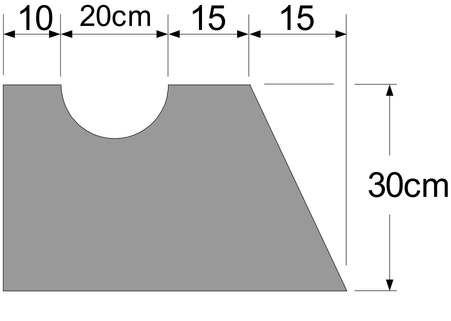
5.4 <u>Άσκηση</u>: Να βρεθούν τα κέντρα βάρους των παρακάτω διατομών :



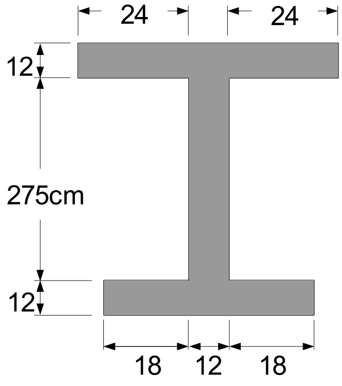
Σχ. 5,3 (α)



Σχ. 5,3 (β)



Σχ. 5,3 (γ)



Σχ. 5,3 (δ)

6. ΡΟΠΕΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ

6.1 Η έννοια της μαζικής ροπής αδράνειας

Γνωρίζουμε ότι η μάζα ενός σώματος δείχνει πόσο καθυστερεί να μεταβληθεί η ταχύτητά του σε ευθύγραμμη κίνηση (**αδράνεια** του σώματος). Όμοια υπάρχει ένα μέγεθος που δείχνει πόσο καθυστερεί να μεταβληθεί η ταχύτητα περιστροφής του σώματος όταν επιβάλλεται σ' αυτό μία ροπή. Το μέγεθος αυτό λέγεται **ροπή αδράνειας** (ή επίσης **μαζική ροπή αδράνειας,** για συντομία ρ.α.) και ισχύουν οι τύποι:

α) Γενικός τύπος της αδράνειας σε περιστροφική κίνηση

$$M = J_m\, \omega' \qquad (6\text{-}1)$$

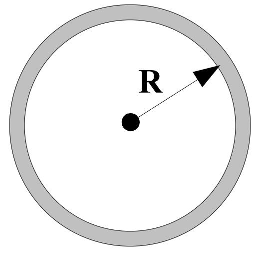
όπου M = η ροπή που ασκείται στο σώμα, J_m = η μαζική ροπή αδράνειας και ω' = η γωνιακή επιτάχυνση σε rad/s²

β) Ροπή αδράνειας λεπτού δακτυλίου με μάζα m και ακτίνα R:

$$J_m = m\, R^2 \qquad (6\text{-}2)$$

γ) Ροπή αδράνειας για σώματα με άλλα σχήματα: χωρίζουμε το σώμα σε λεπτούς δακτυλίους, υπολογίζουμε τις ροπές αδράνειας των δακτυλίων και τις προσθέτουμε όλες μαζί. Δημιουργείται μία παράσταση της μορφής

$$J_m = \Sigma\, m_\iota\, R_\iota^2 \qquad (6\text{-}3)$$



Σχ. 6.1 Λεπτός δακτύλιος ακτίνας R

6.2 Χρησιμότητα και έννοια της γεωμετρικής ροπής αδράνειας

Σε κάποια προβλήματα μηχανικής δημιουργείται η ανάγκη να υπολογίσουμε τη ροπή που δημιουργείται από ένα τριγωνικό κατανεμημένο φορτίο. Το σημαντικότερο παράδειγμα είναι το πρόβλημα της κάμψης, όπως εξηγείται στο παρακάτω σχήμα.

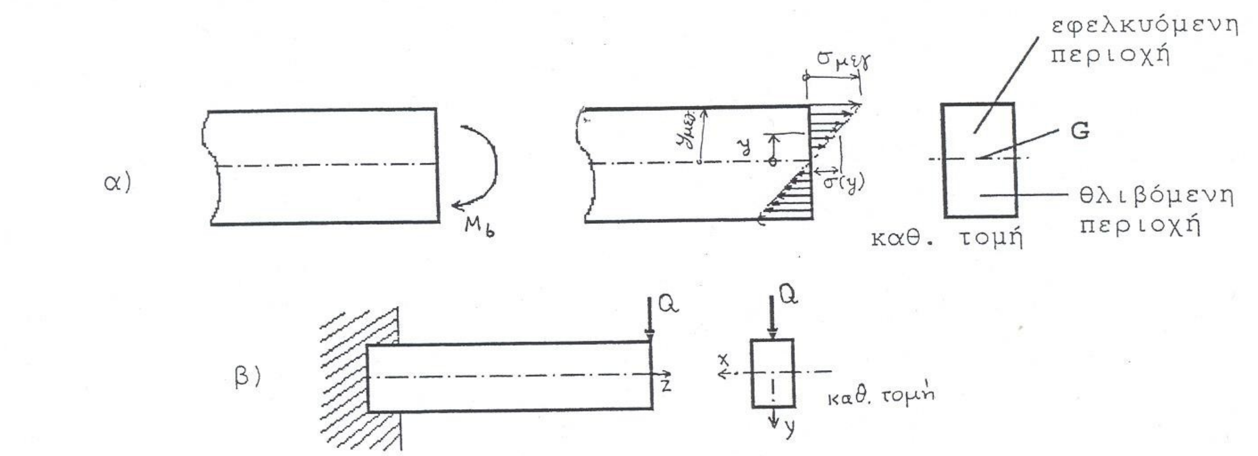
Αποδεικνύεται ότι για να βρούμε τη σχέση ανάμεσα στη ροπή κάμψης M_b και το τριγωνικό φορτίο σ(y) (βλ. σχ. 7.2) πρέπει ενδιάμεσα να υπολογίσουμε μία παράσταση που μοιάζει με το δεξιό μέλος του τύπου (7-3) και λέγεται **γεωμετρική ροπή αδράνειας**. Πιο συγκεκριμένα: Αν στο δοκάρι ασκείται μία ροπή M_b που τείνει να το περιστρέψει γύρω από τον άξονα x, πρέπει για την κάθετη τομή του δοκαριού να υπολογισθεί η παράσταση

$$I_{xx} = \Sigma\, A_\iota\, y_\iota^2 \qquad (6\text{-}4)$$

που είναι η **γεωμετρική ροπή αδράνειας της κάθετης τομής γύρω από τον άξονα x** (συγγενική προς τη μαζική ροπή αδράνειας που θα εμφάνιζε μία λεπτή ομογενής πλάκα με το ίδιο σχήμα αν περιστρεφόταν γύρω από τον άξονα x).

Αντίστοιχα ορίζεται η γεωμετρική ροπή αδράνειας γύρω από τον άξονα y:

$$I_{yy} = \Sigma\, A_\iota\, x_\iota^2 \qquad (6\text{-}5)$$



Σχ. 6.2 Δοκοί που δέχονται κάμψη
α) Κάμψη που προέρχεται από τη ροπή M_b. Εφελκυσμός στο επάνω μισό και θλίψη στο κάτω μισό της δοκού.
β) Κάμψη που προέρχεται από τη δύναμη Q. Θέσεις των αξόνων x, y, z

6.3 Ιδιότητες των ροπών αδράνειας (ρ.α.) και οδηγίες για τον υπολογισμό

- Η τιμή της ρ.α. εξαρτάται από τη θέση του κέντρου περιστροφής ή του άξονα περιστροφής που έχουμε διαλέξει για το σώμα. (Βλέπουμε ότι οι τύποι (6-2) έως (6-5) περιέχουν την απόσταση R από το κέντρο περιστροφής ή τις αποστάσεις y_ι, x_ι από τους άξονες περιστροφής).

- Πρέπει να υπολογίζουμε τις ρ.α. **ως προς άξονες που περνούν από το κέντρο βάρους** της κάθετης τομής του δοκαριού. Αν η κάθετη τομή έχει κάποιον άξονα συμμετρίας, πρέπει να υπολογισθεί η ρ.α. γύρω από αυτόν τον άξονα συμμετρίας και γύρω από τον κάθετό του κεντροβαρικό άξονα.

- Οι τύποι (6.3), (6.4) πρέπει να μετατραπούν σε τύπους με ολοκληρώματα για να μπορέσουν να χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμό ροπών αδράνειας. Στην πράξη όμως μπορούμε να υπολογίσουμε τη ρ.α. για απλά σχήματα με βάση τον πιν. 6.1, ενώ για σύνθετα σχήματα με το “θεώρημα του Steiner”, το οποίο αναφέρεται παρακάτω.

- Η διάσταση που εμφανίζεται στους τύπους των I, W στον πιν. 6.1 να είναι υψωμένη στο τετράγωνο ή στον κύβο, πρέπει να είναι παράλληλη στην εγκάρσια δύναμη Q που προκαλεί την κάμψη.

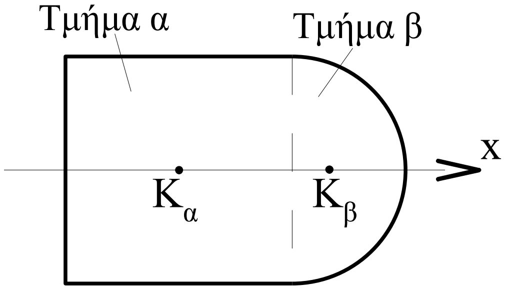
- Αν τα κέντρα βάρους K_α, K_β των μερών ενός σύνθετου σχήματος βρίσκονται στο ίδιο ύψος, τότε και μόνο τότε η ροπή αδράνειας του συνόλου ισούται με το άθροισμα των ροπών αδράνειας των μερών: $I_{ολ} = I_\alpha + I_\beta$
(Η έκφραση “βρίσκονται στο ίδιο ύψος” σημαίνει ότι τα κέντρα βάρους των μερών βρίσκονται και τα δύο πάνω στον άξονα ως προς τον οποίο θα υπολογίσουμε τελικά την ρ.α.)

- Αν τα κέντρα βάρους των μερών της διατομής βρίσκονται σε διαφορετικό ύψος, και με διαφορές ύψους y_α, y_β αντίστοιχα από το γενικό κέντρο βάρους G, τότε: η ροπή αδράνειας του συνόλου ισούται με

$$I_{xx,o\lambda} = I_\alpha + y_\alpha^2 A_\alpha + I_\beta + y_\beta^2 A_\beta \qquad (6\text{-}6)$$

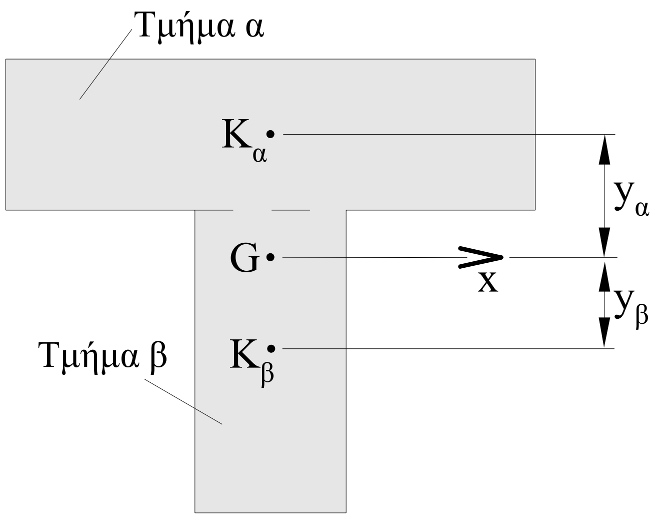
όπου I_α, I_β οι ροπές αδράνειας των μερών ως προς άξονες που περνούν από τα δικά τους κέντρα βάρους και A_α, A_β τα εμβαδά των μερών.

Αυτό είναι το λεγόμενο θεώρημα του Steiner. Η παρουσία των όρων της μορφής $y_\alpha^2 A_\alpha$ στο θεώρημα του Steiner δεν πρέπει να μας παραξενεύει, γιατί ήδη από τον αρχικό της ορισμό (τύπος (6.4)) η ροπή αδράνειας είναι το άθροισμα $\Sigma y_\iota^2 A_\iota$



Σχήμα 6.3

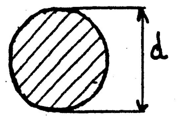
Όταν τα κέντρα των τμημάτων α, β "βρίσκονται στο ίδιο ύψος", τότε $I_{xx,o\lambda} = I_\alpha + I_\beta$



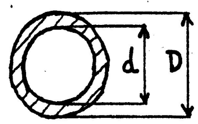
Σχήμα 6.4

Αποστάσεις y_α, y_β για την εφαρμογή του θεωρήματος του Steiner. (βλ. τύπο (7-6)).

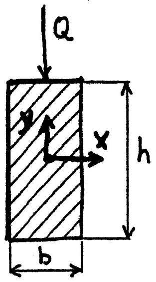
Πίνακας 6.1 Ροπές αδράνειας και άλλα γεωμετρικά στοιχεία
A=εμβαδό διατομής, I_x=ροπή αδράνειας, W_x=ροπή αντίστασης σε κάμψη,
i_{min}=ακτίνα αδράνειας (η μικρότερη ακτίνα, για υπολογισμό λυγισμού)



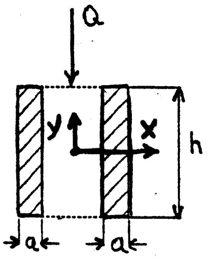
1)
$A=(\pi/4)*d^2 \approx 0,785\ d^2$, $I_x=(\pi/64)*d^4 \approx 0,05\ d^4$
$W=(\pi/32)*d^3 \approx 0,1\ d^3$, $i_{min}=d/4$



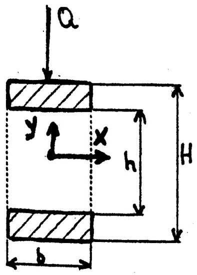
2)
$A \approx 0,785(D^2-d^2)$, $I_x \approx 0,05(D^4-d^4)$
$W \approx 0,1(D^4-d^4)/d$, $i_{min}=\sqrt{D^2+d^2}/4$



3)
$A=b\ h$, $I_x=b\ h^3/12$
$W_x=b\ h^2/6$, Αν $b<h$ τότε $i_{min}=b/\sqrt{12}=b/3,464$

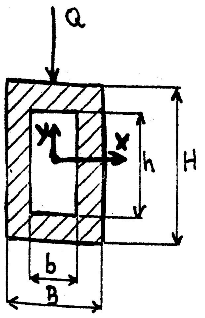


4)
$A=2\ \alpha\ h$, $I_x=2\ \alpha\ h^3/12$
$W_x=2\ \alpha\ h^2/6$, Αν $I_{min}=\min(I_x,I_y)$ τότε $i_{min}=\sqrt{I_{min}/A}$



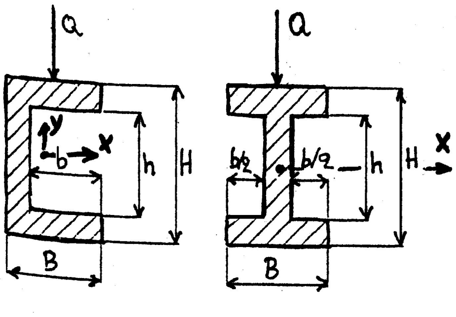
5)
$A=b(H-h)$, $I_x=b(H^3-h^3)/12$

$W_x=\dfrac{b(H^3-h^3)}{6H}$, Αν $I_{min}=\min(I_x,I_y)$ τότε $i_{min}=\sqrt{I_{min}/A}$



6)
$A=BH-bh$, $I_x=(BH^3-bh^3)/12$

$W_x=\dfrac{BH^3-bh^3}{6H}$, Αν $I_{min}=\min(I_x,I_y)$ τότε $i_{min}=\sqrt{I_{min}/A}$



7)
Όπως στην περίπτωση 6 παραπάνω

Πίνακας 6.2 Υπολογισμός του κέντρου βάρους και της ροπής αδράνειας σύνθετης διατομής

i	A_i [mm²]	x_i [mm]	y_i [mm]	$x_i A_i$ [mm³]	$y_i A_i$ [mm³]
1					
2					
3					
...					
Σύνολα		------	------		

Συντεταγμένες του κέντρου βάρους:

$$x_G = \frac{x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots}{A_1 + A_2 + \dots}, \quad y_G = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2 + \dots}{A_1 + A_2 + \dots}$$

i	$I_{xx,i}$ [mm⁴]	y_i-y_G (mm)	$(y_i - y_G)^2 A_i$ [mm⁴]
1			
2			
3			
...			
Σύνολα		-----------	

Ροπή αδράνειας γύρω από τον άξονα x:
$I_{xx,o\lambda} = \Sigma I_{xx,i} + \Sigma (y_i - y_G)^2 A_i$

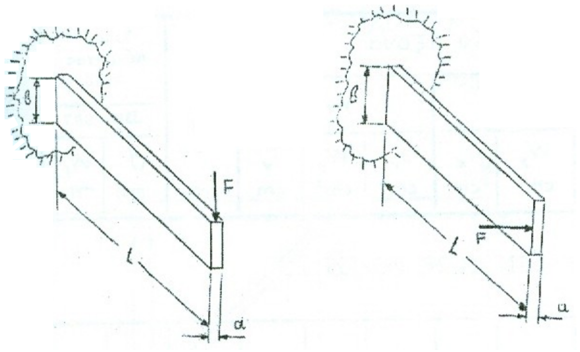
i	$I_{yy,i}$ [mm⁴]	x_i-x_G (mm)	$(x_i - x_G)^2 A_i$ [mm⁴]
1			
2			
3			
...			
Σύνολα		-----------	

Ροπή αδράνειας γύρω από τον άξονα y:
$I_{yy,o\lambda} = \Sigma I_{yy,i} + \Sigma (x_i - x_G)^2 A_i$

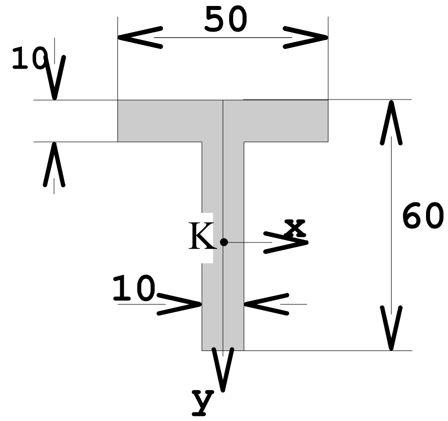
Ασκήσεις κεφαλαίου 6:

6.1 Το δοκάρι του σχήματος στηρίζεται με πάκτωση στο άκρο Α κα φορτίζεται με δύναμη F=1.000N, είτε κατακόρυφη είτε οριζόντια, όπως δείχνει το σχήμα.Οι διαστάσεις του δοκαριού είναι α=10mm, β=100mm, l=1000mm.Να βρεθούν οι ροπές αδρανείας I_{xx} I_{yy} που απαιτούνται για υπολογισμό της κάμψης στις δύο περιπτώσεις.

6.2 Να βρεθούν οι ροπές αδράνειας I_{xx} και I_{yy} της διατομής του σχήματος 6.6, ως προς τους άξονες που περνούν από το γενικό κέντρο βάρους Κ.



Σχήμα 6.5

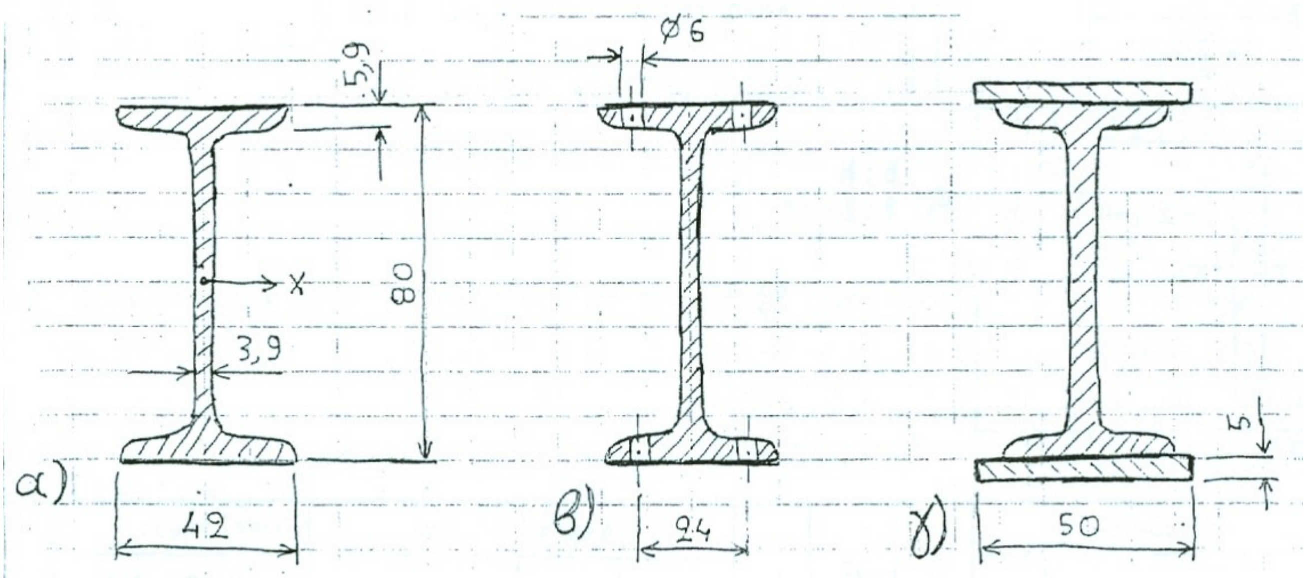


Σχήμα 6.6

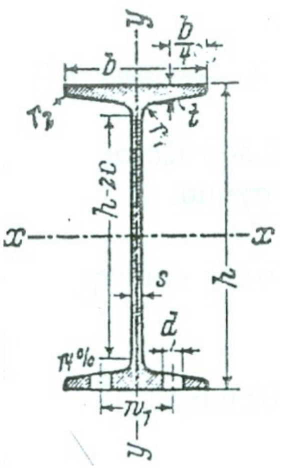
6.3Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η κάθετη τομή σιδηροδοκού τύπου Ι80 κατά DIN 1028-1. Οι βασικές της διαστάσεις είναι αυτές στο σχήμα. Η ροπή αδράνειας της είναι I_{xx} 77,8cm^4= 77.800mm^4.

α) Πόση γίνεται η ροπή αδράνειας αν ανοίξουμε τέσσερις τρύπες Φ6 στα πέλματα όπως στο σχήμα (β);

β) Πόση γίνεται η ροπή αδράνειας αν ενισχύσουμε το δοκάρι με δύο πλάκες, όπως στο σχήμα (γ);

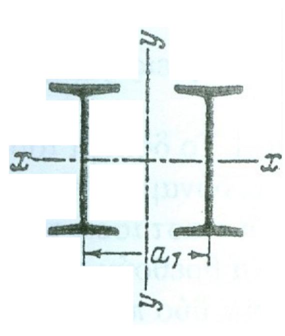


Σχήμα 6.7



Πίνακας 6.3
Δοκάρια σχήματος I κατά DIN 1028-1

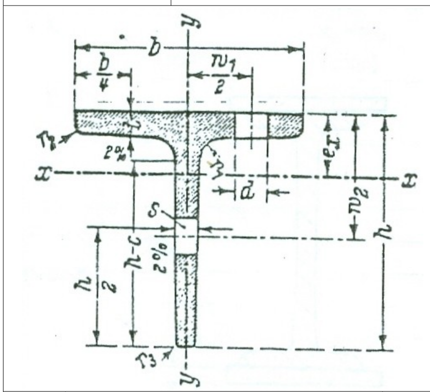
Κανονικά μήκη 4-15 m



α_1 = Απόσταση δύο προφίλ για την οποία η ροπή αδράνειας και για τους δύο άξονες (x-x, y-y) είναι ίσες και μάλιστα ίση με $2J_x$

Τύπος	Διαστάσεις						A	G	Για τον άξονα						α_1 mm	Οπές πέλματος κατά DIN 997		Τύπος
									x-x			y-y						
	h mm	b mm		l mm		h-2c mm	cm^2	kg/m	J_x cm^4	W_x cm^3	I_x cm	J_y cm^4	W_y cm^3	I_y cm		d mm	W_1 mm	
I	Διπλό ταύ προφίλ I – DIN 1028 φύλλο 1.																	**I**
80	80	42	3,9	5,9	2,3	59	7,57	5,94	77,8	19,5	3,20	6,29	3,00	0,91	62	6,4	22	**80**
100	100	50	4,5	6,8	2,7	75	10,6	8,34	171	34,2	4,01	12,2	4,88	1,07	78	6,4	28	**100**
120	120	58	5,1	7,7	3,1	92	14,2	11,1	328	54,7	4,81	21,5	7,41	1,23	94	8,4	32	**120**
140	140	66	5,7	8,6	3,4	109	18,2	14,3	573	81,9	5,61	35,2	10,7	1,40	108	11	34	**140**

Πίνακας 6.4
Δοκάρια σχήματος T κατά DIN 1024



Απλό ταύ ⊥

Κανονικά μήκη 3-12 m

e_x = Απόσταση του κεντροβαρικού άξονα x-x

Τύπος	Διαστάσεις						A	G	e_x	Δια τον άξονα						Οπαί ποδός Κατά DIN 997			Τύπος
	h mm	b mm	s=t = r mm	R mm	R mm	h-c mm	cm	kg/m	cm	x-x J cm	x-x W cm	x-x I cm	y-y J cm	y-y W cm	y-y I cm	d mm	w mm	w mm	
T	Υψίκορμο ⊥ κατά DIN 1024																		**T**
20	20	20	3	1,5	1	13	1,12	0,88	0,58	0,38	0,27	0,53	0,20	0,20	0,42	3,2	—	—	**20**
25	25	25	3,5	2	1	17	1,64	1,29	0,73	0,87	0,49	0,73	0,43	0,34	0,51	3,2	15	14	**25**
30	30	30	4	2	1	21	2,26	1,77	0,85	1,72	0,80	0,87	0,87	0,58	0,62	4,3	17	17	**30**
35	35	35	4,5	2,5	1	25	2,97	2,33	0,99	3,10	1,23	1,04	1,57	0,90	0,73	4,3	19	19	**35**