

**ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ
ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ**

*ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΤΕ*

ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ

Καθηγητής

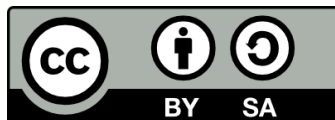
Δρ. Μοσχίδης Νικόλαος

ΣΕΡΡΕΣ, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2015



Άδειες Χρήσης

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons. Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Το έργο αυτό αδειοδοτείται από την Creative Commons Αναφορά Δημιουργού - Παρόμοια Διανομή 4.0 Διεθνές Άδεια. Για να δείτε ένα αντίγραφο της άδειας αυτής, επισκεφτείτε <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.el>.

Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.

Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Κεντρικής Μακεδονίας**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

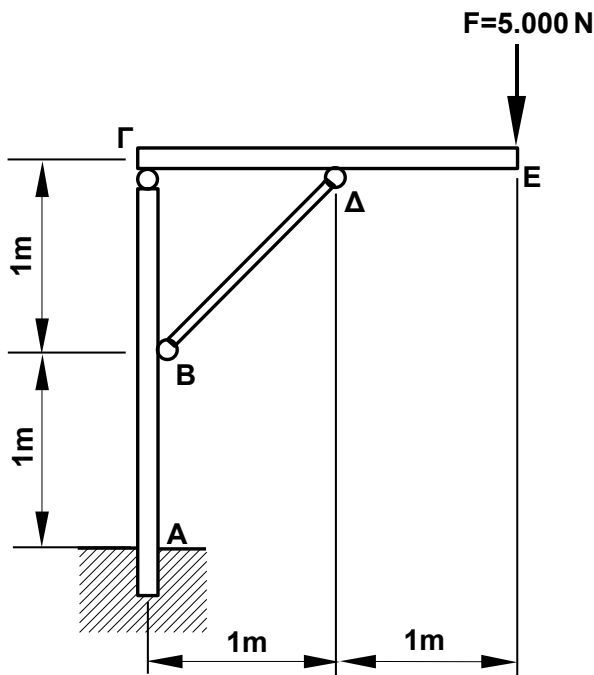


7. ΣΥΝΘΕΤΟΙ ΦΟΡΕΙΣ

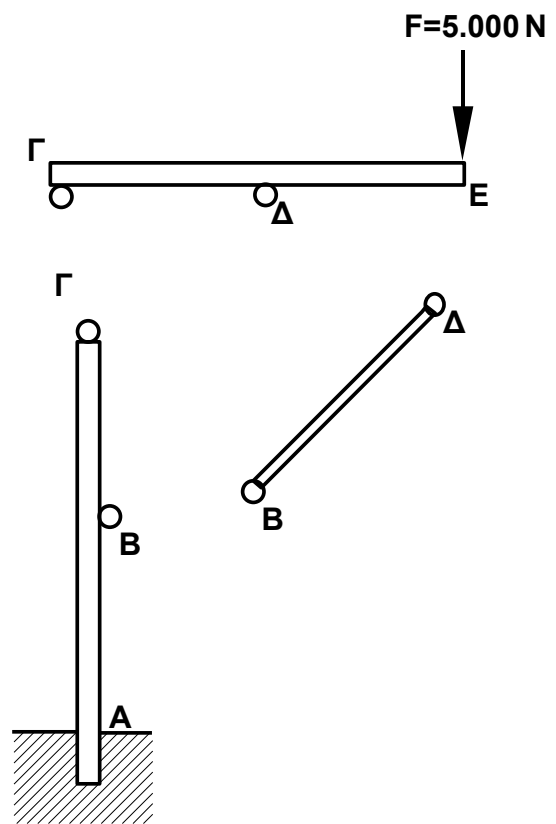
7.1 Ορισμοί

Σύνθετος φορέας λέγεται μία κατασκευή που αποτελείται από πολλά στερεά σώματα συνδεδεμένα μεταξύ τους. (Παράδειγμα σύνθετου φορέα είναι η κατασκευή που παριστάνεται στο σχ. 7.1)

Μέλη του φορέα θα λέγονται τα στερεά σώματα που συναρμολογούνται για να δημιουργήσουν τη συνολική κατασκευή. (Στο παράδειγμα μας, μέλη του φορέα είναι τα ΑΒΓ, ΒΔ, ΓΔΕ βλέπε σχ. 7.2).



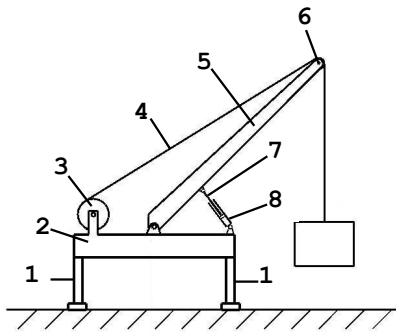
Σχήμα 7.1 Παράδειγμα σύνθετου φορέα



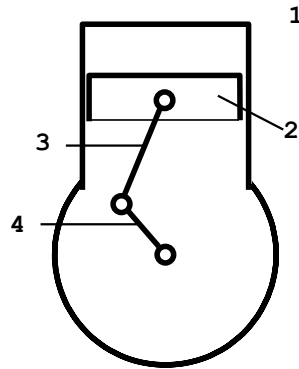
Σχήμα 7.2 Μέλη του φορέα

Εξωτερικές δυνάμεις θα λέγονται οι δυνάμεις που ασκούνται στον σύνθετο φορέα από άλλα σώματα, εκτός των μελών του φορέα και εκτός των στηρίξεων του. (Στο παράδειγμα μας υπάρχει μόνο μία εξωτερική δύναμη, η F. Οι δυνάμεις που ασκούνται από την πάκτωση Α στην κατασκευή θα ονομάζονται όχι εξωτερικές αλλά **φορτία στηρίξης**).

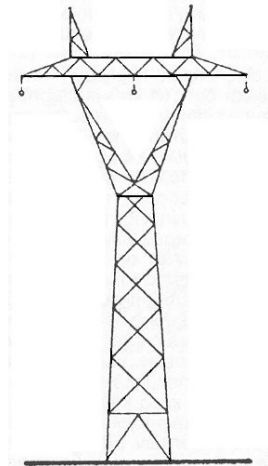
Σύνθετοι φορείς υπάρχουν σε πολλές εφαρμογές, όπως δείχνουν τα παρακάτω σχήματα. Είναι λοιπόν αρκετά συχνή η ανάγκη να υπολογίσουμε τις δυνάμεις που μεταβιβάζονται από ένα μέλος σε άλλο, ώστε να μπορούμε κατόπιν να εκτελέσουμε υπολογισμούς αντοχής.



- α) Γερανός
 1-Πόδια βάσης 2-Βάση
 3-Βαρούλκο 4-Συρματόσχοινο
 5-Βραχίονας 6-Τροχαλία
 7-Εμβολο 8-Κύλινδρος



- β) Μηχανισμός διωστήρα-
 στροφάλου
 1-Κύλινδρος, κέλυφος
 2-Εμβολο, 3-Διωστήρας
 4-Στροφαλοφόρος άξονας



- γ) Πυλώνας υψηλής
 τάσης

Σχήμα 7.3 Παραδείγματα σύνθετων φορέων

Εξωτερικά φορτία θα λέγονται τα φορτία που ασκούνται στον σύνθετο φορέα από άλλα σώματα, εκτός από τα μέλη του ίδιου φορέα και από τις στηρίξεις του στο έδαφος. (Στο παράδειγμα μας υπάρχει μόνο ένα εξωτερικό φορτίο, η δύναμη F).

Τα φορτία (είτε σε σύνθετους, είτε σε απλούς φορείς) μπορεί να είναι διαφόρων ειδών: Δύναμη, Ροπή, Κατανεμημένο φορτίο (δηλαδή δύναμη κατανεμημένη κατά το μήκος γραμμής), Πίεση (δηλαδή δύναμη κατανεμημένη σε επιφάνεια).

Οι μονάδες των φορτίων είναι αυτές που αναφέρονται στον παρακάτω πίνακα:

Είδος φορτίου	Μονάδες
Δύναμη	N, kN, kp
Ροπή	Nm, Nmm, kNm κτλ
Κατανεμημένο φορτίο	N/m, kN/m, kp/m κτλ
Πίεση	N/m ² , N/mm ² , kp/m ² , kp/cm ² , kp/mm ² κτλ

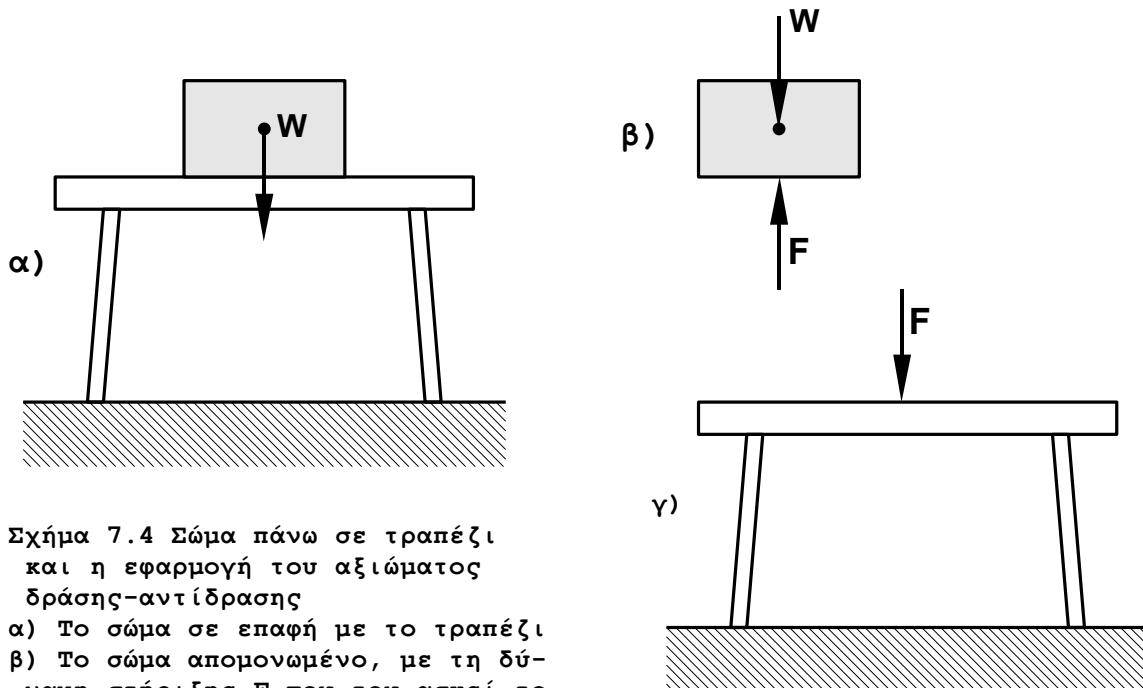
Εξωτερικές στηρίξεις θα ονομάζουμε τις στηρίξεις του φορέα στο έδαφος, ενώ **εσωτερικές στηρίξεις** ή **εσωτερικές συνδέσεις** θα λέγονται οι συνδέσεις των μελών μεταξύ τους. Τα φορτία εξωτερικών στηρίξεων είναι αυτά που μεταβιβάζονται από τον φορέα στο έδαφος και αντίστροφα, ενώ τα φορτία των εσωτερικών συνδέσεων είναι αυτά που μεταβιβάζονται, μέσω των συνδέσεων, από ένα μέλος του φορέα σε άλλο γειτονικό του.

7.2 Αξίωμα δράσης-αντίδρασης

Για να καταγράψουμε σωστά τα φορτία των εσωτερικών συνδέσεων πρέπει να εφαρμόσουμε το

Αξίωμα της Δράσης και της Αντίδρασης: Όταν ένα σώμα A ασκεί σε ένα σώμα B μία δύναμη F , τότε και το σώμα B θα ασκεί στο σώμα A μία άλλη, ίση και αντίθετη δύναμη F .

(Παρατήρηση: Τόσο η αρχική δύναμη F όσο και η αντίδραση της ενεργούν πάνω στο σημείο επαφής των σωμάτων, αν η δύναμη μεταβιβάζεται με επαφή).



Σχήμα 7.4 Σώμα πάνω σε τραπέζι και η εφαρμογή του αξιώματος δράσης-αντίδρασης

- α) Το σώμα σε επαφή με το τραπέζι
β) Το σώμα απομονωμένο, με τη δύναμη στήριξης F που του ασκεί το τραπέζι (W =βάρος σώματος)
γ) Το τραπέζι απομονωμένο, με τη δύναμη F που του ασκεί το σώμα (αντίδραση της F που υπάρχει στο σχήμα (β))

7.3 Ιδιότητες των ράβδων

Για να υπολογίσουμε ευκολότερα τα φορτία των εσωτερικών συνδέσεων πρέπει να εφαρμόσουμε τις ιδιότητες των ράβδων.

Υπενθυμίζεται (βλ. και σελ. 21) ότι **ράβδος** ονομάζεται ένα στερεό σώμα το οποίο -στηρίζεται με αρθρώσεις στα δύο του άκρα (δεν έχει στηρίξεις εσωτερικές ή εξωτερικές σε οποιοδήποτε ενδιάμεσο σημείο)

-και επιπλέον δέχεται μόνο δυνάμεις στα άκρα του (όχι ροπές στα άκρα του, ούτε δυνάμεις ή ροπές σε οποιοδήποτε ενδιάμεσο σημείο).

Αποδεικνύεται ότι για να ισορροπεί η ράβδος πρέπει να δέχεται δυνάμεις στα άκρα της που είναι **παράλληλες με το μήκος της ράβδου**.

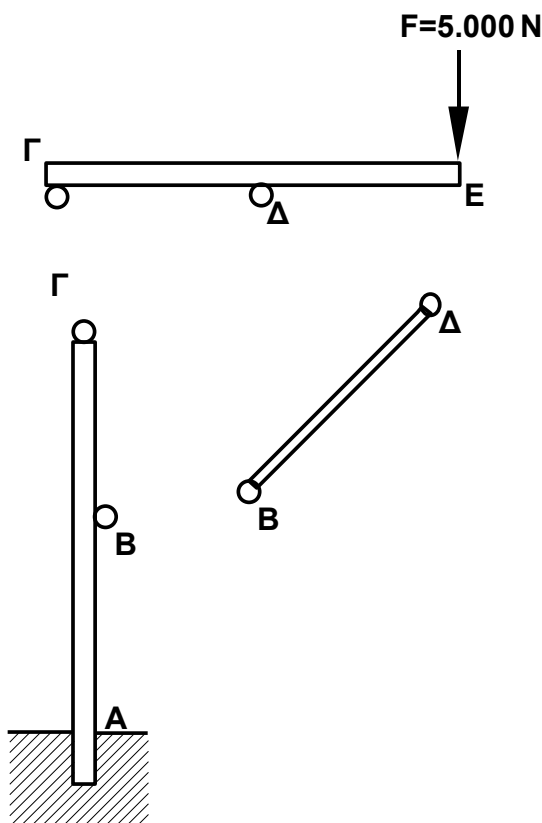
Όποιο μέλος δεν είναι ράβδος, στα επόμενα θα το ονομάζουμε **δοκό**.

7.4 Υπολογιστική διαδικασία

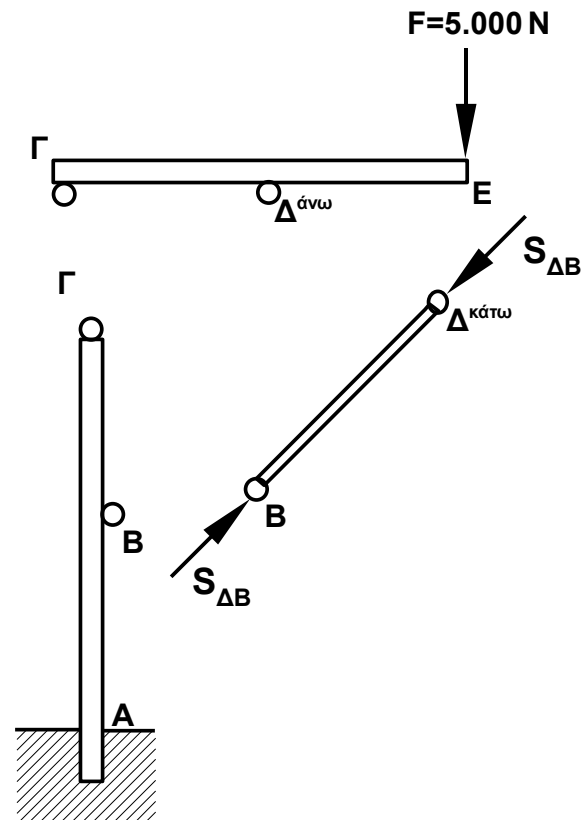
Για να υπολογίσουμε τα φορτία των εσωτερικών και εξωτερικών στηρίξεων ενός σύνθετου φορέα μπορούμε να εφαρμόσουμε την εξής διαδικασία:

* 1. Σχεδιάζουμε τα μέλη του φορέα κάθε ένα ξεχωριστά τοποθετώντας επάνω τους και τα εξωτερικά φορτία (βλ. παρακάτω, σχ. 7.5)

* 2. Βλέπουμε ποια μέλη είναι ράβδοι. Στα άκρα κάθε ράβδου τοποθετούμε δυνάμεις στην κατεύθυνσή της, έτσι ώστε αυτή να ισορροπεί. (Στο παράδειγμά μας ράβδος είναι μόνο το ΒΔ. Τοποθετούμε δυνάμεις όπως στο σχ. 7.6, θλιπτικές για το ΒΔ)



Σχήμα 7.5 Μέλη του σύνθετου φορέα



Σχήμα 7.6 Μέλη του σύνθετου φορέα και δυνάμεις σε ράβδο

*3. (Δημιουργία Διαγράμματος Ελευθέρου Σώματος για μία δοκό του φορέα)

Για ένα από τα υπόλοιπα μέλη του φορέα:

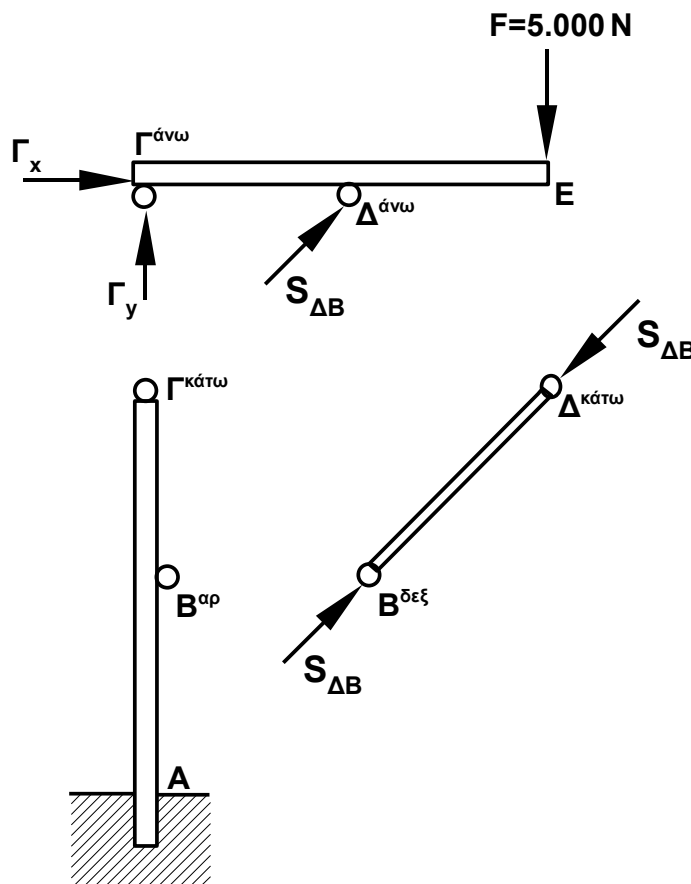
-Βλέπουμε σε ποιες από τις συνδέσεις του βρίσκεται σε επαφή με άλλα μέλη στα οποία ήδη τοποθετήθηκαν δυνάμεις. Σ' αυτές τοποθετούμε δυνάμεις σύμφωνα με το αξίωμα της δράσης και της αντίδρασης.

-Στις υπόλοιπες συνδέσεις και στηρίξεις του μέλους τοποθετούμε τις δυνάμεις που μπορούν να ασκήσουν αυτές οι συνδέσεις και στηρίξεις.

Στο παράδειγμα μας, ας εξετάσουμε τη δοκό ΓΔΕ. Στο σημείο Δ^{άνω} βρίσκεται σε επαφή με τη ράβδο ΒΔ στην οποία ήδη τοποθετήθηκε η S_{ΔΒ}. Τοποθετούμε την αντίδραση της S_{ΔΒ} στο σημείο Δ^{άνω} της δοκού ΓΔΕ.

Κατόπιν τοποθετούμε στην άρθρωση Γ^{άνω} τις δυνάμεις που μπορεί να ασκήσει η άρθρωση, και το συνολικό σχήμα παίρνει την παρακάτω μορφή.

Παρατηρούμε ότι τα μέλη ΒΔ, ΓΔΕ παριστάνονται απομονωμένα από τα γειτονικά τους, αλλά με όλες τις δυνάμεις που επιβάλλονται από το περιβάλλον επάνω τους. Εφόσον τα σχήματα των ΒΔ, ΓΔΕ έχουν αυτά τα χαρακτηριστικά, θα λέγονται **Διαγράμματα Ελευθέρου Σώματος** του ΒΔ και του ΓΔΕ αντίστοιχα.



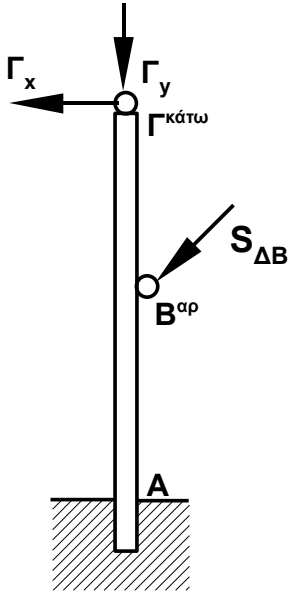
Σχήμα 7.7 Μέλη του σύνθετου φορέα, δυνάμεις στα ΒΔ, ΓΔΕ

* 4. Επαναλαμβάνουμε το βήμα 3 και για άλλα μέλη του φορέα, όσες φορές χρειαστεί μέχρι να εξαντληθούν όλα τα μέλη του φορέα.

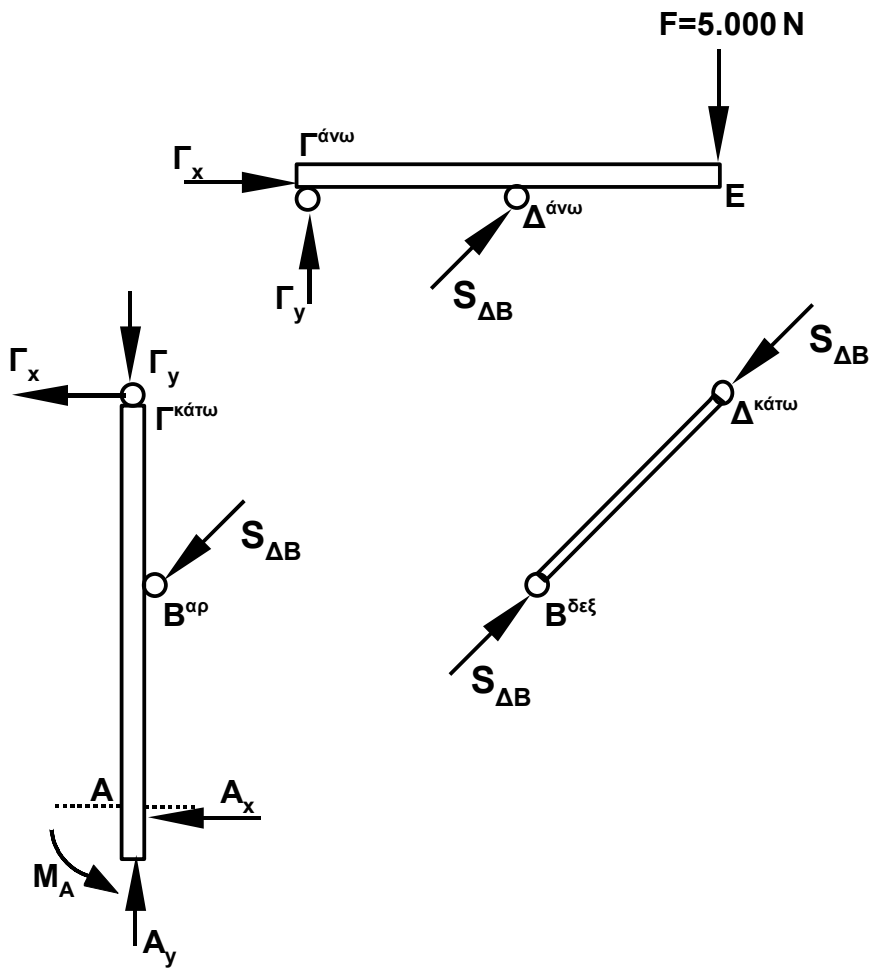
Στο παράδειγμα μας απέμεινε να τοποθετήσουμε δυνάμεις στον πρόβολο ΑΒΓ.

Παρατηρούμε ότι στο σημείο Γ^{κάτω} πρέπει να τοποθετήσουμε τις αντιδράσεις των Γ_x, Γ_y που ήδη υπήρχαν στο Γ^{άνω}. Όμοια στο Β^{αρ} πρέπει να τοποθετήσουμε την αντίδραση της S_{ΑΒ} που ήδη υπήρχε στο Β^{δεξ} (βλ. σχ. 7.8)

Τοποθετούμε στο Α τις δυνάμεις και τη ροπή της πάκτωσης και το συνολικό σχήμα παίρνει τη μορφή του σχ. 7.9.



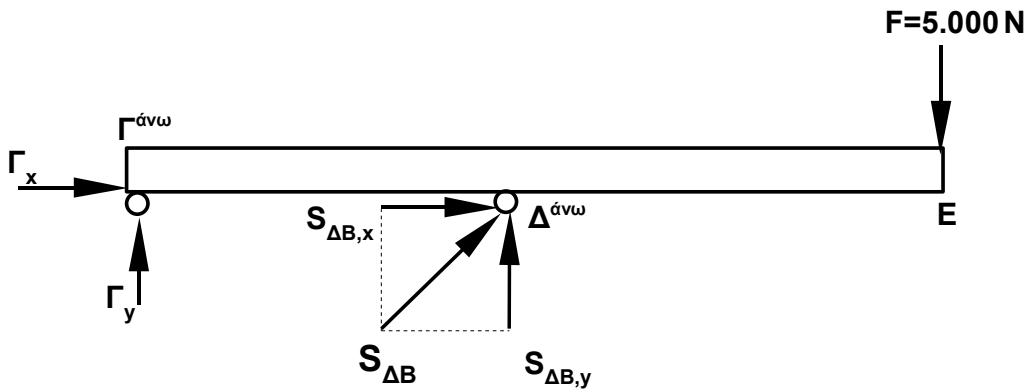
Σχήμα 7.8 Δυνάμεις στο ABΓ: Οι αντιδράσεις των δυνάμεων που είχαν ήδη τοποθετηθεί στο σχ. 8.7



Σχήμα 7.9 Διαγράμματα Ελευθέρου Σώματος όλων των μελών του φορέα

* 5. Σε κάποια δοκό εφαρμόζουμε τις εξισώσεις ισορροπίας για να βρούμε τις άγνωστες που ενεργούν επάνω της. Αρχίζουμε από μία δοκό που έχει μόνο τρεις άγνωστες δυνάμεις (αν υπάρχει τέτοια στον φορέα μας).

Στο παράδειγμα μας, μπορούμε να αρχίσουμε από τη δοκό ΓΔΕ, που έχει μόνο τρεις άγνωστες δυνάμεις, τις Γ_x , Γ_y και $S_{\Delta B}$.



Σχήμα 7.10 Υπολογισμός άγνωστων δυνάμεων στη δοκό ΓΔΕ

$$S_{B\Delta,x} = S_{B\Delta} * \cos 45^\circ, \quad S_{B\Delta,y} = S_{B\Delta} * \sin 45^\circ$$

$$\Sigma M_\Gamma = 0 \Rightarrow (S_{\Delta B} * \sin 45^\circ) * (\Gamma\Delta) - F * (\Gamma E) = 0$$

$$\Rightarrow S_{\Delta B} * \sin 45^\circ = F \frac{(\Gamma E)}{(\Gamma \Delta)} = 5.000\text{N} \frac{2\text{ m}}{1\text{ m}} = 10.000\text{N}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta B} = \frac{10.000\text{N}}{\sin 45^\circ} = 14.140\text{N}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta B} * \cos 45^\circ = 14.140\text{N} * 0.707 = 10.000\text{N}$$

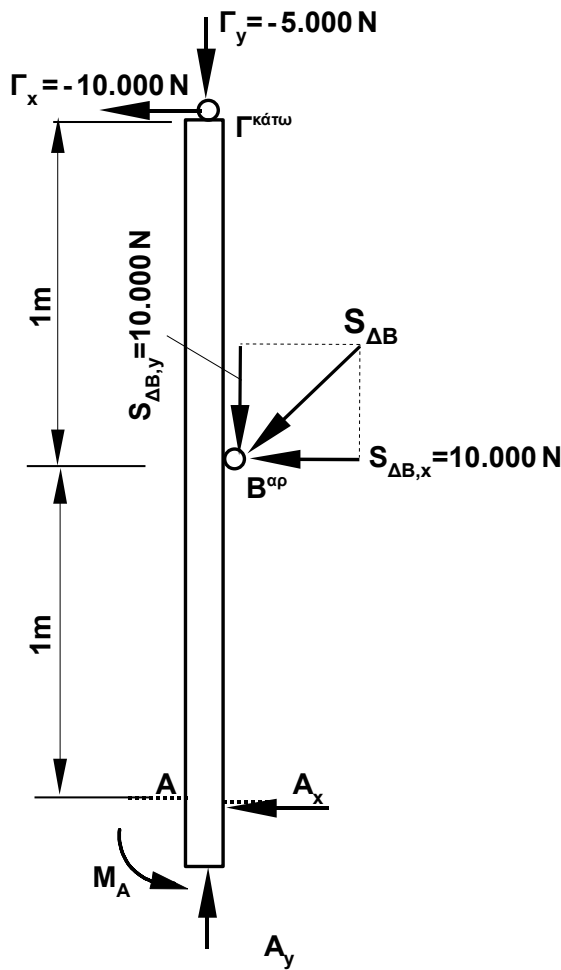
$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow \Gamma_x = -S_{\Delta B} * \cos 45^\circ = -10.000\text{N}$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow \Gamma_y = F - S_{\Delta B} * \sin 45^\circ = 5.000\text{N} - 10.000\text{N} = -5.000\text{N}$$

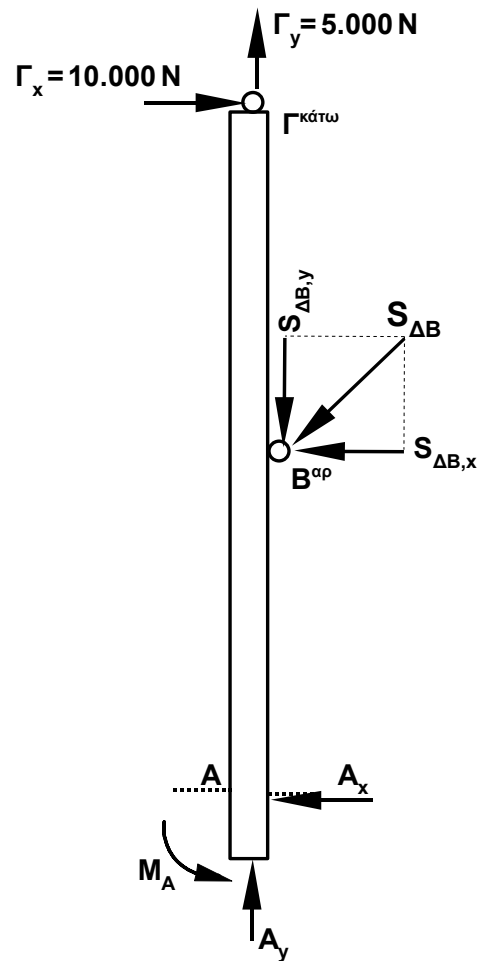
Τα πρόσημα των Γ_x , Γ_y σημαίνουν ότι οι δυνάμεις Γ_x , Γ_y έχουν στην πραγματικότητα αντίθετη φορά απ' αυτήν που φαίνεται στο σχήμα 7.10.

Συνεχίζουμε με την εφαρμογή των εξισώσεων ισορροπίας στην άλλη δοκό του φορέα, την ΑΒΓ. Οι δυνάμεις Γ_x , Γ_y , $S_{\Delta B}$ που υπήρχαν ως άγνωστες στο σχήμα 7.9

τώρα είναι γνωστές από τους υπολογισμούς στο σχήμα 7.10. Άρα η δοκός ABΓ παίρνει τη μορφή ενός από τα παρακάτω σχήματα.



Σχήμα 7.11 Διάγραμμα Ελευθέρου Σώματος της δοκού ABΓ



Σχήμα 7.12 Διάγραμμα Ελευθέρου Σώματος της δοκού ABΓ, με τις πραγματικές φορές των δυνάμεων (αριθμητικές τιμές των δυνάμεων θετικές)

Εφαρμόζουμε τις εξισώσεις ισορροπίας στο σχήμα 7.12 και υπολογίζουμε τα A_x , A_y , M_A :

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Gamma_x - S_{\Delta B} \cdot \cos 45^\circ - A_x = 0 \Rightarrow A_x = \Gamma_x - S_{\Delta B} \cdot \cos 45^\circ = 10.000\text{N} - 10.000\text{N} = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_y - S_{\Delta B} \cdot \sin 45^\circ + \Gamma_y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_y = S_{\Delta B} \cdot \sin 45^\circ - \Gamma_y = 10.000\text{N} - 5.000\text{N} = 5.000\text{N}$$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow M_A + (S_{\Delta B} \cdot \cos 45^\circ) \cdot (AB) - \Gamma_x \cdot (A\Gamma) = 0$$

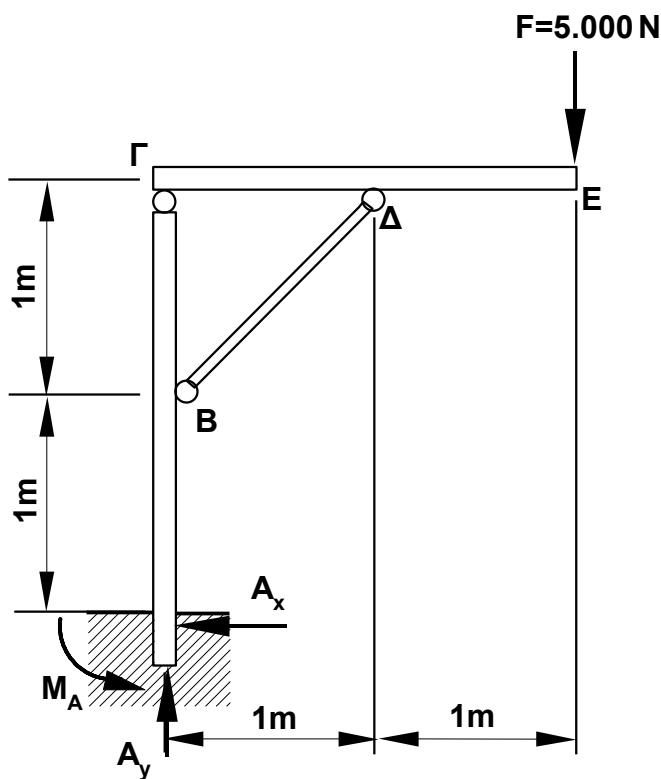
$$\Rightarrow M_A = -(S_{\Delta B} \cdot \cos 45^\circ) \cdot (AB) + \Gamma_X \cdot (A\Gamma) = -10.000\text{N} \cdot 1\text{m} + 10.000\text{N} \cdot 2\text{m} = 10.000\text{ Nm}$$

Παρατηρήσεις:

- 1) Στους παραπάνω υπολογισμούς (σχ. 7.10, 7.12) δεν περιλαμβάνονται οι εξισώσεις ισορροπίας για τη ράβδο ΒΔ. Αυτό συμβαίνει διότι οι δύο ίσες και αντίθετες δυνάμεις που τοποθετήθηκαν στα άκρα της ράβδου ΒΔ (βλέπε σχ. 7.7) εξασφαλίζουν αυτομάτως την ισορροπία της.
- 2) Οι δυνάμεις και η ροπή στην πάκτωση μπορούν επίσης να υπολογισθούν με βάση το παρακάτω σχήμα 7.13, δηλαδή με βάση τις εξισώσεις ισορροπίας για ολόκληρο τον φορέα.

(Αποδεικνύεται ότι ισχύει ο κανόνας:

- Εάν χωρίσουμε μία κατασκευή σε τμήματα $T_1, T_2, T_3 \dots$ και τοποθετήσουμε τις δυνάμεις στις συνδέσεις των τμημάτων,
 - επίσης εάν οι δυνάμεις στις συνδέσεις υπακούν στο αξίωμα δράσης-αντίδρασης
 - και επιπλέον εάν για κάθε ένα από τα τμήματα $T_1, T_2, T_3, T \dots$ ισχύουν οι εξισώσεις ισορροπίας $\Sigma F_x, \Sigma F_y$, και $\Sigma M=0$
- τότε θα ισχύουν οι εξισώσεις ισορροπίας και για κάθε συναρμολόγηση μερικών ή όλων των τμημάτων $T_1, T_2, T_3 \dots$)



Σχήμα 7.13 Διάγραμμα ελευθέρου σώματος ολόκληρου του σύνθετου φορέα

Εφαρμόζουμε λοιπόν τις εξισώσεις ισορροπίας για ολόκληρο τον φορέα και έχουμε:

$$\Sigma F_X = 0 \Rightarrow A_X = 0$$

$$\Sigma F_Y = 0 \Rightarrow A_Y - F = 0 \Rightarrow A_Y = F_Y = 5.000\text{N}$$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow M_A - F * (\Gamma E) = 0 \Rightarrow M_A = F * (\Gamma E) = 5.000\text{N} * 2\text{m} = 10.000\text{Nm}$$

Αυτός ο υπολογισμός παρακάμπτει την ανάλυση του φορέα σε τμήματα (σχεδίαση του σχ. 7.11) και τον υπολογισμό των Γ_x , Γ_y , $S_{\Delta B}$. Είναι λοιπόν πολύ συντομότερος και ασφαλέστερος (αποφεύγει τον κίνδυνο κάποιου λάθους στο σχ. 7.9 ή στα Γ_x , Γ_y , $S_{\Delta B}$). Είναι επομένως προτιμότερος.

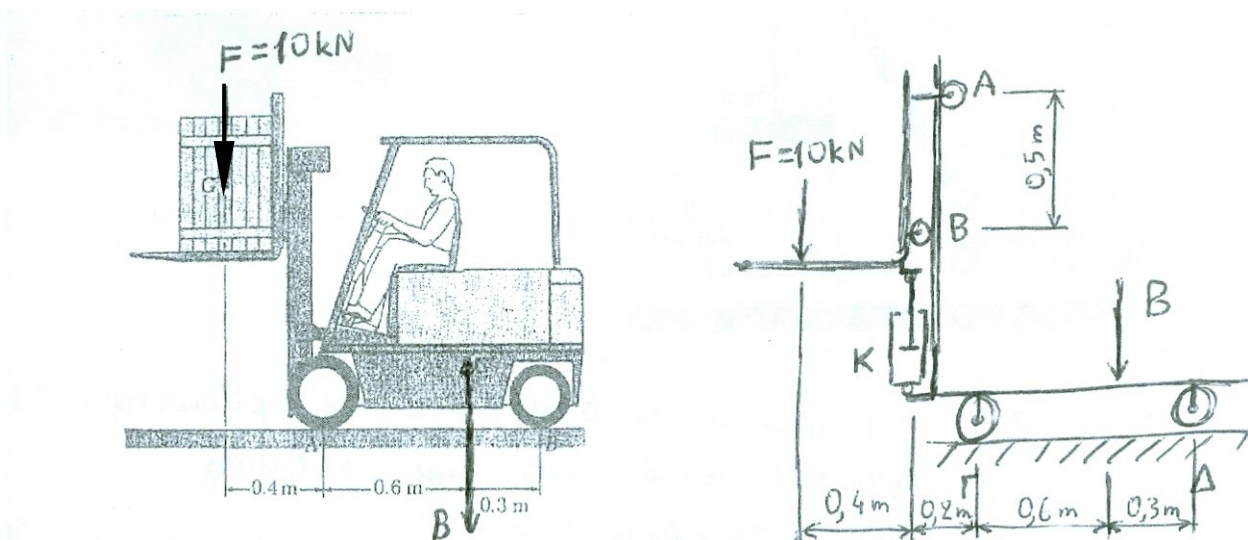
Ασκήσεις κεφαλαίου 7

7.1 Για το περνοφόρο ανυψωτικό του σχήματος να βρεθούν:

α) Πόσο πρέπει να είναι το ίδιο βάρος του οχήματος Β ώστε να μπορεί να σηκώνει φορτίο F χωρίς να ανατρέπεται.

β) Οι δυνάμεις στους τροχούς Α, β των περονών και η δύναμη που ασκεί ο υδραυλικός κύλινδρος για ανύψωση του φορτίου (κύλινδρος Κ).

γ) Οι δυνάμεις στους τροχούς εδάφους του οχήματος Γ, Δ.



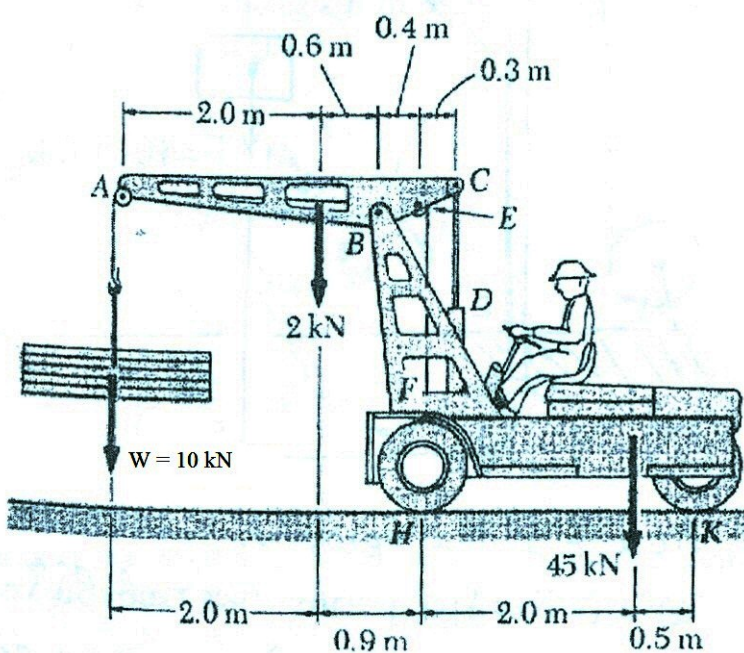
7.2 Ο τροχοφόρος γερανός του σχήματος ανυψώνει το φορτίο με δύο τρόπους: με αλλαγή της κλίσης του βραχίονα ABC, αλλά και με συρματόσχοινο που έλκεται στη διαδρομή φορτίο-A-E-F (στα A, E υπάρχουν τροχαλίες, ενώ στο F υπάρχει βαρούλκο που τυλίγει το συρματόσχοινο).

Ζητούνται:

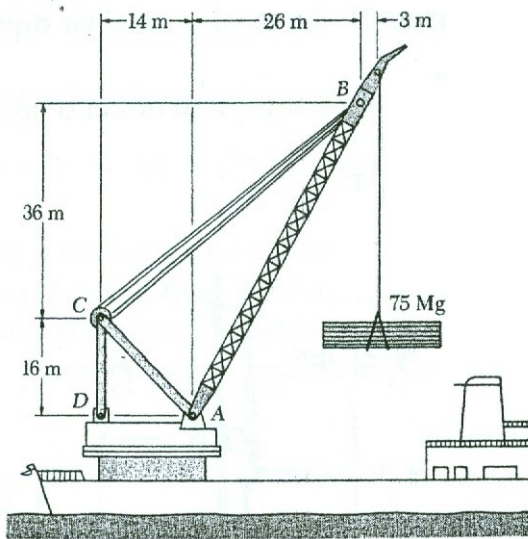
α) Αν μπορεί ο γερανός να σηκώσει το φορτίο W χωρίς να ανατραπεί.

β) Η δύναμη που μεταβιβάζεται μέσω της άρθρωσης B (ποιο το μέτρο της και η κατεύθυνσή της), και η δύναμη που ασκεί ο υδραυλικός κύλινδρος CD για να ανυψώσει το βραχίονα.

γ) Οι δυνάμεις στους τροχούς εδάφους H, K.



7.3 Να βρεθούν οι δυνάμεις στις αρθρώσεις A, B, C, D κατά μέτρο και διεύθυνση.



7.4 Να βρεθούν:

- Οι δυνάμεις που μεταβιβάζονται από τους άξονες των τροχαλιών στην οριζόντια δοκό AB (κατά μέτρο και διεύθυνση)
- Οι δυνάμεις στις εσωτερικές αρθρώσεις Γ, Δ, Ζ
- Τα φορτία στην πάκτωση E.

